

גירסה 1.00 – 18.3.2002

אנליזה ווקטורית

מסמך זה הורד מהאתר <http://underwar.livedns.co.il>.
אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר.
מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע
המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת,
המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

כל הזכויות שמורות לניר אדר

Nir Adar

Email: underwar@hotmail.com

Home Page: <http://underwar.livedns.co.il>

ידע קודם הנדרש להבנת המסמכים הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5
יחידות, שליטה בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (או קורס מקביל, דוגמת
אינפי 1), שליטה באינטגרלים כפולים, משולשים, טופוגרפיה ב R^3 , הבנת נושא
פונקציות של מספר משתנים.

אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

אינטגרל קווי מסוג ראשון

שימושים האינטגרל הקווי מהסוג הראשון:

1. תהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה בגרף. נאמר ש $f(x,y)$ זוהי צפיפות מסה של חוט דק בכל נקודה. אם נרצה למצוא את מסת החוט נשתמש באינטגרל קווי מהסוג הראשון לאורך החוט.
2. תהי $f(x,y) > 0, f=f(x,y)$. נניח כי $f(x,y)$ בונה "קרש" בכל נקודה (וכך נוצרת מעין גדר תלת ממדית) ונרצה לחשב את שטח הגדר שנוצרת. גם במקרה זה נשתמש באינטגרל קווי מהסוג הראשונה.

- אינטגרל קווי מהסוג הראשון אינו מושפע מכיוון ההליכה על L .

חישוב אינטגרל קווי מהסוג הראשון

$$\int_c f(x,y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- הביטוי באגף הימני תלוי רק ב t .

אינטגרל קווי מהסוג השני

$$\vec{F} = p(x, y)\vec{i} + q(x, y)\vec{j}$$

$$r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L p(x,y) dx + q(x,y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot r'(t) dt$$

- נניח תמיד ש Q, P הן פונקציות רציפות.
- כיוון ההליכה באינטגרל קווי מסוג שני תלוי בכיוון ההליכה.
- אינטגרל קווי לאורך מסלול – עבודה לאורך מסלול

הגדרה

שדה $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ (רציפות ב D) נקרא שדה משמר אם לכל שתי נקודות A ו B השייכות ל D , מתקיים $\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}$ כאשר c_1, c_2 2 מסלולים כלשהם המחברים את A עם B .

משפט

נתון שדה ווקטורי $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ כאשר $p(x, y), q(x, y)$ רציפות ב-D. שדה $\vec{F}$ משמר אם"מ קיימת פונקציה סקלרית $u(x, y) \in C^1$ כך ש $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

הערות

- $\nabla u(x, y) = \vec{F}$
- אם $\vec{F}$ שדה משמר, מתקיים $\oint \vec{F} d\vec{r} = U(B) - U(A) = 0$.

משפט – תנאי הכרחי לשדה משמר

נתון שדה משמר $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ בתחום D כאשר P, Q רציפות ובנוסף $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, רציפות, אזי $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

הגדרה

נתון תחום D במישור (קבוצה פתוחה וקשירה). D נקרא תחום פשוט קשר אם כל עקום סגור C הנמצא כולו ב-D מכיל אך ורק נקודות השייכות ל-D.

משפט – תנאי מספיק לשדה משמר

נתון שדה $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ בתחום פשוט קשר D כאשר P, Q רציפות ובנוסף $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, רציפות, אם בנוסף $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ אזי השדה משמר.

מציאת פונקציה פוטנציאל

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

- יתכן ששדה לא יהיה פשוט קשר אבל הוא יהיה שדה משמר!!

משפט

נתון שדה ווקטורי $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ בתחום פשוט קשר D, כאשר P, Q רציפות ובנוסף $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, רציפות וקיימות בתחום D פתח (x_0, y_0) אזי מתקיים:

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \oint_K \vec{F} d\vec{r}$$

כאשר K, L שני מסלולים סגורים המקיפים את הנקודה הסינגולרית (x_0, y_0) .

טענה

אם ישנו תחום בעל שתי נקודות סינגולריות אזי מתקיים $\oint L = \oint k_1 + \oint k_2$ כאשר k_1, k_2 מסלולים המקיפים את הנקודות הסינגולריות.

- הטענה נכונה גם עבור n נקודות סופיות.

משפט גרין

נתון שדה ווקטורי $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ בתחום D , כאשר P, Q רציפות ובנוסף

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy \quad \text{אזי: } \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- לא דרשנו שהתחום יהיה פשוט קשר.
- L זוהי השפה של D . כיוון L הוא כזה שהתחום משמאל לכיוון אדם ההולך על L .
- משפט גרין מקשר בין אינטגרל קווי לאינטגרל כפול.

חישוב שטחים בעזרת אינטגרל קווי

אם L מסלול פשוט וסגור,

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \int_L xdy = - \int_L ydx$$

הגדרה

אם ווקטור פונקציה $\vec{F}(t, u) \in C^1$ אזי אומרים שהמשטח חלק.

הגדרה + משפט

נקודה m_0 היא רגולרית אם "מ"מ בנקודה הנ"ל קיים נורמל.

