קונבולוציה:

$$\boxed{y(k) = u(k) * h(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i) \cdot h(k-i)}$$

תכונות הקונבולוציה:

- קומוטטיביות: $f*g = g*f$
- אסוציטביות: $(f*g)*h = f*(g*h)$
- פילוג: $f*(g+h) = f*g + f*h$

$\alpha(f*g) = (\alpha f)*g = f*(\alpha g)$

עובדות (בנוגע לקונבולוציה)

- $\delta(k)*f(k) = f(k)$
- $\delta(k-p)*f(n) = f(k-p)$ $\quad p>0$
- $\delta(k-p_1)*f(k-p_2) = f(k-(p_1+p_2))$ $\quad p_1, p_2>0$

מערכות דינמיות לינאריות – הבהרה על קונבולוציה

נוסחת הקונבולוציה באופן עקרוני:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) \cdot f_2(k-i)$$

פישוט הנוסחה:

1. כאשר $f_1(k) = 0 \;\; \forall k < 0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) \cdot f_2(k-i)$$

2. כאשר $f_2(k) = 0 \;\; \forall k < 0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) \cdot f_2(k-i)$$

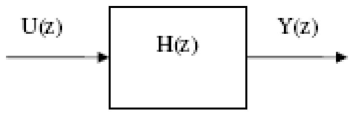
3. כאשר $f_1(k) = f_2(k) = 0 \;\; \forall k < 0$ אזי ניתן לכתוב את הנוסחה בצורה הבאה:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) \cdot f_2(k-i)$$

שימו לב שלאחר פישוט הנוסחה לא ניתן להפוך את סדר הקונבולוציה

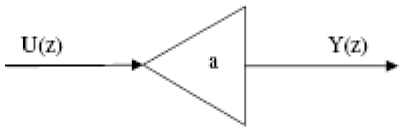
משפט : התמרת Z של פלט המערכת $y(k)$ התואם לקלט איזשהו $u(k)$ היא מכפלה של התמרת Z של הקלט ופונקצית תמסורת המערכת :

$$Y(z) = H(z)U(z)$$



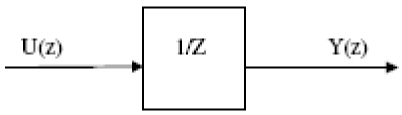
ניתוח מערכות בעזרת התמרת Z:

1. **מכפיל**



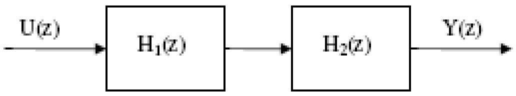
$$H(z) = a$$

2. **משהה**



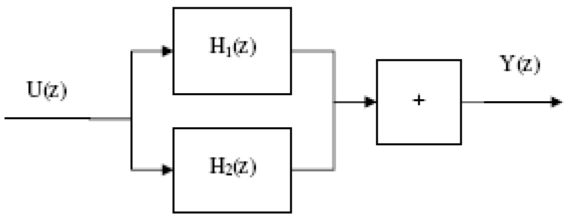
$$H(z) = \frac{1}{z}$$

3. **חיבור בטור**



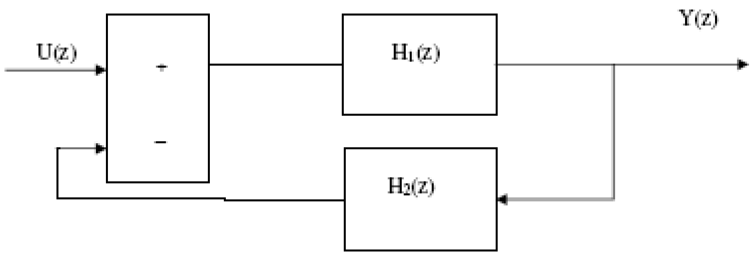
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

4. **חיבור במקביל**



$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

5. **משוב**



$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

מערכות דינמיות ליניאריות - התמרת Z

הגדרה (התמרת Z):

