תורת המשחקים השיתופיים - נקודות חשובות

13 בפברואר 2011

דניאל למל
עריכה ותיקונים: עמיר רחום

שידוכים

- בחיזור גברים, כל גבר מקבל את התוצאה הטובה ביותר בעיניו וכל אישה מקבלת את התוצאה הגרועה ביותר בעיניה. ההפך בחיזור נשים. מסקנה: אם בחיזור גברים ונשים מתקבל אותו שידוך, זהו שידוך יחיד.
- בחיזור גברים, אישה יכולה לשפר את מצבה ע"י הצגת העדפות שקריות (מצריך מידע על ההעדפות של כל השאר). לגברים אין תמריץ לעשות זאת. אין אלגוריתם חסין למניפולציות מסוג זה.
- בהינתן 2 שידוכים יציבים M, M' , כל אחד מהגברים מעדיף חלש את M על M' אם"ם כל אחת מהנשים מעדיפה חלש את M' על M.
- בחירת גברים - בהינתן 2 שידוכים ניתן לכל גבר לבחור את האישה העדיפה בעיניו מבין 2 האפשרויות. אם 2 השידוכים היו יציבים, בחירת גברים נותנת שידוך יציב.
- משחק שידוכים כתכנות לינארי: במשחק יש l גברים ו-k נשים, כאשר לכל m, w מתקיים $x_{mw} = 1 \iff$ גבר m ואישה w הם זוג.
  - **שידוך** - לכל גבר m מתקיים $\sum_{j=1}^{k} x_{mj} \leq 1$ ולכל אישה w מתקיים $\sum_{i=1}^{l} x_{iw} \leq 1$.
  - **יציב** - לכל גבר m ואישה w שלא קבילים הדדית מתקיים $x_{mw} = 0$. עבור כל זוג שכן קביל הדדית מתקיים $\sum x_{mj} + \sum x_{iw} + x_{mw} \geq 1$, כאשר הסכום הראשון הוא לכל אישה ש-m מעדיף יותר מ-w והסכום השני הוא לכל גבר ש-w מעדיפה יותר מ-m.

משחקים בצורת פונקציה קבועה

- פונקצית משחק V עם N שחקנים - לכל קואליציה לא ריקה $S \subseteq N$ מסמנים ב-$V(S)$ את הערך לקואליציה. $V(\phi) = 0$. V היא פונקציה לינארית.
- **ערך שפלי** (Shapely) של משחק V נותן לכל שחקן i את מדד הכוח שלו. מסומן ב-$\varphi(V)$. מקיים את התכונות הבאות:
  - **יעילות** - $\sum_{i=1}^{N} \varphi(V)_i = V(N)$.
  - **שחקני אפס** - אם תרומתו השולית של i היא תמיד 0 (כלומר $\forall S\ V(S) = V(S \backslash \{i\})$), אזי $\varphi(V)_i = 0$.
  - **סימטריה** - לכל שני שחקנים i, j סימטריים (שמקיימים $\forall S\ V(S) = V((S \backslash \{i\}) \cup \{j\})$), אזי $\varphi(V)_i = \varphi(V)_j$.
  - **אדיטיביות** - לכל 2 משחקים V, W מתקיים $\varphi(V + W) = \varphi(V) + \varphi(W)$.

- כאשר סדר הכנסת המשתתפים לקואליציה משנה, אין סימטריה. שיטת הסדרים כדי לחשב את $\varphi\left(V\right)_i$: לכל סדר נחשב את תרומתו השולית של שחקן i ונחשב ממוצע על $N!$ הסדרים האפשריים. כלומר:

$$\varphi\left(V\right)_i=\frac{1}{N!}\sum_{i|i\notin S}\left[V\left(S\cup\{i\}\right)-V\left(S\right)\right]$$

- וקטור x בגודל N הוא וקטור תשלום עבור משחק V עם N שחקנים. x שייך לליבה (Core, תסומן ב־$C\left(V\right)$) אם הוא מקיים:
  - **יעילות** - $\sum_{i\in N}x_i=V\left(N\right)$.
  - **סבירות פרטית** - $\forall i\ x_i\geq V\left(\{i\}\right)$.
  - **סבירות קבוצתית** - $\forall S\ \Sigma_{i\in S}x_i\geq V\left(S\right)$.
    - * אם רק 2 התכונות הראשונות מתקיימות הוקטור נקרא וקטור תשלום סביר (ות"ס).

- וקטור x שולט על וקטור y דרך $S\neq\phi$ (מסומן ע"י $y\prec_S x$) אם מתקיים: $\forall i\in S\ x_i>y_i$ וגם $\sum_{i\in S}x_i\leq V\left(S\right)$.

  x שולט על y אם קיימת קואליציה S כזו.

- **פיתרון VNM** (Von Newman Morgenstern) הוא קבוצת וקטורי תשלום יעילים K המקיימת:
  - **עקביות פנימית** - אם $x,y\in K$ אז $\forall S\ y\not\prec_S x$.
  - **שליטה חיצונית** - עבור כל $y\notin K$ יעיל קיים $x\in K$ כך שמתקיים $y\prec_S x$ דרך S כלשהי.

- **ליבה** C היא קבוצת וקטורי התשלום היעילים שלא ניתנים לשליטה ע"י וקטורי תשלום יעילים. אם K פיתרון VNM הוא בהכרח מכיל את הליבה C.

- כאשר הליבה מהווה פיתרון VNM, היא פיתרון VNM יחיד.

