גירסה 1.00 - 29.5.2002

מבוא להסתברות והתפלגויות - סיכום נקודות

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו הערות ותיקונים אל המחבר.

<u>ניסוי אקראי</u>

ניסוי אקראי זוהי פעולה, אירוע או ניסוי שתוצאותיו אינן ידועות מראש, אבל הן לקוחות מתוך אוסף תוצאות אפשריות.

<u>הגדרה</u>

מרחב המידגם: זהו אוסף התוצאות של ניסוי אקראי נתון.
מרחב המידגם מסומן בדרך כלל ב Ω.

<u>מאורעות</u>

מאורע הוא תת קבוצה של מרחב מידגם.

אוסף F של מאורעות (תת קבוצה של Ω) חייב לקיים את הדרישות הבאות:

1. $\Omega \in F$
2. אם קבוצה A באוסף, גם המשלים שלה באוסף.
   ניסוח מתמטי: אם $A \in F$ אזיי גם $A^c \in F$.
3. F היא קבוצה המכילה חלק (או את כל) מתתי הקבוצות האפשריים מA.

אם $A_1, A_2, \ldots,$ נמצאות בF, גם $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

מתכונות אלו נובעות תכונות נוספות של F:

4. הקבוצה הריקה היא גם בF. $\phi \in F$
5. $A_1, A_2, \ldots \in F$ אזיי גם $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

<u>הערה</u> בתורת הקבוצות קוראים לאוסף F כזה של קבוצות σ-אלגברה של קבוצות.

<u>הסתברות</u>
זוהי פונקציה ממשית על אוסף המאורעות.

$$P : F \to R$$

המקיימת:

1. $0 \le P(A) \le 1$ לכל $A \in F$
2. $P(\Omega) = 1$ וגם $P(\phi) = 0$
3. אם $A_1, A_2, \ldots$ מאורעות זרים בזוגות, אזיי $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

<u>הגדרה</u>

מאורעות A,B זרים אם החיתוך שלהם ריק.

<u>הגדרה</u>

מאורעות $A_1, A_2, \ldots$ נקראים זרים בזוגות אם כל זוג בהם הוא זוג זר.

הגדרה

מאורע נקרא "פשוט" או "אלמנטרי" אם הוא מכיל מכיל רק איבר אחד מ Ω.

A={w}

למשל, בהטלת קוביות, מאורע פשוט הוא למשל A={(6,6)}

הגדרה

Ω נקרא המאורע הוודאי.
ϕ נקרא המאורע הבלתי אפשרי.

- יכול להיות מאורע שההסתברות שלו היא 0, אך הוא איננו המאורע הבלתי אפשרי.

מרחב הסתברות

זהו כינוי לשלישיה (Ω, F, P) שהכרנו.
מרחב הסתברות בדיד הוא מרחב שבו יש מספר סופי או בן מניה של איברים ב Ω.
דוגמא: בהטלת מטבע, $\Omega=\{H,T\}$.
במרחב הסתברות רציף אוסף האיברים ב Ω הוא רציף, למשל, בחירת מספר אקראי בקטע [0,1].

הגדרה

מרחב הסתברות ייקרא אחיד או סימטרי כאשר $\forall w, P(\{w\})$ שווה, כלומר, לכל מאורע פשוט אותה הסתברות.

הגדרה

$$B-A=\{x\in\Omega \mid x\in B, x\notin A\}$$
$$B-A=B\bigcap A^C$$

תכונות נוספות של הסתברות

$$P(B-A)=P(B)-P(A\bigcap B)$$
(because $B=(B-A)\bigcup(B\bigcap A)$)

מתקיים: $P(B)=P(B-A)+P(B\bigcap A)$.

סימון

נציג סימון נוסף לחיתוך בין קבוצות: $A\bigcap B=AB$.

טענה

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

טענה

אם A וB בלתי תלויים אז $P(AB)=P(A)P(B)$

<u>הסתברות גיאומטרית מותנית</u>

ללא הגבלות, מתקיים: $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$.