לכל סדרה בדידה נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{f(k)}{z^k}$$

$F(z)$ תקרא התמרת Z של $f(k)$, ותסומן: $f(k)\leftrightarrow F(z)$

תכונות התמרת Z:

1) **ליניאריות:**

אם: $f_1(k)\leftrightarrow F_1(z)$, $f_2(k)\leftrightarrow F_2(z)$

אזי: עבור כל זוג סקלרים α,β

$$\alpha f_1(k)+\beta f_2(k)\ \leftrightarrow\ \alpha F_1(z)+\beta F_2(z)$$

2) **הזזה בזמן:** $f(k-p)\leftrightarrow z^{-p}\cdot F(z)$

3) $k\cdot f(k)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z)$

4) $a^k\cdot f(k)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$

5) $f_1(k)*f_2(k)\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$

דוגמאות להתמרת Z:

	$f(k)$	$F(z)$
Unit impulse	$f(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & otherwize\end{cases}$	$F(z)=1$
Unit step	$f(k)=\begin{cases}1 & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{z-1}$
Unit ramp	$f(k)=\begin{cases}k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$
Geometric series	$f(k)=\begin{cases}a^k & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{z-a}$
Delayed geometric series	$f(k)=\begin{cases}a^{k-1} & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$	$F(z)=\frac{1}{z-a}$
Geometric ramp	$f(k)=\begin{cases}k\cdot a^{k-1} & k\ge 1\\ 0 & k<1\end{cases}$	$F(z)=\frac{z}{(z-a)^2}$
Delayed geometric ramp	$f(k)=\begin{cases}(k-1)\cdot a^{k-2} & k\ge 2\\ 0 & k<2\end{cases}$	$F(z)=\frac{1}{(z-a)^2}$

מערכות דינמיות לינאריות - התמרת Z הפוכה

המטרה: חישוב ערכי הסדרה בזמן בדיד מתוך התמרת Z שלה.
נגביל את עצמנו להתמרות Z של פונקציות רציונליות.

טענה:

- כאשר נתונה פונקציה רציונלית $F(z)$ .S.P, בה המקדם $b_m = 1$, ושורשי המכנה מריבוי 1, אזי ניתן לרשמה בצורה הבאה:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{c_1}{(z-q_1)} + \frac{c_2}{(z-q_2)} + \ldots + \frac{c_m}{(z-q_m)}$$

את המקדמים c_i ניתן לחשב ע"י הנוסחאות הבאות (נוסחאות שקולות):

$$c_i = (z-q_i)\cdot F(z)\Big|_{z=q_i}$$

$$c_i = \frac{P(z)}{Q'(z)}\bigg|_{z=q_i}$$

- כאשר קוטב q_i הוא מריבוי r, אזי בפרוק יופיעו r הרכיבים הבאים:

$$\frac{c_i^1}{(z-q_i)} + \frac{c_i^2}{(z-q_i)^2} + \ldots + \frac{c_i^r}{(z-q_i)^r}$$

את המקדמים c_i^{r-k} ניתן לחשב ע"י הנוסחה הבאה:

$$c_i^{r-k} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dz^k}(z-q_i)^r F(z)\right]_{z=q_i}$$

- ניתן להוכיח כי:

$$\frac{A}{(z-a)^{m+1}} \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \begin{cases} A\cdot\dfrac{k-m}{k}\dbinom{k}{m}a^{k-m-1} & k \ge m+1 \\ 0 & k < m+1 \end{cases}$$

ולכן עבור $m = 0$:

$$\frac{A}{(z-a)} \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \begin{cases} A\cdot a^{k-1} & k \ge 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}$$

ועבור $m = 1$:

$$\frac{A}{(z-a)^2} \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \begin{cases} A\cdot(k-1)\cdot a^{k-2} & k \ge 2 \\ 0 & k < 2 \end{cases}$$

מערכות דינמיות לינאריות - התמרת Z הפוכה (המשך)

טענה:

- כאשר לפונקציה רציונלית $S.P.$, קוטב מרוכב λ מריבוי r, אזי גם $\overline{\lambda}$ (הצמוד של λ) יהי קוטב של הפונקציה מריבוי r.