משחקים בצורה אסטרטגית

- **אסטרטגיית רמת ביטחון** היא אסטרגייה שתבטיח לשחקן את התוצאה הטובה ביותר עבורו (מקסימום רווח או מינימום הפסד). במשחק רגיל מוצאים זאת ע"י $\max\min$ לשני השחקנים. אם המשחק הוא סכום אפס ושחקן העמודה הוא המשלם מוצאים את אסטרטגיית רמת הביטחון של שחקן העמודה ע"י $\min\max$.

- **שיווי משקל נאש** (Nash) מתקיים אם אף שחקן לא רוצה להחליף אסטרטגיה בהינתן ששאר השחקנים לא מחליפים אסטרטגיה. במשחק סכום אפס ש"מ כזה מתקיים אם ל־2 השחקנים אותו ערך באסטרטגיית רמת הביטחון.

- **אסטרטגיה שלטת** - אסטרטגיה נקראת שלטת אם היא מביאה לשחקן תוצאה טובה יותר מכל אסטרטגיה אחרת, בלי תלות באסטרטגיות השחקנים האחרים. אם במשחק של שני שחקנים לשניהם יש אסטרטגיה שלטת אזי קיים שיווי משקל נאש אחד ויחיד למשחק.

- **משפט Minmax**: לכל משחק סכום אפס סופי, קיים ערך למשחק באסטרטגיות מעורבות (כלומר הערך של 2 השחקנים זהה).

- **משפט Nash**: לכל משחק סופי קיים ש"מ נאש באסטרטגיות מעורבות (הרחבה של המשפט הקודם).

- ניתן למצוא ש"מ נאש באסטרטגיות חצי מעורבות אם"ם השחקן שמשחק באסטרטגייה טהורה יהיה אדיש בין לפחות 2 אסטרטגיות.

- ש"מ ואופטימליות - אם a_i היא אסרטרגייה של שחקן i ו־$u_i\left(a_1,...,a_n\right)$ היא פונקציית התשלום לשחקן זה, אזי כדי למצוא ש"מ נפתור $\frac{\partial u_i}{\partial a_i}=0$ לכל i, וכדי למצוא אופטימליות נפתור $\frac{\partial}{\partial a_i}\left[\sum_{j=1}^{n}u_j\right]$ לכל i. גורמים להם להיות שווים ע"י תמריצים או קנסות.

משחקי מיקוח

- יהי (C,d) משחק מיקוח כך ש־C היא קבוצה קמורה, סגורה וחסומה במישור (מסמנת את הרווח האפשרי בשיתוף פעולה) ו־d היא נקודת אי ההסכמה (הסכום שיקבלו השחקנים על חוסר שיתוף פעולה). אם (C,d) מקיים את התנאים הבאים:
  - **פרטו אופטימליות** - הפיתרון נמצא על הגדה הצפון מזרחית של C.
  - **סימטריה** - אם C סימטרית (כלומר $(x,y)\in C \iff (y,x)\in C$) וגם d סימטרית (כלומר $d_1=d_2$) אזי $f\left(C,d\right)_1=f\left(C,d\right)_2$, כלומר 2 השחקנים מקבלים אותו דבר.
  - **אי תלות בתוצאות לא רלוונטיות** - אם (C,d) ו־(D,d) משחקי מיקוח ו־$C\subseteq D$ וכן $f\left(D,d\right)\in C$, אזי $f\left(C,d\right)=f\left(D,d\right)$.
  - **אי תלות בטרנספורמציות לינאריות חיוביות** - לחפש פיתרון בתחום שהפעלנו עליו טרנספורמציה לינארית חיובית זה כמו לחפש את הפיתרון בתחום המקורי ואז להפעיל עליו את הטרנספורמציה.

אזי הפיתרון $f\left(C,d\right)\in C$ שווה ל-

$$\max_{x\in C,x\geq d}\left\{\left(x_1-d_1\right)\left(x_2-d_2\right)\right\}$$

משפט Arrow

- A קבוצת תוצאות, N קבוצת פרטים, p_i יחס העדפה של פרט i על A שמאפשר אדישות, $P=(p_1,...,p_n)$ פרופיל העדפות של כל הפרטים, aP_ib אומר שפרט i מעדיף את a על b, aT_ib אומר שפרט i אדיש בין a ל־b.
- F פונקציית רווחה חברתית מתאימה לכל P יחס העדפה משוקלל $F\left(P\right)$ כך שמתקיים:
  - **טרנזיטיביות** - אם $aF\left(P\right)b$ וגם $bF\left(P\right)c$ אזי $aF\left(P\right)c$.
  - **אסימטריות** - אם $aF\left(P\right)b$ אז לא מתקיים $bF\left(P\right)a$.
- **משפט Arrow**: אם $A>2$, $N>1$ אזי אם מתקיימות 3 הדרישות הראשונות מהדרישות הבאות, האחרונה לא מתקיימת:
  - **שיקוף העדפות הפרט** - אם עבור P מתקיים $aF\left(P\right)b$ וב־P' מצבו של a משתפר חזק וכל שאר העדיפויות זהות אזי מתקיים $aF\left(P'\right)b$.
  - **אי תלות בתוצאות לא רלוונטיות** - קבוצה A שעבורה P ו־P' זהים, $F\left(P\right)$ ו־$F\left(P'\right)$ זהים עבורה.
  - **ריבונות אזרחית** - לכל זוג אלטרנטיבות a,b קיים P כך ש־$aF\left(P\right)b$.
  - **אין דיקטטור** - אין שחקן i כך שלכל a,b אם aP_ib אז $aF\left(P\right)b$, ושאר הפרטים יכולים להשפיע רק אם i אדיש.

רשימת מקורות

[1] סיכומי תרגולים והרצאות של שיר בן ישראל.

[2] ויקיפדיה.