סיכום הקורס חדו"א 2

במרכז האוניברסיטאי אריאל

רעי סיון

אנא שלחו תיקונים והערות אל צוות האתר.

אינטגרל לא אמיתי

1. **מבחן ההשוואה (בקטע אינסופי)-** יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $\left[a,\infty\right)$ ומתקיים $g(x)\geq 0$, אזי:

- אם $|f(x)|\leq g(x)$ ו- $\int_0^\infty g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.
- אם $f(x)\geq g(x)$, ו- $\int_0^\infty g(x)dx$ מתבדר,אז $\int_0^\infty f(x)dx$ מתבדר.
- למשל בפונקציה $f(x)=\frac{M}{x^\alpha}$,M קבוע. $\int_a^\infty \frac{M}{x^\alpha}$ ההתכנסות תלויה ב- α.

  בשאיפה ל- ∞:
  - עבור $\alpha>1$ מתכנס.
  - עבור $0<\alpha\leq 1$ מתבדר.

2. **מבחן ההשוואה(פונקציות לא חסומות)-** יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $\left(a,b\right]$ ומתקיים $\lim_{c\to a^+} g(x)=\infty$, $\lim_{c\to a^+} f(x)=\infty$ אז:

- אם $0\leq f(x)\leq g(x)$ ו- $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.
- אם $0\leq g(x)\leq f(x)$ ו- $\int_a^b g(x)dx$ מתבדר, אז $\int_0^\infty f(x)dx$ מתבדר.
- למשל בפונקציה $f(x)=\frac{M}{(x-a)^\alpha}$,M>0 . $\int_a^b \frac{M}{(x-a)^\alpha}$ ההתכנסות תלויה ב- α.

  בשאיפה ל- 0:
  - עבור $\alpha\geq 1$ מתבדר.
  - עבור $0<\alpha<1$ מתכנס.

3. **מבחן ההשוואה הגבולי(בקטע אינסופי)-** יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $\left[a,\infty\right)$וקיים הגבול- $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$:

- $0<k<\infty$, אזי שני האינטגרלים $\int_0^\infty f(x)dx, \int_0^\infty g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- $k=0$, אז $\int_0^\infty f(x) \le \int_0^\infty g(x)dx$ ומהתכנסותו של- $\int_0^\infty g(x)dx$ נובעת התכנסותו של- $\int_0^\infty f(x)dx$.
- $k=\infty$, אז $\int_0^\infty f(x)dx \le \int_0^\infty g(x)dx$ ומהתבדרותו של- $\int_0^\infty g(x)dx$ נובעת התבדרותו של- $\int_0^\infty f(x)dx$.

4. **מבחן ההשוואה הגבולי(פונקציות לא חסומות)-** יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות רציפות בקטע $(a,b]$ וקיים הגבול- $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$:

- $0<k<\infty$, אז שני האינטגרלים $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- $k=0$, אז $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)dx$ ומהתכנסותו של- $\int_a^b g(x)dx$ נובעת התכנסותו של- $\int_a^b f(x)dx$.
- $k=\infty$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ ומהתבדרותו של- $\int_a^b g(x)dx$ נובעת התבדרותו של- $\int_a^b f(x)dx$.

טורים

1. כשנתון טור טלסקופי מהצורה- $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) / \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$, ומבקשים לחשב את סכומו ולומר "מתבדר או מתכנס", נפתח את הטור, נציב את ה- n עד אינסוף ונוריד את כל האברים שמצטמצמים. אם קיבלנו סכום סופי אז הטור מתכנס ואם לא אז הטור מתבדר.

2. תנאי הכרחי להתכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי הטור מתכנס

אם $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ אזי מתבדר.

3. **מבחן ההשוואה -** יהיו שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ חיוביים. אם לכל n החל ממס' מסוים מתקיים $a_n\le b_n$, אז:

- מהתכנסותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובעת התכנסותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
- ומהתבדרותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נובעת התבדרותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

4. **מבחן ההשוואה הגבולי-** יהיו שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ חיוביים.

אם קיים הגבול- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, ו-

- $0<k<\infty$, אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
- $k=0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ומהתכנסותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובעת התכנסותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
- $k=\infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\le\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ומהתבדרותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובעת התבדרותו של- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

5. **מבחן האינטגרל-** אם נתון טור חיובי $\sum a_n$ כך ש- $a_n \longrightarrow 0$, אז התכנסות או התבדרות הטור שקולה להתכנסות או התבדרות האינטגרל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \int_1^{\infty} a_x dx$ - .