ולכן בפרוק לשברים אלמנטריים יופיעו הרכיבים הבאים:

$$\frac{c_i^1}{(z-\lambda)}+\frac{c_i^2}{(z-\lambda)^2}+\ldots+\frac{c_i^r}{(z-\lambda)^r}+\frac{\overline{c_i^1}}{(z-\overline{\lambda})}+\frac{\overline{c_i^2}}{(z-\overline{\lambda})^2}+\ldots+\frac{\overline{c_i^r}}{(z-\overline{\lambda})^r}$$

כאשר את המקדמים ניתן לחשב ע"י הנוסחה הרגילה:

$$c_i^{r-k}=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dz^k}(z-q_i)^r F(z)\right]_{z=q_i}$$

- ההתמרה ההפוכה של צמד שברים אלמנטריים מהצורה:

$$\frac{c_i^m}{(z-\lambda)^m}+\frac{\overline{c_i^m}}{(z-\overline{\lambda})^m}$$

היא:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(m-1)!}(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)\cdot 2\cdot\left|c_i^m\right|\cdot\left|\lambda\right|^{k-m}\cos((k-m)\phi+\phi_0) & k\geq m\\ 0 & k<m\end{cases}$$

כשאשר ϕ הוא הארגומנט של λ, ו- ϕ_0 הוא המודול של c_i^m.

עבור $m=1$:

$$\begin{cases}2\cdot\left|c\right|\cdot\left|\lambda\right|^{k-1}\cos((k-1)\phi+\phi_0) & k\geq 1\\ 0 & k<1\end{cases}$$

מערכות דינמיות לינאריות – פתרון משוואות הפרשים ע"י פתרון הומוגני ופרטי:

הרעיון:

$$\boxed{y(k)=y_h(k)+y_p(k)}$$

כאשר: $y_h(k)$ - פתרון הומוגני של המשוואה.

$y_p(k)$ – פתרון פרטי של המשוואה.

מציאת פתרון הומוגני:

ידוע כי הפתרון הוא מהצורה $y_h(k)=A\cdot\lambda^k$.

נציב במשוואה ההומוגנית (משוואת ההפרשים הנתונה עם קלט 0), ונמצא את כל ערכי λ האפשריים (שורשי הפולינום האופייני).

- כאשר כל השורשים הם מריבוי 1, הפתרון ההומוגני יהיה מהצורה:

$$y_h(k)=\sum_{i=1}^{p}A_i\lambda_i^k$$

(p - דרגת משוואת ההפרשים, A_i - סקלרים)

$\left\{\lambda_i^k\right\}$ - תקרא מערכת יסודית של פתרונות למשוואה ההומוגנית.

- כאשר השורש ה- m הוא מריבוי r, בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים מריבוי 1) r הרכיבים הבאים:

$$A_m^i k^i \lambda_m^k \qquad 0 \le i \le r-1$$

(A_m^i - סקלרים, λ_m – השורש ה- m (שריבויו r))

- כאשר קיים צמד שורשים מרוכבים $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$ במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים: $\left\{\begin{aligned} y^1(k) &= \frac{(\lambda_i)^k + (\overline{\lambda_i})^k}{2} = \Re(\lambda_i{}^k) \\ y^2(k) &= \frac{(\lambda_i)^k - (\overline{\lambda_i})^k}{2i} = \Im(\lambda_i{}^k) \end{aligned}\right\}$ ולכן

בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$y_h(k) = A_1 y^1(k) + A_2 y^2(k) + \dots$$

מציאת הפתרון הפרטי:

1. כאשר הקלט של משוואת ההפרשים הוא מהצורה הבאה:

$$u(k) = \Re(v(k)); \qquad v(k) = v^k(p_0 + k\cdot p_1 + \dots + k^m p_m); \quad v = rcis(\phi)$$

$$u(k) = (p_0 + p_1 k + \dots + p_m k^m)\cdot r^k \cdot \cos(k\cdot\phi) + (p_0 + p_1 k + \dots + p_m k^m)\cdot r^k \cdot \sin(k\cdot\phi)$$

(כאשר הקלט אינו מהצורה הנ"ל, השיטה אינה מתאימה).

