על אידיאלים ומטריצות

אלגברה מודרנית ח'　　　　הוכן ע"י ארנון הרשקוביץ

טענה

בחוג המטריצות מסדר nxn - עם פעולות חיבור וכפל רגילות - אין אידיאלים דו צדדיים לא טריוויאליים.

רעיון ההוכחה - פשוט, השימוש בכלים מאלגברה ליניארית - מעניין, והטענה - שימושית! איך נראה את הדרוש? נניח בשלילה, כי קיים אידיאל דו צדדי בחוג המטריצות אשר אינו אידיאל האפס - ונראה כי הדבר גורר בהכרח כי מטריצת היחידה נמצאת בו. מכאן, הטענה ברורה, כיוון שאם איבר היחידה נמצא באידיאל - ניתן להסיק כי האידיאל הוא, בעצם, כל החוג (נוכיח גם זאת בקלות).
כדי לכתוב הוכחה מסודרת ומובנת, נשתמש בלמות עזר.

למה 1

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה מסדר nxn, ותהי E_{ij} המטריצה אשר כולה אפסים, פרט לאיבר בשורה ה - i-ית ובעמודה ה - j-ית השווה ל - 1.
אזי:

$$E_{mi}*A*E_{jm} = a_{ij}*E_{mm}$$

<u>הוכחה:</u>
משיקולי אלגברה ליניארית (ולא אחזור עליהם כאן בפירוט: מי שאינו משוכנע באחד הנימוקים, ש"ייקח" מטריצות לפי הדרוש, יכפול על דף נייר וישתכנע בדברים...) - כיוון שכל העמודות של E_{jm}, פרט לעמודה ה - m-ית, הן עמודות אפסים - כך יהיו גם כל העמודות במכפלה $A*E_{jm}$. באותו אופן, כיוון ששורות E_{mi} כולן אפסים, פרט לשורה ה - m-ית, כך גם כל השורות במכפלה $E_{mi}*A$.
לכן, מהמכפלה:

$$E_{mi}*A*E_{jm}$$

נקבל מטריצה אשר כולה אפסים, פרט לאיבר במקום ה - (m,m). נתבונן במקום זה, ונראה איזה איבר מתקבל שם:

$$(E_{mi}*A*E_{jm})_{mm} = \sum_{k=1}^{n}\left((E_{mi}*A)_{mk}*(E_{jm})_{km}\right) \overset{(1)}{=} (E_{mi}*A)_{mj} = \sum_{t=1}^{n}\left((E_{mi})_{mt}*A_{tj}\right) \overset{(2)}{=} a_{ij}$$

השוויון (1), נובע מן הן העובדה שבמטריצה E_{jm} - כל האיברים שווים לאפס, פרט לזה אשר במקום ה - (j,m), השווה ל - 1. לכן, כל איברי הסכום יתאפסו, פרט למקרה בו k=j. מאותם שיקולים, השוויון (2) נובע מן העובדה שהאיבר היחיד בסכום אשר לא יתאפס, יהיה זה עבורו t=i.
לכן, קיבלנו:

$$E_{mi}*A*E_{jm}=a_{ij}*E_{mm}$$

והלמה הוכחה.

למה 2

באותם סימונים של הלמה הקודמת, מתקיים: אם $x\neq 0$, אזי:

$$(x*E_{ii})*(x^{-1}*E_{ii})=E_{ii}$$

<u>הוכחה:</u>
הדרך הפשוטה ביותר לראות זאת, היא להסתכל על מכפלה זו כעל מכפלה של מטריצות אלכסוניות, אשר תוצאתה מטריצה אלכסונית, כך שבמקום ה - (i,i) מתקבל כפל שני האיברים במקום ה - (i,i) של המטריצות המוכפלות. **והלמה הוכחה**.

<u>למה 3</u>

יהי R חוג עם יחידה, ויהי J אידיאל כלשהו (לא בהכרח דו צדדי) ב - R.

אזי: $1_R \in J \Leftarrow J=R$.

<u>הוכחה:</u>

ההוכחה פשוטה וברורה: נניח כי J אידיאל ימני. אזי מחוק הבליעה של J, כאשר נפעיל אותו על האיבר 1, נקבל:

$$\forall r \in R : 1 \cdot r \in J \quad \Rightarrow \quad R \subseteq J$$

וברור כי מתקיים (כיוון ש - J אידיאל ב - R):

$$J \subseteq R$$

ולכן:

$$\boldsymbol{J=R}$$

והלמה הוכחה.

<u>הוכחת הטענה:</u>

יהי R חוג המטריצות עם הפעולות הרגילות, ויהי J אידיאל דו צדדי ב - R, כך ש: $J \neq \{0\}$.

אזי, לכל מטריצה מתקיים חוק הבליעה מימין ומשמאל, לכן מתקיים:

$$\forall A, B \in R, \quad X \in J \quad : \quad A * X * B \in J$$

כעת, נבחר $X \neq 0$ - מטריצה מסוימת ב - J. אזי, קיים (i,j), כך ש: $x_{ij} \neq 0$. נתבונן במטריצה:

$$C_1 = E_{1i} * X * E_{j1}$$

לפי למה 1, זוהי מטריצה, אשר במקום ה - $(1,1)$ שלה יש את האיבר: x_{ij} (שונה מאפס), ושאר איבריה: 0. כעת, נגדיר את המטריצה:

$$D_1 = (x_{ij}^{-1} * E_{11}) * C_1$$

לפי למה 2, למטריצה זו במקום ה - $(1,1)$ יש: 1, ושאר איבריה: 0.

באותו אופן, נגדיר את המטריצות $C_2, C_3, \ldots, C_n$, ולאחריהן את: $D_2, D_3, \ldots, D_n$.

כיוון ש - J אידיאל, J בפרט תת חוג ובפרט תת חבורה (חיבורית) של R.

לכן, מתקיים:

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n \in J$$

אבל, מהגדרת המטריצות D_i, ברור כי:

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n = I_n$$

(I_n - מטריצת היחידה מסדר nxn), וכידוע: $1_R = I_n$. לכן, איבר היחידה שייך לאידיאל, ולפי למה 3:

$$\mathbf{J=R}$$

מכאן, J - אשר נלקח להיות אידיאל דו צדדי כלשהו, השונה מאידיאל האפס - שווה לחוג כולו, ולכן אין ב - R אידיאלים דו צדדיים לא טריוויאליים.

והטענה הוכחה.