

$$\max_x f(x) = -\min_x (-f(x))$$

בבעיית תכנות לינארי המשתנים הם רציפים (אין אילוצי שלמות) פונקציית המטרה היא אופ' ויש מס' סופי של אילוצים.

בעיית התזונה:

תפריט שיענה על צרכי הבריאות המיני' ויהיה זול.

ניסוח כללי של בעיית התזונה:

m אבות מזון ו-n מוצרים

$b_i \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, m$ - כמות מינימאלית הנדרשת בתפריט מאב מזון i. ($b \in \mathbb{R}^m$)

$c_j \in \mathbb{R} \ j=1, \dots, n$ - מחיר יחידת מוצר מזון j. ($c \in \mathbb{R}^n$)

$a_{i,j} \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, m \ j=1, \dots, n$ - כמות אב מזון i ביחידת מוצר j. (A - היא מטריצה

$(m \times n)$.

$x_j \in \mathbb{R} \ j=1, \dots, n$ - הכמות מהמוצר ה-j. ($x \in \mathbb{R}^n$).

ניסוח הבעיה:

ניסוח מטריציוני:

$$\min c^T x$$

$$s.t. Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \ \forall i=1 \dots m$$

$$\min \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

בעיית ייצור:

ישנם m חומרי גלם מהם ניתן לייצר n מוצרים סופיים.

כמה לייצר מכל אחד מהמוצרים הסופיים כך שהרווח הכולל ממכירתם יהיה מקסימאלי.

נתונים:

$a_{i,j} \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, m \ j=1, \dots, n$ - כמות חומר גלם i הדרושה לייצור יחידה אחת של

מוצר j (מטריצת הטכנולוגיה). $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$p_j \in \mathbb{R} \ j=1, \dots, n$ - מחיר מכירה של יחיד מוצר j. $p \in \mathbb{R}^n$.

$q_i \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, m$ - מחיר קנייה של יחידת חומר גלם i. $q \in \mathbb{R}^m$.

$b_i \in \mathbb{R} \ i=1, \dots, m$ - כמות מקסימלית נתונה לחומר גלם i. $b \in \mathbb{R}^m$.

X_j - כמות שמייצרים ממוצר j ($X \in \mathbb{R}^n$)

$$C_j = p_j - \sum_{i=1}^m q_i \circ a_{ij} \quad j=1, \dots, n$$

ניסוח מטריציוני:

ניסוח הבעיה:

$$\max c^T X$$

$$s.t. AX \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\max \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n a_{ij} * X_j \leq b_i \ \forall i=1 \dots m$$

$$X_j \geq 0 \ \forall j=1 \dots n$$

בעיית התובלה:

הפצת הסחורה מהמחסנים לחנויות בעלות מינימאלית, תוך עמידה בדרישות הביקוש. הנחה סמויה - סה"כ הייצע = סה"כ הביקוש

הבעיה היא יונימודלרית - כל תת מטריצה ריבועית שלה דטרמיננטה 1 או -1.

משפט: אם $AX=b$, b מכיל שלמים, A יוני מודולרית אז יש פתרון אופטימאלי שלם.

נתונים:

$-C_{ij}$ - מחיר הובלת יחידה ממחסן i לחנות s_j - הצע לכל מחסן i d_j - ביקוש לחנות j

X_{ij} - כמות סחורה שנוכיל ממחסן i למחסן j. **ניסוח לדוגמא:**

$$\min C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

$$s.t. X_{11} + X_{12} + X_{13} = S_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = S_2$$

$$X_{11} + X_{21} = d_1$$

$$X_{12} + X_{22} = d_2$$

$$X_{13} + X_{23} = d_3$$

$$X_{ij} > 0$$

$$\min C^T X$$

$$s.t. AX = b$$

$$x \geq 0$$

א. על מנת שהבעיה תהיה אפשרית יש לדרוש שהביקוש \geq היצע

ב. נניח שההיצע $>$ מהביקוש, ניתן להגדיר בעיית תובלה אחרת שבה הביקוש שווה להיצע והפתרון האופטימלי של הבעיה החדשה הוא אותו פתרון של הבעיה המקורית. בבעיה החדשה תהיה חנות נוספת שעלות ההובלה אליה הוא 0 והביקוש שלה הוא הפרש ההיצע הכולל מהביקוש הכולל (משתנה חוסר)

בעיית שידוכים:

ישנם n גברים ו-n נשים. יש לשדך לכל גבר אישה אחת ולכל אישה גבר אחד.

נתונים: $c_{i,j}$ - מידת האושר כאשר גבר i משודך לאישה j.

המטרה: להביא למקסימום את סך האושר.

