גירסה 1.02 - 12.4.2005

מבוא להסתברות והתפלגויות - סיכום נקודות (חלק שני)

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו הערות ותיקונים אל המחבר.

<u>גרסאות</u>

גירסה 1.02 – 12.4.2005
- תוקנו מספר שגיאות כתיב.

גירסה 1.01 - 30.10.2002
- תוקנו מספר דקויות בטקסט. תודה לליאור קהתי שהעיר לגבי אי הדיוקים.

גירסה 1.00 - 5.7.2002

תוחלת של פונקציה של מ"מ

X מ"מ כלשהו (רציף) ו- $g(x)$ פונקציה ממשית.
מהי התוחלת של המ"מ $Y = g(X)$?

יש למצוא את פונקצית הצפיפות של Y - $f_Y(y)$ ולבצע אינטגרל $EY = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$.

משפט

תהי $g(x)$ פונקציה ממשית כלשהי, אזי:
א) אם X משתנה מקרי רציף עם פונקצית צפיפות $f(x)$ אזי:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

ב) אם X מ"מ בדיד עם הסתברות $P(X = x_i) = p_i$ אזי: $E(g(X)) = \sum_i p_i g(x_i)$

מסקנות מיידיות מהמשפט

1. אם X קבוע $(X = c)$ אזי $EX = c$.
(מכיוון ש $EX = \int cf(x)dx = c$).
2. אם X מ"מ ו- a,b קבועים, אז $E(aX+b) = aE(X)+b$.

הוכחה

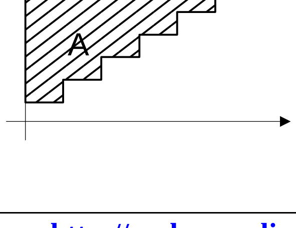
$$E(aX+b) = \int (ax+b)\cdot f(x)dx = a\int xf(x)dx + b\int f(x)dx = aE(X)+b$$

3. (נובע מ-2) אם X מ"מ מתוך פילוג נורמלי $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי $E(X) = \mu$.

משפט

אם X משתנה מקרי (רציף או בדיד) אי שלילי, ו- $F_X(x)$ פונקצית ההתפלגות שלו, אזי:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)dx] = A$$



מומנט

המומנט ה-n-י של מ״מ X הוא $E(X^n)$. אם X בדיד אז $E(X^n)=\sum_i x^n \cdot p_i$ ואם X רציף, אזי $E(X^n)=\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x)dx$.

שונות (Variance)

שונות היא מדד לפיזור המ״מ סביב התוחלת שלו. נבחר את המדד להיות $E\left((X-\mu)^2\right)$. השונות היא בעצם מומנט מסדר שני של $X-\mu$.

סטיית התקן של X היא $\boxed{\sigma=\sqrt{Var(X)}}$ והיא באותן יחידות של X, ולכן נוח להשתמש ב σ כמדד לפיזור.

נוסחה נוחה לחישוב השונות

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

שונות וסטיית תקן של מספר משתנים ידועים

משתנה	השונות
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\text{var}(X)=\sigma^2$
$X \sim Ber(p)$	$\text{var}(X)=pq$
$X \sim Bin(n,p)$	$\text{var}(X)=npq$
$X \sim Geom(p)$	$\text{var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim Pois(\lambda)$	$\text{var}(X)=\lambda$

תכונות אחדות של השונות

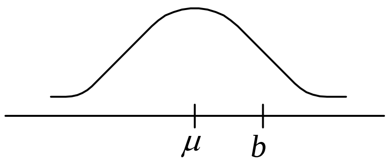
1. $VarX \ge 0$
   $VarX=0 \Leftrightarrow X=const$
2. $Var(aX+b)=a^2Var(X)$

- השונות מתארת פיזור סביב התוחלת
- b משפיע על התוחלת אבל לא על השונות.
- $\boxed{\sigma(aX+b)=|a|\cdot\sigma(X)}$

טענה

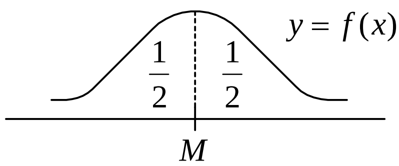
X מ"מ.

