גירסה 1.00 – 1.4.2002

חדוו"א 2מ – חלק ראשון

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

זהו החלק הראשון בסדרת מסמכים המסכמים את עיקרי הקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2.
ידע קודם הנדרש להבנת המסמכים הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5 יחידות, ושליטה בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (או קורס מקביל, דוגמת אינפי 1).

אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

<u>שטח פירמידה</u> - $\frac{1}{6}(\overline{A}x\overline{B})\cdot\overline{C}$

אם נתונים שני ישרים ונרצה למצוא את המרחק ביניהם נבנה על ישר אחד מישור שמקביל לישר 2, נמצא נקודה על ישר 2, ונחשב את המרחק ממנה אל המישר (על ישר 1).

<u>נקודה פנימית</u>

(x_0, y_0) נקראת פנימית אם (x_0, y_0) שייכת לA וגם ניתן להקיף את (x_0, y_0) בסביבה שכל הנקודות בה עדיין שייכות לA.

<u>נקודה חיצונית</u>

(x_0, y_0) נקראת חיצונית לA אם היא אינה שייכת לA וניתן למצוא סביבה בה כל הנקודות אינן שייכות לA.

<u>קבוצה פתוחה</u>

נקודה שכל הנקודות שלה הן נקודות פנימיות.

<u>נקודת הצטברות</u>

(x_0, y_0) נקראת נקודת הצטברות לקבוצה A אם בכל סביבה של (x_0, y_0) ניתן למצוא לפחות נקודה אחת השייכת לA (פרט ל (x_0, y_0) עצמה).

- כל נקודה פנימית היא גם נקודת הצטברות.
- נקודות שפה במעגל הן נקודות הצטברות.

<u>הגדרה</u>

נתונה קבוצה A. הקבוצה $\overline{A}$ (A סגור) היא הקבוצה המורכבת מכל נקודות ההצטברות של A.

<u>קבוצה סגורה</u>

קבוצה A נקראת סגורה אם $A = \overline{A}$.

<u>קבוצה חסומה</u>

קבוצה A נקראת חסומה אם ניתן לכסות אותה במעגל בעל רדיוס סופי.

<u>קבוצה קשירה</u>

קבוצה פתוחה A נקראת קשירה אם בין כל שתי נקודות השייכות לA ניתן לבנות קו פולינומיאלי הנמצא כולו בA.

<u>תחום</u>

תחום זוהי קבוצה פתוחה וקשירה.

<u>תחום סגור</u>

אם D הוא תחום, ל $\overline{D}$ נקרא תחום סגור.

פונקציות בעלות יותר ממשתנה אחד

גבולות חוזרים

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} \left(f(x,y)\right) = L_1$$

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} \left(f(x,y)\right) = L_2$$

ראשית נחשב את הגבול הפנימי ולאחרי את החיצוני. ניתן להשתמש בשיטה זו רק אם הגבול הפנימי קיים.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left(f(x,y)\right) = L$$

אם $L_1 = L_2$ לא בהכרח קיים L.
אם $L_1 \neq L_2$ לא קיים L.
אם L קיים, לא בהכרח קיימים L_1, L_2.

משפט וירשטרס
פונקציה רציפה בתחום סגור וחסום מקבלת בו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר.

משפט ערך הביניים
אם f(x,y) רציפה בתחום D וגם $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2) < 0$ אזי קיימת נקודה (x_0,y_0) השייכת לD כך ש $f(x_0,y_0)=0$.

טענה
קיום נגזרות חלקיות בנקודה (x_0,y_0) לא מבטיח רציפות בנקודה זו.

צורות משטחים

חרוט דו צדדי: $x^2+y^2-z^2=0$

חרוט עליון: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

פרבולואיד: $x^2+y^2-z=0$ אחד מהמקדמים אינו בריבוע.