X_{ij} - משתנה בוליאני המקבל ערך 1 כאשר גבר i משודך לאישה j.

ניסוח הבעיה: סך הערכים על העמודות 1, וסך הערכים על השורות 1.

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad s.t. \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \ \forall i=1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1 \ \forall j=1 \dots n$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

בעיית התרמיל:

לרשותנו n חפצים שונים, תרמיל שקיבולתו C. לכל חפץ נתון ערכו V_i ונפחו W_i . **המטרה**

להביא למקסימום את סך הערכים. $X_i \in \{0,1\}$ אם נכנס, 0 אם לא. **ניסוח הבעיה**

$$\max \sum_{i=1}^n V_i X_i \quad s.t. \sum_{i=1}^n W_i X_i \leq C \quad X_i \in \{0,1\}$$

מקרים שיכולים להיות:

1. מה היה קורה אם היינו מחליפים את אילוצי הבינריות $X_i \geq 1$. היינו לוקחים את החפץ

בעל המשקל הסגולי $\frac{V_i}{W_i}$ המקס' ומכניסים כמה שאפשר C/W_i פעמים.

2. אם היינו מחליפים בין $0 \leq X_i \leq 1$ הפתרון האופטימאלי מכניסים את החפץ המקס' כמה

שאפשר אם נשאר מקום מכניסים את הבא. נניח שאפשר להכניס את k הראשונים. הפתרון

המקורב שלנו יהיה המקסימום של הערכים (ולא היחס) של כל השאר, לבין הנפח של ה k+1 (החפץ הבא שלא היה ניתן להכניס).

בעיית שיבוץ אחיות במשמרת

בונים טבלה של j אחיות בהתאם למספר הימים הרצופים. y_j מספר האחיות המתחילות לעבוד

$$\min \sum_j y_j \quad \text{מספר עובדים מינימאלי}$$

פונקציית מטרה מספר עובדים ביום בשבוע

$$s.t. y_1 + y_2 + \dots + y_7 \geq d_1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_7 \geq d_2$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_7 \geq d_7$$

$$y_j \geq 0 \text{ integer}$$

בעיית הסוכן הנוסע - סוכן נוסע ומבקר ב n ערים. הוא חייב לבקר בכל אחת מהם ובדיוק

פעם אחת. d_{ij} - המרחק מעיר i לעיר j. המטרה לצאת מביתו במסלול מינימאלי

משתנים: X_{ij} משתנה המקבל 1 עם הסוכן עבר מעיר i לעיר j אחרת.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} X_{ij} \quad s.t. \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad \sum_{i \in S, j \notin S} X_{ij} \geq 1 \ \forall S \{1 \dots n\} \neq \emptyset$$

כאשר S תת קבוצה של הגרף

קמירות:

הגדרה: קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קמורה אם לכל שתי נקודות בקבוצה, גם הקטע ביניהן

מוכל בקבוצה. כלומר,

$$x, y \in S, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S$$

קבוצת הפתרונות האפשריים או רק האופטימאליים של בעיית תכנות לינארי היא קמורה.

בעיית צביעה

נתון גרף, יש לצבוע את צמתי הגרף במיני צבעים, כך שבכל קשת יצבעו 2 צמתים בצבעים שונים. נאפשר n צבעים.
משתנים: X_{ik} - 1 אם קודקוד i נצבע בצבע k. (שניהם מ 1 עד n)
 $1 - Y_i$ אם השתמשנו בצבע j אחרת.
 האילוח הראשון - הולכים צבע צבע - עבור כל קשת (i,j) בגרף.
 האילוח השני - אילוח קודקוד i נצבע.
 האילוח השלישי - קשר בין X ל Y . i רץ על הקודקודים, k על הצבעים.

$$\min \sum_{j=1}^n Y_j \quad s.t. \quad X_{ik} + X_{jk} \leq 1 \quad \forall k=1..n$$

$$\sum_k X_{ik} = 1 \quad \forall i=1..n$$

$$X_{ik} \leq Y_k \quad \forall i=1..n \quad \forall k=1..n$$

פא"בים:

הגדרה יהיו $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטורים ב- \mathbb{R}^n או $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

הישר העובר דרך x ו- y הוא קבוצת הנקודות $\{\lambda x + (1-\lambda)y | -\infty < \lambda < \infty\}$
 הקטע בין x ל- y הוא קבוצת הנקודות $\{\lambda x + (1-\lambda)y | 0 < \lambda < 1\}$

