גירסה 1.00 – 9.10.2002

שאלות באלגברה מודרנית – חלק שלישי

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

מסמך זה הוא השלישי בסדרת מסמכים הבאים להציג לקורא שאלות ופתרונות בנושאים באלגברה מודרנית. רוב התיאוריה איננה נמצאת בדפים אלו. ניתן להוריד את המשפטים אליהם מסתמכים התרגילים באתר http://underwar.livedns.co.il.
נושאים המכוסים במסמך זה: תמורות והומומורפיזמים בין חבורות.

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

<u>תמורות</u>

<u>תרגיל</u>

א. מצא $a \in S_6$ כך ש $a^{-1}(1\ \ 2)(3\ \ 4)a = (5\ \ 6)(1\ \ 3)$.

ב. הראה כי לא קיימת $a \in S_8$ כך ש $a^{-1}(1\ \ 2\ \ 3)a = (1\ \ 3)(5\ \ 7\ \ 8)$.

<u>פתרון</u>

א.

$$a^{-1}(1\ \ 2)(3\ \ 4)a \underset{?}{=} (5\ \ 6)(1\ \ 3)$$

$$a^{-1}(1\ \ 2)(3\ \ 4)a = \big(a(1)\ \ a(2)\big)\big(a(3)\ \ a(4)\big) \underset{?}{=} (5\ \ 6)(1\ \ 3)$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

OR

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ב.

$$a^{-1}(1\ \ 2\ \ 3)a \underset{?}{=} (1\ \ 3)(5\ \ 7\ \ 8)$$

$$a^{-1}(1\ \ 2\ \ 3)a = \big(a(1)\ \ a(2)\ \ a(3)\big)$$

אנו יכולים לקבל מעגל באורך 3. כידוע, הצמדה שומרת על מבנה המעגל, ולכן לא יתכן שיווצרו שני מעגלים ממעגל אחד שהיה לפני ההצמדה.

<u>תרגיל</u>

נתונה הגדרה חלקית של תמורה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & ? & ? & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$$

וידוע כי התמורה היא זוגית.
חשב את $\sigma(4)$ ואת $\sigma(5)$.

<u>פתרון</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & ? & ? & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(6\ 7\ 8\ 9)(?\ ?)$$

המעגל $(1\ 3\ 2)$ הוא זוגי, המעגל $(6\ 7\ 8\ 9)$ הוא אי זוגי. על מנת לקבל תמורה זוגי, אנו צריכים להוסיף עוד מעגל אי זוגי ולכן:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(6\ 7\ 8\ 9)(4\ 5)$$

ולכן התשובה:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma(4) = 5 \\ \sigma(5) = 4 \end{array}}$$

<u>תרגיל</u>

תהי $\sigma \in S_9$ מסדר 5. עבור כמה $1 \le k \le 9$ מתקיים $\sigma(k)=k$?

<u>פתרון</u>

$\sigma \in S_9$ ניתנת לכתיבה בתור מעגל של 5. בלי הגבלת הכלליות נסמן את האיברים שנמצאים במעגל בתור $1,2,3,4,5$. (אם בתמורה כלשהי אלו מספרים אחרים, נכנה את האיברים השונים בשמות חדשים, ולכן הדוגמא הבאה היא הוכחה למקרה הכללי).

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ישנם ארבעה איברים עבורם מתקיים } \sigma(k)=k.}$

<u>הומומורפיזם בין חבורות</u>

<u>תרגיל</u>

יהיו G,G' חבורות, $\varphi: G \to G'$ הומומורפיזם.
הוכח: $o(\varphi(a)) \mid o(a)$, לכל $a \in G$.

פתרון:
נסמן: $o(a)=n \Leftarrow a^n=e$

$$\left(\varphi(a)\right)^n \underset{\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)}{=} \varphi(a^n)=\varphi(e)=e' \Rightarrow o(\varphi(a)) \mid n$$

<u>תרגיל</u>

יהי $f: G \to G'$ הומומורפיזם לא טריוויאלי. הוכח:

I. אם $|G|$ ראשוני, אזי f חח"ע.

<u>פתרון</u>

נתון: $|G|$ ראשוני.
צ"ל: $f(a)=f(b) \Leftrightarrow a=b$.
נסמן: $|G| \equiv p$.
$|G|$ ראשוני, כלומר בין היתר גדול מ1, ולכן ישנם לפחות שני איברים $a,b \in G$.
כמו כן נשתמש במסקנה ממשפט לגרנג': אם $|G|$ חבורה מסדר ראשוני, אזי G ציקלית וכל איבר בה הוא היוצר.
נניח בשלילה שקיימים a,b כך ש $f(a)=f(b)$ אבל $a \neq b$.
אזי $f(a)=f(b)=c$, $c \in G'$.
מהגדרת ההומומורפיזם: $f(ab)=f(a)f(b)$.

$$f(ab)=f(a)f(b)=f(a)f(a)=f(a^2)=f(b^2)$$

בצורה דומה:

$$f(a^2)f(a)=f(b^2)f(a)=f(b^2)f(b) \Rightarrow f(a^3)=f(b^3)$$

ניתן להמשיך הלאה: $f(a^4)=f(b^4),\ f(a^5)=f(b^5), \ldots$ עד שנגיע לסדר של a (שידוע לפי המסקנה ממשפט לגרנג' שהוא p: $f(a^p)=f(b^p)$. בזאת סיימנו, מכיוון שגם a וגם b הם יוצרים של החבורה, ועברנו כעת על כל אברי החבורה.
אם $a \neq b$, אזי גם $a^2 \neq b^2$ (כי הסדר של a ושל b הוא p ולכן יתקיים שוויון רק כאשר נגיע לאיברים $a^p=b^p=e$). וכן: $a^3 \neq a^4$ וכך הלאה.
מכאן שישנם $2p-1$ איברים בחבורה, בסתירה לנתון האומר שישנם p איברים בחבורה, ולכן בהכרח $f(a)=f(b) \Leftrightarrow a=b$.