6. **מבחן המנה-** יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (סופי/אינסופי), אז:

- אם $q<1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הטור מתכנס.
- אם $q>1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הטור מתבדר.
- אם $q=1$, אזי המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

7. **מבחן השורש-** יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. אם קיים הגבול- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ (סופי/אינסופי), אז:

- אם $q<1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הטור מתכנס.
- אם $q>1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הטור מתבדר.
- אם $q=1$, אזי המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

8. **מבחן לייבניץ-** נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, אם הסדרה $a_n \longrightarrow 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי הטור מתכנס:

- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ מתכנס בהחלט, אם ערכו המוחלט של הטור מתכנס, כלומר $\alpha > 1$.
- הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ מתכנס בתנאי, אם ערכו המוחלט מתבדר, כלומר $0 < \alpha \le 1$.

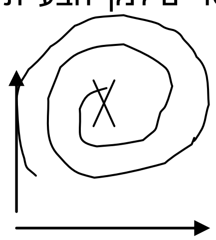
טורי פונקציות/חזקות

1. כאשר מקבלים טור חזקות ניתן להשתמש בכל המבחנים שבטורים רגילים. נעשה ערך מוחלט לטור ונמצא תחום התכנסות.
2. אם טור החזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס עבור $|x|<R$, אזי מתקיים:
   - הפונקציה $f(x)$ (סכום של טור) רציפה לכל $|x|<R$.
   - $\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, המתכנס עבור $|x|<R$.
   - $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, המתכנס עבור $|x|<R$.
3. אם יוצא בטור תוצאה של- $x<\infty$, כלומר הטור מתכנס לכל X ואין לו תחום מספרי.
4. במידה ומצאנו תחום התכנסות, נבדוק מה קורה בקצוות- משמע נציב את הקצוות של התחום בטור ההתחלתי ונחזור על סעיף 1.
5. ניתן לחשב את רדיוס התכנסות ב-2 דרכים:
   - אם תחום ההתכנסות הוא סימטרי, משמע רדיוס ההתכנסות הוא חצי ממנו (קיימת אפשרות שאין רדיוס התכנסות).
   - או על פי הנוסחא: $(a_n \neq 0)$' $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $R=\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.
6. בפיתוח טורים, נצטרך רוב הפעמים "לשחק" (להוציא גורם משותף לעשות אינטרל וכו') קצת בפונקציה כדי להגיע לצורה שמופיעה בדף נוסחאות.
7. במידה ולא ניתן לשחק אזי צריך לגזור לפי ההגדרות הבאות:
   - פיתוח פונקציות לטור טיילור: פונקציה תהיה גזירה אינסוף פעמים $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$, אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ כלומר- לכל $x\in(-\infty,\infty)$.
   - הערה: באופן דומה אפשר לפתח את $f(x)$ לטור מקלורן, כלומר סביב הנק' 0 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
8. כאשר מבקשים לחשב את האינטגרל בדיוק מסוים:
   - נהפוך את האינטגרל לטור עלידי פעולות אלגבריות פשוטות.
   - אחרי שהפכנו לטור נעשה אינטגרל רק ל-X.
   - לאחר מכן נתחיל להציב את ה- n עד שנגיע לדיוק או שנעבור אותו.

- ברגע שעברנו אותו נסכום את כל ה-חיות עד אותו n שעבר את הדיוק לא כולל.

גבולות ורציפות במס' משתנים

1. נניח וקיבלנו גבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = f(x,y)$, אם אפשר להציב את הנקודה אז התוצאה היא הגבול.
2. גבול בו אי אפשר לקבל תוצאה ישירה נעשה הצבה ל-t או R ונהפוך את הגבול לגבול עם משתנה אחד, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = f(x,y)$ $\lim_{R\to 0} = f(x,y)$.
3. כיצד נראה/ נוכיח שהגבול בעצם לא קיים? ישנן מס' דרכים:
   - נקרא ל- $y = kx$ ונציב, אם אנחנו מקבלים תוצאה שתלויה ב-k אזי הגבול לא קיים.
   - נבדוק כך דרך כמה מסלולים היות שכדי שהגבול לא יתקיים, התוצאה צריכה להיות אחידה מכל הכיוונים.
   - דרך אחרת מוצלחת יותר שסוגרת את כל הכיוונים האפשריים לנק' הבעייתית היא להציב הצבה פולארית בגבול. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

     אם התוצאה תלויה ב- θ אזי אין גבול.
     (ראה שרטוט).כלומר לכול זווית סביב הנק'
     הגבול לא קיים.
4. אפשרות נוספת היא לקבוע גבול דרך $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$

   ופעם אחת דרך $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, אם $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$, אזי הגבול קיים, אם אין שוויון הגבול לא קיים.

