גירסה 1.00 – 18.3.2002

חדוו"א 2מ – חלק שני

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

ידע קודם הנדרש להבנת המסמכים הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5 יחידות, שליטה בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (או קורס מקביל, דוגמת אינפי 1), שליטה בחומר המופיע בחלק הראשון בסידרה זו.

אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

הדיפרנציאל השלם

תהי u=f(x,y) רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n, בסביבת נקודה m_0. הדיפרנציאל שלה הוא

$$du = f'_x dx + f'_y dy$$
$$d^2u = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$
$$d^3u = u'''_{xxx}dx^3 + 3u'''_{xxy}dx^2dy + 3u'''_{xyy}dxdy^2$$
$$d^n u = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \tfrac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n u$$

משפט (נוסחת טיילור)

נתונה פונקציה f(x,y) השייכת ל c^{n+1} בסביבת (x_0, y_0). אם הנקודה $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ נמצאת בסביבה זו אזי קיים $0 \le \theta \le 1$ כך ש:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_n$$
$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}$$

בעיות מקסימום מינימום

משפט (תנאי הכרחי)

תהיי $f(x,y) \in c^1$ בסביבת (x_0, y_0) ונניח ש (x_0, y_0) נקודת קיצון, אזי מתקיים: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

הגדרה

נקודה (x_0, y_0) נקראת חשודה לקיצון אם:

א. $f(x,y) \in c^1$ בסביבת (x_0, y_0) ומתקיים $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

ב. f(x,y) מוגדרת בסביבת (x_0, y_0) אך $f(x,y) \notin c^1$ בסביבת (x_0, y_0).

משפט

נניח (x_0, y_0) נקודה חשודה לקיצון ו $f(x,y) \in c^2$ בסביבת (x_0, y_0). אם מתקיים גם כי $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, אזי נסמן:

$$a = f''_{xx}(x_0, y_0), b = f''_{xy}(x_0, y_0), c = f''_{yy}(x_0, y_0), \Delta = ac - b^2$$

א. אם $\Delta > 0, a < 0$, אזי (x_0, y_0) נקודת מקסימום.

ב. אם $\Delta > 0, a > 0$, אזי (x_0, y_0) נקודת מינימום.

ג. אם $\Delta < 0$, אזי (x_0, y_0) איננה נקודת קיצון אלא אוכף.

<u>מקסימום מינימום גלובליים</u>

תהיי f(x,y) פונקציה, D תחום חסום וסגור.
לפי משפט ווישטרס הפונקציה מקבלת בתחום זה את ערכה המקסימלי והמינימלי.
לכן נבדוק ראשית את התחום הפתוח D, ולאחר מכן נבדוק את שפות התחום, ובסופו של דבר נבדוק גם את ערכי הפונקציה בקצוות המשטח.

<u>מינימום מקסימום עם אילוץ</u>

נתונים z=f(x,y) כאשר הנקודות (x,y) מקיימת את האילוץ g(x,y)=0 ויש למצוא מינימום ומקסימום של f(x,y).
דוגמא: z=x-y כאשר $x^2+y^2=25$.

<u>שיטות לפתרון</u>

1. הצבה: נחלץ את y ונציב במשוואה השניה.
2. פרמטרזציה:

$$x=5\cos(t)$$
$$y=5\sin(t)$$
$$-\pi\le t\le\pi$$

$$z=5\cos(t)-5\sin(t)$$
$$z'=-5\sin(t)-5\cos(t)=0$$
$$tg(t)=-1$$
$$t_1=\frac{-\pi}{4},t_2=\frac{3\pi}{4}$$

אם $t=\frac{-\pi}{4}$: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\Leftarrow$ $z=5\sqrt{2}$ מקסימום מוחלט.

אם $t=\frac{3\pi}{4}$: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\Leftarrow$ $z=-5\sqrt{2}$ מינימום מוחלט.

3. כופלי לגרנג'

<u>משפט</u>

תהיינה $f(x,y),g(x,y)\in c^1$ ונניח שהנקודות (x,y) מקיימות את האילוץ g(x,y)=0.
אם (x_0,y_0) נקודת מינימום/מקסימום עם האילוץ g(x,y)=0 של הפונקציה z=f(x,y) אזי:

$$\left\{\begin{matrix} f'_x+\lambda g'_x=0 \\ f'_y+\lambda g'_y=0 \\ g(x,y)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow at\ \ (x_0,y_0)$$

λ מגדירה את נקודות הקיצון.