$VarX = E(X-\mu)^2 = \min_b E(X-b)^2$



החציון

(M=medium)



החציון מקיים: $\int_{-\infty}^{M} f(x)dx = \frac{1}{2} = F(M) = P(X \le M)$

אם X משתנה בדיד, אזי אם יש N עבורו $\sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{1}{2}$ אזי $x_i = M$

ואם $\sum_{i=1}^{N} p_i < \frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{N+1} p_i$ אזי $M = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

משפט

X מ"מ רציף ו M_X החציון שלו, אזי $\forall b,\ E|X-M_X| \le E|X-b|$.

אי שוויון מרקוב (Markov)

יהי X מ"מ אי שלילי בעל תוחלת EX סופית, אזי לכל מספר $a>0$ מתקיים $P(X \ge a) \le \frac{EX}{a}$.

X יכול להיות רציף, בדיד או מעורב.

אי שיוויון צובישב (Chebyshev)

X מ"מ, μ התוחלת שלנו, ו- σ^2 השונות שלו, אזי לכל $a>0$, $P\left(\left|X-\mu\right|\geq a\right)\leq\frac{\sigma^2}{a^2}$

אי שוויון ינסן (Jensen)

אם X הוא מ"מ בעל תוחלת סופית EX וגם f קמורה, אזי $E(f(X))\geq f(EX)$.
אם f קעורה, אזי $E(f(X))\leq f(EX)$.

תזכורת

$$E(X-\mu)=EX-E\mu=EX-\mu=EX-EX=0\Rightarrow\int f(x)(x-\mu)dx=0$$

משפט

X מ"מ רציף עם פונקצית צפיפות $f_X(x)$. $g(x)$ היא פונקציה עולה ממש או יורדת ממש על (a,b). (a,b יכולים להיות גם $\pm\infty$).
נגדיר מ"מ $Y=g(X)$ אזי:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right)\right| & y\in g(a,b)=\left\{y\,\middle|\,\exists x\in(a,b), y=g(x)\right\} \\ 0 & y\notin g(a,b)\end{cases}$$

ניסוח נוסף:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|} & \left\{x\,\middle|\,g(x)=y\right\} \\ 0 & \left\{x\,\middle|\,g(x)=\phi\right\}\end{cases}$$

סקירת ההוכחה

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=p(g(x)\leq y)=\begin{bmatrix} P(X\leq g^{-1}(y)) & g \text{ rise} \\ P(X\geq g^{-1}(y)) & g \text{ fall}\end{bmatrix}$$

נגזור את הביטוי ונקבל משל.

פונקציה יוצרת מומנטים

עבור משתנה מקרי X (רציף או בדיד) נגדיר $\phi(t) = M(t) = E\left(e^{tX}\right),\ t \in \mathbb{R}$

עבור X רציף: $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)dx$

עבור X בדיד: $\phi(t) = \sum_i e^{tX} p_i$

חישוב של פונקציות יוצרות מומנטים

$X \sim Bern(p)$

$$\phi(t) = e^{t\cdot 1} \cdot p + e^{t\cdot 0} \cdot q = \boxed{p \cdot e^t + q}$$

$X \sim Bin(n, p)$

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^t \cdot p\right)^k q^{n-k} = \left(e^t p + q\right)^n$$

$(\lambda > 0),\ X \sim Pois(\lambda)$

$$\phi(t) = Ee^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \cdot \frac{\left(e^t \lambda\right)^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \cdot \lambda} = \boxed{e^{\lambda e^t - \lambda}}$$

$X \sim Exp(\lambda)$

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx = \frac{x}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_0^{\infty} \underset{\text{if } t<\lambda}{=} \boxed{\frac{x}{\lambda - t}}$$

$X \sim N(0,1)$

$$Ee^{tX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(x-t)^2 - t^2\right]} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\boxed{\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}}}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X = \sigma Z + \mu$ when $Z \sim N(0,1)$

$$\phi(t) = e^{\frac{1}{2}\left(t^2 \sigma^{2+2t\mu}\right)}$$

פונקציה אופיינית של מ"מ X

i - מספר מרוכב.

