שגיאות:

שגיאה מוחלטת $\Delta x = \left|x - x^*\right|$ **שגיאה יחסית** $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

עבור שגיאה יחסית קטנה בהרבה מ-1 ניתן לקרב $\left|\frac{\Delta x}{x^*}\right|$

סוג הייצוג	סוג השגיאה	שגיאה בקיצוץ	שגיאה בהעגלה
n ספרות דצימליות / עשרוניות Fixed point	מוחלטת – $\left|\Delta a\right|$	10^{-n}	0.5×10^{-n}
t ספרות משמעותיות Floating point	יחסית – $\left|\frac{\Delta a}{a}\right|$	10^{-t+1}	$0.5\times10^{1-t}$

כללים לקביעת מספר ספרות עשרוניות / משמעותיות:
יהי a מספר מדויק המקורב ע"י a^*. כאשר מבקשים לקבוע את מספר הספרות העשרוניות הנכונות ב-a^*, מחשבים את ה-t המקסימלי המקיים את אי-השוויון $0.5\cdot10^{-(t+1)} < \left|\Delta a\right| \le 0.5\cdot10^{-t}$. מס' הספרות המשמעותיות הנכונות ב a^* הוא t המקסימלי המקיים את אי-השוויון $0.5\cdot10^{-(t+1)} < \left|\frac{\Delta a}{a}\right| \le 0.5\cdot10^{-t}$

שגיאה כוללת בחישוב: $\Delta f = \Delta f_{In} + \Delta f_{Al}$

שגיאת קלט מוחלטת Δf_{In}: $\Delta f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$

שגיאת קלט יחסית $\left|\frac{\Delta f_{In}}{f_{In}}\right|$: $\left|\frac{\Delta f_{In}}{f_{In}}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$

שגיאת קלט מוחלטת בחיבור/חיסור: $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$

שגיאת קלט יחסית בכפל/חילוק: $\left|\frac{\Delta(x\cdot y)}{x\cdot y}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$

מספר מצב: $C_p = \frac{\Delta f}{|f|}\Big/\frac{\Delta x}{|x|} = \left|\frac{f'}{f}x\right|$
פונקציה המתארת את היחס בין שגיאה יחסית של פונקציה לשגיאה יחסית של קלט. מספר מצב אינו תלוי בקלט או בשיטת החישוב. ניתן לבחור באמצעותו נוסחא רגישה כמה שפחות לחישוב מספר.

שגיאת אלגוריתם Δf_{Al}: לכל פעולת חשבון במעבד נוספת שגיאה חסומה של u, נסמן ב- $fl(f)$ את תוצאת החישוב של f. קירוב מסדר ראשון לשגיאה זו $fl(f) = f\cdot(1+m\cdot u)$ עבור $m\ge0$. במקרה של ביטוי מסובך $g(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ מקרבים ע"י טור טיילור ב- $(0,\dots,0)$.
אזי: $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{Al} = \left|\frac{fl(f)-f}{f}\right| = m\cdot u = \varepsilon_1$

התבטלות – איבוד ספרות משמעות בחיסור שני מספרים קרובים. אפשר לפתח לטור טיילור. הערכה למספר הספרות הדצימליות שהולכות לאיבוד: $l = -\log\left|\frac{x_1}{x_2} - 1\right|$

יציבות רקורסיה:
עבור $I_{n+1} = \alpha(I_n)$
נציב $I_n^* = I_n + \varepsilon_n$ ונחלץ משוואה מהצורה: $\varepsilon_{n+1} = \beta(\varepsilon_n)$, ונבדוק מתי $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$
עבור רקורסיה אחורית נחליף את המשוואה ל- $I_n = \alpha^{-1}(I_{n+1})$, נחשב שוב שגיאה ונתחיל חישוב מ- I_k ו- ε_k^k, ונבדוק מתי $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_n^k = 0$.

משוואות לא ליניאריות:

שיטות לפתרון $f(x) = 0$ או $\varphi(x) = x$
הפתרונות מסומנים $x_0, x_1, \dots, x_n$, השגיאה היא $\varepsilon_n = \left|x_n - \alpha\right|$.

קצב התכנסות: אם קיימים $p \ge 1$ ו- $0 < C < \infty$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C$
אז סדר ההתכנסות הוא p וקבוע ההתכנסות הוא C.

הערכת סדר ההתכנסות ללא ידיעת α:
$\{x_n\}$ מתקבלת ע"י $x_n = \phi(x_{n-1})$ שמתכנסת ל- α.
אם $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = L \ne 0$ אז עבור $\{x_n\}$ מתקיים $p = 1$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = L$.