1. קבוצת הנקודות האפשריות של בעיית תכנות לינארי היא מצולע בעל מספר סופי של קודקודים.
 2. אם לבעיית תכנות לינארי יש פתרון אופטימאלי, אז קיים פתרון אופטימאלי שהוא קודקוד.
 3. אם 2 וקטורים הם פתרון אופטי אז כל הנקודות על הקטע שביניהם נקודות אופטי.
הגדרה: בעיית תכנות לינארי נקראת לא חסומה כאשר קבוצת הפתרונות האפשריים לא חסומה וערך פונ' המטרה שווה ל ∞ בבעיית המקסימום ו $-\infty$ בבעיית המינימום.
צורה סטנדרטית לבעיית תכנות לינארית:

$$Ax = b, x \geq 0$$

- אם האילוח המצורה $a_i^T x \leq b_i$ נוסף משתנה חוסר $s \geq 0$ $a_i^T x + s = b_i$
 - אם האילוח $a_i^T x \geq b_i$ נוסף משתנה חוסר $s \geq 0$ $a_i^T x - s = b_i$
 - משתנה free או $X = X^+ - X^-$ $X^+, X^- \geq 0$
 - אם $X_i \leq 0$ נגדיר $X_i = -X_i$ $X_i \geq 0$
- X יקרא פא"ב אם (n משתנים m אילוצים):
- m-n רכיבים מהווקטור הם אפסים (רכיבים לא בסיסים).
 - שאר m הרכיבים מתאימים לעמודות בת"ל של המטריצה A (רכיבים בסיסים)
- אם כל הרכיבים הבסיסים חיוביים X יקרא פא"ב לא מגוון (X חיובי להיות $0 \leq$).

המשפט היסודי של התכנות הלינארי: אם קיים פתרון אופטימאלי לבעיית

התכנות הלינארי אז קיים פאב אופטימאלי.

תכונות נוספות:

- מספר הפאבים הוא סופי.
- אם פא"ב אין פא"בים סמוכים שהם טובים ממנו אז הוא אופטימאלי.

זיהוי פא"בים:

1. ישנם $\binom{n}{m}$ אופציות.

- בוחרים m משתנים כלשהם, העמודות שמתאימות להם במטריצה האילוצים - צריך לבדוק דטרמיננטה. אם היא שונה מ-0 להמשיך (אז הם לא תלויים).
- לפתור את המשוואה (סכום עמודות המקדמים מוכפלים במשתנים=לעמודת b) מוצאים את הפתרון, אם הוא כולו חיובי יש פא"ב.

מעבר מפתרון אופטימאלי לפא"ב אופטימאלי:

- לוקחים את הפתרון ובודקים כמה צריכים להתאפס (m).
- מחפשים y כך ש $Ay=0$. אם יש רכיב 0 כבר בפתרון, ה y המתאים לו כבר 0.
- בונים $X + \epsilon y$. מוצאים את הטווח של ϵ . ולוקחים את המינימאלי או המקסימאלי כדי לאפס.
- אם לא הגענו למספר האפסים נבחר פתרון הומגני אחר Y לפי הפתרון האופטימלי הקודם האחרון שמצאנו $X + \epsilon y$. הערה: לא לוקחים עמודות שמתאימות לרכיבים שהם 0
- מסיימים כאשר מספר האפסים הוא m-n

קו קרוב נתונות n נקודות

המטרה: למצוא קו ישר מהצורה $y=ax+b$ המתאר טוב ככל האפשר את הנקודות הללו.
פונקציית מטרה ראשונה סה"כ ריבועי המרחקים של הנקודות מהנקודות על הקו

$$\min \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \text{ not a linear problem}$$

פונקציית מטרה שנייה סה"כ הערך המוחלט של המרחקים של הנק' מהנקודות על הקו

$$\min \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i| \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^n d_i \quad s.t. \quad ax_i + b - d_i - y_i \leq 0$$

$$ax_i + b + d_i - y_i \geq 0$$

פונקציית מטרה שלישית המקסימום של הערך המוחלט של המרחקים של הנקודות מהנקודות על הקו.

$$\min \max |ax_i + b - y_i| \Leftrightarrow \min z \quad s.t. \quad ax_i + b - y_i - z \leq 0$$

$$ax_i + b - y_i + z \geq 0$$

$$*|x| \leq t \Leftrightarrow -t \leq x \leq t$$

$$** \max \{x_1, \dots, x_n\} \leq t \Leftrightarrow x_1 \leq t, \dots, x_n \leq t$$

$$*** \min f(x) \Leftrightarrow \min (f(x))^2 \text{ have same optimum}$$

סימפלקס: עובד רק על פונקציות max

- עמודת ה b חייבת להיות חיובית (אחרת שיטת 2 פאזות או סימפלקס דואלי).
- מכניסים לבסיס את המשתנה הכי שלילי בשורת ה Z.
- מבצעים מבחן המנה: ה b המתאים חלקי הערך של העמודה של המשתנה הנכנס (לחלק ב 0 או ב שלילי זה ∞).
- נוציא מהבסיס את המשתנה עם התוצאה הקטנה ביותר במבחן המנה. במהלך התהליך מתחת למשתני הבסיס תהיה מטריצת היחידה, ונשתמש בשורת הבסיס היוצא על מנת לדרג את הסימפלקס.