- נמצא את הפרמטר $v = r\cdot(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$
- נסמן ב- l את הריבוי של השורש v בפולינום האופייני (אם אינו מופיע ריבויו 0).
- ננחש פתרון מהצורה הבאה:

$$y_p(k) = (s_l k^l + \dots + s_{l+m} k^{l+m})\cdot r^k \cos(k\cdot\phi) + (t_l k^l + \dots + t_{l+m} k^{l+m})\cdot r^k \sin(k\cdot\phi)$$

- נציב במשוואת ההפרשים המקורית, ונמצא את ערכי המקדמים $s_i, t_i \quad (l \le i \le l+m)$

2. כאשר הקלט אינו מהצורה הבאה (או כאשר הוא כן, ונחפץ בכך) ניתן למצוא פתרון פרטי ע"י ביצוע התמרת z בתנאי התחלה 0 למשוואה כולה, חילוץ $Y(z)$ מהמשוואה, ומציאת ההתמרה ההפוכה שלו. ההתמרה תעשה ע"י שימוש בנוסחה הבאה:

$$y(k+p) \xleftrightarrow{z} z^p Y(z)$$

שנכונה עבור תנאי התחלה 0 (למה היא אינה נכונה עבור תנאי התחלה שונים מאפס?).

מציאת הפתרון הכללי:

- נחבר את שני הפתרונות ע"י:

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

- נציב תנאי התחלה, ונמצא את מקדמי הפתרון ההומוגני.

1.פתרון הומוגני במשוואת הפרשים

יהיו צמד מספרים מרוכבים $\lambda_{1,2} = |\lambda|(\cos\phi \pm i\sin\phi)$ שורשים של פולינום האופייני – מערכת יסודית של פתרונות.

קומבינציה ליניארית אפשרית לקבלת פתרון ההומוגני (כפי שהוסבר בתירגול) הינה:

ופתרון ההומוגני יהיה קומבינציה ליניארית של $y^1(k), y^2(k)$:

$$y_h(k) = A_1 y^1(k) + A_2 y^2(k)$$

פתרון מערכות משוואות הפרשים ע"י פתרון פרטי + פתרון הומוגני:

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים:

למטריצה ריבועית A לא סינגולרית כל וקטור v, וסקלר λ, המקיימים את המשוואה:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

נקראים וקטור עצמי, וערך עצמי בהתאמה.

- ע"מ למצוא את הערכים העצמיים של A יש לפתור את המשוואה הבאה:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

($\det(\cdot)$ - דטרמיננט של המטריצה)

- ע"מ למצוא את הוקטור העצמי v, המתאים לערך עצמי λ יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$(A - \lambda \cdot I)v = 0$$

כאשר באיבר הראשון של הוקטור v נציב 1 (כך נהוג, לא חובה – אפשר כל ערך השונה מ-0).

פתרון הומוגני של מערכת משוואות:

ידוע כי פתרוןכלשהו למשוואה הומוגנית הינו מהצורה: $\lambda^k \cdot v$, נציב במערכת ההומוגנית $X(k+1) = A \cdot X(k)$ (הקלט שווה אפס) ונקבל:

$$\lambda^{k+1} \cdot v = A \cdot \lambda^k \cdot v$$
$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

($\lambda = 0$ פתרון טריוויאלי, ולא מעניין).

כלומר כל זוג ערך עצמי ווקטור עצמי של המטריצה A מגדיר פתרון למערכת ההומוגנית.