חישוב מקורב של סדר ההתכנסות בצורה נוספת: $p \approx \ln\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\Big/\ln\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}$

שיטות התכנסות:

שיטת חציה:
הפונקציה חייבת להחליף סימן, מתכנסת תמיד, אבל לאט. $m = \frac{a+b}{2}$

שיטת נקודת שבת: כל שיטה מהסוג $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

חייבת לקיים $\varphi(\alpha) = \alpha$ **!!!**

ניוטון רפסון:
אם מהשורש אינו מרובה והיא מתכנסת $p \ge 2$. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

שיטת המיתר: $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

שיטת Regula Falsi: כמו שיטת החציה, אבל במקום חצית הקטע, מעבירים ישר דרך ערכי הפונקציה בקצוות הקטע ומוצאים חיתוך בין ישר זה לציר x. $m = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$

שיטת Steffensen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$

טבלת סדרי התכנסות:

שיטה	סדר התכנסות
חצייה	1
מיתר	1.618
רגולה-פאלסי	?
ניוטון-רפסון	2 עבור שורש לא-מרובה 1 עבור שורש מרובה (קבוע התכנסות 1-1/q)
ניוטון רפסון עם תיקון ריבוי	2
סטפנסן	2
הרכבת אייטקן	2

משפט סדר ההתכנסות של איטרציה חד-נקודתית: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{(\varepsilon_n)^p}\right| = \left|\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|$

משפט ההתכנסות:
ניסוח א':
אם קיים שורש $\alpha \in J$ עבור $x = \varphi(x)$ וגם לכל $x \in J$ מתקיים $\varphi(x) \in J$ וגם $\left|\varphi'(x)\right| \le m < 1$ אזי לכל $x_0 \in J$ הסדרה מתכנסת ל- α, שורש יחיד בקטע ופשוט.
ניסוח ב':
אם קיים שורש $\alpha \in J = \{x \mid |x-\alpha| < \rho\}$ עבור $x = \varphi(x)$ וגם לכל $x \in J$ מתקיים $\left|\varphi'(x)\right| \le m < 1$ לכל $x_0 \in J$ הסדרה מתכנסת ל- α, שורש יחיד בקטע ופשוט.
הרחבה לקטע סימטרי:
אם קיים שורש $\alpha \in J = [a,b]$ עבור $x = \varphi(x)$ וגם לכל $x \in [2a-b, 2b-a]$ מתקיים $\left|\varphi'(x)\right| \le m < 1$ אזי תנאי משפט ההתכנסות מתקיימים.
הערה: אם $\left|\varphi'(x)\right| > 1$ בכל הקטע, אז היא גם גדולה מ-1 בשורש, ולכן מובטחת התבדרות.

משפט סדר ההתכנסות:
אם שיטת נקודת שבת $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ מתכנסת ו- $p-1$ נגזרות ראשונות של פונקציה φ מתאפסות בשורש (אם אף נגזרת לא מתאפסת אז $p-1=0$) והנגזרת מספר p אינה מתאפסת ואינה שווה לאינסוף אז סדר ההתכנסות של השיטה הנו p קבוע ההתכנסות יהיה במקרה זה $c = \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$
אם $\varphi^{(p)}(\alpha) = \infty$ אז סדר ההתכנסות הוא בין p ל- $p-1$.

מרחק מהשורש: נניח שפונקציה $\varphi(x)$ מחושבת בנקודות $\bar{x}_k$, עם שגיאה מוחלטת חסומה ע"י δ והנגזרת של פונקצית איטרציה מקיימת $\left|\varphi'(x)\right| \le m < 1$ בקטע $[\bar{x}_{n-1}, \alpha]$. אזי המרחק בין $\bar{x}_n$ לשורש α חסום ע"י: $\left|\bar{x}_n - \alpha\right| \le \frac{m}{1-m}\left|\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}\right| + \frac{1}{1-m}\delta$

מספר איטרציות שעוד דרושות כדי להגיע לדיוק מסוים:
$$\underbrace{\left|x_{n+k} - \alpha\right|}_{\varepsilon} \le m^k\left|x_n - \alpha\right| \Leftrightarrow k = \frac{\log\left(\varepsilon/\left|x_n - \alpha\right|\right)}{\log(m)}$$

אקסטרפולצית Aitken:
אם סדר ההתכנסות 1 אז $\frac{x_n - \alpha}{x_{n-1} - \alpha} \approx \frac{x_{n-1} - \alpha}{x_{n-2} - \alpha}$ ומכאן
$$\alpha \approx \hat{x}_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$
האם היא שווה את זה? משווים את $\varphi(x_n) - x_n$ ל- $\varphi(\hat{x}_n) - \hat{x}_n$.
אם השני קטן יותר, היה כדאי

שיטות להאצת NR: אם השורש הוא בעל ריבוי q ניתן להשתמש ב-NR משופרת המתכנסת עם סדר 2 לפחות: $x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

גילוי q: חישוב NR רגיל ואת C מתקיים $C = 1 - 1/q$, ועבור q לא גדול מדי ניתן לנחש את q.

אם לא יודעים את q אז ניתן להריץ NR על $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ שידוע שבו השורש איננו מרובה.
אזי ה- φ החדש יהיה: $\varphi(x) = x - \frac{f\cdot f'}{f'^2 - f\cdot f''}$

דיוק בר השגה (עבור פונקציות מקור):
אם δ היא שגיאה מוחלטת בחישוב פונקציה f בסביבת השורש α בעל ריבוי q ו- $M_q < \left|f^{(q)}(\xi)\right|$ הוא חסם **תחתון** לערך מוחלט של נגזרת מס' q בסביבת השורש אז אי אפשר לפתור את המשוואה עם דיוק גבוה יותר מאשר $\varepsilon_\alpha = \left(\frac{\delta q!}{M_q}\right)^{\frac{1}{q}}$ שנקרא דיוק בר השגה.

