גירסה 1.00 - 19.8.2002

מספר שאלות בנושא אלגברה מודרנית

שאל: ניר אדר
ענה: ארנון הרשקוביץ

אנא שלחו תיקונים, הצעות והערות אל המחבר.

.1
האם חיתוך של שני אידיאלים הוא גם אידיאל?

תשובה:
ראשית, צריך להבהיר כי כשאומרים אידיאל מתכוונים לאידיאל דו צדדי.
באופן כללי, על חיתוך של אידיאל ימני עם אידיאל שמאלי אי אפשר לומר כלום.
מה שייאמר כאן, נכון עבור חיתוך של שני אידיאלים מאותו צד – ובפרט אידיאלים דו צדדיים.

מהו אידיאל?
זהו תת חוג שסגור גם לבליעה.
מה זה תת חוג? זוהי תת חבורה שסגורה לכפל. מספיק להראות בליעה וניתן לוותר על הוכחת הסגירות (למה?).
ידוע (או, לפחות, מאוד קל להראות) כי חיתוך של תת חבורות הוא תת חבורה.
לכן החיתוך הנ"ל הוא, קודם כל, תת חבורה.
אבל, קל גם להראות כי הבליעה בכפל נשארת.
סקיצה להוכחה:
יהי i איבר בחיתוך האידיאלים ויהי r איבר כלשהו בחוג.
כיוון ש i שייך לשני אידיאלים, ri שייך לכל אחד מן האידיאלים, ומכאן - לחיתוכם.

.2
תהי $\mathbb{Q}$ חבורת הרציונליים עם חיבור ותהי $\mathbb{Z}$ חבורת השלמים עם חיבור.
כמה איברים מסדר 11 יש ב $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$? (ויותר חשוב – איך מגיעים למספר הזה?)

תשובה:
Q – חב' הרציונלים, Z – חב' השלמים, שמהווה תת חבורה נורמלית של Q, ולכן
ניתן לדבר על חבורת המנה: Q/Z.
צריך להבין איך נראית חבורה זו.
נסה להראות לבד, בעזרת "בניית" הקוסטים – ולא ע"י בניית הומומורפיזם ושימוש במשפט ההומו' ה – I!!! – כי Q/Z איזו' ל: [0,1) עם חיבור "מודולו 1". כלומר, 2.4, 105.4, -2.6 נמצאים באותו קוסט.
בחבורה זו, כל איבר הוא מסדר סופי.
למה?
נסתכל על איבר Z+p/q, כשזוהי הצגה יחידה של שבר רציונלי ב: [0,1) עם (p,q)=1 ו: p<q.
הסדר של איבר זה הוא: q, כיוון שה"כפל" בחב' המנה נראה כך:
(Z+p/q)^n = Z+(p/q)*n
ולכן, עבור: n=q, נקבל את האיבר האדיש (מהו?!), וכיוון שההצגה עם מספרים זרים, זו גם החזקה המינימלית (למה?!).
בקיצור, איברים מסדר 11 הם בדיוק האיברים מצורת: Z+p/11 כש: p<11 ו – (p,11)=1, כלומר אפשר לקחת: p=1,2,..,10.
יש 10 איברים כאלה.

.3
נתון חוג מנה של פולינומים, ונתון פולינום כלשהו, שאנו רוצים למצוא לו הופכי.
למה תמיד אנו מכפילים את הפולינום הנתון בפולינום כללי $\left(ax^2+bx+c\right)$ כדי למצוא את ההופכי?
האם יתכן מצב שנצטרך להכפיל בפולינום כללי ממעלה גבוהה/נמוכה יותר?

תשובה:
בעניין זה של חוג מנה של פולינומים, צריך להבהיר כמה דברים קודם לתשובה:
חוג מנה של $F[x]/\langle f(x)\rangle$ כש: $f(x)$ פולינום ממעלה n ו - $\langle f(x)\rangle$ הוא האידיאל הראשי שנוצר ע"י $f(x)$.
מה ידוע על חוג זה?
הדבר החשוב ביותר – **כל איבר בו ניתן להצגה בצורה יחידה באמצעות פולינום ממעלה קטנה ממש מ – n.**
כלומר, אם נתון כי בחוג מנה זה $(I=\langle f(x)\rangle)$

$$G(x)+I=H(x)+I$$

אי אפשר להסיק כי: $G(x)=H(x)$.
אבל, אם נתון כי: $\deg(G(x)), \deg(H(x))<n$, אזי: $G(x)=H(x)$!!!!!!!!!

או-קיי, ניגש למציאת הופכי של האיבר: $G(x)+I$.
איך מוצאים אותו? דרך אחת ישירה היא לסמן את ההופכי ב: $T(x)+I$, ואז:

$$(G(x)+I)(T(x)+I)=1+I$$

באגף שמאל, "פותחים" את כפל הפולינומים ומקבצים איברים לפי החזקות המתאימות.
לאחר מכן, צריך להגיע בצד שמאל לייצוג בעזרת פולינום ממעלה קטנה מ – n.
לאחר מכן, משווים את המקדמים באגף שמאל לאלו שבצד ימין – כלומר כל המקדמים חוץ מהחופשי הם אפס.
איפה ה Catch? איך נבחר את $T(x)$? אנחנו יודעים שלכל איבר בחוג המנה – ובפרט להופכי של זה שאנו מחפשים – יש ייצוג יחיד כפי שנזכר לעיל. לכן, נבחר אותו ייצוג, כפולינום כללי ממעלה קטנה מ – n.
למשל, אם $f(x)$ פולינום ממעלה 3, אז הפולינום המייצג ל – $T(x)+I$ יהיה ממעלה 2 כמו הזכרת בדוגמא.