$\varphi_X(t) = Ee^{itX}$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

אם tx ממשי, אזי $\left|e^{itx}\right| = 1$.

עבור $X \sim N(0,1)$:

$M(t) = e^{t^2/2}$

$\varphi(t) = e^{-t^2/2}$

משתנה מקרי דו ממדי או ווקטור אקראי

זוג (X,Y), כאשר X,Y מ"מ, נקרא משתנה מקרי דו ממדי או ווקטור דו ממדי.

באופן כללי:
n-יה $(X_1, X_2, ..., X_n)$ כאשר $X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ, תקרא מ"מ n-ממדי או ווקטור מקרי n-ממדי.

פונקצית ההתפלגות המשותפת של (X,Y) תהיה הפונקציה:

$F(x,y) = F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

הפונקציות $F_X(x), F_Y(y)$ נקראות פונקציות ההתפלגות השוליות של (X,Y).
אפשר לקבל כי:

$F_X(a) = P(X \le a) = P(X \le a, y < \infty)$

$= \lim_{b\to\infty} P(X \le a, y \le b) = \lim_{b\to\infty} F_{XY}(a,b) \equiv F(a, \infty^-)$

$F_Y(b) \equiv F(\infty^-, b)$

עבור (X,Y) בדיד (כלומר X בדיד וY בדיד) שמקבל רק מספר סופי או בן מניה של נקודות במישור, מגדירים את פונקצית ההסתברות המשותפת:

$P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$

פונקציות ההסתברות $P_X(x_i), P_Y(y_j)$ נקראות פונקציות ההסתברות השוליות של (X,Y).

פונקצית ההתפלגות המשותפת

(X,Y) בדיד, $P_{XY}(x_i, y_j)$ היא פונקצית ההסתברות המשותפת.
נגדיר $F_{XY}(x,y)$ פונקצית ההתפלגות המשותפת. F מוגדרת לכל x ולכל y.

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{\substack{x_i < X \\ y_i < Y}} P(X = x_i, Y = y_i)$$

משתנה מקרי דו ממדי רציף

מ.מ. זה מקבל רצף של ערכים במישור. באופן פורמלי, מ״מ דו ממדי יקרא רציף, אם קיימת $f(x,y)$ כך ש:

א. $f(x,y)\geq 0$ לכל x,y.

ב. על כל תת קבוצה D במישור xy, מתקיים: $P((x,y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

פונקצית צפיפות

יהי (X,Y) רציף,

$$F_{XY}(x,y)=P(X\leq x, Y\leq y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)=f(x,y)$$

כלומר $\boxed{f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y)}$.

טענה

$$P(x\leq X\leq x+dx, y\leq Y\leq y+dy)\approx f(x,y)dxdy$$

טענה

תהי פונקצית הצפיפות $f_{\vec{X}}(x_1,x_2,...,x_n)$.

פונקצית ההתפלגות:

$$F_{\vec{X}}(x_1,x_2,...,x_n)=P(X_1\leq x_1, X_2\leq x_2,...,X_n\leq x_n)$$

$$F=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{...}\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n$$

$$f_{\vec{X}}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}F(x_1,x_2,...,x_n)$$

משתנה מקרי אחיד ב R^2

$\left(X,Y\right) \sim u(D)$, D הוא תחום פשוט וחסום ב- R^2. אם פונקצית הצפיפות שלו היא:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Area(D)} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

התפלגות מולטינומית

נעשים n ניסיונות בלתי תלויים שבכל אחד מהם אפשרות לתוצאות עם הסתברויות $p_1, p_2, ..., p_r$ כך ש- $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

$\overline{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_r\right)$, כאשר X_k זהו מספר הפעמים שהתוצאה הk הופיעה.

מתקיים:

$$P_{\overline{X}}(n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_r^{n_r}$$

$$\left(n_1 + n_2 + ... + n_r = n\right)$$

הבינום של ניוטון

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

נוסחת המולטינום

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_r\right)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!} \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

משתנים מקריים בלתי תלויים

שני משתנים מקרים X, Y הם בלתי תלויים אם עבור כל שתי קבוצות A ו-B ("מאורעות") מתקיים $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$, כלומר שני המאורעות $X \in A, Y \in B$ הם בלתי תלויים במובן ההסתברותי הרגיל.