הגדרה

משפט שלם שעליו ניתן להגדיר כיוון מסוים של הנורמל נקרא משטח דו צדדי.

הגדרה

אם S משטח סגור, אזי הכיוון החיובי של המשטח הוא כלפי חוץ.

אינטגרל משטחי מהסוג הראשון

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x(t, s), y(t, s), z(t, s)) \cdot |r'_t \times r'_s| dt ds$$

$$\text{נדרוש ש } f(x, y, z) \text{ תהייה רציפה ושיתקיים } s: \begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \in c^1 \\ z = z(t, s) \end{cases} \text{ (המשטח חלק).}$$

שיעורי מרכז הכובד של משטח

$$x_0 = \frac{\iint_S x \cdot f(x, y, z) ds}{\iint_S f(x, y, z) ds}$$

$$y_0 = \frac{\iint_S y \cdot f(x, y, z) ds}{\iint_S f(x, y, z) ds}$$

$$z_0 = \frac{\iint_S z \cdot f(x, y, z) ds}{\iint_S f(x, y, z) ds}$$

אינטגרל משטחי מהסוג השני

$$\bar{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{I} + Q(x, y, z)\bar{J} + R(x, y, z)\bar{K}$$

נרצה למצוא שטף של שדה ווקטורי A דרך משטח S.

$$s = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \in c^1, \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$(u, v) \in D,$$

$$ds = |r'_u \times r'_v| du dv$$

$$\iint \bar{A} \bar{n} ds = \iint F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \bar{n}(u, v) \cdot |r'_u \times r'_v| du dv$$

חישוב אינטגרל משטחי מהסוג השני

$$I = \iint_{\Delta} F \cdot \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v du dv = \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv$$

דיברגנץ ורוטורהגדרה

תהי $\vec{F} = F_1 \vec{I} + F_2 \vec{J} + F_3 \vec{K} \in c^1$. הרוטור של $\vec{F}$ יוגדר כך:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

משמעות פיסיקלית

$\vec{V}$ היא המהירות הקווית של חלקיק. אם $\text{rot}(\vec{V}) = 0$ המהירות הזוויתית של החלקיק שווה 0.

טענה

אם שדה משמר ושייך ל c^1 , הרוטור שלו הוא 0.

הגדרה

יהי תחום מרחבי D . אם לכל עקום סגור L ניתן לבנות משטח פתוח S ש L יהיה שפתו ו S כולו בתחום, אזי נאמר ש D הוא תחום פשוט קשר.

פוטנציאל

יהיה $\vec{F} \in c^1$ שדה משמר. הפוטנציאל ϕ יתקבל על ידי הנוסחה הבאה:

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_1(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y F_2(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z F_3(x_0, y_0, z) dz$$

הגדרה

נתון שדה $\vec{F} = F_1 \vec{I} + F_2 \vec{J} + F_3 \vec{K} \in c^1$ בתחום D . הדיברגנץ של $\vec{F}$ יוגדר כך:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

סימונים

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{I} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{J} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{K} : \text{ווקטור גזירה:}$$

$$\nabla \phi : \text{גרדיאנט:}$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} : \text{דיברגנץ:}$$

$$\nabla \times \bar{F} = \text{rot}(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} : \text{רוטור:}$$

משפט גאוס

נתון משטח S סגור החוסם תחום תלת ממדי D ונתון שדה ווקטורי:

$$\bar{F} = F_1(x, y, z)\bar{I} + F_2(x, y, z)\bar{J} + F_3(x, y, z)\bar{K}$$

השייך ל c^1 ב D ועל S , אזי

$$\oint_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = \iiint_D \text{div}(\bar{F}) dx dy dz$$

כאשר S משטח חלק ו $\bar{n}$ ווקטור נורמל יחידה הפונה כלפי חוץ.

טענות

$$1. \quad \bar{A} \in c^2 \Leftrightarrow \text{מתקיים } \text{div}(\text{rot} \bar{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$$

$$2. \quad \text{rot}(\text{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$3. \quad \text{div}(\text{grad} \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \text{ לפלסיאן.}$$

$$4. \quad \text{אם } \text{rot}(\bar{A}) = 0 \text{ בשדה אין מערבולות.}$$

$$5. \quad \text{אם } \text{div}(\bar{A}) = 0 \text{ בשדה אין מקורות או שקעים.}$$

חוק גאוס

$$\iint_S \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \bar{n} ds = \begin{cases} 4\pi & \text{if } (0,0,0) \text{ in } D \\ 0 & \text{if } (0,0,0) \text{ not in } D \end{cases}$$

משפט סטוקס

נתון משטח חלק ופתוח S עם שפתו C . אם $\bar{F} = F_1(x, y, z)\bar{I} + F_2(x, y, z)\bar{J} + F_3(x, y, z)\bar{K}$

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{F}) \cdot \bar{n} ds \text{ אזי } C \text{ ועל } S, \text{ הוא שדה ווקטורי השייך ל } c^1 \text{ על } S \text{ ועל } C,$$

כיוון ההליכה על C : נלך על מסלול כך שנראה את המשטח מצד שמאל. כיוון הראש הוא כיוון הנורמל (כלל הבורג – סיבוב בורג ימני).