נניח שידוע שקרה B, מהי ההסתברות שקרה A?

$$P(A\mid B)=\frac{S_{A\cap B}}{S_B}$$

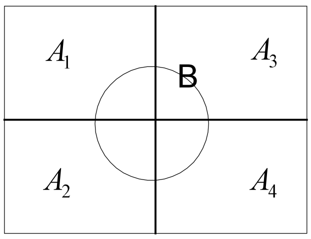
<u>הסתברות מותנית לא גיאומטרית</u>

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$$

<u>נוסחת הכפל</u>

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1\mid A_2A_3)P(A_2A_3)=P(A_1\mid A_2A_3)P(A_2\mid A_3)P(A_3)$$

<u>נוסחת ההסתברות השלמה</u>



<u>תנאים</u>

1. המאורעות זרים בזוגות.
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.
3. $\forall i,P(A_i)>0$.

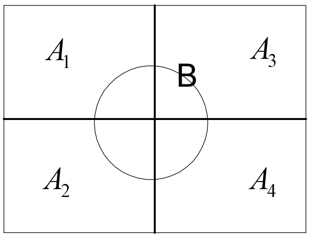
יהי B מאורע כלשהו, אזי BA_i זרים וגם $\bigcup_{i=1}^{\infty}BA_i=B$ (גם זרים בזוגות). איננו דורשים שB יחתוך את כל ה A_i השונים.

לכן:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$$

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)}$$

<u>נוסחת בייס (Bayes)</u>



ידוע שאירוע מסוים קרה בB. מה ההסתברות שנחתנו ב A_i מסוים?

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}}$$

<u>אי תלות של מאורעות</u>

<u>הגדרה</u>

A וB בלתי תלויות אם:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad P(A^c \mid B) = P(A)$$
$$P(B \mid A) = P(B) \quad P(B^c \mid A) = P(B)$$

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A)}$$

מההגדרה:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$
$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Downarrow$$
$$P(AB) = P(A)P(B)$$

המאורע הוודאי Ω והמאורע הבלתי אפשרי ϕ לא תלויים בשום מאורע:

<u>אי תלות של שלושה מאורעות</u>

<u>הגדרה</u>

A,B,C יקראו בלתי תלויים אם:

1. כל זוג ביניהם הוא בלתי תלוי.
2. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ ($P(C \mid AB) = P(C) \Leftrightarrow$).

משתנים אקראיים (מקריים)

הגדרה

משתנה אקראי (מ"מ, מ"א) הוא מספר ממשי המצורף לכל תוצאה של ניסוי (כלומר לכל איבר ב Ω) ומצרפים אליו את ההסתברות של התוצאות שנותנות אותו.

משתנים מקריים ידועים

משתנה ברנולי (התפלגות ברנולי) זהו משתנה שמקבל ערכים 1 או 0 בהתאם ל"הצלחה" בסיכוי P ולכישלון בסיכוי 1-P. משתנה זה מסומן כך: X~B(P).

משתנה אקראי בינומי

מתבצעים n ניסויים בלתי תלויים שבכל אחד מהם מקבלים "הצלחה" בהסתברות p, (0<p<1) או "כישלון" בהסתברות q=1-p. X יסמן את מספר ההצלחות בn הניסויים הללו.
X הוא משתנה ברנולי אם

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \text{Histabrut: p} \\ 0 & \text{Histabrut: 1-p} \end{bmatrix}$$

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$

נראה כי:

$$\sum_{k=0}^{n} P(x=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

משתנה מקרי גיאומטרי

נתונה סידרה של ניסויים בלתי תלויים עם "הצלחה" בסיכוי p בכל אחד מהם.
נסמן בX את מספר הניסויים הדרוש על מנת לקבל הצלחה ראשונה.

$$P(X=k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{failed in the first k-1 tries}} \cdot p$$

נראה כי סכום ההסתברויות הוא 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

התפלגות פואסונית (Poisson)

הגדרה

למשתנה מקרי X יש התפלגות פואסונית אם $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, k = 0,1,2,\ldots$
ההתפלגות הפואסונית מקרבת די טוב מספר אירועים שחלו בפרק זמן מסוים.
λ מבטא את המספר הממוצע של האירוע בפרק הזמן הנ"ל.