מערכת הפתרונות היסודית של המשוואה ההומוגנית והפתרון ההומוגני יהיו:

- ערכים עצמיים ממשיים מריבוי 1:

מערכת היסודית יופיעו פתרונות הבאים: $\left\{ y^i(k) = \lambda_i^k \cdot v_i \right\}$ $\leftarrow$ $X_h(k) = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot y^i(k)$

- קיים ערך m עצמי בעל ריבוי r>1:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים בעלי ריבוי 1) r רכיבים הבאים: $\lambda_m^k v_{m_j}$

<u>כאשר יש לדאוג לכך ש- r וקטורים עצמיים v_{m_j} יהיו בת"ל.</u>

- קיים צמד ערכים עצמיים מרוכבים $\lambda_i, \overline{\lambda}_i$:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$\left\{ \begin{aligned} y^1(k) &= \frac{(\lambda_i)^k v_i + (\overline{\lambda}_i)^k \overline{v}_i}{2} = \Re(\lambda_i{}^k \cdot v_i) \\ y^2(k) &= \frac{(\lambda_i)^k v_i - (\overline{\lambda}_i)^k \overline{v}_i}{2i} = \Im(\lambda_i{}^k \cdot v_i) \end{aligned} \right\}$$

$\leftarrow$ ולכן בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$X_h(k) = a_1 y^1(k) + a_2 y^2(k) + \ldots.$$

(a_i- סקלרים, p - דרגת מערכת המשוואות)

פתרון פרטי של מערכת המשוואות:

כמו במשוואת הפרשים, נצטמצם למקרה של צד ימין מהצורה הבאה:

$$u(k) = \Re(v(k)), \qquad v(k) = \nu^k (p_0 + k \cdot p_1 + \ldots + k^m p_m)$$

כאשר:

$\Re(a)$ - החלק הממשי של מספר/וקטור a.

v - מספר (ממשי או מרוכב) אם v ע"ע של A <u>האלגוריתם עלול לא להתאים</u>.

$p_1, \ldots, p_m$ – וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

כלומר ננסה להציג את צד ימין הנתון u(k) כחלק ממשי של סדרה v(k).

- צורת הפתרון למערכת עם צד ימין v(k): $X^v(k+1) = AX^v(k) + v(k)$ הינה:

  $$X^v(k) = \nu^k (r_0 + k \cdot r_1 + \ldots + k^m \cdot r^m)$$

  כאשר $r_0, \ldots, r_m$ וקטורים עם אלמנטים ממשיים או מרוכבים.

- הפתרון הפרטי של המערכת יהיה:

  $$X_p(k) = \Re\left(X^v(k)\right)$$

  כלומר החלק הממשי של הפתרון $X^v(k)$, שמצאנו בסעיף הקודם.

פתרון כללי למערכת המשוואות:

$$X(k) = X_h(k) + X_p(k)$$

כלומר הפתרון הכללי יהיה סכום של הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי. בכדיי למצוא את המקדמים החסרים (מהפתרון ההומוגני) יש להציב תנאי ההתחלה, ולפתור את מערכת המשוואות.

פתרון <u>פרטי</u> למשוואת הפרשים ע"י התמרת Z

נתונה משוואת הפרשים הבאה:

$$a_0 y(k+p) + a_1 y(k+p-1) + \ldots + a_p y(k) = u(k), k = 0,1,2,\ldots,$$

$y(i) = y_i, i = \overline{0, p-1}$ - תנאי ההתחלה.

ניתן למצוא פתרון פרטי $y(k)$ ע"י ביצוע התמרת z בתנאי התחלה 0 למשוואה כולה, חילוץ $Y(z)$ מהמשוואה, ומציאת ההתמרה ההפוכה שלו. ההתמרה תעשה ע"י שימוש בנוסחה הבאה:

$$y(k+p) \xleftrightarrow{z} z^p Y(z)$$

שנכונה עבור תנאי התחלה 0.