הערה: עבור שורש פשוט $\varepsilon_\alpha = \frac{\delta}{M_1}$

הגדרת נורמה:

פונקציה ממשית $n(f) \equiv \|f\|$ במרחב V נקראת נורמה אם היא מוגדרת לכל f מ- V ומקיימת:

1) $\|f\| \ge 0$ לכל f
2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$ לכל α ממשי (ליניאריות ביחס למכפלה בסקלר)
3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ (אי-שוויון המשולש)
4) $\|f\| = 0$ אם ורק אם $f \equiv 0$.

הגדרת סמי-נורמה:
פונקציה ממשית $n(f) \equiv \|f\|$ במרחב V נקראת סמי-נורמה אם היא מקיימת את כל התנאים של נורמה חוץ מתנאי 4.

נורמת L_p:
עבור קטע $[a,b]$ היא $\|f\|_p = \left(\int_a^b w(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$

סמי נורמה L_p עבור מקרה בדיד בנק' $\{x_i\}_{i=0}^{n}$:
$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left|f(x_i)\right|^p\right)^{1/p}$$
$w(x)$ פונקצית משקל המקיימת $w(x) > 0$
עבור $p = \infty$, $L_\infty(f)$ שואף למקסימום של $|f|$ בקטע הנתון.
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b w(x)\left|f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
p=2 : נורמה אוקלידית. $p = \infty$: נורמת המקסימום.

מכפלה פנימית:

פונקציה $\varphi(f,g) \equiv \langle f,g\rangle$, $\varphi: V^2 \to \mathbb{R}$ מוגדרת לכל g, f מ- V ומקיימת:

1) **ליניאריות:** $\langle f, g_1 + g_2\rangle = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$ וגם $\langle f, \alpha\cdot g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$ לכל α ממשי.
2) **קומוטטיביות:** $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$
3) $\langle f,f\rangle \ge 0$ וגם $\langle f,f\rangle = 0$ אם ורק אם $f \equiv 0$.

מכפלה פנימית רציפה בקטע: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$

מכפלה פנימית בדידה $\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{N} f_i g_i w_i$

אורתוגונאליות: f ו- g אורתוגונאליות ביחס למ.פ. אמ"ם $\langle f,g\rangle = 0$.

הערה: כל פונקציה זוגית אורתוגונאלית לכל פונקציה אי-זוגית בקטע סימטרי עם פונקציה משקל זוגית

הערה: אורתוגונאליות גוררת אי-תלות ליניארית.

שיטת Gram-Schmidt

הצגת הבעיה: נתונה משפחת פונקציות (או אובייקטים אחרים שעבורם מוגדרת מכפלה פנימית ולכן גם יחס אורתוגונאליות) $\{f_i\}$ בלתי תלויה ליניארית (ז"א שלא קיימים קבועים c_i שחלקם שונים מאפס שמקיימים $\sum c_i f_i = 0$).
אנחנו מעוניינים לבנות בסיס אורתוגונאלי $\{\varphi_i\}$ ע"ס צירופים ליניאריים של $\{f_i\}$.

הפתרון של Gram-Schmidt: בונים φ_0, ובאמצעותו את φ_1, ובאמצעותן את φ_2 וכו' באופן הבא:

$$\varphi_0 = f_0 \qquad \varphi_1 = f_1 - \varphi_0\frac{\langle f_1,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle}$$

$$\varphi_2 = f_2 - \varphi_0\frac{\langle f_2,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle} - \varphi_1\frac{\langle f_2,\varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle}$$

ובאופן כללי:

$$\varphi_i = f_i - \varphi_0\frac{\langle f_i,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle} - \varphi_1\frac{\langle f_i,\varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle} - \ldots - \varphi_{i-1}\frac{\langle f_i,\varphi_{i-1}\rangle}{\langle\varphi_{i-1},\varphi_{i-1}\rangle}$$

אינטרפולציה:

נתונה משפחת פונקציות $\{\varphi_j(x)\}$ וקבוצת נק' $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{N}$. צ"ל $\{c_j\}$ כך ש- $y_i = \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x_i)$.
שיטה כללית ע"י מערכת משוואות:

$$\begin{cases} c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + \ldots + c_N\varphi_N(x_0) = f(x_0) \\ c_0\varphi_0(x_1) + c_1\varphi_1(x_1) + \ldots + c_N\varphi_N(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ c_0\varphi_0(x_N) + c_1\varphi_1(x_N) + \ldots + c_N\varphi_N(x_N) = f(x_N) \end{cases}$$