תוצאות שונות לסימפלקס:

פתרונות מרובים: כאשר נמצאים בפתרון אופטימאלי שורת ה Z חיובית אבל למשתנה שאינו בבסיס יש מקדם 0 - מותר להכניס אותו והפתרון לא ישתנה. לכן נקבל פתרון אופטימאלי נוסף.
אין פתרון: אין בצורה הסטנדרטית (כל האילוצים קטן שווה, כל הערכים ב a חיוביים, או ראשית הצירים תמיד פתרון).
הבעיה לא חסומה: אם קיימת עמודת מספרים אי חיובית בטבלת הסימפלקס.

פתרון בשיטת שתי הפאזות:

סימפלקס על צורה לא סטנדרטית (כאשר קיימים אילוצי שוויון ואילוצי גדול שווה):

- אילוח שוויון - נוסף משתנה מלאכותי y ונדרוש $y=0$.
- אילוח גדול שווה- נוסף s ומשתנה מלאכותי y כלומר $-s+y$ (ונדרוש $y=0$).
- פונקציית מטרה מינימום - נכפול ב -1 ונהפוך אותה למקסימום. (כדי למצוא את הערך נכפול שוב ב -1)

שלבי הפתרון

- נרשום את הבעיה בצורה סטנדרטית
- אם מטריצה A לא מכילה בתוכה את מטריצת היחידה I נגדיר משתנים מלאכותיים ליצור פאב
- פאזה ראשונה** (איפוס משתנים מלאכותיים) - נשנה את פונקציית המטרה ל $\min(\sum (y_i + \dots + y_i))$. בסימפלקס נהפוך אותה ל max פאזה זו נגמרת כאשר הגענו לפיתרון אופטימלי 0 (אחרת אין פתרון אפשרי).
- פאזה שנייה** - מתחיל מאותה טבלה, מוחקים את עמודות המשתנים המלאכותיים (שאיפסו) ומחליפים לפונקציית המטרה המקורית (אם היא min להפוך ל max) ופותרים בסימפלקס רגיל. חשוב לוודא שבמשתני הבסיס מופיע בשורת ה Z אפסים. אם לא יש לסדר את המטריצה.

כתיב מטריציוני:

$-C^1$	0	
A	I	b

B - המטריצה שמורכבת מעמודות הבסיס במטריצה המקורית

B⁻¹ - המטריצה מתחת למשתני החוסר בשלב הנוכחי של הסימפלקס

X_B - תת הווקטור של X שמכיל את רכיבי הבסיס $X_B = B^{-1}b$ (רכיב הb החדש בשלב הנוכחי כאשר b הוא הוקטור המקורי).

C_B - תת הווקטור של C המקורי שמתאים למשתני הבסיס. (בהתחלה זה 0).

$$Z = C_B^T * X_B$$

טבלת סימפלקס בשלב כלשהוא:

הערך של Z $C_B^T X_B$	$C_B^T B^{-1}$	$-C^T + C_B^T B^{-1}A$	שורת ה Z
עמודת ה b החדשה. b המקורי $B^{-1}b$	B^{-1}	$\tilde{A} = B^{-1}A$	הטבלה החדשה כולה. A המקורית

הבעיה הדואלית:

בעיה דואלית $\min b^T y$
 בעיה פרימאלית $\max c^T x$
 s.t. $Ax \leq b$
 $x \geq 0$
 s.t. $A^T y \geq c$
 $y \geq 0$

בעיה דואלית D	בעיה פרימאלית P
$\min b^T y$	$\max c^T x$
אילוץים $i=1, \dots, n$	משתנים x_1, x_2, \dots, x_n
משתנים y_1, \dots, y_m	אילוץים $j=1, \dots, m$
$A_i^T y \geq c_i$	$x_i \geq 0$
$A_i^T y \leq c_i$	$x_i \leq 0$
$A_i^T y = c_i$	x_i לא מואלץ סימן
$y_j \geq 0$	$A_j x \leq b_j$
$y_j \leq 0$	$A_j x \geq b_j$
לא מואלץ סימן y_j	$A_j x = b_j$