פתרון <u>כללי</u> למשוואת הפרשים ע"י התמרת Z

נתונה משוואת הפרשים הבאה:

$$y(k+p)+a_1 y(k+p-1)+\ldots+a_p y(k)=u(k), k=0,1,2,\ldots ,$$

$y(i)=y_i, i=\overline{0,p-1}$ - תנאי ההתחלה.

1. מציאת התמרת Z של הפתרון: $Y(z)=\dfrac{U(z)+S(z)}{\pi(z)}$, כאשר

$$\pi(z)=z^p+a_1 z^{p-1}+\ldots+a_{p-1}z+a_p \;,\; S(z)=z(s_1+s_2 z+\ldots+s_p z^{p-1}) ,$$

כאשר:

$$\begin{aligned}
s_1 &= y_{p-1}+a_1 y_{p-2}+\ldots+a_{p-1}y_0 \\
s_2 &= y_{p-2}+a_1 y_{p-3}+\ldots+a_{p-2}y_0 \\
s_3 &= y_{p-3}+a_1 y_{p-4}+\ldots+a_{p-3}y_0 \\
&\ldots \\
s_{p-1} &= y_1+a_1 y_0 \\
s_p &= y_0
\end{aligned}$$

2. מציאת התמרה הפוכה: $y(k)\leftrightarrow Y(z)$.

<u>פתרון מערכות משוואות הפרשים ע"י התמרת z:</u>

נתונה משוואת ההפרשים הבאה: $X(k+1)=A\cdot X(k)+u(k)$

נבצע לה התמרת z:

$$\begin{aligned}
& z\cdot X(z)-z\cdot X(0)=A\cdot X(z)+u(z) \\
& (z\cdot I-A)\cdot X(z)=U(z)+z\cdot X(0) \\
& X(z)=\underbrace{(z\cdot I-A)^{-1}\cdot U(z)}_{X_{ZSR}(z)}+\underbrace{(z\cdot I-A)^{-1}\cdot z\cdot X(0)}_{X_{ZIR}(z)} \\
& X(z)=(z\cdot I-A)^{-1}\cdot[U(z)+z\cdot X(0)]
\end{aligned}$$

(XZSR(z) – התמרת z של הפתרון בתנאי התחלה 0)

(XZIR(z) – התמרת z של הפתרון כאשר הקלט הוא 0)

ע"י הצבה בנוסחה, וביצוע התמרת z הפוכה ניתן לפתור את מערכת המשוואות.

נשים לב כי אין חלוקה לפתרון פרטי והומוגני.

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים קבועים

משוואה דיפרנציאלית ליניארית היא משוואה מהצורה:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)=A_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+A_2(t)\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y(t)+...+A_{n-1}(t)\frac{d}{dt}y(t)+A_n(t)y(t)+u(t)$$

כאשר הפרמטרים $A_1(t),...,A_n(t)$ קבועים המשוואה נקראת משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים. (עם n תנאי התחלה).

פתרון משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים הוא מהצורה:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

$y_h(t)$ – פתרון הומוגני (מתקן את תנאי ההתחלה של הפתרון הפרטי).

$y_p(t)$ – פתרון פרטי (פתרון המשוואה לתנאי התחלה כלשהם)

מערכת יסודית של פתרונות למשוואה דיפרנציאלית הומוגנית:

ננחש כפתרון הומוגני ביטוי מהצורה $e^{\lambda t}$, ונמצא את כל ה-λ האפשריים (שורשי הפולינום האופייני של המשוואה).