סכומים של משתנים מקריים בלתי תלויים

$\overline{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ משתנה מקרי n ממדי כאשר $X_1,X_2,...,X_n$ בלתי תלויים ומתעניינים

ב $g(\overline{X})=X_1+X_2+...+X_n$

עבור X,Y ב״ת נסמן $W=X+Y$. W הוא משתנה מקרי. נחפש את F_W,f_W.

תהי $f(x,y)$ פונקצית הצפיפות של (X,Y).

$$F_W(w)=P(W\le w)=P(X+Y\le w)=\iint\limits_{x+y\le w} f(x,y)dxdy=...=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot F_Y(w-x)dx$$

זוהי פונקצית ההתפלגות של $W=X+Y$.

פונקצית הצפיפות היא הנגזרת של פונקצית ההתפלגות:

$$f_W(w)=F_W'(w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot {F_Y}'(w-x)dx$$

זוהי קונבולוציה.

הגדרת קונבולוציה

יהיו f,g שתי פונקציות נתונות. נגדיר פעולה בין הפונקציות בשם קונבולוציה. הפעולה מסומנת $f*g$.

ניקח f,g שתחום ההגדרה שלהן הוא $\mathbb{R}$. לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

בתנאי שהאינטגרל קיים. על ידי הצבה ניתן לראות כי מתקיים:

$$\left(f*g\right)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

ולכן נקבל כי $f*g=g*f$, כלומר פעולת הקונבולוציה היא פעולה קומוטטיבית.

טענה

$$F_W(w)=\left(F_X*f_Y\right)(W)$$
$$f_W(w)=\left(f_X*f_Y\right)(w)$$

טענות

.1

אם $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ והם בלתי תלויים, אזי:
$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

נכליל את התוצאה:
אם $X_1, X_2,..., X_n$ בלתי תלויים ומפולגים נורמלית $\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$ כאשר $i=1,2,...,n$ אזי
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$$

.2

אם $X\sim Pois(\lambda_1), Y\sim Pois(\lambda_2)$ בלתי תלויים אזי $X+Y\sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$.

.3

$X_i\sim Ber(p)$ כאשר $i=1,2,...,n$ וגם ה-X_i בלתי תלויים, אזי $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$

התפלגויות מותנות

תזכורת:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0$$

פונקצית ההסתברות המותנית של משתנה מקרי בדיד:

$$P_{X|Y}(x|y)=P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P_{XY}(xy)}{P_Y(y)}$$
$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\sum_{x_i\le X} P_{X|Y}(x_i|y)$$

אם X ו-Y בלתי תלויים, אזי:

$$P_{X|Y}(x|y)=\frac{P_X(x)P_Y(y)}{P_Y(y)}=P_X(x)$$

הסתברות מותנית רציפה

$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{F(x,y)}{F_Y(y)}$$

תוחלת של פונקציה של (X,Y) עם פונקצית צפיפות f(x,y)

נתונה פונקציה g(x,y) סקלרית.
נגדיר: $W=g(X,Y)$.

$$EW=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

הליניאריות של התוחלת

$E(X+Y)=EX+EY$

ומכאן נוכל להסיק גם :

$\boxed{E(\alpha X+\beta Y)=\alpha EX+\beta EY}$

השונות

נסמן μ_1 התוחלת של X, μ_2 התוחלת של Y.

$Var(X+Y)=Var(X)+2COV(X,Y)+Var(Y)$

הביטוי $COV(X,Y)=E(X-\mu_1)(Y-\mu_2)$ נקרא השונות המשותפת של המשתנים המקריים X,Y.

נכליל את הנוסחה הנ"ל ליותר מ-2 משתנים :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+\sum_{i\neq j}COV(X_i,X_j)$$

מספר תכונות של COV(X,Y)

1. $COV(X,X)=Var(X)$
2. $COV(aX+b,cY+d)=ac\cdot COV(X,Y)$

שיטה לחישוב ה-COV

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

משתנים מתואמים ולא מתואמים

X וY יקראו לא מתואמים ביניהם אם $COV(X,Y)=0$ או באופן שקול $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$ או $E(XY)=(EX)(EY)$.