אינטגרל כפול

פונקציות אינטגרביליות

- רק לפונקציות חסומות בתחום R יכול להיות אינטגרל כפול. לפיכך, אם f(x,y) אינטגרבילית בתחום מעל R אזי היא חסומה שם.
- אם f(x,y) רציפה במלבן $a \le x \le b, c \le y \le d$ אזי היא אינטגרבילית במלבן.

הגדרה

אומרים שפונקציה f(x,y) רציפה כמעט בכל מקום במלבן R אם f(x,y) רציפה בתחום מלבני R וחסומה ולא רציפה על מספר סופי של עקומים מהצורה y=y(x) או x=x(y).

משפט

פונקציה חסומה ורציפה כמעט בכל מקום בR אינטגרבילית שם.

החלפת סדר האינטגרציה באינטגרל כפול
דרך הפעולה:
1. נצייר את התחום.
2. ביטאנו את y כפונקציות של x. ונראה את הקווים הנוצרים. כך ניצור את התחום.
3. חשוב לצייר את התחום, ובמידה ואינו נורמלי לחלקו לחלקים נורמלים ולטפל בכל אחד מהם בנפרד.

משפט

נתונה f(x,y) רציפה בתחום D ועל שפתו. נניח שנתונות הטרנספורמציות x=x(u,v), y=y(x,y) ממישור (u,v) למישור (x,y). נניח כי הטרנספורמציות 1:1 ושייכות ל c^1.
נסמן ב Δ את התחום במישור (u,v) שעבר לתחום D במישור (x,y). אזי מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|dudv, J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

- חשוב לא לשכוח את היעקוביאן.

טענה

נביט ב $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$. יעקוביאן יסומן במקרה זה ב J^*. $J^*=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$

ומתקיים $J\cdot J^*=1$

קורדינטות אליפטיות

אם נתון ביטוי מהצורה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$ נאמר: $\begin{cases}x=ar\cos(\theta)\\ y=ar\sin(\theta)\end{cases}$ והיעקוביאן יהיה שווה: J=abr.

הלמינסקטה של ברנולי

$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), a>0$

מתקיים: שטח הלמינסקטה שווה a^2.

שימושים של אינטגרל כפול

1. חישוב שטחים: שטח התחום D הוא $S(D)=\iint_D dxdy$
2. נפח של גוף: יהי (V) גוף החסום מלמעלה על ידי המשטח z=f(x,y) ומלמטה על ידי מישור xy. אפ ההיטל של המשטח z=f(x,y) על מישור xy הוא התחום D, אזי נפח הגוף יהיה: $V=\iint_D f(x,y)dxdy$.
3. מסה של גוף (פלטה דקה): יהי D גוף מישורי בעל צפיפות מישורית $\rho(x,y)$. המסה של D שווה ל: $m=\iint_D \rho(x,y)dxdy$.
4. מרכז מסה: יהי D גוף מישורי בעל צפיפות $\rho(x,y)$ בכל נקודה. קורדינטות מרכז המסה יהיו: $x_0=\frac{\iint_D x\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}, y_0=\frac{\iint_D y\cdot\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$.

אינטגרלים משולשים

תנאי מספיק לאינטגרביליות

אם f(x,y,z) רציפה אזי היא אינטגרבילית.

משפט

אם f(x,y,z) חסומה בV ורציפה בV פרט למספר סופי של משטחים מהצורה z=z(x,y) או y=y(x,z) או x=x(y,z) אזי f(x,y,z) אינטגרבילית.

הערות

- המשמעות של הביטוי $\iiint_V dxdydz$ הינו נפח.
- ניתן לחשב נפחים בעזרת אינטגרל כפול ובעזרת אינטגרל משולש (אותו חישוב למעשה).

משפט

אם V תחום נורמלי ביחס למישור xy וf(x,y,z) רציפה בV אזי:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

קורדינטות כדוריות

כאשר נראה ביטוי מהצורה $x^2+y^2+z^2$ יהיה הגיוני לעבור לקורדינטות כדוריות.

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r < R \end{cases}$$

$$J = r^2\sin\varphi$$

קורדינטות גליליות

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$J = r$$

- אם לגוף סימטריה כדורית אז נשתמש בקורדינטות כדוריות.
- אם לגוף יש סימטריה מסביב לצירים נשתמש בקורדינטות גליליות.
- ביטוי כגון x^2+y^2 יכוון אותנו לשימוש בקורדינטות גליליות.
- ביטוי כגון $x^2+y^2+z^2$ יכוון אותנו לשימוש בקורדינטות כדוריות.

מרכז המסה של גוף

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_V x\cdot f(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz}$$

$$y_0 = \frac{\iiint\limits_V y\cdot f(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz}$$

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_V z\cdot f(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz}$$

f(x,y,z) היא פונקצית צפיפות הגוף ליחידת נפח.