מינימום ריבועים:
נתונה פונקציה f יש לקרב אותה ע"י צירוף ליניארי של $\{\varphi_n\}$: $f^* = \sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i(x)$ כך ש- $\|f^*-f\|_2$ מינימלי.
נתונות נקודות $\{(x_k,\varphi(x_k))\}$ ויש לקרבן $f^* = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i$ כך ש- $\|f^*-f\|_2$ מינימלי.
מציאת המקדמים ע"י מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} c_0\langle\phi_0,\phi_0\rangle + c_1\langle\phi_0,\phi_1\rangle + \ldots + c_n\langle\phi_0,\phi_n\rangle = \langle\phi_0,f\rangle \\ c_0\langle\phi_1,\phi_0\rangle + c_1\langle\phi_1,\phi_1\rangle + \ldots + c_n\langle\phi_1,\phi_n\rangle = \langle\phi_1,f\rangle \\ \vdots \\ c_0\langle\phi_n,\phi_0\rangle + c_1\langle\phi_n,\phi_1\rangle + \ldots + c_n\langle\phi_n,\phi_n\rangle = \langle\phi_n,f\rangle \end{cases}$$

עבור משפחה אורתוגונאלית $\{\varphi_n\}$: $c_i = \frac{\langle\varphi_i,f\rangle}{\langle\varphi_i,\varphi_i\rangle}$ (מקדמי פורייה)

אינטרפולציה פולינומית: אינטרפולציה ע"י בסיס של פולינומים $\{p_i\}_{i=0}^{n}$ אשר מהווים משפחה משולשת.
הערה: דרך $N+1$ נקודות ניתן להעביר פולינום יחיד ממעלה N.

אינטרפולציית פולינומים:
אינטרפולציה פולינומית **בשיטת לגראנז'**:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\delta_i(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

תכונת פולינומי לגראנז'

$$\delta_i(x_j) = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{n}\delta_i \equiv 1$$

אינטרפולצית ניוטון:

$$P_N(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + A_N(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{N-1})$$

כאשר

$$A_i = \frac{y_i - \left(A_0 + A_1(x_i-x_0) + \ldots + A_{i-1}(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-2})\right)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})}$$

איך בפועל בונים את המקדמים? $A_0 = y_0$, $A_1 = \frac{y_1-A_0}{(x_i-x_0)}$

חישוב המקדמים שיטת הפרשים מחולקים (בנית מקדמים לניוטון):
עבור נקודת דגימה אחת $f[x_i] = f(x_i)$; עבור 2 נקודות $f[x_i,x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$,

הפרש מחולק עבור $k+1$ נק':

$$f[x_i,x_{i+1},...,x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2},...,x_{i+k}] - f[x_i,x_{i+1},...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

ומתקיים $f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ עבור איזשהו $\xi\in[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]$.
טבלת הפרשים מחולקים:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
x_0	$f(x_0)=A_0$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]=A_1$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]=A_2$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=A_3$

כל משבצת מחושבת לפי שכנותיה השמאלית והשמאלית-עליונה. המקדמים של הפולינום רשומים באלכסון הטבלה.
במקרה ונתון גם ערך הנגזרת:
נרשום בטבלה את הנקודה x_i אשר בה נתון לנו ערך הנגזרת מספר פעמים כסדר הנגזרת הנתון. ההפרש המחולק מוגדר כ- $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$.
הערה: פולינום אינטרפולציה המתלכד עם הפונקציה בכל נקודות הדגימה וגם נגזרתו מתלכדת נקרא פולינום Hermite.

יתרונות וחסרונות יחסיים של שיטות לגראנז' וניוטון:

שיטה	רשת קבועה, שינוי ערכי הפונקציה	הוספת נקודות רשת, ללא שינוי ערך הפונקציה
לגראנז'	החלפת קבועים בנוסחה	חישוב-מחדש
ניוטון	חישוב-מחדש	הוספת איברים לנוסחה

שגיאת האינטרפולציה:

$$|f(x)-p_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)\right| = \le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)...(x-x_n)\right|$$

כאשר: $M_{n+1} = \max\left(\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\right)$ וגם $\xi\in\text{int}(x_0,...,x_n,x)$
הערה:
ניתן לרשום את השגיאה באינטרפולציה באמצעות הפרשים מחולקים כ-

$$\left|f[x_0,...,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n)\right|$$

שגיאת אינטרפולציית הרמיט:

$$|f(x)-p(x)| = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\Phi^2(x)$$

משפחה משולשת (ואורתוגונאלית)

הגדרה: משפחת פולינומים $\{P_n\}$ נקראת משפחה משולשת אם מעלת הפולינום P_n שווה בדיוק ל- n (ז"א מקדם ראשי שלו שונה מאפס) לכל n.
משפט: ניתן להציג כל פולינום $Q_k(x)$ ממעלה k בצורה

$$Q_k(x) = a_0^kP_0(x) + a_1^kP_1(x) + \ldots + a_k^kP_k(x)$$

משפט: משפחה משולשת היא בלתי תלויה ליניארית.