- כאשר ריבוי כל השורשים 1, וכולם ממשיים תהיה המערכת היסודית:

$$\left\{e^{\lambda_i t}\right\}\rightarrow y_h(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot e^{\lambda_i t}$$

- כאשר בפולינום שורש λ מריבוי r, יופיעו בפתרון ההומוגני (בנוסף לאיברים בגין השורשים הלא מרובים) r הרכיבים הבאים:

$$c_i t^i e^{\lambda t}\quad 0\le i\le r-1$$

- כאשר חלק מהשורשים מרוכבים, אזי עבור כל צמד שורשים מרוכבים $\lambda_{1,2}=a\pm bi$ יופיעו בפתרונות ההומוגני הרכיבים הבאים:

$$c_1e^{at}\cos(bt)+c_2e^{at}\sin(bt)$$

הסבר: עבור משוואה עם מקדמים ממשיים נרצה לקבל מערכת יסודית ממשית. לכן נרכיב קומבינציה ליניארית של השורשים המרוכבים אשר תגדיר מערכת יסודית ממשית:

$$\left\{\begin{array}{l} y^1(k)=\dfrac{e^{(a+bi)t}+e^{(a-bi)t}}{2}=e^{at}\cos(bt)=\Re(e^{(a+bi)t})\\ y^2(k)=\dfrac{e^{(a+bi)t}-e^{(a-bi)t}}{2i}=e^{at}\sin(bt)=\Im(e^{(a+bi)t})\end{array}\right\}$$

*) לחישוב יש להשתמש בנוסחת אוילר: $e^{\pm bti}=\cos(bt)\pm i\sin(bt)$)

פתרון פרטי למשוואה דיפרנציאלית נמצא עבור קלט מהצורה:

$$u(t)=\Re(v(t));\qquad v(t)=e^{(\gamma+\omega i)t}(p_0+k\cdot p_1+\ldots+k^m p_m);\quad \nu=(\gamma+\omega i)$$

$$u(t)=(p_0+p_1t+\ldots+p_mt^m)e^{\gamma t}\cos(\omega t)+(q_0+q_1t+\ldots+q_mt^m)e^{\gamma t}\sin(\omega t)$$

- נמצא את הפרמטרים m,γ,ω ונבנה את המספר:

$$(i=\sqrt{-1})\qquad \nu=\gamma+i\omega$$

- נסמן ב-l את ריבוי של ν בפולינום האופייני.
- ננחש צורת הפתרון:

$$y_p(t)=(r_lt^l+\ldots r_{l+m}t^{l+m})\cdot e^{\gamma t}\cdot\cos(\omega t)+(s_lt^l+\ldots s_{l+m}t^{l+m})\cdot e^{\gamma t}\cdot\sin(\omega t)$$

- נציב את צורת הפתרון הפרטי $y_p(t)$ שמצאנו לתוך משוואה המקורית למציאת המקדמים.

מציאת הפתרון הכללי:

- נחבר את שני הפתרונות ע"י:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

- נציב תנאי התחלה, ונמצא את מקדמי הפתרון ההומוגני.

<u>משוואות דיפרנציאליות עם מקדמים לא קבועים</u>

- פתרון המשוואה הבאה:

$$\begin{cases}y'(t)+b(t)y(t)=u(t)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

הוא מהצורה:

$$\boxed{\begin{array}{l}y(t)=y_1(t)\left[y(t_0)+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{u(s)}{y_1(s)}ds\right]\\ y_1(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}b(s)ds}\end{array}}$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(0) = x_0 \quad \text{תנאי התחלה} \end{cases}$$

כאשר:

$$x(t), u(t) \in \Re^n$$
$$A \in \Re^{n \times n}$$

1. פתרון מערכות משוואות הפרשים ע"י פתרון פרטי + פתרון הומוגני:

פתרון הומוגני:

פתרון בסיסי למשוואה הומוגנית הוא מהצורה: $e^{\lambda t} \cdot v$

כאשר: λ - ערך עצמי של המטריצה A.

v – וקטור עצמי של המטריצה A.

כלומר כל זוג ערך עצמי ווקטור עצמי של המטריצה A מגדיר פתרון למערכת ההומוגנית.