<u>הקירוב הפואסוני למשתנה הבינומי</u>

מסתבר כי בהתפלגות בינומית, אם n גדול למדי והגודל np בעל גודל סביר (4,5,...), כאשר n זהו מספר הניסויים ו-p זהו הסיכוי להצליח בניסוי בודד, אזי המשתנה הבינומי הוא "בערך" פואסוני, עם $\lambda = n \cdot p$, כלומר:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!}\cdot e^{-np}$$

<u>משתנה בינומי שלילי</u>

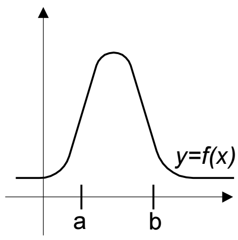
משתנה בינומי שלילי הוא הרחבה של המשתנה הגיאומטרי.
בסדרת ניסויים בלתי תלויים כנ"ל עם פרמטר p, X יבטא את מספר הניסויים לקבלת r הצלחות.
r=1,2,3,...

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)}\cdot p=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{(k-1)-(r-1)}$$

$$k=r,r+1,r+2,...$$

<u>משתנים מקריים רציפים</u>

משתנה אקראי יכול גם לקבל רצף של ערכים.
למשל: מרחק החטאה ממטרה, זמן בין פעימות מונה, גובה אדם שנבחר באקראי.
במקרה הרציף נגדיר את ההתפלגות כך: קיימת פונקציה ממשית $f(x)\ge 0$ כך שמתקיים $P(X\in A)=\int_A f(x)dx$ כאשר A קבוצת מספרים ממשיים.



למשל, בציור הנ"ל, ההסתברות שהמשתנה הרציף יהיה בין a ל-b היא $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$.

חייב להתקיים עבור כל משתנה רציף כי השטח מתחת לגרף יהיה 1.

f(x) נקראת פונקציית הצפיפות של המשתנה האקראי X.
נגדיר גם את פונקציית ההסתברות המצטברת של X.

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

אפשר לראות שאם f(x) רציפה אזי F(x) גזירה ומתקיים $F'(x)=f(x)$.

<u>פונקצית צפיפות f(x) מקיימת:</u>

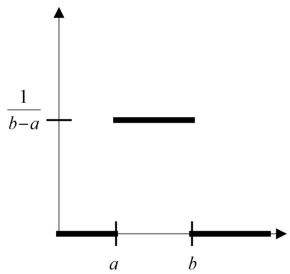
1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$, בפרט אם A=[a,b] אזי זהו $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$. אם A הוא מספר קטעים לא רציפים, אזיי ההסתברות היא חיבור האינטגרלים על כל אחד מהקטעים.

<u>משתנים מקריים רציפים ידועים</u>

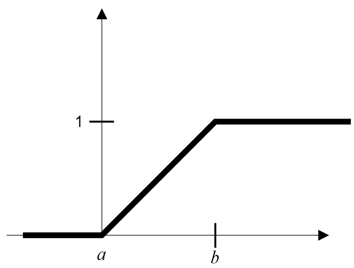
<u>משתנה מקרי אחיד (התפלגות אחידה)</u>

זהו משתנה המקבל ערך קבוע בין [a,b] וביתר הערכים 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & else \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

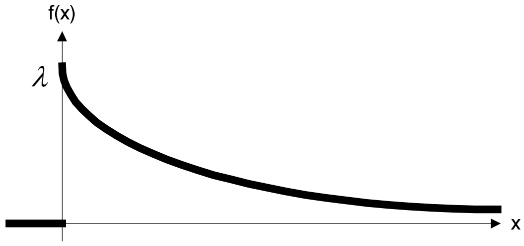


התפלגות מערכית

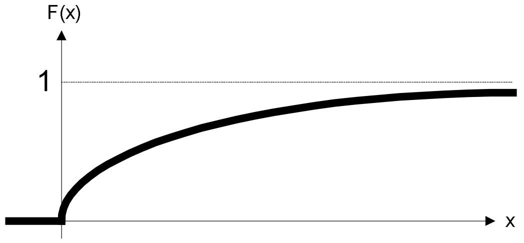
אומרים שX מתפלג מערכית אם פונקצית הצפיפות שלו f(x) היא:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