1. הבעיה הדואלית לבעיה הדואלית היא הבעיה הפרימאלית
2. משפט הדואליות החלש: אם x פתרון אפשרי לבעיה הפרימאלית (בעיית מקסימום) ו y פתרון אפשרי לבעיה הדואלית (בעיית מינימום) אזי $c^T x \leq b^T y$. כלומר, כל פתרון אפשרי של בעיית המקסימום נותן חסם תחתון לבעיית המינימום, וכל פתרון אפשרי לבעיית המינימום נותן חסם עליון לבעיית המקסימום
3. משפט הדואליות החזק: אם x פתרון אפשרי לבעיה הפרימאלית (בעיית מקסימום) ו y פתרון אפשרי לבעיה הדואלית (בעיית מינימום) אזי $c^T x = b^T y$ אם ו x ו y פתרונות אופטימאליים לבעיותיהם.
4. הפתרון האופטימלי לבעיה הדואלית תמצא בטבלת הסימפלס הסופית של הבעיה הפרימאלית מתחת למשתני החסור.
5. כשיש בעיה עם מעט אילוץים כדאי לעבור לבעיה הדואלית.

פרימאלית לא אפשרית	פרימאלית לא חסומה	לפרימאלית קיים פתרון	דואלית קיים פתרון
✓		✓	לדואלית קיים פתרון
	✓		דואלית לא חסומה
✓	✓		דואלית לא אפשרית

נבאי השלמת עודפים:

שימושי המשפט:
 (1) לפעמים אחת הבעיות קלה יותר לפתרון מהבעיה השנייה. במקרה זה ניתן למצוא את הפתרון האופטימלי של הבעיה הקלה, לבנות לפי פתרון זה מערכת משוואות ופתרון מערכת המשוואות ייתן את הפתרון האופטימלי של הבעיה הקשה.
 (2) כאשר יש פתרון אפשרי לאחת הבעיות ורוצים לבדוק האם הוא אופטימלי, בונים לפי פתרון זה מערכת משוואות. אם המערכת פתירה ומוצאת פתרון אפשרי לבעיה השנייה, אזי הפתרון ממנו התחלנו היה אופטימלי.

סימפלס דואלי

מתחילים מטבלת סימפלס שבה לא כל ערכי b חיוביים (הפרימאלי לא אפשרי) אבל כל שורת Z אי שלילית. (דואלי אפשרי).
 1. בוחרים את המשתנה שיוצא מהבסיס. אם כל ערכי b אי שלילים עוצרים (הפרימאלי אפשרי) אחרת בוחרים את ה b הכי שלילי.
 2. בוחרים את המשתנה שנכנס לבסיס. אם בשורה כלשהי כל המקדמים אי שלילים אז הדואלי לא חסום והפרימאלי לא אפשרי. אחרת יש לפחות ערך שלילי אחד ונבחר את האינדקס j שנותן $\max \left\{ \frac{\text{value in } Z}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0 \right\}$
 3. מבצעים החלפת בסיס וחוזרים לשלב 1

מטריצה יונימודולרית

מטריצה נקראת יונימודולרית לחלוטין אם לכל תת מטריצה ריבועית שלה דטרמיננטה 1 או -1.
 מטריצה A עברה $a_{ij} \in \{0, 1, -1\} \forall i, j$, היא יונימודולרית לחלוטין אם בכל עמודה יש לכל היותר שני ערכים השונים מאפס ואם אפשר לחלק את שורות המטריצה לשתי קבוצות כך ש:
 • אם עמודה מכילה שני ערכים בעלי אותו סימן אז השורות המתאימות שייכות לקבוצות שונות
 • אם עמודה מכילה שני ערכים עם סימנים שונים אז השורות המתאימות באותה קבוצה.
 אם מערכת המשוואות המתאימה לבעיה היא $Ax=b$, b מכיל מספרים שלמים ו A יונימודולרית לחלוטין אז קיים פתרון אופטימלי שלם

ניתוח רגישות

1. שינוי בוקטור b המקורי

א. רושמים את ווקטור b המקורי לאחר השינוי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ ונדרוש $Xb = B^{-1}b \geq 0$
 ב. נמצא את התחומים בהם β מקיימת את הדרישה.
 ג. נציב את תחומי β בוקטור b ונמצא בכמה ניתן לשנות את ווקטור b המקורי.
 ד. נחשב ערך אופטימאלי ע"י הנוסחה $C_B^T X_B$

2. שינוי בוקטור C

א. רושמים את ווקטור C החדש ודורשים $-C^T + C_B^T B^{-1}A \geq 0$ (נחשב עבור המשתנים שלא בבסיס. מה שבבסיס יהיה 0)
 ב. נמצא את התחומים בהם β מקיימת את הדרישה.
 ג. נציב את תחומי β בוקטור c ונמצא בכמה ניתן לשנות את ווקטור c המקורי.
 ד. נחשב ערך אופטימאלי ע"י הנוסחה $C_B^T X_B$ נחשב ערך אופטימלי רק במידה ששינוי מקדם למשתנה שבבסיס.