משפחה אורתוגונאלית:
משפחת פולינומים משולשת $\{P_n\}$ המקיימת לכל $i\neq j$, $P_i\perp P_j$ ביחס למכפלה פנימית מסוימת.
עבור $P_i\in\{P_n\}$ ממשפחה אורתוגונאלית בקטע $[a,b]$ עם $w(x)$:
1) ל- P_i יש i שורשים ב- $[a,b]$
2) בין כל שני שורשים של P_i יש שורש של P_{i+1}
3) לכל קטע $I\subset[a,b]$ קיים פולינום P_k כך שיש לו שורשים ב- I.
4) לכל פולינום Q_k (ממעלה k) כך ש- $k<i$ מתקיים $P_i\perp Q_k$.

הערה: פולינומים אורתוגונאליים ממעלה k, זהים עד כדי קבוע.

בנייה רקורסיבית של משפחה אורתוגונאלית:
$P_{n+1}(x) = (x-B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)$ כאשר

$$B_n = \frac{\langle xP_n,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle},\ C_n = \frac{\langle xP_n,P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle} = \frac{\langle P_n,P_n\rangle}{\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle}$$

ו- $P_{-1}=0$, $P_0=1$ משמשים כבסיס. (ניתן להחליף את P_0 לקבלת מקדמים שונים).

בניית פולינום אורתוגונאלי בדרך ישירה:
$P_k = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k$, תהי $\{Q_n\}$ משפחה משולשת, מתקבלת מערכת המשוואות:
$\langle P_k,Q_i\rangle = 0$ עבור $0\le i\le k-1$
יש דרגת חופש, אם קובעים $c_k=1$ ובוחרים משפחה נוחה $(1,x,x^2,\ldots)$
מקבלים:

$$\begin{cases} c_0\langle 1,1\rangle + & c_1\langle x,1\rangle + & \ldots + & c_{k-1}\langle x^{k-1},1\rangle + & \langle x^k,1\rangle = & 0 \\ c_0\langle 1,x\rangle + & c_1\langle x,x\rangle + & \ldots & c_{k-1}\langle x^{k-1},x\rangle + & \langle x^k,x\rangle = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0\langle 1,x^{k-1}\rangle + & c_1\langle x,x^{k-1}\rangle + & \ldots & c_{k-1}\langle x^{k-1},x^{k-1}\rangle + & \langle x^k,x^k\rangle = & 0 \end{cases}$$

פולינומי לג'נדר:
משפחה אורתוגונאלית ב- $[1,-1]$, עם פונקציית משקל $w(x)=1$:

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)$$

פולינומי צ'בישב:

$$T_0(x)=1$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_2(x)=2x^2-1$$
$$T_3(x)=4x^3-3x$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$
$$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$$

מטרת פולינומי צ'בישב:
ברצוננו לקרב פונקציה בעזרת פולינום אינטרפולציה ממעלה עד N כך ששגיאת האינטרפולציה תהיה מינימאלית בקטע נתון. אלו נקודות אינטרפולציה כדאי לבחור?
תשובה: נניח בלי הגבלת הכלליות שמדובר בקטע [-1,1]. אז החסם על שגיאת האינטרפולציה נתון ע"י

$$|f(x)-P_N(x)|\le\frac{M_{N+1}}{(N+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)\right|$$

ואם רוצים להקטין את השגיאה, יש להקטין את $\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)\right|$.
הדרך היחידה להקטין את איבר השגיאה "באופן כללי", כלומר בלי ידע מוקדם על הפונקציה, היא הקטנת המכפלה הנ"ל, וזאת נעשה ע"י בחירת נקודות האינטרפולציה להיות שורשי פולינום צ'בישב בקטע.
הערה: אין זה מדויק כי השגיאה האמיתית נתונה ע"י $f^{(N+1)}(\xi)$ במקום M_{N+1} וכידוע, ξ תלוי בנקודות הדגימה, לכן בחירת נקודות יכולה להשפיע גם על איבר הנגזרת, אך תלות זאת אינה ידועה והיא גם ספציפית לכל פונקציה *f*.

הגדרה: $T_n(x) = \cos(n\arccos(x)),\quad x\in[-1,1]$
נוסחה רקורסיבית: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ כאשר $T_0(x)=1; T_1(x)=x$
פולינום צ'בישב מתוקן: $\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$

תכונות:
1) המקדם המוביל של T_n הוא 2^{n-1} (ועבור $\tilde{T}_n$ הוא 1)
2) $\|T_n(x)\|_\infty = 1$ וגם $\|\tilde{T}_n(x)\|_\infty = 2^{n-1}$ בקטע $[-1,1]$
3) השורשים של T_n הם $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right), k=0,1,...,n-1$
4) אקסטרמום של T_n מתקבל ב- $x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k=0,1,\ldots n$
ובפרט $T_n(x'_k) = (-1)^k$
5) **מינימקס:** בין כל הפולינומים עם מקדם מוביל 1, $\tilde{T}_n(x)$ הוא בעל נורמת מקסימום מינימלית בקטע $[-1,1]$. בפרט מתקיים

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i) \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

6) עבור המכפלה הרציפה ב- $[-1,1]$ עם $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ מתקיים:

$$\langle T_i,T_j\rangle = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ \frac{\pi}{2} & i=j\neq 0 \\ \pi & i=j=0 \end{cases}$$

עבור המכפלה הבדידה ב- $[-1,1]$ $\{x_k\}_{k=0}^m \subseteq$ עם $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

לכל

מתקיים: $\langle T_i,T_j\rangle = \begin{cases}0 & i\ne j\\ \frac{m+1}{2} & i=j\ne 0 \\ m+1 & i=j=0\end{cases}$

$0\le i\le m, 0\le j\le m$

תרגום צ'בישב לקטע כללי: $t=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x$

כאשר $x\in[-1,1]$, $t\in[a,b]$.