מערכת הפתרונות היסודית של המשוואה ההומוגנית והפתרון ההומוגני יהיו:

- ערכים עצמיים ממשיים מריבוי 1:

במערכת היסודית יופיעו פתרונות הבאים: $\left\{ y^i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot v_i \right\} \rightarrow x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e^{\lambda_i t} \cdot v_i$

- קיים ערך m עצמי בעל ריבוי r>1:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים בעלי ריבוי 1) r רכיבים הבאים:

$e^{\lambda_m t} v_{m_j}$ <u>כאשר יש לדאוג לכך ש- r וקטורים עצמיים</u> v_{m_j} <u>יהיו בת"ל.</u>

- קיים צמד ערכים עצמיים מרוכבים $\lambda_i, \overline{\lambda_i} = a \pm ib$:

במערכת היסודית יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים:

$$\left\{ \begin{aligned} y^1(k) &= \frac{e^{(a+ib)t} v_i + e^{(a-ib)t} \overline{v_i}}{2} = \Re(e^{(a+ib)t} \cdot v_i) \\ y^2(k) &= \frac{e^{(a+ib)t} v_i - e^{(a-ib)t} \overline{v_i}}{2i} = \Im(e^{(a+ib)t} \cdot v_i) \end{aligned} \right\}$$

← ולכן בפתרון ההומוגני יופיעו (בנוסף לרכיבים בגין השורשים הממשיים) שני הרכיבים הבאים: $X_h(k) = a_1 y^1(k) + a_2 y^2(k) + ...$

פתרון פרטי: פתרון פרטי יטופל באופן דומה כמו שטופל במערכת משוואות הפרשים עם שינויים מתאימים. (ראו הסבר מפורט ב-שיעורי בית להרצאה 10, עמוד 6, חלק III)

פתרון כללי: $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$

2. פתרון כללי ע"י לכסון המערכת (במקרה שאין ריבוי בע"ע)

1. מציאת ו"ע של המערכת: v1,…,vn.
2. בניית המטריצה E שעמודותיה הם הו"ע $E=\left(v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n\right)$
3. מעבר לנעלם z(t) שיחושב כך: $\left[x(t)=E\cdot z(t)\right] \quad z(t)=E^{-1}\cdot x(t)$

המערכת החדשה (לאחר הצבה במערכת המקורית):

$$E\cdot z'(t)=A\cdot E\cdot z(t)+u(t)$$

נכפיל את שני האגפים ב- E-1 ונקבל את המערכת:

$$z'(t)=\underbrace{E^{-1}\cdot A\cdot E}\cdot z(t)+E^{-1}u(t)$$

ידוע מאלגברה כי:

$$E^{-1}\cdot A\cdot E=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

ולכן קבלנו מערכת אלכסונית אותה קל לפתור

הערה:

בדומה להתמרת z במשוואות הפרשים קיימת התמרת לפלס במשוואות דיפרנציאליות, בעזרתה ניתן לפתור משוואות, ולהגדיר פונקצית תמסורת. אולם עקב חוסר זמן לא תילמד התמרה זו.

סיכום עבור פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות:

פתרון למערכת משוואות $X'(t)=AX(t)+U(t)$:

- אם אין ע"ע מרובים
  (1) שיטת הלכסון (בדומה לפתרון לשאלה 3)
  (2) $X(t)=X_k(t)+X_p(t)$ (שיעורי בית להרצאה 10, עמוד 6, חלק III):
  אם ν שווה לאחד הע"ע של מטריצת A לא נוכל להשתמש בשיטה זו
- אם יש ע"ע מרובים -
  (1) מציאת פתרון למערכת לא הומוגנית בעזרת מערכת יסודית של פיתרונות למערכת הומוגנית ותנאים התחלתיים (ראו נוסחה חלק II של שיעורי בית להרצאה 10, עמוד 4)
  (2) $X(t)=X_k(t)+X_p(t)$ (שיעורי בית להרצאה 10, עמוד 6, חלק III):
  אם ν שווה לאחד הע"ע של מטריצת A לא נוכל להשתמש בשיטה זו