דיפרנציאל שלם

1. כאשר מבקשים למצוא את הדיפרנציאל של הפונקציה נגזור לפי $f_z^{'},\ f_y^{'},\ f_x^{'}$ ונציב בנוסחא בנוסף נשתמש גם כשמבקשים לחשב קירוב לדוג' $(1.02)^{1.01}$ נחפש את הפונקציה שמתאימה לתבנית ונגזור פעם ביחס $f_z^{'},\ f_y^{'},\ f_x^{'}$ ונציב בנוסחא. למשל $f = x^y$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}_{(M)} dx + \frac{\partial f}{\partial y}_{(M)} dy$$

נציין ש-dy, dx הם בעצם הפרש כלומר, $\Delta y, \Delta x$.

2. מציאת קירוב ליניארי: $f_{(x_0+\Delta x)} \approx f_{(x_0)} + f^{'}_{(x_0)} \cdot \Delta x,\ f^{'}_{(x_0)} = \dfrac{f_{(x_0+\Delta x)} - f_{(x_0)}}{\Delta x}$.

3. נגזרת חלקית: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_{(x_0+\Delta x, y_0)} - f_{(x_0, y_0)}}{\Delta x}$.

נגז' חלקית

4. כלל השרשרת: $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$.

נגז' פנימית

5. אם נותנים לנו משוואה ומבקשים להוכיח שהיא דיפרנציאל שלם, נניח שהמשוואה $Pdx + Q\partial y$ מהווה דיפרנציאל שלם ל- $z = f(x, y)$ הטענה תהיה נכונה אך ורק אם $P_y^{'} = Q_x^{'}$ וזו ההוכחה.

6. אם רוצים למצוא את הפונקציה הקדומה של הדיפרנציאל, אזי נחפש במשוואה את הביטוי שיש לו נגזרות ונציב אותו בתוך סימון d (f) של דיפרנציאל" ונגזור ביחס ל-x וביחס ל-y כך נוכלa לדעת בוודאות אילו ביטויים בפונקציה/משוואה הוא מכסה ונקבל משוואה של d(f)+d(g), נחבר אותם נוריד את הסימון ונוסיף C.

7. במידה ונשאר לנו ביטוי במשוואה/פונקציה ללא נגזרות' נקרא לו F כפונקציה קדומה' נעשה לו אינטגרל ונוסיף אותו למשוואה- זו המשוואה הדיפרנציאלית שביקשו.

נגז' מכוונת וגרדיאנט

הגרדיאנט של הפונקציה הוא:

$$\vec{\nabla} f(M_0) = gradf(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\vec{z}$$.

הגרדיאנט הוא בעצם ערך הנגזרות $f_x^{'}, f_y^{'}, f_z^{'}$ בנקודה M_0 כפול ווקטור כיוון שעדיין לא מחושב.

הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנק' M בכיוון הווקטור $\tau = \frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}$ היא:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \overrightarrow{gradf} \cdot \vec{\tau} = \frac{\partial f}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial f}{\partial y}\tau_y + \frac{\partial f}{\partial z}\tau_z$$

כאשר מבקשים את הכיוון בו הנגזרת בנק' M שווה ל-0, נכפיל את הגרדיאנט בווקטור (τ_x, τ_y), ננרמל אותו וניצור משוואה. בנוסף יש לנו עוד משוואה $\left\|\tau\right\| = (\tau_x)^2 + (\tau_y)^2 = 1$, עכשיו נפתור 2 משוואות בשני נעלמים ונמצא ווקטור כזה כשנכפיל אותו בגרדיאנט נקבל 0.