3. הוספת אילוץ

א. בודקים אם הפתרון הנוכחי מקיים את האילוץ – אם כן סבבה !!!
 ב. אם לא, נוסף את האילוץ (בצורה סטנדרטית), נתקן את הסימפלס כך שיופיעו 0 מעל המשתנים הבסיסים.
 ג. נפתור בסימפלס דואלי.

תורת המשחקים

שחקן שורה	שחקן שורה מקבל כסף	שלילי
שחקן 1 שחקן 2 שחקן 3	שחקן שורה משלם כסף	חיובי
	שחקן עמודה משלם כסף	שלילי
שחקן עמודה	שחקן עמודה מקבל כסף	חיובי

אסטרטגיות שולטות/נשלטות:

מתחילים עם שחקן כלשהו ומוצאים האם שורה/עמודה כלשהי שולטת על שורה/עמודה אחרת
 1. נחפש אם קיימת עמודה בה כל הערכים \leq משאר העמודות אם קיימת נמחק את העמודות האחרות.
 2. אם קיימת שורה בה כל הערכים \geq משאר השורות אם קיימת נמחק את השורות האחרות.
 3. נעבור לשחקן הבא (שלב 1) עד שמצאנו משבצת בודדת

קריטריון המינימקס:

עבור שחקן השורה רושמים את מקסימום הערכים בכל שורה ובוחרים מהם את המינימלי. עבור שחקן העמודה רושמים את מינימום הערכים בכל שורה ובוחרים מהם את המקסימלי. אם יש הערכים האלה זהים מצאנו נקודת אוסף. וערך המשחק יהיה בהצלבות העמודה והשורה שמצאנו.

אסטרטגיה מעורבת

הסתברות ששחקן שורה בוחר בפעולה X_j – שחקן העמודה. (הסכום של כל אחד שווה 1). (תוחלת התשלום – סוכמים עבור כל ערך בטבלה את מכפלת ההסתברויות שלהם, ובערך עצמו)

שחקן השורה:	שחקן העמודה				max
	min u	-4	-2	-1	
s.t. $-y_1+y_2-u \leq 0$	-5	0	1	1	
$-2y_1-y_3-u \leq 0$	1	-1	0	1	
$-4y_1-5y_2+y_3-u \leq 0$	min	-5	-2	-1	1
$y_1+y_2+y_3=1$	שחקן עמודה				
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ u free	Max V		s.t. $-4x_1-2x_2-x_3-V \geq 0$		
בוחרים את העמודות	s.t. $-5x_1+x_3-V \geq 0$		s.t. $x_1+x_2+x_3=1$		
	s.t. $x_1-x_2-V \geq 0$		s.t. $x_1, x_2, x_3 \geq 0$		
			בוחרים את השורות		

משפט המינימקס: אם מותר להשתמש באסטרטגיה מעורבת, זוג האסטרטגיות המעורבות שהוא אופטימאלי לפי קריטריון המינימקס מקיים $u^* = v^*$ (u – תוחלת התשלום של שחקן השורה, v – תוחלת הרווחים של העמודה) כך שלאף אחד אין אינטרס לשנות את האסטרטגיה.

האלגוריתם ההונגרי לפתרון בעיית השידוכים (רק למטריצות ריבועיות nxn)

1. נתרנס את הבעיה לבעיית מינימום – נכפול את המטריצה ב 1- ואת פונקציית המטרה ב 1-1. כעת זאת מטריצת עלויות ולא רווחים. אפשר לראות זאת כבעיית השמה, כאשר מציינים אנשים למשימות, במקרה זה c_{ij} זה הזמן שלוקח לאדם i לבצע משימה j . ולכן רוצים להביא למינימום את סך זמני הביצוע.
2. אם חלק מהערכים במטריצה שליליים אז מוסיפים לכל המטריצה קבוע מספיק גדול כך שהמטריצה תהיה אי שלילית (אם המטריצה לא ריבועית נוסף שורת אפסים).
3. ננסה לכסות במספר מינימאלי של קווים את התאים שבהם רשום 0.
4. אם רוצים שמישהו לא יבחר אז יש לרשום ∞ במקום המתאים.
5. אם מישהו בטוח משודך למשהו אז נוריד את השורה והעמודה המתאימים.