משפט

אם X,Y הם בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.

מקדם המתאם עבור שני משתנים מקריים X ו-Y

$$R(X,Y)=\rho(X,Y)=\frac{COV(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

תכונות מקדם המתאם :

1. ρ חסר יחידות.
2. $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$
3. $\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$
4. אם $\rho = 0$ אז אומרים ש-X ו-Y אינם מתואמים כלל.

תוחלת מותנית

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y) = \frac{P_{X|Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$
$$E(X|Y) = \sum_x x \cdot P_{X|Y}(x|y)$$
$$E(g(X)|Y) = \sum_x g(x) \cdot f_{X|Y}(X|Y)$$
$$EE(X|Y) \triangleq Eg_X(Y) = \sum_y g_X(y) \cdot P_Y(y)$$

משפט ההחלקה

$$EE(X|Y) = EX$$

תוחלת מותנית בווקטור מ"מ

$$E\left(X|\overline{Y}\right)$$

לפי משפט ההחלקה: $EE\left(X|\overline{Y}\right) = EX$

טרנספורמציות ווקטוריות

נתונה העתקה $\overline{g}\left(\overline{X}\right) = \overline{Y}$. נניח כי $\overline{X}, \overline{Y}$ הם משתנים דו ממדיים.

אם $\overline{g} \in C^1$ וכן היא ח.ח.ע אז קיימת הטרנספורמציה ההפוכה, כך ש- $\overline{g}^{-1}\left(\overline{Y}\right) = \overline{X}$

יעקוביאן

$$J(X_1, X_2) = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$
$$J^{-1}(Y_1, Y_2) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = J^{-1}(X_1, X_2)$$

- נתונה פונקצית הצפיפות המשותפת $f_{\overline{X}}(X_1, X_2)$ ורוצים לדעת $f_{\overline{Y}}(y_1, y_2)$, אזי נשתמש בכך כי $f_{\overline{Y}}(y_1, y_2) = f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \cdot |J(y_1, y_2)|$.

פילוג Rayleigh

יהיו משתנים מקריים X,Y, ונרצה לבצע את הטרנספורמציה $(X,Y)\to(R,\theta)$.
ההצבה תהייה:

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$
$$x^2+y^2=r^2 \qquad j(r,\theta)=r$$

אם $X,Y\sim N(0,1)$ מ״מ בלתי תלויים, אזי R מתפלג Rayleigh, ופונקצית הצפיפות שלו היא $f_R(r)=re^{-\frac{r^2}{2}}$.

אם $X,Y\sim N(0,\sigma)$ מ״מ בלתי תלויים, אזי R מתפלג Rayleigh, ופונקצית הצפיפות שלו היא $f_R(r)=re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$, וגם $f_\theta(\theta)=\int\limits_{r=0}^{\infty}\frac{re^{\left(-\frac{r^2}{2}\right)}}{2\pi}dr=\frac{1}{2\pi}$ ומתקיים כי R,θ מ״מ בלתי תלויים.
לכן מתקיים:

$$f_{R,\theta}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}$$

הדמיית משתנה מקרי נורמלי בעזרת פילוג ריילי

1. מגרילים משתנה $u\sim(0,1)$
2. $R=\sqrt{2\ln\frac{1}{1-u}}$
3. מגרילים $\theta\sim u(0,2\pi)$
4. $X=R\cos\theta, Y=R\sin\theta$
5. X, Y מפולגים שניהם נורמלית.