כאשר $\lambda>0$ פרמטר.
התפלגות זו מתארת לא רע את הזמן בין שני אירועים שקוראים לאורך ציר זמן.
(פעימות מונה, מעבר מכוניות בנקודה מסוימת וכדומה).



$$F(x)=\int_0^X \lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{-\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$$



למשתנה המערכי יש תכונה מעניינת הנקראת חוסר זיכרון (Memory Less).

$$P(T>s+t\,|\,T>t)=P(T>s)$$

התפלגות גמא (Γ) / התפלגות ארלינג

אומרים שהמשתנה X מתפלג גמא עם פרמטרים λ,n , כאשר $n\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{R},\lambda>0$ אם פונקצית הצפיפות שלו היא:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^{n-1} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

משפט

אם יש לנו סידרת מאורעות ("התרחשויות") שבכל קטע זמן באורך t>0 היא מפולגת פואסונית עם פרמטר λt אז הזמן ממקום מסוים למאורע הn מתפלג גמא עם פרמטרים n,λ . כלומר על כל קטע באורך t המ"מ $\lambda(t)$ של מספר המאורעות שקראו באותו קטע, יש לו הסתברות

$$P(\lambda(t)=k)=\frac{(\lambda t)^t}{k!}\cdot e^{-\lambda t}\quad ,k=0,1,2,...$$

נזכור ש λt הוא מספר המאורעות הממוצע של מאורעות שקראו בפרק זמן t. מכאן יוצא כי λ הוא מספר המאורעות הממוצע של מאורעות ליחידות זמן.

תזכורת

עבור משתנה רציף יש לנו פונקצית צפיפות f(x) ופונקצית ההתפלגות $F(x)=\int_{\infty}^{x} f(t)dt$, ומתקיים:

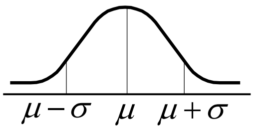
$P(a<x<b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(t)dt$.

התפלגות נורמלית (גאוסית)

X מתפלג נורמלית אם פונקצית הצפיפות שלו היא:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כאשר μ,σ פרמטרים, $\sigma>0, -\infty<\mu<\infty$.



אם $\mu=0, \sigma=1$ אזי קוראים להתפלגות זו התפלגות נורמלית תקנית, ואז מתקיים:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

טענה

$$\boxed{\Phi(-x)=1-\Phi(x)}$$

טענה

אם X משתנה נורמלי עם $\left(\mu,\sigma^2\right)$ אזי $Z=\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ הוא משתנה נורמלי סטנדרטי (תקני).

הגדרה

במשתנה בדיד, ההתפלגות הוגדרה בצורה הבאה:

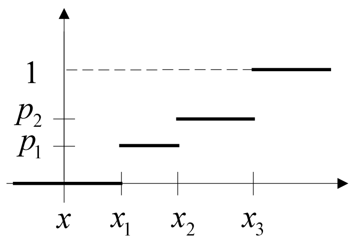
$$P(X=X_i)=P_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i=1$$

ניתן להגדיר פונקצית התפלגות עבור כל X ממשי:

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x} P(X=x_i)=\sum_{x_i\le x} P_i$$

הפונקציה רציפה מימין.



$$P_1 = F(X_1) - F(X_1^-) = F(X_1) - \lim_{x \to x_1^-} F(X)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(F\left(X_i\right) - F\left(X_i^-\right) \right) = 1$$

<u>משתנה מיקרי מעורב</u>

- משתנה שהוא מעין תערובת של מ"מ רציף עם מ"מ בדיד.