נבחר את נקודות צ'בישב $\{x_i\}$ והנקודות המתאימות הן $\{t_i\}$ לפי הטרנספורמציה. הנורמה המתקבלת: $\left\|\prod_{i=0}^n (t-t_i)\right\| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$.

נוסחת השארית לפולינום אינטרפולציה שחושב בנקודות צ'בישב:

$$|f(x)-P_N(x)|\le \frac{M_{N+1}}{(N+1)!}\cdot 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{N+1}$$

קירובים דיסקרטיים:

סימונים:

$x_i=x_0+i\cdot h$

$f_i=f(x_i)$

המטרה: מחפשים ל- Lf כאשר L הוא אופרטור ליניארי. הקירוב מסומן ב- $\tilde{L}f$. שיטה מקובלת – לקרב את f ע"י f^*, ונדרוש $\tilde{L}f=Lf^*$

סדר אסימפטוטי:

החזקה הנמוכה היותר של h בביטוי השגיאה, כלומר האיבר המשמעותי בה.

סדר פולינומי:

הסדר הגבוה ביותר של פולינום עבורו הקירוב מדויק. אם $f^{(k)}$ היא הנגזרת מסדר מינימלי בפיתוח השגיאה אז הסדר הפולינומי הוא $k-1$.

משפט (שגיאת הנגזרות של פולינום האינטרפולציה):

$$\left|f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)\right|<\frac{m_{n+1}}{(n+1-k)!}|b-a|^{n+1-k}$$

כאשר $[a,b]$ הוא קטע שמכיל את כל $n+1$ נק' האינטרפולציה ו- m_{n+1} הוא חסם עליון על ערך המוחלט של הנגזרת מס' $n+1$ בקטע $[a,b]$.

הפרש מרכזי: $P'(x)\approx\frac{f_1-f_{-1}}{2h}, P''(x_0)\approx\frac{f_{-1}-2f_0+f_1}{h^2}$

הפרש קדמי: $P'(x)\approx\frac{f_1-f_0}{h}$, הפרש אחורי $P'(x)\approx\frac{f_0-f_{-1}}{h}$

הערה: הסדר האסימפטוטי והפולינומי של הפרש קדמי ואחורי הוא 1.

הערה: עבור הפרש מרכזי, הסדר הפולינומי הוא 3 והאסימפטוטי הוא 2.

השוואת מקדמים:

נתונות דגימות של פונקציה f, $\{f_i\}_{i=0}^n$ אזי $f'_0=\sum_{i=0}^n c_i f_i$. כלומר הקירוב לנגזרת יתקבל כצירוף ליניארי של נקודות הדגימה. מפתחים לטור טיילור את f_i מסביב ל- x_0.

ומשווים את המקדמים של $f_0^{(j)}$, ופותרים את מערכת המשוואות ומקבלים את המקדמים.

בחירת h אופטימלי:

נמצא את המינימום עבור שני סוגי השגיאות, שגיאת הקיטוע R_T (הנובעת מקטיעת טורי הטיילור) והשגיאה הנומרית R_N (הנובעת מחישובי f), ואז $R=R_T+R_N$.

ניתן להזניח את האיברים בשגיאות חוץ מהאיבר המשמעותי ביותר בכל אחת מהן.

השגיאה הנומרית מתקבלת ע"י סימון $\Delta f_i=f_i+\delta$ והצבתו בביטוי (כל האיברים בשגיאה מצטמצמים, ולכן נישאר עם $A_i\delta$ לכל מקדם A_i)

נגזור את הביטוי ונחפש נקודת מינימום בעזרת $\frac{\partial R}{\partial h}=0$ ונמצא את h_{opt}.

לזכור ש- δ היא שגיאה, ולא ניתן לצמצם אותה.

אקסטרפולציות ריצ'רדסון:

נתונה פונקצית קירוב $A(h)=A+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h^{p_k}$, צ"ל את $A(0)=\lim_{h\to 0}A(h)$, כאשר α_k ידועים וב"ת, וגם σ_k קבועים.

$0<p_1<p_2<\dots,\quad \lim_{h\to 0}p_k=+\infty$.

$$\hat{A}(h)\equiv\frac{A(\omega h)-\omega^{p_1}A(h)}{1-\omega^{p_1}}=$$
$$=A+\alpha_2\frac{\omega^{p_2}-\omega^{p_1}}{1-\omega^{p_1}}h^{p_2}+\alpha_3\frac{\omega^{p_3}-\omega^{p_1}}{1-\omega^{p_1}}h^{p_3}+\dots$$

כש- $\omega=\frac{1}{q}$ מתקבל ביטוי מדויק יותר.