כאשר מבקשים את הכיוון בו הנגזרת בנקודה M מקסימאלית נחשב את הנורמה של הגרדיאנט $\left\|gradf_M\right\|$

כלומר הכיוון בו הנגזרת מקס' הוא בכיוון הגרדיאנט שם קיימות הווריאציות הכי חזקות והמינמ' בדיוק ההפך רק להוסיף מינוס.

הערה :

- אם מבקשים את ערך הנגזרת או להביע אותה באמצעות ווקטור כיוון τ או בכיוון 2 נקודות ובאמצעות נק' M, אז צריך לקבל תשובה סופית ולא ביטוי.
- כאשר מבקשים כיוון צריך לקבל ווקטור מסוים או הפרש בין 2 נקודות' שזה בעצם הכיוון, תלוי מה נתון.
- אם מבקשים גודל את זה נורמה של מה שמבקשים, לדוגמא גודל ש-f בכיוון מקס', כלומר נורמה של $gradf$.

המישור המשיק וישר הנורמל למשטח

כדי למצוא את משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה:

נגזור $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y \frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$ ונציב הם את הנקודה M ונציב במשוואת המישור המשיק שהיא:

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(M)}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}_{(M)}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}_{(M)}(z - z_0)$$

כדי למצוא את משוואת הקו הנורמל למשטח הפונקציה:

נגזור $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y \frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$, נציב הם את הנקודה M ונציב במשוואת הנורמל שהיא:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M)} + \frac{y - y_0}{f'_y(M)} + \frac{z - z_0}{f'_z(M)} = 0$$

כדי למצוא את ווקטור היחידה של הנורמל פשוט ניקח את $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y \frac{\partial f}{\partial z} = f'_z$, נציב הם את הנקודה M וננרמל את הווקטור/

$$\vec{n} = \frac{(f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))}{\sqrt{\left(f'_x(M)\right)^2 + \left(f'_y(M)\right)^2 + \left(f'_z(M)\right)^2}}$$

מציאת נק' קיצון של פונקציה ב-2 משתנים

מציאת נקודות קיצון מקומיות של $z = f(x,y)$ בלי אילוצים:

1. מציאת נקודות פנימיות חשודות כקיצון - f'_x, f'_y ומשווים אותם ל – 0.
2. מציבים בנוסחא $D = AC - B^2$, כך ש-

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, C = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f''_{xy},$$

אם - $D(x_0, y_0) > 0$ אז (x_0, y_0) היא נק' קיצון:

- אם - $A(x_0, y_0) > 0 \| C(x_0, y_0) > 0$, אז (x_0, y_0) היא נק' Min.
- אם - $A(x_0, y_0) < 0 \| C(x_0, y_0) < 0$, אז (x_0, y_0) היא נק' Max.

אם -$D(x_0, y_0) < 0$ אז (x_0, y_0) היא נק' אוכף.

הערה: במקרה ש - $D(x_0, y_0) = 0$ לא ניתן לקבוע מסקנה לגבי (x_0, y_0).

מציאת נקודות קיצון של פונק' ב-2 משתנים $z = f(x,y)$, עם אילוץ פתוח/אילוץ סגור $g(x,y) = k$:

1. כאשר ניתן לחלץ מהאילוץ את אחד מהמשתנים כלומר, הפונקציה לא סתומה (לדוג': $g(x,y) = x + y = 5$)

   נחלץ ונעבור למציאת נק' קיצון של פונ' במשתנה אחד. $f(x, 5-x)$

   אנו עושים זאת כי צריך למצוא את הנקודות שנמצאות על השפה (על כל ישר), כגון קו סגור (מצולע, משולש, קו ישר וכו').

2. במידה והפונקציה סתומה (לדוג': $g(x,y) = x^2 + y^2 = 5$), נגדיר את הפונקציה של לגרנג':

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k].$$

   נגזור בצורה הבאה: $L'_x = 0, L'_y = 0, L'_\lambda = 0$ ונמצא נקודות חשודות.

הערה: אם אי אפשר לחלץ את אחד המשתנים, אזי האילוץ הוא סגור.כלומר, אם האילוץ הוא אליפסה או מעגל לא ניתן לחלץ ולכן נעבור ללגרנג'.

הערות:

- אם נתונה לנו פונקציה שמוגדרת כתחום סגור אז לפונקציה יש לפחות נק' Min ו-Max אחת .
- תחום סגור הוא קו שלא חותך את עצמו, התחום כולל את השפה.
- נציב את כל הנקודות החשודות בפונקציה' המטרה והערך הכי גבוהה הוא Max מוחלט והערך הכי נמוך הוא Min מוחלט.