הפעלת האלגוריתם:

1. מורידים את הערך המינימאלי של כל שורה מהערכים בשורה.
2. מורידים את הערך המינימאלי של כל עמודה מהערכים בעמודה.
3. ננסה לכסות במספר מינימאלי של קווים את התאים שבהם רשום 0.
4. אם לא – ניקח את הערך המינימאלי מהתאים הלא מכוסים.
 - א. נוריד אותו מכל התאים הלא מכוסים.
 - ב. נוסף אותו רק לתאים שבהצלבות של שני קווים.
5. חוזרים לשלב 3.

הערה: הערך האופטי ימצא ע"י חיבור הערכים המתאימים לשידוך מהמטריצה המקורית

שיטת סעף וחסום:

החלשה:

$$\min(\hat{p}) \leq \min(p)$$

$$\max(\hat{p}) \geq \max(p)$$

בבעיית min החלשה נותנת חסם תחתון לבעיית max החלשה נותנת חסם עליון לבעיית פתרון אפשרי: בבעיית min כל פתרון אפשרי נותן חסם עליון לבעיית max כל פתרון אפשרי נותן חסם תחתון לבעיית.

סוגים של החלשה: 1. אילוף בינארי יוחלף ב $0 \leq X_i \leq 1$.

2. ויתור על דרישה שמשנתה שלם. 3. בבעיית סוכן נוסע החלשה היא למשל ויתור על הדרישה של אי קיום תת מסלולים זרים (או תנאי כשירות). 4. בהשמה – ויתור על הדרישה שמכל עמודה בוחרים בדיוק איבר אחד.

אלגוריתם סעף וחסם לפתרון בעיית תכנות בשלמים (דוגמא למקסימום):

- יש לפתור את הבעיה המוחלשת (כלי אילוצי שלמות).
- א. מה שיצא – ערך פונקציית המטרה מהווה חסם עליון לבעיה. ב. ערך פונקציית מטרה של פיתרון שלם אפשרי כלשהו הוא חסם תחתון לבעיה.
- מסעפים משנתה שהערך שלו לא שלם (כמו בצירוף) פותרים את שתי הבעיות החדשות: א. ערך פונקציית המטרה הוא חסם עליון לענף. (בשורש זה החסם הכי גדול). ב. אם התקבל פתרון שלם, יש לעצור, ולעדכן את החסם התחתון. ג. אם הבעיה לא אפשרית לעצור את פיתוח הענף.
- אם חסם עליון של הענף קטן או שווה מהחסם התחתון (האפשרי!) יש לעצור.
- הולכים לבעיה שבה החסם העליון לענף הוא הגבוה ביותר ולחזור לשלב 2.

בעיית התרמיל (סעף וחסום):

נשתמש ברלקסציה $0 \leq X_i \leq 1$. נבחר את החפץ עם הערך הסגולי הגבוה ביותר. אם לא ניתן להכניס את כל החפץ נכניס שבר ממנו עד שהתרמיל יתמלא. אם ניתן להכניס את כל החפץ נכניס אותו ונעבור לחפץ עם הערך הסגולי הבא בגודלו. פיצול לפי הלא שלם – או שהוא 0 או שהוא 1. בכל שלב צריך לבדוק חסמים תחתונים שלמים חדשים.

בעיית זרימה קווית

נשתמש ברלקסציה אין צורך להמתין בתור, הזמן שייקח הוא רק זמני העיבוד קיימת, התנגשות. א. נפתור לפי סדר זמני עיבוד עולה במכונה הראשונה. ב. נפתח ענפים בעץ לפי שיבוץ למשימות. ברגע שמישהו משוכצת כן יהיה עבורה תור ג. נפתח את הענף בו יש זמן עיבוד מינימאלי. ד. נסיים אם מצאנו ענף בו אין התנגשויות בין כל המשימות

שיטת חתכי גומורי

נניח שפותרים את ההחלשה, נחפש אילוף נוסף שהפתרון של הבעיה המוחלשת לא מקיים אותו, אבל כל פתרון אפשרי שלם מקיים את האילוף החדש, ולכן הבעיה עם האילוף החדש שקולה למקורית.

$$f_{ij} = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor \quad f_i = b_i - \lfloor b_i \rfloor \quad [2.5] = 2 \quad [-2.25] = -3$$

- יש לוודא שכל המקדמים של האילוצים שלמים, אם לא נכפול כדי להשיג זאת.
- יש לפתור את הבעיה המוחלשת.
- אם הפתרון שהתקבל בשלב 2 שלם, יש לעצור הגענו לפתרון אופטימאלי.
- אחרת: נבחר שורת פיתרון לא שלם כלשהי לכל מקדם נחשב את החלק השבור שלו ע"י $a - \lfloor a \rfloor$ מוסיפים את משוואת המקדמים שחישבנו עם אילוף \geq לסימפלקס. נעשה זאת ע"י כפילת המשוואה ב -1 ונוסיף משנתה עורף חדש.
- ממשיכים בפתרון הבעיה בעזרת סימפלקס דואלי.
- חוזר לצעד 3

מציאת משוואות החתכים במונחי X, Y

1. רושמים את משוואות המקדמים שמצאנו בשלב 4 (כמו שהם, עם אילוף \geq). מוצאים מהמשוואות המקוריות למה שווים כל אחד ואחד מהמקדמים במשוואות (שהם משתני עורף, חוסר) ומציבים במשוואות.