פרבולואיד אלפטי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$

היפרבולואיד חד יריעתי: $x^2+y^2-z^2=c>0$

היפרבולואיד דו יריעתי: $x^2+y^2-z^2=c<0$

גליל: $x^2+y^2=R^2$

גליל אליפטי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a \neq b$

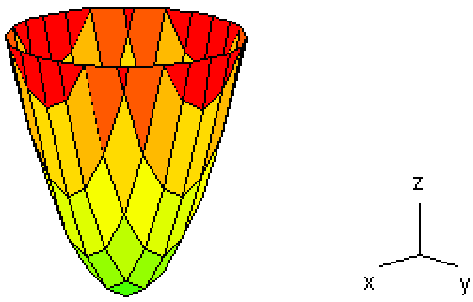
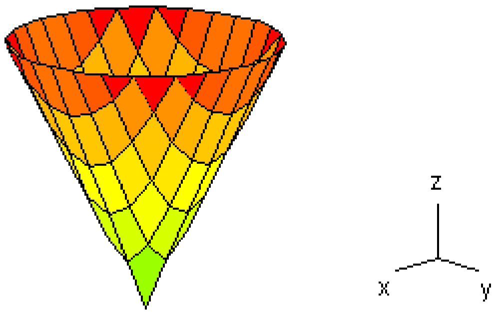
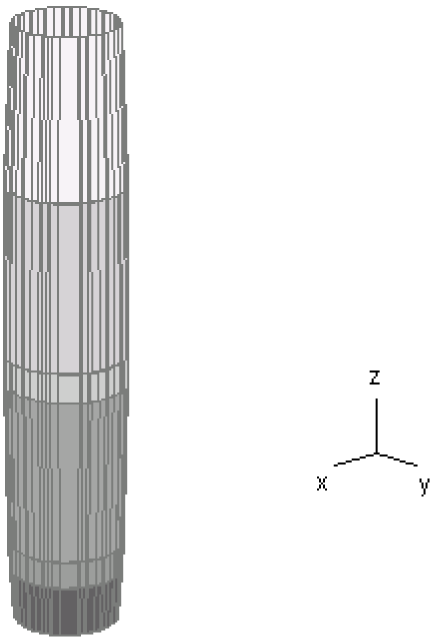
כדור: $x^2+y^2+z^2=R^2$ נדרוש שהמקדמים יהיו חיוביים ושווים.

אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. מקדמים חיוביים אבל לא שווים.

נקודה בודדת: כדור/אליפסואיד שרדיוסו 0.

מישור: Ax+By+Cz+D=0

<u>המחשות</u>

פרבולואיד	
חרוט	
גליל	

<u>הגדרה</u>

f(x,y) נקראת דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אם:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$when \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \varepsilon \to 0$$

<u>משפט</u>

עבור פונקציה f(x,y) הדיפרנציאבלית בנקודה (x_0, y_0), $A = f_x'(x,y), B = f_y'(x,y)$

<u>משפט</u>

אם הפונקציה f(x,y) דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) אזי קיימות הנגזרות החלקיות לפי x ולפי y בנקודה זו.

<u>משפט</u>

אם הפונקציה איננה רציפה בנקודה, היא איננה דיפרנציאבילית בה.

<u>משפט</u>

אם הפונקציה f(x,y) מוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) ובעלת נגזרות חלקיות $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ רציפות באותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית בה.

<u>משפט</u>

למשטח z=f(x,y) קיים מישור משיק בנקודה (x_0, y_0, z_0) אמ"מ f(x,y) דיפרנציאבילת ב (x_0, y_0).

<u>סיכום שלבים לבדיקת דיפרנציאביליות</u>

1. האם הפונקציה רציפה? אם לא – אינה דיפרנציאבילית.
2. האם קיימות נגזרות חלקיות? אם לא, אינה דיפרנציאבילית.
3. האם הנגזרות החלקיות רציפות? אם כן – דיפרנציאבילית. אם לא, ממשיכים.
4. בדיקת הפונקציה לפי הגדרת דיפרנציאביליות.

<u>כלל השרשרת</u>

תהיי הפונקציה u=f(x,y,z) בעלת נגזרות חלקיות f_x', f_y', f_z' רציפות, ויהיו הפונקציות x(t), y(t), z(t) גזירות, אזי קיימת הנגזרת $\frac{du}{dt}$ ומתקיים:

$$\frac{du}{dt} = f_x'\frac{dx}{dt} + f_y'\frac{dy}{dt} + f_z'\frac{dz}{dt}$$

<u>הערה</u>

אם הפונקציה u אינה דיפרנציאבילית, אזי לא ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

<u>משפט</u>

תהיי הפונקציה u=f(x,y,z) דיפרנציאבילית, ויהיו הפונקציות x(t,v), y(t,v), z(t,v) גזירות חלקית לפי t וv, אזי u גזירה חלקית לפי t וv ומתקיימות הנוסחאות:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'_x \frac{\partial x}{\partial t} + f'_y \frac{\partial y}{\partial t} + f'_z \frac{\partial z}{\partial t}$$
$$\frac{\partial u}{\partial v} = f'_x \frac{\partial x}{\partial v} + f'_y \frac{\partial y}{\partial v} + f'_z \frac{\partial z}{\partial v}$$

<u>פונקציה הרמונית</u>

פונקציה u(x,y) בעלת נגזרות חלקיות רציפות כולל סדר 2 נקראת פונקציה הרמונית אם

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

משוואה זו נקראת משוואת לפלס.

