גירסה 1.00 - 5.9.2002

רענון מתמטיקה

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

מסמך זה מציג מספר נקודות מנושאי מתמטיקה תיכונית, שמומלץ לחזור עליהן לפני התחלת הלימודים במוסד להשכלה גבוהה.

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

פולינומים

פולינום מוגדר בצורה הבאה:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0$$

כאשר a_i הם מספרים כלשהם, מקדמי הפולינום.

ה-n הגבוה ביותר עבורו יתקיים כי a_n שונה מ0, יקרא מעלת הפולינום.

שורש של פולינום הוא מספר x_9, כך שיתקיים כי $p(x_0) = 0$.

חלוקת פולינומים

טענה: אם $p(x), g(x)$ הם פולינומים כלשהם, אז ניתן למצוא פולינום $q(x)$ שנכנה אותו המנה ופולינום $r(x)$ שנכנהו השארית, כך שיתקיים:

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

וכך ש $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ או $r(x) = 0$.

אם $r(x) = 0$ אזי נאמר כי הפולינום $g(x)$ מחלק את הפולינום $p(x)$ ונסמן: $g(x) \mid p(x)$.

משוואה ריבועית, x1, x2 נתונים:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x - x_1 \mid p(x)$$

$$x - x_2 \mid p(x)$$

ניתן להכליל משפט זה לכל n.

המשפט היסודי של האלגברה:

לפולינום ממעלה n יש n שורשים. ניתן להשוות בין המקדמים של שני פולינומים. אם הפולינומים שווים, גם המקדמים שווים.

נוסחאות וייטה לכל פולינום:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

הגדרת מספר רציונלי:

מספר ממשי נקרא רציונלי אם ניתן לכתוב אותו כמנה של שני מספרים שלמים זרים זה לזה (כלומר שני מספרים שאין להם אף גורם משותף).

טענה: $\sqrt{2}$ הוא מספר אי רציונלי.
הוכחה בדרך השלילה.

נניח כי $\sqrt{2}$ רציונלי, אזי ניתן לרשום אותו בצורה $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, כאשר p, q זרים זה לזה. נעלה את שני האגפים בריבוע: $2=\frac{p^2}{q^2}$ ומכאן: $p^2=2q^2$, כלומר p^2 זוגי וגם p זוגי. אם p זוגי, אזי $p=2m$. נציב במשוואה: $4m^2=2q^2$, ומכאן $2m^2=q^2$, כלומר גם q הוא זוגי, וזאת בסתירה להנחה כי p, q הם זרים. ומכאן $\sqrt{2}$ הוא מספר אי רציונלי.

המשפט על הניחוש האינטיליגנטי:

קיים p(x) שכל מקדמיו שלמים. אם קיים שורש רציונלי מהצורה $\frac{p}{q}$, p וq זרים,
אזי:

$$\begin{cases} p \mid a_0 \\ q \mid a_n \end{cases}$$

פיתוח פולינום לטור טיילור סביב נקודה x_0 כלשהי:

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)^1+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$$

and then:

$$(a\le k\le n),\ \ a_k=\frac{p_{x_0}^{(k)}}{k!}$$

שורשים עם ריבוי

x_0 הוא שורש של פולינום p(x) מריבוי k אם

$$\begin{cases} (x-x_0)^k \mid p(x) \\ (x-x_0)^{k+1} \nmid p(x) \end{cases}$$

משפט:
יהי p(x) פולינום, אזי x_0 שורש שלו ריבוי k אם ורק אם:

$$\begin{cases} p(x_0)=0 \\ p'(x_0)=0 \\ p''(x_0)=0 \\ \ldots \\ p^{(k-1)}(x_0)=0 \\ p^{(k)}(x_0)\ne 0 \end{cases}$$

פירוק לשברים חלקיים:

בהינתן שבר, שהוא פולינום חלקי פולינום, כך שהמכנה מתפרק לגורמים ליניאריים שונים ומעלה המונה קטנה ממעלת המכנה, ניתן לפרקו לשברים חלקיים.

דוגמא: נרצה לפרק את $\frac{2x+1}{x^2-3x-4}$ לשברים חלקיים.

$$\frac{2x+1}{x^2-3x-4}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}$$

$$2x+1=A(x+1)+B(x-4)$$
$$2x+1=x(A+b)+A-4B$$
$$A+B=2$$
$$A-4B=1$$
$$2-5B=1$$
$$B=\frac{1}{5}$$
$$A=1\frac{4}{5}$$

שיחזור משוואה ריבועית משורשיה:

תהיה המשוואה הריבועית ax^2+bx+c ויהיו שורשיה $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

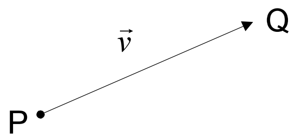
חוקי וייטה מציגים את הקשר הבא בין הפולינום לשורשיו:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

שחזור משוואה ריבועית בהינתן שורשיה x_1, x_2:

<u>ווקטורים במישור</u>

ווקטור - יחידה בעלת גודל וכיוון.
סקלר - יחידה בעלת גודל בלבד.

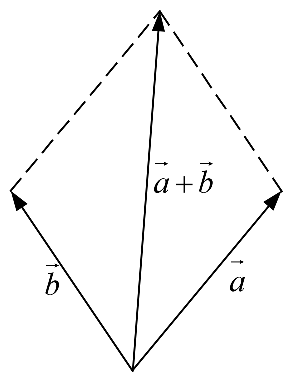


סימון לווקטור: $\vec{v}, \overrightarrow{PQ}$.

סימון: $|\vec{v}|$ - הגודל של הווקטור $\vec{v}$

לא ניתן להשוות בין שני ווקטורים, אולם כן ניתן להשוואות בין הגדלים שלהם.

הגדרת חיבור ווקטורים:



השיטה: מחברים את זנבות הווקטורים, ממשיכים את המקבילית שהם יוצרים.
האלכסון במקבילית הוא חיבורם.

הגדרת חיסור ווקטורים:

הווקטור $-\vec{a}$ הוא ווקטור הזהה בגודלו ל-$\vec{a}$, אך הפוך לו בכיוונו.

רכיבי ווקטור במערכת צירים קרטזית:

בהינתן ווקטור $\vec{a}$, רכיביו יוגדרו כשיעורי נקודות הראש, כאשר זנבו בראשית הצירים.

גודלו יוגדר כך: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2}$

חיבור ווקטורים:

טענה: יהיו הווקטורים: $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ אזי חיבורם יוגדר בצורה הבאה:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

תכונות החיבור:

1. חוק החילוף (קומוטטיביות): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. חוק הקיבוץ (אסוציטיביות): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. אי שוויון המשולש: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.