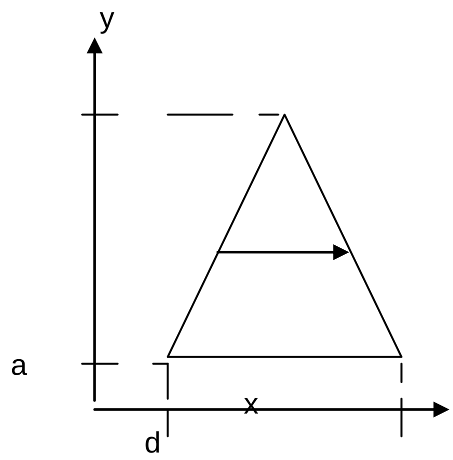
אינטגרל כפול

תכונות האינטגרל הכפול:

1. $$\forall(\alpha,\beta)\in R^2 : \iint_D(\alpha f+\beta g)=\alpha\iint_D fdxdy+\beta\iint_D gdxdy$$
2. $$D=D_1\cup D_2, D_1\cap D_2=\varnothing : \iint_{D_1} fdxdy+\iint_{D_2} fdxdy$$
3. $$\exists M_0(x_0,y_0)\in D : \iint_D f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0)\cdot S(D)=f(x_0,y_0)\cdot\frac{\iint_D 1dxdy}{S(D)}$$
4. $$m\cdot S(D)\le\iint_D f(x,y)dxdy\le M\cdot S(D),\begin{Bmatrix} m=\min f(x,y),(x,y)\in D \\ M=\max f(x,y),(x,y)\in D\end{Bmatrix}$$
5. $$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint_D|f(x,y)dxdy|$$
6. $$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

כאשר Y קבוע בין a ל- b על הישר

$$\int_{y=a}^{y=b}\left[\int_{x=c}^{x=d} f(x,y)dx\right]dy$$



מחשבים אינטגרל על הישר Y ב-X בין c ל- d

X כביטוי של Y

c

זהויות חשובות:

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

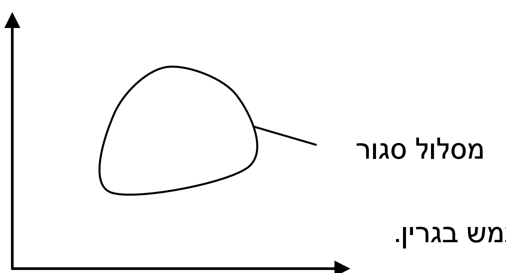
אינטגרל קווי

הגדרה של אינטגרל קווי: $\int_C P_{(x,y)}dx+Q_{(x,y)}dy=\int_C Pdx+Qdy$.

אם $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ אזי במסלול פתוח התוצאה לא תלויה מהדרך ואפשר להציב כל ישר בין הנק' הכי פשוט הצבת משתנים.

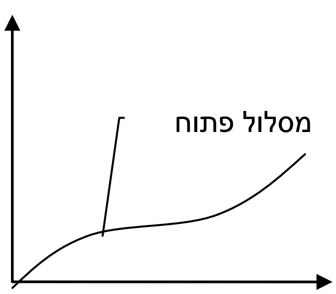
אם $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$ אזי במסלול פתוח התוצאה תלויה בדרך ונעבור להצבת משתנים, במידה וניתנת משוואה של Y כלשהי נציב אותה במקום ה-Y שבאינטגרל. את הנגזרת שלה, dy, נציב גם במשוואה והאינטגרל יהיה קווי בין ה-X (אפשר גם להפך).

ניתן במקרה זה להשתמש במשפט גרין רימן: $\int_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$



הערות למשפט גרין:

- העקומה חייבת להיות סגורה.
- בעקומה סגורה לא חשוב אם $P'_y\neq Q'_x$, אפשר להשתמש בגרין.
- אם המסלול פתוח צריך לבדוק ש - $P'_y=Q'_x$ כדי שנוכל להשתמש במשפט.



אינטגרל משולש

כאשר מבקשים לחשב נפח זה, מדובר בעצם בחישוב אינטגרל משולש $\iiint_{\vartheta} 1dxdydz$.