נניח כי $F_X^{(C)}$ היא פונקציית התפלגות רציפה ו $F_X^{(D)}$ היא פונקציית התפלגות בדידה. הן מוגדרות לכל X ממשי. נגדיר:

$$F(x) = \alpha \cdot F_X^{(D)} + (1-\alpha) \cdot F_X^{(C)}, 0 < \alpha < 1$$

אפשר לראות ש:

1. $f(x) \ge 0$
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to 0$
3. $\lim_{x \to \infty} f(x) \to 1$

אם למשל $\alpha = \frac{1}{2}$, אזי $F(x) = \frac{1}{2} F_X^{(D)} + \frac{1}{2} F_X^{(C)} = \frac{F_X^{(D)} + F_X^{(C)}}{2}$.

<u>בעיה</u>

נתונה פונקציית התפלגות לא רציפה (אבל רציפה מימין).
יש לפרק אותה למרכיבה הבדיד ולמרכיבה הרציף.

<u>פתרון</u>

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} F(x_i) - F(x_i^-)$$

$$F(x) = \alpha F^{(D)} + (1-\alpha) F^{(C)}(x)$$

נסתכל על קפיצה אחת:

$$F(x_i) - F(x_i^-) = \alpha \underbrace{\left[F^{(D)}(x_i) - F^{(D)}(x_i^-) \right]}_{P_i}$$

$$P(X = x_i) = P_i = \frac{F(x_i) - F(x_i^-)}{\alpha}$$

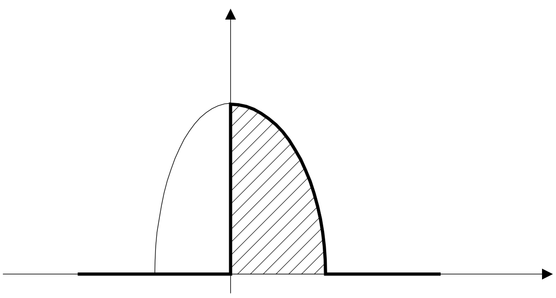
קיבלנו את פונקצית ההסתברות P_i של המשתנה הבדיד.

ומכאן:

$$\boxed{\begin{aligned} F^{(D)}(x) &= \sum_{x_i \le X} P(x_i) \\ F^{(C)}(x) &= \frac{F(x)-\alpha F^{(D)}(x)}{1-\alpha} \end{aligned}}$$

התפלגות קטומה

ניקח פונקצית התפלגות או צפיפות ידועה, ונרצה להחיל אותה על קטע מסוים בלבד, ולנרמל אותה כך שהפונקציה תהיה פונקצית התפלגות.



נניח שנתונה לנו פונקצית צפיפות *f(x)*. $\tilde{f}(x)$ מתנהגת כך: בקטע מסוים כמו *f* ובשאר הקטעים 0.
אזי:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\int_a^b f(x)dx} = \dfrac{f(x)}{F(a)-F(b)} & a \le x \le b \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \\ 0 & x < a \end{cases}$$

התפלגות של פונקציה ממשית של משתנה מקרי

אם X משתנה מקרי וg פונקציה ממשית אז גם $Y = g(X)$ היא משתנה מקרי.

משפט

אם X משתנה אקראי רציף עם פונקצית התפלגות רציפה $F_X(x)$ שמונוטונית עולה ממש על (a,b).
(a וb יכולים להיות גם $-\infty, \infty$), ומחוץ לקטע זה היא 0 או 1, אז המשתנה $a \le X \le b, Y = F_X(x)$ מפולג $u(0,1)$.

מסקנה

כדי להגריל X בפילוג רצוי F, נגריל תחילה Y מתוך $u(0,1)$ ועליו נפעיל $X = F^{-1}(y)$ ונקבל את הפילוג הרצוי.

דוגמא

רוצים לדמות משתנה מקרי מערכי עם פרמטר λ. $X \sim Exp(\lambda)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F = 1 - e^{-\lambda x}$$

שלב א'

מגרילים $Y \sim u(0,1)$ ומפעילים עליו את F^{-1}.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = y$$

כעת נמצא את X כפונקציה של Y:

$$e^{-\lambda x} = 1 - y$$

$$-\lambda x = \ln(1-y)$$

$$\boxed{x = \frac{-\ln(1-y)}{\lambda}} = F^{-1} > 0$$

על כל Y המפולג אחיד, נקבל בעזרת הנוסחה X המפולגת מערכית.