טרנספורמציה ליניארית - דוגמא

X, Y, Z מ״מ מקריים מפולגים $N(0,1)$ בלתי תלויים.
מבצעים טרנספורמציה ליניארית:

$$\begin{cases} U = X + Y + Z \\ V = X - Y \\ W = X - Z \end{cases}$$

או בצורה מטריצית:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

מיהי $f_{U,V,W}(u,v,w)$?

$$J(X,Y,Z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$J(U,V,W) = \frac{1}{3}$$

הטרנספורמציה ההפוכה:

$$X = \frac{U+V+W}{3}$$

$$Y = X - V = \frac{U+V+W}{3} - V$$

$$f_{U,V,W}(u,v,w) = \frac{1}{3} f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}}{\left(2\pi\right)^{3/2}}$$

משתנה נורמלי דו ממדי

X, Y מ״מ מפולגים נורמלים $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ בהתאמה (ב״ת).
אזי:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

<u>הגדרה</u>

(X,Y) נקרא מ"מ נורמלי דו ממדי אם פונקצית הצפיפות שלו היא:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

הקווים $f(x,y)=c$ השקולים לקווים $\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=k$

הם אליפסות בעלות יחס צירים קבוע סביב הנקודה (μ_1,μ_2).

(X,Y) זוהי התפלגות נורמלית דו ממדית עם הפרמטרים $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ כאשר $|\rho|<1$.

<u>תכונות של ההתפלגות הנורמלית הדו ממדית</u>

1. $f(x,y)$ פונקצית צפיפות, כלומר $f(x,y)\geq 0$ וגם $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=1$.
2. $X\sim N(\mu_1,\sigma_1),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2)$. בדרך כלל משתנים אלו תלויים.
3. $\operatorname{cov}(x,y)=\rho\sigma_1\sigma_2$ ולכן $\rho(x,y)=\rho$.
4. קיים סיבוב בזווית α מסוימת שמעביר את (X,Y) ל-(U,V), כאשר U,V משתנים מקריים מפולגים נורמלית ובלתי תלויים.
5. כל טרנספורמציה ליניארית הפיכה של (X,Y) מביאה למשתנה (U,V) שהוא נורמלי דו ממדי.

<u>הפונקציה האופיינית של מ"מ מקרי X:</u>

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int e^{itX}f_X(x)dx$$

תכונות:

1. $\varphi(t)$ מוגדרת לכל t.
2. $|\varphi(t)|\leq 1$
3. $\varphi_{aX+b}(t)=E^{i(aX+b)t}=Ee^{iatX}\cdot e^{ibt}=e^{ibt}E^{iatX}=e^{ibt}\varphi(at)\Leftarrow$ $\boxed{\varphi_{aX+b}(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)}$
4. מתקיים: $\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)=Ee^{-itX}=\overline{Ee^{-itX}}=\overline{\varphi_X(t)}$ אם X סימטרי אזי $\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(t)=\overline{\varphi_X(t)}$, ואז $\varphi_X(t)$ ממשי.

משפט

פונקציה אופיינית של קונבולוציה של התפלגויות היא מכפלת הפונקציות האופייניות.

תוחלת מותנית וחזאים

לפעמים בהינתן X=x, (X מ״מ), אנו רוצים לחזות את ערך המשתנה המקרי Y, כלומר מחפשים y_0 שייתן מינימום לפונקציה $E\left((y-y_0)^2 \mid X=x\right)$.

כבר ראינו כי $\min_a E(Y-a)^2 = E(Y-EY) = \mathrm{var}(Y)$, כלומר המינימום מתקבל עבור $a=EY$.

אותו דבר מתקיים כאשר המשתנה תלוי בX, כלומר, ה y_0 הנותן את המינימום ל- $E\left((y-y_0)^2 \mid X=x\right)$ הוא בדיוק $E(Y \mid X=x)$.

באופן כללי: $E(Y \mid X)$ הוא החזאי הכללי של Y בהינתן X.

חזאים ליניאריים

יהיו שני מ״מ X ו-Y. נניח שלא ידועה ההתפלגות המשותפת או שקשה לחשב את $E(Y \mid X=x)$. נניח שידועים μ_X, μ_Y, וכן השונויות ${\sigma_X}^2, {\sigma_Y}^2$ ומקדם המתאם $\rho(X,Y)$.

נחפש עתה מספרים a,b, כך ש: $E\left(Y-(a+bX)\right)^2$ מהווה מינימום.

החזאי הליניארי הטוב ביותר עבור Y בהינתן X הוא $Y = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$