<u>גרידאנט</u>

z=f(x,y) וקיימות נגזרות חלקיות $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ אזיי:

$$grad(f) = \nabla f = f'_x(x,y)\bar{I} + f'_y(x,y)\bar{J}$$

<u>משפט</u>

נניח שf(x,y) שייך לc^1 אזי $\nabla f(x,y)$ מאונך לקווי הרמה f(x,y)=c.

<u>גרידאנט</u>

z=f(x,y,z) ונניח כי $f(x,y,z) \in c^1$ נגדיר grad(f) כך:

$$grad(f) = \nabla f = f'_x(x,y)\bar{I} + f'_y(x,y)\bar{J} + f'_z(x,y)\overline{K}$$

<u>משפט</u>

הגרדיאנט ∇f מאונך בכל הנקודות למשטח הרמה f(x,y,z)=c.

<u>משפט לייבניץ</u>

תהיי f(x,y) רציפה במלבן הסגור כאשר $a \le x \le b, c \le y \le d$ ונניח בנוסף ש $f'_x(x,y)$ רציפה במלבן. נניח ש $\alpha(x), \beta(x)$ גזירות ו $c \le \alpha(x) \le d, c \le \beta(x) \le d$.

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$

אזי

$$I'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f'_x(x,y)]dy + f(x,\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x,\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

<u>הגדרה</u>

תהיי z=f(x,y) וניקח $\bar{n} = \alpha\bar{I} + \beta\bar{J}$ כאשר $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ אזי

$$D\bar{n}(f) = \frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0 + y_0)}{h}.$$

אם הגבול קיים, נקרא לו הנגזרת המכוונת ב (x_0, y_0) בכיוון n.

- נגזרת מכוונת – שינוי גובה בכיוון מסוים. הנגזרת בודקת עד כמה המשטח תלול בכיוון מסוים.
- אם f(x,y) דיפרנציאבלית ב (x_0, y_0) אזי $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(x_0, y_0) = \nabla f \cdot \bar{n}\Big|_{(x_0, y_0)}$

<u>טענה</u>

הנגזרת המכוונת המקסימלית שווה $|\nabla f|$.

<u>פונקציות סתומות</u>

<u>משפט</u>

תהיי $f(x,y) \in c^1$ בסביבת (x_0, y_0), $f(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ אזי קיימות סביבות קטנות של (x_0, y_0) כך שסביב זו המשוואה f(x,y)=0 מגדירה פונקציה סתומה y=y(x).

פונקציה זו גזירה $\frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{-f'_x}{f'_y}\Big|_{(x_0, y_0)}$ ומתקיים $y(x_0) = y_0$.

<u>משפט</u>

תהיי $f(x,y,z) \in c^1$ בסביבת (x_0, y_0, z_0), $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ f אזי קיימת סביבה של (x_0, y_0, z_0) כך שבסביבה זו מוגדרת פונקציה סתומה z=z(x,y) בעלת נגזרות חלקיות רציפות

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-f'_x}{f'_z}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f'_y}{f'_z}$.

פונקציות מקיימות בסביבה זאת את המערכת ושתיהן בעלות נגזרות חלקיות רציפות.

<u>הערה</u>

שני המשפטים האחרונים הם מספיקים בלבד.

<u>מערכת של פונקציות סתומות</u>

$$\begin{cases} f(x,y,z,w,u) = 0 \\ g(x,y,z,w,u) = 0 \end{cases}$$

נניח ש $(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0)$ מקיימת את המערכת ונניח שבסביבה של הנקודה מתקיים כי $f, g \in c^1$,

וגם נניח כי $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{vmatrix} \neq 0$ בנקודה $(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0)$, אזי קיימת סביבה של $(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0)$ כך שבתוכה מוגדרות שתי פונקציות סתומות u(x,y,z),w(x,y,z).

פונקציות אלו מקיימות בסביבה זו את המערכת ושתיהן בעלות נגזרות חלקיות רציפות.

(הדטרמיננטה הזו נקראת יעקוביאן).

מתקיים:

J_i מתקבל על ידי החלפת העמודה הi ביעקוביאן בעמודה של נגזרות חלקיות של הפונקציות השונות לפי המשתנה שלפיו רוצים לגזור.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{J_1}{J}$$