האלגוריתם של Romberg: בחר $h_0>0$, $q>1$ ו- $h_m=\frac{h_0}{q^m}$ כאשר $m=0,1,2,\dots$

א. עבור עמודה מספר 0, חשב את $A_{m,0}=F(h_m)$, כאשר F הוא הקירוב לפונקציה.

ב. עבור שאר העמודות, חשב: $A_{m,k}=A_{m,k-1}+\frac{A_{m,k-1}-A_{m-1,k-1}}{q^{p_k}-1}$ כאשר $A_{m,k}$ הוא הערך בעמודה ה- k ובשורה ה- m.

סדר החישוב ב-Romberg:

$$\begin{array}{l} A_{0,0} \\ \quad\searrow \\ A_{1,0}\to A_{1,1} \\ \quad\searrow\quad\searrow \\ A_{2,0}\to A_{2,1}\to A_{2,2} \\ \quad\searrow\quad\searrow\quad\searrow \\ A_{3,0}\to A_{3,1}\to A_{3,2}\to A_{3,3}\end{array}$$

טבלה לאקסטרפולצית ריצ'רדסון: שיטה נוחה לסדר ולחשב (עבור $p_1=2, p_2=4$)

i	$\frac{h_0}{q^i}$	$F_{i,0}$	$\frac{\Delta}{q^2-1}=\frac{\Delta}{3}$	$F_{i,1}$	$\frac{\Delta}{q^4-1}=\frac{\Delta}{15}$
0	h_0	$F(h_0)$			
1	$\frac{h_0}{q^1}$	$F(h_1)$	$(F_{1,0}-F_{0,0})/3$	$+F(h_1)$	
2	$\frac{h_0}{q^2}$	$F(h_2)$	$(F_{2,0}-F_{1,0})/3$	$+F(h_2)$	$(F_{2,1}-F_{1,1})/15$
3	$\frac{h_0}{q^3}$	$F(h_3)$	$(F_{3,0}-F_{2,0})/3$	$+F(h_3)$	$(F_{3,1}-F_{2,1})/15$

שיטת הטרפז:

שיטת הטרפז:

מחלקים את התחום ל-n חלקים קטנים וסוכמים את שטחי של כל הטרפזים שנוצרים ע"י חיבור כל שתי נקודות סמוכות בקו ישר (קירוב לפונקציה מסדר ראשון). ערכי הקצוות נספרים פעם אחת והנקודות הפנימיות פעמיים:

$$T=\sum_{i=0}^{n}\tfrac12\left(f(x_{i+1})+f(x_i)\right)(x_{i+1}-x_i)=$$
$$=h\left(\tfrac12\left(f(x_0)+f(x_n)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$$

הקירוב **מדויק** עבור פונקציה מחזורית אם הקטע מכיל בדיוק מחזור שלם.

שגיאה ע"פ נוסחת אוילר מקלורין:

$$T(h)-\int_{x_0}^{x_n}f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kB_kh^{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(x_n)-f^{(2k-1)}(x_0)\right)$$
$$=\frac{h^2}{12}\left(f'(x_n)-f'(x_0)\right)-\frac{h^4}{720}\left(f'''(x_n)-f'''(x_0)\right)+\dots$$

אינטגרציית רומברג – אינטרפולציית ריצ'רדסון על שיטת הטרפז:

האלגוריתם:

בטבלת ריצ'רדסון נחשב את העמודה השמאלית ע"י: $T(h_j)=A_{j,0}$:

$\boxed{i=0}$ $h_0=b-a$ $\Sigma_0=\frac12\left(f(a)+f(b)\right)$ $T(h_0)=h_0\Sigma_0$	$\boxed{i=1}$ $h_1=\frac{h_0}{2}$ $\Sigma_1=f(a+h_1)$ $T(h_1)=h_1(\Sigma_0+\Sigma_1)$
$\boxed{i=2}$ $h_2=\frac{h_1}{2}$ $\Sigma_2=f(a+h_2)+f(a+3h_2)$ $T(h_2)=h_2(\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2)$	$\boxed{i=j}$ $h_j=\frac{h_{j-1}}{2}$ $\Sigma_j=\sum_{i=1}^{2^{j-1}}f\left(a+(2i-1)h_j\right)$ $T(h_j)=h_j\sum_{i=0}^{j}\Sigma_i$

באינטגרציית רומברג תמיד בוחרים $q=2$ ו- $p_k=2k$ כש- k הוא מספר העמודה. ממשיכים באקסטרפולציות ריצ'רדסון כרגיל.

אינטגרציה אינטרפולטורית:

משימה: נתונים $w(x)\ge 0, a,b$. יש לקרב את $\tilde I$ כך ש-:

$$I=\int_a^b f(x)w(x)dx\approx\sum_{i=0}^{m}A_if(x_i)\triangleq\tilde I$$

כלומר, עלינו לחשב את המקדמים A_i.