ניתוח רשתות:

בעיית חתך מינימאלי – לחלק את הגרף לשתי קבוצות S ו \bar{S} . צומת המקור נמצאת ב S וצומת היעד נמצאת ב \bar{S} . עושים את כל החתכים האפשריים לבעייה. נסכום בכל חתך את הקיבולים - החתך המינימאלי זה הפתרון. לבעיית הזרימה המקסימלית עם קיבולים שלמים יש פיתרון אופטימאלי שלם. בעיית החתך המינימאלי דואלית לבעיית הזרימה המקסימאלית בגרף.

משפט הדואליות החלש: כל ערך של זרימה בגרף קטן או שווה לכל ערך של חתך.

משפט הדואליות החזק: זרימה מקסימאלית שווה לחתך מינימאלי. כלומר ישנו חתך שערך הזרימה בו שווה לערך הזרימה המקסימאלי.

האלגוריתם של לובה ועינת

סימונים - קיבולת בקשת i, j , - זרימה בקשת i, j

הגדרה

מסלול מ s (מקור) ל t (יעד) נקרא מסלול מוסיף אם התנאים הבאים מתקיימים:

- עבור כל קשת המתלכדת עם כיוון המסלול (קשת קדמית) מתקיים $f_{i,j} < c_{i,j}$, כלומר עוד לא השתמשנו בכל הקיבולת (בקשת)
- עבור קשת נגד כיוון המסלול (קשת אחורית) יתקיים $f_{i,j} > 0$ (כלומר לאורך הקשת ניתן לבטל זרימה)

אלגוריתם לפעולה

1. בחר מסלול מוסיף p_i וחשב $\delta(p_i) = \min\{\min_{(i,j) \in F} (c_{i,j} - f_{i,j}), \min_{(i,j) \in B} (f_{i,j})\}$ כאשר F – קבוצת הקשתות הקדמיות (מתלכדות עם כיוון המסלול) B – קבוצת הקשתות האחוריות (נגד כיוון המסלול) והוסף את $\delta(p_i)$ ל $f_{i,j}$ במסלול. אם זה קשת אחורית, צריך להפחית ממנה. 2. סיים אם לא ניתן למצוא מסלול מוסיף.

נמצא את הזרימה המקסימאלית ע"י חיבור כל ה $\delta(p_i)$

נמצא את החתך המינימאלי ע"י העברת קו לאורך הגרף היכן שהקיבול שווה לזרימה.

Matlab

size(A) **Length(A)** - תחזיר את המקסימום בין מספר השורות לעמודות (טוב למציאת גודל ווקטור) **sum(A)** - סוכם איברי וקטור עמודה. אם נפעיל על מטריצה, נקבל וקטור של סכום העמודות. על מנת לקבל את סכום השורות נפעיל **sum(A')** 1:3 יצור וקטור (1 2 3) i:s:j למשל 1:2:9 יצור וקטור (1 3 5 7 9) גישה לתת מטריצה המורכבת משורות 1,2 ועמודות 2,3 נרשום A([1 2],[2 3]) או A(1:2,2:3) עמודה שלישית במטריצה: A(:,3) או A(1:3,3) כאשר הסימן: מייצג עמודה או שורה שלמה.

CVX

```

cvx_begin          הרצת
variables x1 x2   variables X(4,4)
minimize\maximize 5*x1+3*x2
subject to
x1+2*x2 ==< 720 ==
cvx_end
לולאה
for i=1 : 42
A*X(i)+B+-D(i)-Y(i) <= 0
end
    
```

גרפים 1) שרטט את משוואות האילוצים על גבי גרף. 2) שרטט את התחום הנחסם על ידי האילוצים 3) שרטט את הווקטור הנוצר מפונקציית המטרה (ואין משמעות לקבועים) ואת הווקטור המאונך לו. 4) אם זו בעיית MAX נלך עם הווקטור המאונך בכיוון הווקטור שנוצר. אם זו בעיית MIN נלך עם הווקטור המאונך בכיוון ההפוך לכיוון הווקטור שנוצר. 5) הנקודה האחרונה, שבה הווקטור המאונך יוצא מהתחום שנוצר היא הנקודה האופטימאלית