אם מבקשים לחשב $\iiint_{\vartheta} f(x,y)dxdydz$ נהפוך את סדר האינטגרציה ל- $dzdydx, dzdxdy$, מה שיותר נוח, ונמצא בגבולות של ה-Z ביטוי של X ו-Y , בגבולות של ה- Y ביטוי של X ובגבול החיצוני רק מס'.

משוואות דיפרנציאליות

ישנם מס' סוגים של משוואות דיפרנציאליות והם:

1. **משוואה דיפרנציאלית עם הפרדת משתנים מהצורה:** $P_{(x)}dx = Q_{(y)}dy$
   הרעיון הוא לנסות ולהפריד את כל מה ששייך ל-x בצד אחד תחת dx ואת כל מה ששייך ל-y תחת dy.
2. **משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מהצורה:** $y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

הרעיון הוא הצבה, כלומר משנים את הנעלם לדוג' $y'(x) = \frac{y^2}{x^2} + 4\left(\frac{y}{x}\right) + 2$, נציב $Z = \frac{y}{x}$, נוציא ממנו ביטוי של Y $y = zx$, נגזור אותו רגיל ונציב במשוואה הראשית וכך נקבל משוואה שנוכל לעשות לה הפרדת משתנים.

אחרי שעשינו הפרדת משתנים נעשה אינטגרל ונוציא e נקבל $\left|\frac{z+1}{z+2}\right| = e^c |x|$, נקרא ל- $A = e^c$.

נוציא מהמשוואה ביטוי של Z ונציב חזרה בביטוי $y = zx$, כך למעשה קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית.

3. **משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר ראשון, מהצורה:**
$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$.

- הרעיון הוא קודם לפתור את המשוואה ההומוגנית (כלומר נשווה ל-0), ולאחר מכן נהפוך את C לפונקציה C(x) ונפתור את הפתרון המיוחד.
- כשקיבלנו את הפתרון המיוחד נציב אותו במשוואה שקיבלנו בפתרון ההומוגני.

תזכורת חדו"א 1

1. **כאשר יש פולינום חלקי פולינום:**
- אם חזקת המכנה = לחזקת המונה, אזי חילוק מקדמים.
- אם חזקת מכנה > מחזקת מונה, התוצאה היא ∞.
- אם חזקת מכנה < מחזקת מונה התוצאה היא 0.

2. **גבולות מיוחדים שצריך לזכור:**
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{x}=k$.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{\sin(mx)}=\frac{k}{m}$.

3. **ישנם מקרים שבמהלך חישוב של אינטגרל לא אמיתי נתקל במקרים הבאים:**
$(\infty-\infty),(0\cdot\infty),(1^{\infty}),(\infty^0),(0^0)$, אז נצטרך לעשות לופיטל לביטוי ונחזיר את תשובתו להמשך החישוב.

4. **אינטגרציה של פונקציה רציונאלית, ישנם 3 סוגים והם:**
הערה: אם מעלת המונה $\leq$ ממעלת המכנה נעשה חילוק פולינומים.

א. כאשר שורשי המכנה ממשיים ושונים:

- נפרק את שורשי המכנה ונרשום $\int\frac{1}{x.....}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ וזה שווה לביטוי המקורי נמצא A ו-B ואז הביטוי מתפרק לשני אינטגרלים.

ב. כאשר שורשי המכנה ממשיים ויש ביניהם כפולים:

- אם יש ביניהם כפל אזי נרשום: $\int \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{C}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{A}{(x-1)^2}$,
נמצא C,B,A, וכך פירקנו את האינטגרל ל-3 חלקים.

ג. כאשר שורשי המכנה מדומים:

- נפרק את המכנה בצורה הבאה: $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{B}{x} + \frac{A}{x^2}$,
נמצא את C,B,A, ונחשב את האינטגרל החדש.

5. **אינטגרל נוסף שיש לזכור הוא:** $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$.

6. **יש לזכור איך עושים השלמה לריבוע:**

- המקרה שהמקדם של ה-X מחלקים ל-2 ומעלים בריבוע.
- במקרה שיש מקדם ל- x^2 השורש שלו מציבים במשוואה $(\sqrt{a}+m)^2+n$ ומשווים עם המקדם של ה-X כדי לקבל את m ומחפשים את ה-n שישלים לנו לאיבר החופשי שבמשוואה המקורית.