דוגמא

רוצים לדמות מ"מ X עם פילוג נורמלי תקני.

$$Z = X \sim N(0,1)$$

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$F_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}dt}$$

המחשב יודע לפתור משוואות מהצורה $F_Z(x) = y$ לכל y והוא מוצא לנו את $X = F_Z^{-1}(y)$. ובכן, מגרילים y מתוך $u(0,1)$. נותנים למחשב לפתור את המשוואה $F_X(x) = y$, כלומר מוצאים את x. X זה מפולג נורמלית סטנדרטית, כלומר $X = F_X^{-1}(y)$. כבר ראינו שאם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ הוא נורמלי סטנדרטי. לכן אם הגרלנו בתהליך שלמדנו $Z \sim N(0,1)$ אזי נפעיל עליו $\sigma z + \mu$ ונקבל משתנה מפולג נורמלי $N(\mu,\sigma^2)$.

<u>הדמייה של משתנה בדיד</u>

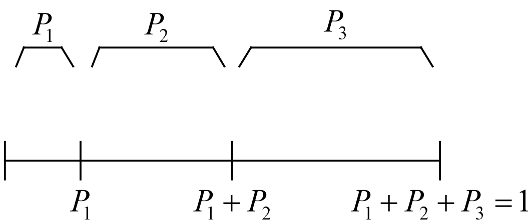
א.
נניח X משתנה ברנולי.

$$X=\begin{cases}1 & Histabrut(P)\\ 0 & Histabrut(1-P)\end{cases}$$

כדי לדמות משתנה כזה במחשב, נגריל y בין 0 ל1.

$$X=\begin{cases}1 & 0<y<P\\ 0 & P<y<1\end{cases}$$

ב.
אם X משתנה אקראי שמקבל ערכים x_1,x_2,x_3 בהסתברויות P_1,P_2,P_3 בהתאמה, נגריל אותו בצורה הבאה:



בהתאם לקטע בו נפל המשתנה y, נגדיר לאיזה ערך בדיד נתאים אותו.

ג.
<u>סיכום</u>

אם יש לנו משתנה בדיד X עם פונקציית התפלגות:

$$P(X=X_1)=P_1 \qquad P(X=X_2)=P_2$$
$$P(X=X_3)=P_3 \quad \dots \quad P(X=X_n)=P_n$$

נגריל y מפולג אחיד בין 0 ל1.

$$X=\begin{cases}X_1 & y<P_1\\ X_2 & P_1<y<P_1+P_2\\ X_3 & P_1+P_2<y<P_1+P_2+P_3\\ \dots & \dots\\ X_n & P_1+P_2+\dots+P_{n-1}<y<1\end{cases}$$

תוחלת (expectation) של משתנה מקרי

תוחלת של משתנה מקרי בדיד

$$P(X=X_i)=E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}P_iX_i$$

$E(X)$ נקרא גם הממוצע של מ"מ X.

תוחלת של מ"מ מקרי רציף

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

$$p(x\le X<x+dx)=f(x)dx$$

תוחלת של משתנה ברנולי

$$E(x)=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p$$

תוחלת של משתנה בינומי

$$X\sim Bin(n,p)$$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

$$E(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\cdot k=np(p+q)^{n-1}=np$$

תוחלת של משתנה פואסוני

$$X\sim Pois(\lambda)$$

$$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$

$$Ex=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

תוחלת של משתנה גיאומטרי

$$X\sim Geom(P)$$

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p,\qquad k=1,2,...$$

$$Ex=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k=p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-p}\right)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

תוחלת של משתנה מפולג אחיד

$$X \sim u(a,b)$$

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}$$

תוחלת של משתנה מפולג מערכית

$$X \sim Exp(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$Ex = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

תוחלת של משתנה מפולג נורמלית

$$X \sim Norm(0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$Ex = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$