II. אם $|G'|$ ראשוני, אזי f על.

<u>פתרון</u>

מהנתון, נובע לפי משפט כי G' היא ציקלית, מכיוון שהיא גם סופית, כל איבר בה הוא יוצר. יהי $g \in G$.

$$f(g) \in \mathrm{Im}(t), \quad < f(g) >= G'$$
$$f(g) = g_1 \in G'$$
$$< g_1 >= G' = \left\{ g_1, g_1^{\ 2}, g_1^{\ 3}, ..., g_1^{\ p} \right\}$$
$$g_1^{\ 2} \in G' = g_1 \cdot g_1 = f(g) \cdot f(g) = f(g^2)$$

In the same way:

$$g_1^{\ 3} \in G' = g_1 \cdot g_1 \cdot g_1 = f(g) \cdot f(g) \cdot f(g) = f(g^3)$$

...

$$g_1^{\ p} \in G' = \underbrace{g_1 \cdot g_1 \cdot ... \cdot g_1}_{\text{p times}} = \underbrace{f(g) \cdot f(g) \cdot ... \cdot f(g)}_{\text{p times}} = f(g^p)$$

<u>תרגיל</u>

נגדיר פונקציה $\psi_a : G \to G'$ כאשר $a \in G$, על ידי $\psi_a(g) = aga^{-1}$. הוכיחו כי ψ הומומורפיזם ח.ח.ע. ועל.

<u>פתרון</u>

נוכיח ראשית כי ψ_a הינה הומומורפיזם.

צ"ל: $\psi_a(ab) = \psi_a(a)\psi_a(b)$

נטפל תחילה במקרה הטריוויאלי, שבו G מכילה רק איבר אחד.

אזי: $\psi_a(e) = eee^{-1} = e'$ כאשר e' הוא איבר היחידה בחבורה אליה הפונקציה ψ_a מעבירה.

מתקיים: $\psi_a(e \cdot e) = e' = e' \cdot e' = \psi_a(e)\psi_a(e)$

מכיוון שG מכילה רק איבר אחד, ברור כי היא ח.ח.ע.

קבוצת התמונות היא לכל היותר בגודל של קבוצת המקורות, כלומר בגודל 1. ידוע כי האיבר האדיש שייך לתמונה, ולכן הוא האיבר היחיד בתמונה. ולכן במקרה זה ψ_a הינה על.

נניח כעת כי G מכילה את האיבר האדיש ואיבר נוסף x. נראה מיד כי על G להכיל איבר נוסף - ההופכי של x, שיסומן x^{-1}, וזאת מכיוון ש-G חבורה $\Leftarrow$ ההופכי של כל איבר שייך אף הוא לחבורה. אם האיבר $a \in G$ הינו האיבר האדיש, הרי ש ψ_a היא הומומורפיזם הזהות, שידוע שהינו חד חד ערכי ועל.

אחרת, נבדוק שאכן ψ_a הינה הומומורפיזם. ידוע שקיימים 3 איברים לפחות: x,x^{-1} וכן האדיש. בשלב זה נוכל להכליל ולדבר על חבורה בת יותר מ3 איברים, כי הוכחנו את המקרים של החבורות בעלות פחות מ3 איברים. נראה אם מתקיים $\psi_a(xy)=\psi_a(x)\psi_a(y)$.

$$\psi_a(xy)=axya^{-1},\ \ \psi_a(x)=axa^{-1},\ \ \psi_a(y)=aya^{-1}$$

$$\psi_a(x)\cdot\psi_a(y)=\left(axa^{-1}\right)\cdot\left(aya^{-1}\right)=ax\left(a^{-1}a\right)ya^{-1}=axya^{-1}=\psi_a(xy)$$

מכאן כי ψ_a הינה הומומורפיזם גם עבור חבורות המכילות יותר מאיבר אחד.

נוכיח כי ψ_a הינה ח.ח.ע.

צ"ל: $\psi_a(x)=\psi_a(y)\Leftrightarrow x=y$

$$\psi_a(x)=axa^{-1},\ \ \psi_a(y)=aya^{-1}$$

$$\psi_a(x)\underset{?}{=}\psi_a(y)$$

$$\cdot a^{-1}\left|axa^{-1}\underset{?}{=}aya^{-1}\right|\cdot a\ \Rightarrow\ x=y$$

ומכאן $\psi_a(x)=\psi_a(y)\Leftrightarrow x=y$.

נוכיח כי ψ_a הינה על. ראשית נטען כי $G'=G$, וזאת מכיוון ש $\psi_a(g)=aga^{-1}$, וידוע כי $a,g,a^{-1}\in G$ ומטעמי סגירות בחבורות, גם מכפלתם בG.

יהי k איבר ב G'. נבדוק האם יש לו מקור:

$$\cdot a^{-1}\left|aga^{-1}\underset{?}{=}k\right|\cdot a$$

$$g=a^{-1}ka\in G$$

ולכן לכל k קיים איבר ב-G המשמש לו כמקור. $\boxed{\psi_a(a^{-1}ka)=k}$. ולכן הפונקציה על.