

קוס... טים

אלגברה מודרנית/ח' הוכן ע"י ארנון הרשקוביץ

מה יש בנספחים?

בנספח 1 מצוי לוח הכפל של החבורה S_3 (עם פעולה של הרכבת תמורות), לנוחותכם. סימנתי את האיברים בחבורה (התמורות) באותיות, על מנת להקל על הכתיבה. בנספח 2, הטבלה העליונה מתארת את אותו לוח הכפל עם הסימונים הללו. הטבלה השנייה בנספח 2, מתארת את לוח הכפל של החבורה Z_6 (עם פעולת חיבור). בהמשך, אתייחס לטבלאות בנספח 2.

מציאת מחלקות (Cosets) שמאליות בחבורה S_3 ובחבורה Z_6

נתבונן בתת החבורה $H_1 \subseteq S_3$ המוגדרת: $H_1 = \{\rho_0, \mu_1\}$ ונתבונן בחבורות הימניות שהיא יוצרת. מהתבוננות בטבלת הכפל המתאימה בנספח 2, נראה כי המחלקות הן:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{\rho_0, \mu_1\}; \\ \rho_1 H_1 &= \{\rho_1, \mu_2\}; \\ \rho_2 H_1 &= \{\rho_2, \mu_3\}.\end{aligned}$$

בטבלה הראשונה אשר בנספח 2, צבעתי את האיברים בחבורה, בהתאם לשייכותם למחלקות הנ"ל. לפני שנבין מה רואים כאן, הבה נבצע תהליך דומה לגבי החבורה Z_6 . יהי $H_2 \subseteq Z_6$ אשר מוגדר כך: $H_2 = \{0, 3\}$. נחשב את המחלקות הימניות אשר מתקבלות מתת חבורה זו:

$$\begin{aligned}H_2 &= \{0, 3\}; \\ 1 + H_2 &= \{1, 4\}; \\ 2 + H_2 &= \{2, 5\}.\end{aligned}$$

ושוב, בטבלה המתאימה (התחתונה) בנספח 2 צבעתי את האיברים בחבורה בהתאם לשייכותם למחלקות הנ"ל.

אז מה...?

ובכן, בשלב זה - למעט אופן חישוב המחלקות (אשר אינו מסובך) - עלינו לשים לב לתופעה הבאה: אם נתב- ונן בטבלה הצבועה של החבורה Z_6 (אשר נצבעה, להזכירכם, לאחר חישוב מחלקות ימניות של תת חבורה מסוימת), נראה כי המחלקות הימניות "מסדרות" את החבורה (או, אם תרצו, "מחלקות" אותה) באופן בו כפל של איברים בין המחלקות מוגדר היטב (ולהלן, יכוננו המחלקות: "לבנה", "אפורה" ו- "כהה", בהתאם לצבעים שלהן). מה זאת אומרת, מוגדר היטב? למשל, אם ניקח איבר כלשהו מהמחלקה ה"לבנה", ונכפול אותו באיבר כלשהו מהמחלקה ה"אפורה", נקבל תמיד איבר כלשהו מן המחלקה ה"אפורה". או, אם ניקח איבר כלשהו מן המחלקה ה"אפורה" ונכפול אותו באיבר מאותה מחלקה, נקבל איבר מן המחלקה ה"כהה". אם נסתכל על הכפל הנ"ל ככפל בין מחלקות, לא משנה אילו נציגים מתוך המחלקות נבחר כדי לתאר אותן. במקרה זה, אנו אומרים כי הכפל מוגדר היטב ולכך נגיע בשלב מעט מאוחר יותר בקורס.

לעומת זאת, ננסה לחזור על תיאור כפל בין מחלקות, לגבי המחלקות שיצרנו בחבורה S_3 . מבט מהיר מספיק, על מנת להבין שהדבר אינו אפשרי. אם נכפול, למשל, איבר מן המחלקה ה"אפורה" באיבר מאותה מחלקה, נוכל לקבל איבר מן החלקה ה"כהה" או איבר מן המחלקה ה"לבנה". כלומר, כאן אי אפשר להגדיר כפל בין מחלקות באופן שהוא יהיה בלתי תלוי בבחירת ה"נציגים".

נו, אז מה?...

אז ניתן לשאול את השאלות הבאות:

- האם העובדה שב- S_3 לא נוצר לנו כפל מוגדר היטב, תלויה בבחירה של H ?
- האם כל בחירה של $H \subseteq Z_6$ תשמור על תכונה זו?
- מה המשותף לכל האיברים במחלקה מסוימת?
- למה זה אמור לעניין אותנו, בכלל?

ובכן, כל התשובות יינתנו. כל מה שאתם צריכים, זה רק קצת סבלנות...

נספח 1 - לוח הכפל עבור החבורה S_3

הערה: ביצעתי את הכפל בין שתי תמורות מימין לשמאל. הטבלה מתארת את הכפל של: $x * y$

$x \backslash y$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(המשבצות האפורות מזהות את תמורת הזהות, על מנת שיהיה קל יותר למצוא את ההופכי של כל איבר)

נסמן את התמורות באופן הבא:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

הערה: שימו לב, כי התמורות המסומנות באותיות μ הן תמורות המבצעות "סיבוב", ואלו המסומנות באותיות ρ מבצעות "שיקוף".

נספח 2 - לוחות הכפל עבור החבורה S_3 והחבורה Z_6

הערה: המשבצות בשני לוחות הכפל צבועות, בהתאם לשיוך האיברים למחלקות השמאליות אשר חישובן. אי לכך, איברי החבורה לא מסודרים בסדר שנראה אולי "טבעי" לסדרם (בעיקר בטבלה השנייה). הסברים ומשמעויות לכך - בדף ההסברים.

2.1 החבורה S_3

$x \backslash y$	ρ_0	μ_1	μ_3	ρ_2	ρ_1	μ_2
ρ_0	ρ_0	μ_1	μ_3	ρ_2	ρ_1	μ_2
μ_1	μ_1	ρ_0	ρ_2	μ_3	μ_2	ρ_1
μ_3	μ_3	ρ_1	ρ_0	μ_2	μ_1	ρ_2
ρ_2	ρ_2	μ_2	μ_1	ρ_1	ρ_0	μ_3
ρ_1	ρ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	μ_1
μ_2	μ_2	ρ_2	ρ_1	μ_1	μ_3	ρ_0

2.2 החבורה Z_6

$x \backslash y$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	4	1
5	5	2	0	3	1	4