גירסה 1.00 – 23.4.2004

חדוו"א 1מ – סדרות ומושגי יסוד

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

מושגי יסוד

קבוצות של מספרים

1. $\mathbb{N}$ - קבוצת המספרים הטבעיים. מספר שלם וחיובי נקרא **מספר טבעי**.
2. $\mathbb{Z}$ - קבוצת כל **המספרים השלמים**.
3. $\mathbb{Q}$ - קבוצת הרציונליים. מספר הניתן לייצוג כמנה של מספרים שלמים הינו **מספר רציונלי**.
4. $\mathbb{R}$ - בנוסף למספרים הרציונליים קיימים מספרים אי רציונליים כגון $\sqrt{2}$. קבוצת המספרים הרציונליים והאי רציונליים הינה קבוצת **המספרים הממשיים**.

קבוצה היא ישות המורכבת מאוסף אלמנטים המכונים **איברי הקבוצה**. קבוצות מסומנות לרוב על ידי אותיות אנגליות גדולות, ואיברים בקבוצה מסומנים על ידי אותיות קטנות. אם a הוא איבר השייך לקבוצה A, נאמר כי a הוא איבר של A ונסמן $a \in A$. אם b אינו איבר של A נסמן $b \notin A$.
קבוצה נגדיר על ידי ציון האיברים בה בין סוגריים מסולסלות, למשל $\{1,2,3\}$ או על ידי תכונה, למשל $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

לכל שני מספרים ממשיים, a,b, נגדיר את הקבוצות הבאות (בה"כ $a < b$):

1. **קטע פתוח**: $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$
2. **קטע סגור**: $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$
3. **קטעים חצי פתוחים חצי סגורים**: $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}, (a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$.

קבוצות אלו מתאימות **לקטעים סופיים** של הישר הממשי.

קבוצות המתאימות **לקטעים אינסופיים**: $(a,\infty) = \{x \mid a < x\}, (-\infty,a] = \{x \mid x \le a\}$.

ערך מוחלט

הגדרה 1: יהא $x \in \mathbb{R}$. **הערך המוחלט** של x יסומן $|x|$ ויוגדר כך: $|x|$ הוא המרחק בין x ל- 0.

הגדרה 2: **הערך המוחלט** של x הינו: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

הגדרה 3: נגדיר את **המרחק** בין a ל- b להיות $|b-a|$.

טענה 1: יהא $a \in \mathbb{R}$, כך ש- $a > 0$, אזי $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a$.

טענה 2: יהא $a \in \mathbb{R}$, כך ש- $a > 0$, אזי $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ או $x \leq -a$.

הוכחת הטענות: על ידי חלוקה למקרים - $x \geq 0$ ו- $x < 0$, ושימוש בהגדרת הערך המוחלט.

חסמים של קבוצות

הגדרה 1: קבוצת מספרים ממשיים K נקראת **חסומה מלעיל** אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x \in K$ מתקיים $M \geq x$. המספר M נקרא **חסם מלעיל** של K.

הגדרה 2: קבוצת מספרים ממשיים K נקראת **חסומה מלרע** אם קיים מספר ממשי m כך שלכל $x \in K$ מתקיים $m \leq x$. המספר m נקרא **חסם מלרע** של K.

הגדרה 3: נאמר שקבוצת מספרים K היא **חסומה** אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

הגדרה 4: מספר ממשי S נקרא **הסופרמום** של K (או **החסם העליון** של K) אם הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של K. נסמן: $S = \sup K$. אם המספר S שייך לקבוצה K אז הוא **המקסימום** של K, ונרשום $S = \max K$.

הגדרה 5: מספר ממשי I נקרא **האינפימום** של K (או **החסם התחתון** של K) אם הוא החסם מלרע הגדול ביותר של K. נסמן: $I = \inf K$. אם המספר I שייך לקבוצה K אז הוא **המינימום** של K, ונרשום $I = \min K$.

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה קיים סופרמום.

טענה 1: תהי A קבוצה חסומה מלעיל שאין לה מקסימום, ויהי S הסופרמום שלה. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים איבר של הקבוצה במרווח $(S-\varepsilon, S)$.

מספרים רציונליים בין המספרים הממשיים

טענה בלא הוכחה: בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונלי.

הגדרה 1: יהי $x \in \mathbb{R}$. **הערך השלם** של x יוגדר להיות המספר השלם הקרוב ביותר ל- x, הקטן או שווה ממנו. סימון הערך השלם $[x]$ או $\lfloor x \rfloor$.