גישה א':

מקרבים את $f(x)$ ע"י פולינום אינטרפולציה שמתלכד עם f בנקודות הדגימה x_i. לדוגמא, ע"י אינטרפולציית לגרנז':

$$\tilde I=\int_a^b P_n(x)w(x)dx=\int_a^b\sum_{j=0}^{n}\left(f(x_j)\delta_j(x)\right)w(x)dx=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}f(x_j)\underbrace{\int_a^b\delta_j(x)w(x)dx}_{A_j}=\sum_{j=0}^{n}f_jA_j$$

כאשר $\delta_j(x)=\frac{\prod_{i\ne j}(x-x_i)}{\prod_{i\ne j}(x_j-x_i)}$

משפט: נוסחת אינטגרציה אינטרפולטורית דרך $n+1$ נקודות שריג היא מדוייקת מסדר פולינומי n לפחות.

גישה ב':

אינטגרצית גאוס:

משפט: תהי $w(x)$ פונקצית משקל חיובית בקטע $[a,b]$ ויהיו $\{x_i\}_{i=0}^n$ שורשים של פולינום P_{n+1} אורתוגונאלי ב- $[a,b]$ עם $w(x)$ אזי נוסחת האינטגרציה האינטרפולטורית של f ב- $[a,b]$ עם $w(x)$ ו- $\{x_i\}_{i=0}^n$ תהיה מדויקת לכל פולינום עד מעלה $2n+1$.

מה עושים בפועל:

כאשר רוצים נוסחא שתהייה מדויקת לכל פולינום עד מעלה $2n+1$ נמצא פולינום אורתוגונאלי ממעלה n+1 של המכפלה הפנימית הרציפה בקטע, עבור פונקציית המשקל $w(x)$, ונחשב את שורשיו $\{r_i\}_{i=0}^n$

נוסחת האינטגרציה תהיה עבור פונקציה f כלשהי תהיה:

$$\tilde I(f)=A_0f(r_0)+A_1f(r_1)+\dots+A_nf(r_n)$$

המקדמים A_i יחושבו ע"י פתירת מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}\tilde I(1)=A_0+A_1+\dots+A_n=\int_a^b w(x)dx\\ \tilde I(x)=A_0r_0+A_1r_1+\dots+A_nr_n=\int_a^b xw(x)dx\\ \vdots\\ \tilde I(x^n)=A_0r_0^n+A_1r_1^n+\dots+A_nr_n^n=\int_a^b x^nw(x)dx\end{cases}$$

השגיאה של הקירוב היא:

$$\left|\int_a^b f(x)w(x)dx-\int_a^b P_n(x)w(x)dx\right|=\frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2w(x)dx$$

או במילים אחרות:

$$\frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}\int_a^b\left(\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)\right)^2w(x)dx=c_mf^{(2m+2)}(\xi)$$

מאחר ו- c_m קשה לחישוב ישירות ניתן לבחור $f(x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ואז הנגזרת מסדר $2n+2$ של $f(x)$ תהיה 1, כלומר נקבל ש-

$$\left|\int\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}dx-\int P_n(x)dx\right|=c_n$$

הערה: כל המקדמים בקירוב גאוס הם חיוביים.

מעבר מקטע $[a,b]$ לקטע $[c-d]$:

$$\int_c^d f(x)w(x)dx=\frac{d-c}{b-a}\int_a^b f(x(t))q(x(t))dt$$

טרנס' בין הקטעים: $x(t)=\frac{d-c}{b-a}t+c-a\frac{(d-c)}{b-a}$,

$$\frac{b-a}{d-c}dx=dt$$

נספח מתמטי:

טור טיילור (סביב x_0)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+$$
$$\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

או

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

נגזרות מיידיות:

$$\sin' x=\cos x \qquad \cos' x=-\sin x \qquad \sinh' x=\cosh x \qquad \cosh' x=\sinh x$$
$$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
$$\operatorname{arc}\cot'(x)=-\frac{1}{1+x^2} \qquad \tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)'=e^x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (a^x)'=a^x\ln a \qquad (\log_a^x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

נגזרת מסדר גבוה:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)} \quad , \quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחאות שונות:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3-b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

הבינום של ניוטון:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$$
$$\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(180-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$$
$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin(\tfrac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos(\tfrac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan(\tfrac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$$
$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\pi/2$$

אינטגרציה בחלקים: $\int_a^b u(t)v'(t)dt=u(t)v(t)\Big|_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$

טורים חשובים:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<1$$
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<1$$
$$\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x+x^2+x^3+x^4+\ldots \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<1$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<\infty$$
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<\infty$$
$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n} \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<1$$
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{מתכנס עבור: } |x|<1$$

אינטגרלים מיידים:

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$$
$$\int\ln x\,dx=x\ln x-x+c$$
$$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$$
$$\int\tan x\,dx=-\ln(\cos x)+c$$
$$\int\cot x\,dx=\ln(\sin x)+c$$
$$\int\sin^3(ax)dx=-\frac{\cos(ax)}{a}+\frac{\cos^3(ax)}{3a}+c$$
$$\int\cos^3(ax)dx=\frac{\sin(ax)}{a}-\frac{\sin^3(ax)}{3a}+c$$
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$$
$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c$$
$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln(x-a)+c$$
$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+c$$
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+c$$
$$\int\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=\frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}+c$$
$$\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+c$$