אי שיוויונים

- **אי שוויון המשולש**: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. מתקיים: $|x+y| \le |x|+|y|$.

  הוכחה: ידוע כי $-|x| \le x \le |x|$ וגם $-|y| \le y \le |y|$. נחבר את המשוואות ונקבל את המבוקש.

- **אי שוויון המשולש השני**: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. מתקיים: $|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$.

  סקיצה להוכחה: בהוכחה נדרוש: $-|x-y| \le \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$.

  כיוון אחד: $|x| = |x-y+y| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$

  ועל ידי העברת אגפים נקבל: $|x|-|y| \le |x-y|$.

- **אי שוויון הממוצעים**: לכל n מספרים ממשיים חיוביים $x_1, x_2, \dots, x_n$ מתקיים:

  $$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

  השוויון מתקבל כאשר $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

  הממוצע החשבוני: $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

  הממוצע ההנדסי: $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

  הממוצע ההרמוני: $\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}$

- $\frac{an}{1+an} \le \sqrt[n]{a} \le \frac{a+n}{n}$

- $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. ההוכחה על ידי הוצאת $\sqrt[n]{\ }$ משני האגפים ושימוש באי שוויון הממוצעים.

- **אי שוויון ברנולי:** $(1+a)^n \geq 1+na$
- $\frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
- $\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

טכניקות שימושיות ותזכורות מהתיכון

- **הכפלה בצמוד**: כאשר יש בידינו ביטוי מהצורה $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, נכפיל אותו ב"צמוד" שלו, שהוא $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. השורשים במונה יצטמצמו.
- **הסרת ערך מוחלט**: כאשר יש ערך מוחלט על מכפלת איברים, ניתן להוריד את הערך המוחלט מהמכפלה, ולשים ערך מוחלט על כל אחד מהגורמים, כלומר $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$.
- **הגדלת שבר**: על ידי הגדלת המונה והקטנת המכנה נקבל שבר גדול יותר מהשבר המקורי. במידה ואנחנו צריכים להעריך משהו, לעתים נגדיל שבר נתון כדי לקבל ביטוי שנוח יותר לעבוד עימו.
- **המשפט על הניחוש האינטליגנטי**: יהי פולינום p(x) שכל מקדמיו שלמים. אם קיים שורש רציונלי מהצורה $\frac{p}{q}$, כאשר p,q הם זרים, אז מתקיים כי $p|a_0, q|a_n$.

סדרות

הגדרת סדרה, סדרות חסומות, סדרות מונוטוניות

הגדרה

הגדרה 1: **סדרה** של מספרים ממשיים היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. כל $n\in\mathbb{N}$ מותאם מספר ממשי $a_n=f\left(n\right)$ שנקרא **האיבר ה-n-י** של הסדרה. סדרה מסומנת בקיצור בצורה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

סדרות ידועות

1. **הסדרה ההרמונית**: הסידרה $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...$ נקראת הסדרה ההרמונית. נוסחת האיבר הכללי של הסדרה היא: $a_n=\frac{1}{n}$.
2. **הסדרה ההרמונית המתחלפת**: $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n},...$. האיבר הכללי: $a_n=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}$.
3. **סדרה הנדסית**: יהיו $a,q\in\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה על ידי $a_n=aq^{n-1}$.
4. **סדרה חשבונית**: יהיו $a,d\in\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה על ידי $a_n=a+d\left(n-1\right)$.
5. **סדרה קבועה**: לכל n, מתקיים $a_n=c$.

סדרות חסומות

הגדרה 2: נאמר שהסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר M כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\le M$.

כל מספר M כזה נקרא **חסם מלעיל** של הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

הגדרה 3: נאמר שהסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים מספר m כזה שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n\ge m$. כל מספר m כזה נקרא **חסם מלרע** של הסדרה.

הגדרה 4: נאמר שהסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה. באופן שקול: הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם קיים מספר M כזה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$. ניתן גם להגיד כי הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה בערך מוחלט** על ידי M. כל מספר M כזה נקרא **חסם מוחלט** של הסדרה.

סדרות מונוטוניות

הגדרה 5: סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל n מתקיים $a_n \le a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא **מונוטונית עולה ממש** אם לכל n מתקיים $a_n < a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא **מונוטונית יורדת** אם לכל n מתקיים $a_n \ge a_{n+1}$. הסדרה היא **מונוטונית יורדת ממש** אם לכל n מתקיים $a_n > a_{n+1}$.

הגדרה 6: נאמר שהסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

גבול של סדרה

הגדרה 1: לכל מספר ממשי x_0 ולכל $\varepsilon > 0$ ממשי, הקטע הפתוח $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ נקרא **ε-סביבה** של x_0, או פשוט **סביבה** של x_0.

הגדרה 2: תהי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. נאמר שהמספר L הוא **הגבול** של הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ לכל $n \ge n_0$. במילים אחרות: לכל $\varepsilon > 0$ קיים לכל היותר מספר סופי של איברי הסדרה שאינו בסביבה $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. נסמן: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

אם לסדרה יש גבול אז נאמר כי היא **מתכנסת**. אם לסדרה אין גבול אז נאמר שהסדרה **מתבדרת**.

אלגוריתם למציאת n_0 בהינתן Σ: נתחיל עם השיוויון $|a_n - L| < \varepsilon$ ונבצע פעולות כדי לבודד את n בצד אחד של המשוואה.

תכונות של גבולות

טענה 1: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה.

טענה 2: לסדרה יכול להיות רק גבול אחד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ אז $L_1 = L_2$.

<u>דרך ההוכחה</u>: נניח שהסידרה מתכנסת לשני גבולות שונים, ונראה כי החל מ- n מסוים כל האיברים נמצאים בסביבת כל אחד מהגבולות. נבחר ε כזה כך שהגבולות לא יחפפו.

טענה 3: שינוי או הסרה של מספר סופי של איברים בסדרה אינו משנה את הגבול.

אריתמטיקה של גבולות

פעולות עם סדרות:

1. **חיבור**: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. **כפל**: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
3. **כפל בסקלר**: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
4. **חילוק**: אם $b_n \neq 0$ לכל n, אזי $\frac{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

משפט: יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1, \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, אזי:

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$
3. $\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot L$

משפט: תהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{c, c, c, c, \ldots\}$ סדרה קבועה. אזי $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

למה: נניח שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ונניח ש- $L \neq 0$, אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כל ש- $a_n \neq 0$ לכל $n > n_0$.

מסקנה: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם $L \neq 0$ אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שעבור $n > n_0$ מתקיים $|a_n| > \left|\frac{L}{2}\right|$.

משפט: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם $L \neq 0$, אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$.

מסקנה: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1, \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ וגם $L_2 \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$.

משפט: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם $L > 0$, אזי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$, $a_n > 0$.

משפט: נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם $L > 0$, אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

משפט: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

משפט: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1, \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ ואם $a_n \le b_n$ לכל n אז $L_1 \le L_2$.

סקיצה להוכחה: נניח בשלילה כי $L_2 < L_1$. נראה כי החל מ- n מסוים כל איברי הסביבה נמצאים ב- ε-סביבה של הגבול. נבחר ε כזה כך שהסביבות יהיו זרות. (למשל: $\frac{L_1 - L_2}{2}$).

משפט הסנדוויץ': נניח ש: $a_n \le b_n \le c_n$ ונניח שהגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

גבולות במובן הרב

הגדרה: נתונה הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נרצה להגדיר את הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

נאמר ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אם לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שעבור $n > n_0$ מתקיים $a_n > m$.

שימוש במשפט: מתחילים מ- $a_n > m$. עושים פעולות ומוצאים את n_0 כתלות ב- m.

גבולות של סדרות מונוטוניות

משפט: תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ונניח ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. אז קיים L כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. כמו כן $L = \sup(a_n)$.

טענה: תהא A קבוצה חסומה. M הוא הסופרמום של A אמ"מ:

1. $a \le M$ לכל $a \in A$.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a_0 \in A$ כך ש: $a_0 > M - \varepsilon$.

משפט: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

משפט: תהי הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. סידרה זו היא מונוטונית עולה וחסומה על ידי 3.

טענה: $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

תתי סדרות

הגדרה: תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. יהיו $k_1 < k_2 < \ldots$ סדרה אינסופית של מספרים טבעיים. תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מהצורה $\left(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\right)$. סימון: a_{n_k}, a_{k_n}.

משפט 1: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז לכל תת סדרה של a_n יש גבול שהוא L.

שימוש: אם נמצא שתי תתי סדרות של סדרה מסיומת שיש להן גבול שונה, הרי שלסדרה אין גבול.

משפט בולצנו-ויישטרס: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

משפט: לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית.