מכניקת הקוונטים 3

מרצה: אורן ברגמן

26 בפברואר 2010

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של פרופ' אורן ברגמן. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. **אין הטכניון או מי מטעמו ־ ובפרט, הפקולטה לפיזיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.** בפרט, הרשימות הללו חסרות הרבה צמצומים ודיאגרמות פיינמן: לקח הרבה זמן עד שנסגרתי על איך עושים כאלו בזמן סביר.

הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.tehcnion.ac.il.

סיכומים של חלק מההרצאות מאת פרופסור אורן ברגמן מתפרסמים באתר הקורס. הציורים שצוירו "ביד" לקוחים בתוך רשימות אלו. גרסא מעודכנת של רשימות אלו תפורסם ב־http://www.technion.ac.il/~ronen .

תוכן עניינים

מושגים

מכניקת הקוונטים

- $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|f\left(\theta,\phi\right)\right|^2$ – חתך פעולה דיפרנציאלי הוא ריבוע אמפליטודת פיזור.
- $a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$ – אופרטור העלאה של אוסצילטור הרמוני.
- $J_\pm\left|j,m\right\rangle = \hbar\sqrt{j\left(j+1\right)-m\left(\pm1\right)}\left|j,m+1\right\rangle$ – אופרטורי העלאה והורדה של תנע זוויתי. j הוא תנע זוויתי כולל ו־m תנע זוויתי בכיוון "z".
- $\mathcal{O}\left(t\right) = e^{iHt/\hbar}\mathcal{O}e^{-iHt/\hbar}$ – התפתחות בזמן של אופרטור, הצגת הייזנברג.

מכניקה אנליטית

- $H = p\dot{q} - L$ – מעבר מלגרנז'יאן להמילטוניאן, טרנספורם לג'נדר. q דרגת חופש מרחבים ו־p התנע הצמוד ל־q. טרנספורם לג'נדר.

תורת היחסות הפרטית

- $t' = \gamma t - \frac{\beta\gamma}{c}x$ – טרנספורמצית לורנץ של הזמן.
- $E = \sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^2c^2 + m^2c^4}$ – אנרגיה כוללת יחסותית.

חשמל ומגנטיות

- $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

מתמטיקה

- $\oint\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i$
- מרחב וקטורי

1 ניסוח של מכניקת קוונטים יחסותית

בראשית המאה ה־20 , התרחשו שתי מהפכות בפיסיקה:

1. תורת היחסות הפרטית (1905)
2. תורת הוקונטים (1920)

כיצד ניתן לאחד את שני הרעיונות הללו?

משוואת שרדינגר: איך מצבים קוונטים מפתחים בזמן?

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi,t\right\rangle = H\left|\psi,t\right\rangle$$

עבור חלקיק חופשי, חסר ספין, ולא יחסותי,

$$H = \frac{\left|\mathbf{p}\right|^2}{2m}$$

לכן, אם מסתכלים על המצב בבסיס $\mathbf{x}$, נקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\mathbf{x},t\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\left(\mathbf{x},t\right)$$

כאשר ψ היא פונקציית הגל החד־חלקיקית במרחב $\mathbf{x}$, והיא מתקבלת מהטלה ש להמצב הקוונטי על וקטורי הבסיס:

$$\psi\left(\mathbf{x},t\right)=\left\langle \mathbf{x},\psi,t\right\rangle$$

נרצה להכליל את ההמילטוניאן (ואת המשוואה) עבור חלקיק יחסותי.

1.1 נסיון ראשון

נקח את ההמילטוניאן להיות

$$H=\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^{2}c^{2}+m^{2}c^{4}}$$

בבסיס $\mathbf{x}$, נקבל את משוואת הגלים:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\mathbf{x},t\right)=\sqrt{-\hbar^{2}c^{2}\nabla^{2}+m^{2}c^{4}}\psi\left(\mathbf{x},t\right) \tag{1}$$

מה המשמעות של לקחת נגזרת בריבוע, לחבר אותה לאופרטור ואז להוציא שורש? זהו אופרטור לא לוקאלי. אם נעשה פיתוח בחזקות של הנגזרות (תחת ההנכה ש־ $\psi\left(\mathbf{x},t\right)$ משתנה לאט ולכן הטור מתכנס), הטור יהיה אינסופי.

בעיות:

- המשוואה אינה לוקאלית
- המשוואה אינה לורנץ–אינווריינטית. הזמן והמרחב לא מופיעים בה בצורה סימטרית.

1.2 נסיון שני

להפעיל פעמיים את האופרטור על המשוואה (1), ונקבל,

$$-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\psi\left(\mathbf{x},t\right)=\left(-\hbar^{2}c^{2}\nabla^{2}+m^{2}c^{4}\right)\psi\left(\mathbf{x},t\right)$$

או, בנוסח אחר,

$$\left(\underbrace{\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}}_{\Box}+\frac{m^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\right)\psi\left(\mathbf{x},t\right)=0$$

כאשר $\Box$ הוא הסימון לדלמברטיאן, ההכללה הארבע מימדית של לפלסיאן.

זוהי **משוואת קליין־גורדון** (Klen-Gordon), והיא נסיון שני לכתוב משוואה קוונטית יחסותית. משוואה זו היא לורנץ־אינווריינטית, אבל גם בנסיון זה יש מספר בעיות:

1.2.1 בעיות

פתרונות שליליים: הפתרונות של המשוואה, בצורה מרוכבת:

$$\psi\left(\mathbf{x},t\right)=e^{\left(\pm iEt\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)/\hbar}$$

כאשר $E,\mathbf{p}$ קבועים. זהו פתרון בתנאי שמתקיים, $E^{2}=\left|\mathbf{p}\right|^{2}c^{2}+m^{2}c^{4}$. E הוא ה"אנרגיה" של החלקיק ו־$\mathbf{p}$ הוא ה"תנע" של החלקיק. התנאי הוא עבור $E^{2},\left|\mathbf{p}\right|^{2}$, ולכן יש שני סוגי פתרונות:

$$E=\pm\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^{2}c^{2}+m^{2}c^{4}}$$

כלומר, קיימים גם פתרונות עם אנרגיה שלילית.

אנרגיה שלילית היא לא בעיה עם מדברים על חלקיקים חופשיים: מצהירים שלכל החלקיקים יש אנרגיה חיובית, ומאחר והם חלקיקים חופשיים, כל אחד משמר את האנרגיה שלו והיא חיובית. אבל כשיש אינטראקציות בין חלקיקים לחלקיקים אחרים, אם יש מצבים קוונטים בעלי אנרגיה חלקיק, אז החלקיק, באמצעות פליטה, יכול לרדת לרמת אנרגיה נמוכה יותר. לכן, כאשר נותנים אנרגיה שלילית, החלקיק יכול לפלוט אנרגיות עד אינסוף, כלומר, יש מקור בלתי מוגבל של אנרגיה.

אוניטריות: במכניקת קוונטים לא־יחסותית, קיימת צפיפות הסתברות: $\rho = \psi^\star\psi \geq 0$, ו־$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0$, משוואת הרצף – שימור זרם הסתברות.

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^\star\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\star\right)$$

כלומר, משוואת הרציפות היא זהות עבור ψ המקיים את משוואת שרדינגר. המושג אוניטריות מתייחס לשימור ההסתברות: סכום כל ההסתברויות, שכל אחת מהן חיובית, שווה ל־1.

במשוואת קליין־גורדון, כדי ששימור הזרם יתקיים, יש לשנות את ההגדרה של צפיפות ההסתברות. באופן יחסותי,

נראה שהביטוי ל־ρ מקיים א תמשוואת הרצף.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} &= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^\star\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi - \psi\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi^\star\right)\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(\psi^\star\psi - \psi\psi^\star\right) = 0\end{aligned}$$

לכן, למשוואה זו אין פרוש הסתברותי.

קוזליות: טרנספורמציית לורנץ:

$$\Delta x' = \gamma\Delta x - c\beta\gamma\Delta t$$
$$\Delta t' = \gamma\Delta t - \frac{\beta\gamma}{c}\Delta x$$

כאשר $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. ישנם גדלים שלא משתנים תחת מעבר קואורדינטות. גודל בסיסי כזה הוא **העתקה במרחב זמן**.

$$\boxed{\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - |\Delta\mathbf{x}|^2}$$

הגודל הזה יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. כאשר $\Delta s^2 > 0$, העתקה נקראת "כמו זמן" , **time-like**, כלומר, יש יותר העתקה בזמן מאשר העתקה במרחב. כאשר $\Delta s^2 < 0$, העתקה היא **space-like**. כאשר $\Delta s = 0$, העתקות הן **light-like**. בין שני האירועים יכולה לנוע בדיוק קרן אור.

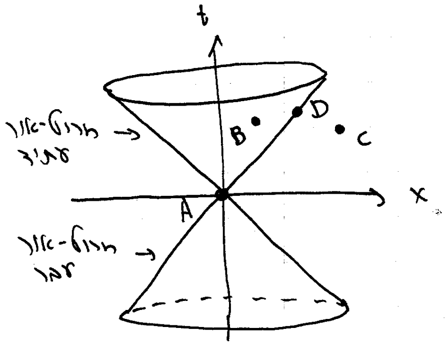
ניתן לצייר אירועים על מישור $x - t$. נגדיר את ראשית הצירים כנקודה A. ניתן לחלק את המרחב לאזורים המופרדים על ידי ישרים בשיפוע אחד דרך הראשית (עבור $c = 1$...) אם אירוע B נמצא בחלק הקרוב לציר t, אז $\Delta s_{AB}^2 > 0$, אם נקודה C נמצאת בחלק הקרוב יותר לציר x, אז $\Delta s_{AC}^2 < 0$, ואם נקודה D נמצאת על הקו החוצה, $\Delta s_{AD} = 0$.

בשלושה מימדים, הקווים המפרידים יוצרים חרוט. חרוט זה נקרא חרוט אור, כל נקודה על החרוט היא light-like. יש לנו חרוט עליון ותחתון ביחס לאירוע A: חרוט אור עתידי של A וחרוט אור העבר של A.

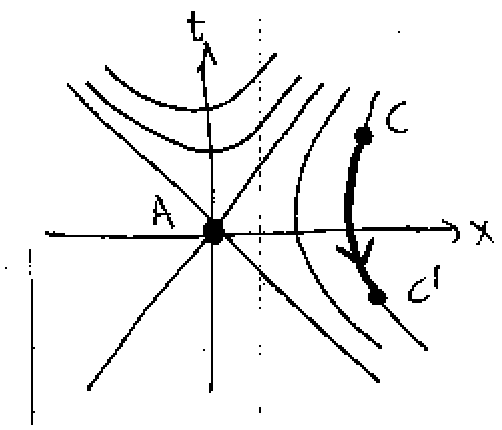
כל אירוע שמצא באחד מחרוטי האור, העתקה בינו לבין אירוע A היא time-like. מחוץ לחרוט, העתקה היא space-like.

הגדרה 1.1 עקרון הקוזליות: אירוע כלשהו יכול להיות מושפע רק מאירועים שנמצאים בתוך חרוט אור העבר שלו, ואירוע כלשהו יכול להשפיע רק על אירועים שנמצאים חרוט־אור העתיד שלו.

יהא אירוע C מחוץ לחרוט האור של A . נניח ש־A משפיע על C. קיימת מערכת ייחוס כך ש־C קורה לפני A , ואז הסיבתיות מופרת. אינטרוול על מערכת הצירים שלנו הוא היפרבולה. ניתן לנוע על היפרבולה על ידי boost,



איור 1: אינטרוולים ושנים יחסית לחרות האור של נקודה A



איור 2: תנועה על היפרבולות, בעקבות התמרת לורנץ

ואי אפשר לעבור בין היפרבולות על ידי boost (לכל אינטרוול, יש היפרבולה אחרת). במערכת ייחוס אחרת, ניתן להזיז את C לאורך היפרבולה, כך שהוא יקרה לפני A.

"מעבר אינפורמציה" יכול לקרות רק אם יש אמפליטודת מעבר שונה מאפס. חלקיק בנקודה $\mathbf{x}_0$ וחלקיק בנקודה $\mathbf{x}$. נגדיר אמפליטודת מעבר:

$$U(t) = \left\langle \mathbf{x} \,\middle|\, e^{-iHt} \,\middle|\, \mathbf{x}_0 \right\rangle$$

עבור חלקיק לא יחסותי וחופשי, ניתן לחשב את האמפליטודה:

$$\begin{aligned} H &= \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} \\ U(t) &= \left\langle \mathbf{x} \,\middle|\, e^{-\frac{i|\mathbf{p}|}{2m}t} \,\middle|\, \mathbf{x}_0 \right\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \left\langle \mathbf{x} \,\middle|\, e^{-i\frac{|\mathbf{p}|}{2m}t} \,\middle|\, \mathbf{p} \right\rangle \langle \mathbf{p} \,|\, \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}t} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

זהו אינטגרל גאוסיאני תלת מימדי שתוצאות

$$= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{\mathrm{Im}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}$$

אמפליטודה זו לא מתאפסת עבור כל העתקה מרחבית, ועבור כל פרק זמן t.

כאשר מסתכלים על חלקיק יחסותי, רוצים לראות שהמפליטודה מתאפסת כאשר ההעתקה המרחב־זמנית היא space-like: $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 > c^2t^2$. האם זה אכן כך?

במקרה היחסותי, החישוב טיפה יותר מסובך (עד כדי $\hbar$ ...) :

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} \\ U(t) &= \left\langle \mathbf{x} \,\middle|\, e^{-it\sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} \,\middle|\, \mathbf{x}_0 \right\rangle \end{aligned}$$

האמפליטודה אינה לורנץ־אינווריאנטית, וזה סביר, כי מחשבים אמספליטודה כזו תוך בחירת מערכת ייחוס מסויימת. רק תוצאה שהיא אפס תהיה לורנץ־אינווריאנטית, אבל זה מה שאנחנו מחפשים...

באופן כללי, לא כל דבר הוא אפס נשאר אפס, אבל במקרה הזה זה נכון

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} e^{it\sqrt{|\mathbf{p}|^2c^2+m^2c^4}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p \sin(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)\, e^{-it\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}} \end{aligned}$$

אפשר לבטא את התוצאה של האינטגרל הזה באמצעות פונקציית בסל. אבל התוצאה לא מתאפסת במקרה ש־$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 > c^2t^2$. את האינגרל ניתן לפתור גם בקירוב שבו $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 \gg c^2t^2$. קירוב זה נקרא קירוב פאזה סטציונארית: ה־sin מבצע אוסצילציות מהירות מאוד, ולכן התוצאה הממוצעת על הסינוס מתאפסת. לכן, הביטוי הדומיננטי באינטגרל הוא כאשר הפאזה משתנה הכי פחות, כלומר, הנגזרת של הפאזה מתאפס. לכן, בקירוב מסדר ראשון, ערך האינטגרל הוא בנקודה בה הפאזה סטציונארית.

$$p = \frac{\mathrm{Im}x}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

ובקירוב זה,

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 - c^2t^2}} \neq 0$$

כלומר, בגבול זה, האמפליטודה אינה זהותית אפס, ועקרון הקוזליות לא מתקיים.

1.3 נסיון שלישי: משוואת דיראק

דיראק (Dirac) התעניין באלקטרונים. הוא רצה למצוא את המשוואה היחסותית שנותנת את התיאור הקוונטי של אלקטרונים. אלקטרון הוא בעל ספין חצי, ולכן, פונקציית הגל שלו היא $\psi_a\left(\mathbf{x},t\right)$, כאשר $a=1,2$. דיראק רצה למצוא משוואה קוונטית, יחסותית ולינארית.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a\left(\mathbf{x},t\right)=\sum_{b=1}^{2}\left[-i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ab}^{j}\partial_j+mc^2\beta_{ab}\right]\psi_b\left(\mathbf{x},t\right)$$

כאשר a,b הם האינדקסים של מצבי שני־הספינים ו־β,α^j הן מטריצות 2×2 במרחב הלינארי של הספין. כאן, ההמילטוניאן הוא בעצם,

$$H_{ab}=c\sum_{j=1}^{3}P_j\alpha_{ab}^{j}+mc^2\beta_{ab}$$

האם משוואה זו מקיימת את התנאים של תורת היחסות? כדי שזה יקרה, ארבעת המטריצות, α^j,β , צריכות לקים תנאים מסויימים.

נדרוש שההמילטוניאן הזה יקיים את היחס הדרוש מיחסות בין אנרגיה, תנע ומסע:

$$H_{ab}^2=c^2\sum_{j,k}\left(\alpha^j\alpha_k\right)_{ab}P_jP_k+mc^3\sum_{j}P_j\left(\alpha^j\beta+\beta\alpha^j\right)_{ab}+m^2c^4\left(\beta^2\right)_{ab}$$

נגדיר את פעולת האנטי חילוף / **אנטי קומטטור**, להיות $\{A,B\}=AB+BA$. ו־

$$H_{ab}^2=\frac{1}{2}c^2\sum_{j,k}P_kP_k\left\{\alpha_j,\alpha_k\right\}_{ab}+mc^3\sum_{j}P_j\left\{\alpha_j,\beta\right\}_{ab}+m^2c^4\left(\beta^2\right)_{ab}$$

נרצה להראות ש־

$$H_{ab}^2=\left(\left|\mathbf{p}\right|^2c^2+m^2c^4\right)\delta_{ab}$$

כלומר, המצבים העצמיים של ההמילטוניאן יהיו המצבים העצמיים של התנע, והיחס בין הערכים העצמיים של ההמילטוניאן, לערכים העצמיים של התנע, יקיים, $E^2=\left|\mathbf{p}\right|^2c^2+m^2c^4$.

לכן, המטריצות צריכות לקיים:

$$\begin{aligned}\left\{\alpha^j,\alpha^k\right\}_{ab}&=2\delta^{jk}\delta_{ab}\\ \left\{\alpha^j,\beta\right\}_{ab}&=0\\ \beta^2&=\delta_{ab}\end{aligned}$$

אם נצליח למצוא ארבע מטריצות שמקיימות את יחסי האנטי־חילוף הללו, נקבל משוואה יחסותית עבור האלקטרון.

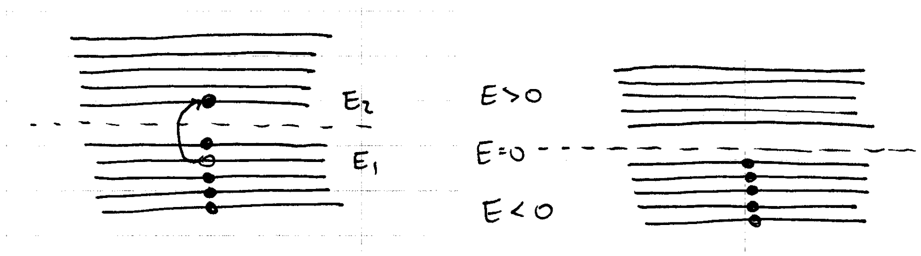
בעיה קטנה: לא קיימות ארבע מטריצות 2×2 שמקיימות את כל התנאים (שלוש מטריצות כאלו כן קיימות: מטריצות פאולי..)

הפתרון: להגדיל את המרחב למטריצות 4×4 .

נבדוק האם הבעיות ממשוואת קלין–גורדון מתקיימות גם כאן:

- אוניטריות? אין בעיה, מאחר והמשוואה היא מסדר ראשון בזמן ($\rho>0$)
- קוזאליות? עדיין בעייתי, ומאותה הסיבה.
- אנרגיה שלילית? עדיין קיימים מצבים עם אנרגיה שלילית.

לכאורה, פתרנו רק בעייה אחת. שתי בעיות נוספות נותרו בעינן.



איור 3: מימין: רמות בעלות אנרגיה שלילית בים דיראק מלאות.
משמאל : אלקטרון מעורער לרמה חיובית ונוצר חור (או פוזיטרון) ברמות האנרגיה השליליות של ים דיראק.

1.3.1 ים דיראק (1927)

זהו הפתרון של דיראק לבעיית האנרגיה השלילית. הפתרון מסתמך על עקרון האיסור של Pauli.

עקרון פאולי: שני אלקטרונים לא יכולים להיות באותו מצב קוונטי.

דיראק טען שמצב הייסוד הוא שכל רמות האנרגיה השליליות מלאות, עם אלקטרון אחד בכל רמה.

רמות האלקטרונים מחולקים לרמות חיוביות ורמות שליליות. דיראק הציע שבכל רמות האנרגיה השליליות, ברמת היסוד, יש אלקטרון אחד.

אם נרצה להסתכל על "אלקטרון אמיתי" אחד, הוא ידחק להיות ברמה חיובית.

- אינסוף אנרגיה? נגדיר את האנרגיה במצב הייסוד (אחרי שיש כבר אינסוף רמות מלאות.. האנרגיה היא $-\infty$) היא אפס, ומה שמטריד אותנו זה האנרגיה של המצבים המעוררים ביחס למצב היסוד.

- אינסוף מטען? אותו דבר, מעניין אותנו רק המטען של המצבים המעוררים ביחס למצב הייסוד.

האם הרעיון הזה של דיראק מסביר תופעות קיימות? אכן כך.

הפתרון הזה של דיראק, חזה גם תופעות חדשות. בים־דיראק, ניתן להגדי שני סוגים של מצבים מעוררים:

- הוספת אלקטרון, המצב ה"רגיל".

- אפשרות נוספת, היא להוציא אלקטרון מאחד מהמצבים המלאים, ולהעביר אותו למצב ריק (עם אנרגיה חיובית). הוצאנו את האלקטרון במצב שלילי כלשהו, ונשאיר בו "חוסר אלקטרון" או "חור", ונעביר אותו לרמה חיובית. כלומר, נעביר אלקטרון מ־$E_1 < 0$ ל־$E_2 > 0$. שינינו את האנרגיה הכוללת ב־$\Delta E = E_2 - E_1$, אבל לא שינינו את המטען הכולל.

  יצרנו זוג חלקיקים: אלקטרון, שהופיע ברמה E_2 , וחור, בעל אנרגיה $-E_1$. החור הזה נקרא פוזיטרון, ויש לו את המטען ההפוך ממטען האלקטרון. הפוזיטרון הוא האנטי־חלקיק של האלקטרון. יש להם מסות שוות, אבל מטענים הפוכים.

חמש שנים לאחר הצגת "ים דיראק" התגלה חלקיק בעל מסה זהה למסת האלקטרון, ומטען הפוך, בהתאם לתחזית.

הפתרון של מצבים עם $E < 0$ בא עם מחיר: מספר החלקיקים אינו נשמר: ניתן ליצור זוגות של אלקטרון ופוזיטרון.

האנרגיה נשמרת, והמטען הכולל נשמר, אבל מספר החלקיקים אינו גודל שמור.

מאחר ומספר החלקיקים אינו נשמר, אין משמעות לפונקציית־גל חד־חלקיקית בתורה יחסותית. כלומר, צריכים תיאור מסוג חדש שבו מספר החלקיקים יכול להשתנות דינאמית.

הגדרה 1.2

- **פרמיונים:** חלקיקים שמקיימים את עקרון האיסור של פאולי. חלקיקים עם ספין חצי־שלם.

- **בוזונים:** חלקיקים שלא מקיימים את עקרון האיסור של פאולי. יש להם ספין שלם.

עבור בוזונים לא ניתן לבנות את התמונה של ים־דיראק, משום שמהם לא ניתן למנוע מלרדת למצב שלילי יותר באותו טיעון.

1.4 תיאור חדש

הגישה הבסיסית של מכניקת הקוונטים:

- $\mathbf{x}$ – ערך עצמי של אופרטור הרמיטי, $\mathbf{X}$.
- t – פרמטר שבו המצב הקוונטי תלוי, $|\psi, t\rangle$

קשה להכניס סימטריה שמערבבת מצב וזמן.
לכן, יש לנו שתי אופציות בחיפוש פתרון חדש:

1. להעלות את t לדרגה של אופרטור הרמיטי.
2. להוריד את $\mathbf{x}$ לדרגה של פרמטרים.

אפשרות ראשונה נרצה להפוך את הפרמטר t לערך עצמי של אופרטור כלשהו, T. כדי לתאר התפתחות של מצבים, צריכים פרמטר נוסף שיתאר את ההתפתחות של המערכת. בחירה פשוטה כפרמטר "זמן" היא הזמן במערכת החלקיק, τ.
כלומר, הגדלים המדידים $\mathbf{x}, t$ תלויים ב־(τ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau_1) &\to \mathbf{x}(\tau_2) \\ t(\tau_1) &\to t(\tau_2) \end{aligned}$$

או לחליפין, בתמונת הייזנברג, נוכל להסתכל על האופרטורים, $\begin{cases} \mathbf{X}(\tau) \\ T(\tau) \end{cases}$.
תיאור בצורה הזו של תמונה פיזיקאלית הוא די מסובך, מכמה סיבות:

- הבחירה של הפרמטר היא שרירותית למדי. כל פרמטר אחר שהוא פונקציה מונוטונית של τ, כשר גם הוא.
- הפעולה היא לא ריבועית:

$$S \propto \int \mathrm{d}\tau \sqrt{\left|\dot{\mathbf{X}}(\tau)\right|^2 - c^2 \left|\dot{T}(\tau)\right|^2}$$

והקוונטיזציה של פעולה כזו היא לא סימפטית

- אין דרך פשוטה להוסיף אינטראקציות.

אופציה שניה: $\mathbf{x}, t$ פרמטרים. האובייקטים הבסיסיים הם אופרטורים בתמונת שדרדינגר שתלויים ב־$\mathbf{X}$: **שדות קוונטיים,** $\phi(\mathbf{x})$. בתמונת היזנברג,, אלו הם שדות שתלויים במרב זמן:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})\, e^{iHt}$$

שדות קוונטיים הם אופרטורים שתלויים במרחב זמן, ופועלים על מרחב הילברט מסויים של מצבים קוונטיים.
בקרוב נראה שהמצבים הללו הם מצבים רבי־חלקיקים, והאופרטורים הללו הם אופרטורים שמשנים את מספר החלקיקים.
אינווריטיות תחת טרנספורמציית לורנץ דורשת שהשדות משתנים (או לא משתנים..) בצורות "פשוטות", תחת טרנספורמציית לורנץ (השדות הם הצגות של חבורת לורנץ)

2 יחסות פרטי וחבורת לורנץ[1]

מרחב זמן יסומן על ידי אינדקס יווני: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, כאשר $x^0 = ct$, והרכיבים האחרים הם $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.
נגדיר $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ כאשר $x_0 = x^0$ ו־$x_i = -x^i$, $(i = 1, 2, 3)$ (הקוארדינטות המרחביות בלבד יסומנו באינדקס לטיני).

[1] 21/10/2009

כשהאינדקסים למעלה, x^μ , נקרא 4־וקטור קונטרה־וואריאנטי וכאשר וכשהאינדקס למטה, x_μ, יש לנו 4־וקטור קו־וואריאנטי.

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu$$

אז ברור שהמטריצה $g_{\mu\nu}$ היא

$$g_{\mu\mu} = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו נקראת "מטריקה" או ליתר דיוק, זו המטריקה של מרחב שנקרא **מרחב מינקוווסקי** (Minkowski).

מוסכמת סכימה: כאשר בביטוי כפלי, אינדקס מופיע פעמיים: פעם אחת למעלה ופעם אחת למטה, יש לסכום עליו.

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

בכיוון ההפוך,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

כאשר $(g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$.

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^\mu{}_\rho$$

העתקות במרחב זמן

$$\Delta x^\mu = (c\Delta t, \Delta \mathbf{x})$$

אז העתקה המרחב זמנית היא האורך של הוקטור

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu &== g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= c\,(\Delta t)^2 - |\Delta \mathbf{x}|^2 \end{aligned}$$

2.1 טרנספורמציית לורנץ

נסמן x^μ מתאר מרחב זמן של אירוע במערכת F, ו־x'^μ מתארת מרחב זמן של אירוע במערכת F' .
טרנספורמציה לינארית והעתקה העתקה

$$x'^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu + a^\mu$$

כאשר Λ היא טרנספורמציה לינארית, ו־$\mathbf{a}$ הוא וקטור להזזה קבועה.
טרנספורמציות לורנץ הן טרנספורמציות כך שאורך ההעתקה במרחב זמן, ΔS, הוא אינווריינטי להן.

$$(\Delta x')^2 = (\Delta x)^2$$

כלומר,

$$g_{\mu\nu}\Delta x'^{\mu}\Delta x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}$$

נשים לב שהוקטור המחובר יפול, ולכן, נקבל,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\left(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Delta x^{\alpha}\right)\left(\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}\right) &= g_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} \\ \left(g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\right)\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta} &= g_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = g_{\alpha\beta}\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta} \end{aligned}$$

לכן, כדי לקיים את המשוואה, צריך להתקיים:

$$\left(g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\right) = g_{\alpha\beta}$$

איזה סוג של מטריצות מקיימות את התנאי?

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_4^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמאות:

- מטריצת היחידה $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\nu}$
- סיבוב במישור (x, y), בזווית θ:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי, בעקבות הסיבוב,

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

באופן יותר כללי, ניתן להסתכל גם על סיבובים בשלושה מימדים.

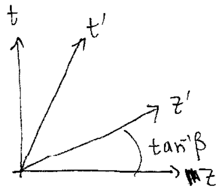
- בוסט (boost) , למשל בכיוון z, למהירות v:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

ואכן,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \frac{\beta\gamma}{c}z \\ x' &= x,\, y' = y \\ z' &= \gamma z - c\beta\gamma t \end{aligned}$$

וזוהי טרנספורמצית לורנץ, שהיא בוסט.



איור 4: בוסט לורנצי הוא כיווץ של הצירים z', t' ביחס למערכת המקורית. עבור $v = c$, הצירים z, t מתלכדים.

באופן כללי, המטריצה ${\Lambda^{\nu}}_{\mu}$ שתקיים את התנאי שדרשנו, תלויות ב־6 פרמטים:

- הזוויות: $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$
- המהירויות: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

טרנספורמציית לורנץ הכללית היא קומבינציה של סיבובים מרחביים ובוסטים.

2.1.1 חבורת לורנץ

הטרנספורציות הללו יוצרות חבורה, המכונה חבורת לורנץ.

- בחבורה, מוגדרת מכפלה של שני אלמנטים, והמכפלה מוכלת בחבורה. ואכן, מכפלה של שתי טרנספורמציות לורנץ היא גם טרנספורמציית לורנץ:

$$
{\Lambda^{\mu}}_{\alpha}{\Lambda'^{\alpha}}_{\nu} = {\tilde{\Lambda}^{\mu}}_{\nu}
$$

וגם ${\tilde{\Lambda}^{\mu}}_{\nu}$ היא טרנספורמציית לורנץ.

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}{\tilde{\Lambda}^{\mu}}_{\rho}{\tilde{\Lambda}^{\nu}}_{\sigma} &= g_{\mu\nu}\left({\Lambda^{\mu}}_{\alpha}{\Lambda'^{\alpha}}_{\nu}\right)\left({\Lambda^{\mu}}_{\beta}{\Lambda'^{\beta}}_{\nu}\right) \\
&= g_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

- תנאי נוסף לחבורה: קיום איבר היחידה, ואכן, ${\delta^{\mu}}_{\nu}$ היא מטריצת היחידה.
- קיום טרנספורמציה הפוכה:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}{\Lambda^{\mu}}_{\rho}{\Lambda^{\nu}}_{\sigma} &= g_{\rho\sigma} \\
\Lambda_{\nu\rho}{\Lambda^{\nu}}_{\sigma} &= g_{\rho\sigma} \quad \left(/ \cdot g^{\rho\lambda}\right) \\
{\Lambda_{\nu}}^{\lambda}{\Lambda^{\nu}}_{\sigma} &= {\delta_{\sigma}}^{\lambda}
\end{aligned}
$$

אזי,

$$
{\left(\Lambda^{-1}\right)^{\lambda}}_{\nu} = {\Lambda_{\nu}}^{\lambda}
$$

חבורה כזו, שבה האלמנטים תלויים ברצף של פרמטרים, היא **חבורת Lie**[2]. דוגמא אחרת לחבורת לי, היא חבורת הסיבובים, תת חבורה של חבורת לורנץ:

$$
R(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{0})
$$

כאשר חבורת הסיבובים, $\mathrm{SO}(3)$ היא חבורה קומפקטית, ואילו חבורת לורנץ לא. חבורת לורנץ מסומנת ב־$SO(3,1)$.

בחבורת לי, אפשר לבטא את כל האלמנטים של החבורה באמצעות מספר סופי של אלמנטים. אלו האלמנטים שמגדירים טרנספורמציות אינפינטיסימליות, או, אלמנטים אינפינטיסמליים, אלמנטים הקרובים ליחידה.

הטרנספורמציות האינפינטיסמליות מגדירות מרחב וקטורי, שמימדו שווה למספר הפרמטרים של החבורה. וקטורי הבסיס של המרחב הם **היוצרים** של החבורה.

[2] קורס על חבורות לי ינתן בסמסטר הבא (אביב 2010) על ידי עמוס נבו, בפקולטה למתמטיקה

חבורת הסיבובים שלושת הרכיבים של התנע הזוויתי הם היוצרים של חבורת הסיבובים. J^i.

$$R(\theta) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}}$$

הוא סיבוב בזווית $|\boldsymbol{\theta}|$ סביב ציר $\hat{\theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|}$. עבור $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$, מתקבל,

$$R(\boldsymbol{\theta}) \approx 1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}$$

חוק המכפלה של החבורה נקבע על ידי היחס הבסיסי שהיוצרים מקיימים. במקרה של חבורת הסיבובים:

$$\left[J^i, J^j\right] = i\varepsilon^{ijk}J_k$$

יחס זה, נקרא "אלגברת Lie" של החבורה, והוא מבטא, באמצעות היוצרים, את התכונה הבסיסית של החבורה.

2.1.2 חבורת לורנץ

נרצה למצוא את היוצרים של חבורת לורנץ, ולאחר מכן למצוא את אלגברת לורנץ – אלגבאת ה־Lie של חבורת לורנץ. שלושה יוצרים הם התנע הזוויתי, ואנו נדרשים לעוד שלושה יוצרים עבור הבוסטים, M^i.

$$\begin{aligned} \left[M^i, M^j\right] &=? \\ \left[M^i, J^j\right] &=? \end{aligned}$$

במכניקת הקוונטים, $\mathbf{J} = \mathbf{x}\times\mathbf{p} = \mathbf{x}\times(-\boldsymbol{\nabla})$. מהו האופרטור הדיפרנצאילי שמייצג את $\mathbf{M}$?
נרצה אולי להוסיף עוד רכיב אחד דומה לתנע זוויתי: $J^i \to J^\mu$..
אפשר לבטא את התנע הזוויתי בצורה קצת שונה:

$$J^{ij} = -i\left(x^i\nabla^j - x^j\nabla^i\right)$$

זהו אוביקט אנטי־סימטרי תחת החלפה של הגרדיאנט. ואז, ניתן לבטא את ההצגה הקודמת של תנע זוויתו באמצעות,

$$J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk}$$

ואז,

$$\begin{aligned} J^1 &= J^{23} = -J^{32} \\ J^2 &= J^{31} = -J^{13} \\ J^3 &= J^{12} = -J^{21} \end{aligned}$$

נכליל את ההגדרה הזו לארבע ממדים, ונקבל,

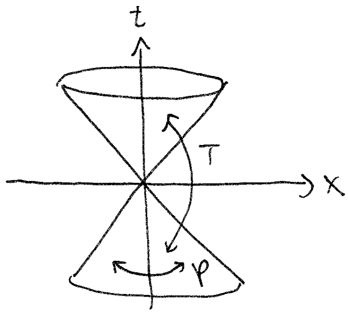
$$\boxed{J^{\mu\nu} == i\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right)}$$

לכאורה, יש לנו שישה עשר רכיבים, אבל בגלל האנטיסימטריות, יש לנו 6 רכיבים בלתי תלויים. הרכיבים המחביים הם J^{ij} , והוספנו עוד שלושה רכיבים נוספים:

$$\begin{aligned} M^i &= J^{0i} \\ J^i &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk} \qquad i,i,j = 1,2,3 \end{aligned}$$

נוכל לחשב את יחסי החילוף, ונקבל את **אלגבראת לורנץ**:

$$\boxed{\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] = i\left(g^{\mu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\right)}$$



איור 5: שיקוף מרחבי והיפוך זמן

ומכאן, ניתן לבטא את אלגבראת לורנץ על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned}\left[J^i, J^j\right] &= i\varepsilon^{ijk}J^k\\ \left[M^i, M^j\right] &= -i\varepsilon^{ijk}J^k\\ \left[M^i, J^j\right] &= i\varepsilon^{ijk}M^k\end{aligned}}$$

וחבורת לורנץ ניתנת לביטוי על ידי

$$\Lambda\left(\theta_i, \eta_i\right) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$$

כאשר $\omega_{\mu\nu}$ הוא אנטיסימטרי עם 6 פרמטרים:

$$\theta_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$$

ו־η_i היא ה־Rapidity, המוגדרת על ידי $\eta_i \equiv \arctan\left(\frac{v_i}{c}\right)$ ו־

$$\eta_i = \omega_{0i}$$

דוגמה ל־Rapidity: אם נסתכל על בוסט בכיוון z, ב־Rapidity של η :

$$\begin{pmatrix}\cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta\end{pmatrix}$$

יש עוד שתי טרנספורמציות שמשמרות את גודלה של העתקה, $\left(\Delta s^2\right)$, ואינם חלק מחבורת לורנץ, חבורת ה־Lie המדוברת.

- שיקוף מרחבי (Parity) – $P : \mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.
- היפוך זמן: Time-reversal, $T : t \to -t$.

P, T לא קשורים באופן רציף לטרנספורמציית היחידה, ולכן הם מובילים להרחבה של חבורת לורנץ.
נגדיר:

- $L_+^\uparrow$, היא חבורה של טרנספורמציות לורנץ שקשורות באופן רציף לטרנספורמציית היחידה.
- $L_-^\uparrow = PL_+^\uparrow$

- $L_+^{\downarrow} = TL_+^{\uparrow}$.

$$\begin{array}{lll} L_p^{\uparrow} & \leftrightarrow_P & L_-^{\uparrow} = PL_+^{\uparrow} \\ \updownarrow_P & & \updownarrow T \\ L_+^{\downarrow} & \leftrightarrow_P & L_-^{\downarrow} = PTL_+^{\uparrow} \end{array}$$

כאשר בעמודה הימנים יש קבוצות Improper Lorentz, ובשורה העליה יש טרנספורמציה אורתוכרונית.

2.1.3 הצגות של חבורת לורנץ

הצגה של חבורה מרחב וקטורי, n־מימדי, עם וקטורי בסיס $\{v_a\}_{a=1}^{n}$, ומטריצה, $M_{ab}(\Lambda)$, עבורה, כל אלמנט בחבורה שמגדירה:

$$V_a \xrightarrow{\Lambda} M_{ab}(\Lambda)\, v_b$$

צות והמטריצות $M_{ab}(\Lambda)$ מקיימות את המכפלה של החבורה:

$$\Lambda^{''} = \Lambda \cdot \Lambda' \implies M(\Lambda'')_{ab} = M(\Lambda)_{ac}\, M(\Lambda')_{cb}$$

אז המטריצות מהוות הצגה n־מימדית של החבורה.

הצגות של חבורת לורנץ

- **סקלרים:** עבור מימד $n=1$,

$$\phi \xrightarrow{\quad\Lambda\quad} \phi$$

- **4־וקטורים** – הצגה 4 מימדית ($n=4$) כאשר הטרנספורמציות הן כמו הטרנספורמציות של הקוארדינטות,

$$v^{\mu} \xrightarrow{\quad\Lambda\quad} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}$$
$$v_{\mu} \xrightarrow{\quad\Lambda\quad} \Lambda_{\mu}{}^{\lambda} v_{\lambda}$$

לוקטורים ואריאנטים וקווראינטים. האורך של הוקטור הוא סקלאר:

$$v^2 = v^{\mu} v_{\mu} = g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = \left(v^0\right)^2 - |\mathbf{v}|^2$$

$$vu = v^{\mu} u_{\mu} = g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$$

גם זהו סקלאר.

דוגמאות לארבע־וקטורים

- 4־תנע: $p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$:

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2$$

- הפוטנציאל האלקטרומגנטי, $A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A})$

- 4־גרדיאנט:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right)$$

אנחנו רוצים שיתקיים: $\partial^\mu x_\nu = \delta^\mu{}_\nu$. כאשר מורידים את האינדקס:

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, +\boldsymbol{\nabla}\right)$$

אורכו של ה־4 גרדיאנט הוא הדלמברטיאן:

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

- 4־זרם - $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ (כאן, J צפיפות זרם..). ומתקיימת משוואת הרצף:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} = 0$$
$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

אפשר להכליל את ההצגה הארבע וקטורית ל**טנזורים:**

2.1.4 טנזורים –

$T^{\mu\nu}$, טנזור קונטרה־וריאנטי, מדרגה 2, אז באופן כללי, יש לו 16 רכיבים.
טנזור הוא הצגה מסויימת של חבורת לורנץ:

$$T^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda} T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}$$

הטנזור הקוואריאנטי:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$$

ולכן,

$$T_{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda} T'_{\mu\nu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}$$

ניתן להגדיר גם טנזור מעורב:

$$T_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}$$
$$(T')_\mu{}^\nu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\mu \Lambda^\nu{}_\beta T_\alpha{}^\beta$$

ואותו דבר בהכללה ליותר רכיבים:

$$(T')^{\mu_1\mu_2}{}_{\mu_3\dots} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\alpha_2} \Lambda_{\mu_3}{}^{\alpha_3} \cdots T^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\alpha_3\dots}$$

דוגמאות לטנזורים

- **מטריקה** $g_{\mu\nu}$ היא טנזור **סימטרי** מדרגה 2. טנזור זה הוא אינורינטי לטרנספורמציית לורנץ (היחיד מדרגה 2):

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

- טנזור Levi-Civita :

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & ,(\alpha\beta\gamma\delta) = (0,1,2,3) \text{ And Even permutation} \\ -1 & (\alpha\beta\gamma\delta) = (1,0,2,3) \text{ And Even permutation} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נשים לב ש־

$$\varepsilon^{0123} = +1$$
$$\varepsilon_{0123} = -1$$

- **השדה האלקטרומגנטי** –

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

הוא אנטיסימטרי: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, יש לו שישה רכיבים: מתאים בדיוק לשלושה רכיבי $\mathbf{E}$ ושלושה רכיבי $\mathbf{B}$. מתקיים:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

הרחיבים הקונטראוריאנטים, $F^{\mu\nu}$, נמצאים ברשימות של אורן

לכן, ניתן לכתוב את משוואות מקסוול באמצעות F :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

רכיביה השונים הם בעצם..:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{cases}$$

המשוואות הנוספות הן:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

והן,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

2.2 ספינורים[3]

אם יש לנו הצגה של האלגברת־Lie של חבורה מסויימת, מקבלים מיד הצגה של החבורה עצמה.
הצגות הסיבובים מאופיינות על ידי הערך של $|\mathbf{J}|^2$, התנע הזוויתי. למצבי תנע זוויתי יש שני פרמטרים, $|j,m\rangle$ כאשר

$$\begin{aligned}|\mathbf{J}|^2\,|jm\rangle &= j\,(j+1)\,|jm\rangle\\ J_3\,|jm\rangle &= m\,|jm\rangle\end{aligned}$$

כאשר $m=-j,j+1,-j+2,\dots,+j$. ו־$j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\dots$.

2.2.1 הצגת "ספין j"

המימד הוא $2j+1$, ההצגה הלא־טריוויאלית הראשונה היא עבור $j=\frac{1}{2}$:

ספין $\frac{1}{2}$:

$$J^3=\frac{1}{2}\sigma^3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad J^2=\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} \qquad J^1=\frac{1}{2}\sigma^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

מטריצות פאולי מקיימות:

$$\left[\sigma^i,\sigma^j\right]=2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

ולכן, הסיבובים מקיימים את האלגברה:

$$\left[J^i,J^j\right]=i\varepsilon^{ijk}J^k$$

ו־$R\left(\boldsymbol{\theta}\right)=e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$.

ספין 1: הצגה זו היא תלת מימדית, וניתנת על ידי מטריצות 3×3, בבסיס כלשהו:

$$\begin{aligned}J^1&=i\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\ J^2&=i\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ J^3&=i\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.2.2 אלגברת לורנץ

$$\begin{aligned}\left[J^i,J^j\right]&=i\varepsilon^{ijk}J^k\\ \left[M^i,M^j\right]&=-i\varepsilon^{ijk}J^k\\ \left[J^i,M^j\right]&=i\varepsilon^{ijk}M^k\end{aligned}$$

[3] 28/10/2009

נסמן:

$$N^i \equiv \frac{1}{2}\left(J^i - iM^i\right)$$
$$N^{\dagger i} = \frac{1}{2}J^i + iM^i$$

(כאשר $N, N^\dagger$ אינם הרמיטיים), אזי, מתקיימים,

$$\left[N^i, N^j\right] = i\varepsilon^{ijk}N^k$$
$$\left[N^{\dagger i}, N^{\dagger j}\right] = i\varepsilon^{ijk}N^{\dagger k}$$
$$\left[N^i, N^{\dagger j}\right] = 0$$

כלומר, יש לנו כאן שתי אלגברות נפרדות, של N ושל $N^\dagger$. אלגברת לורנץ נראית כמו 2 אלגברות סיבובים.
אז נגדיר את הבסיס $\left|\left(n,m\right),\left(n,m'\right)\right\rangle$ כך ש:

$$N^2\left|\left(n,m\right),\left(n,m'\right)\right\rangle = n\left(n+1\right)\left|\left(n,m\right),\left(n,m'\right)\right\rangle$$
$$\left(N^\dagger\right)^2 = n'\left(n'+1\right)\left|\left(n,m\right),\left(n,m'\right)\right\rangle$$

כאשר $m = -n, -n+1, \ldots, +n$ ו־$m' = -n', -n'+1, \ldots, +n'$.
הצגות של חבורת לורנץ מאופיינים על ידי שני מספרים, n, n' , ולכן, המימד של ההצגה הוא $\left(2n+1\right)\left(2n'+1\right)$,
ו־$n, n' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, כאשר n, n' בלתי תלויים זה בזה ($N^i, N^{\dagger'}$ מתחלפים..)
מאחר וניתן להפריד את המימדים, נסמן את המימד הכללי של ההצגה של "ספין" n, n' היא:$\left(\underline{2n+1}, \underline{2n'+1}\right)$.
הספין הוא בעצם התנע הזוויתי, $J^i = N^i + N^{\dagger i}$. כאשר מחברים תנע זוויתי, מקבל

$$\boxed{j = \left|n-n'\right|, \left|n+n'\right|+1, \ldots, n+n'}$$

כאשר כל אחד מופיע פעם את.

- כלומר, עבור סקלר, $n = n' = 0$, יש לנו $\left(\underline{1}, \underline{1}\right)$.
- עבור ספין $\frac{1}{2}$, יש לנו 2 הצגות: $\begin{cases} n = \frac{1}{2}, n' = 0 & , \left(\underline{2}, \underline{1}\right) \\ n = 0, n' = \frac{1}{2} & , \left(\underline{1}, \underline{2}\right) \end{cases}$.
- ספין 1 ניתן לתאר באמצעות $n = \frac{1}{2}, n' = \frac{1}{2}$, והמימד הוא $\left(\underline{2}, \underline{2}\right)$. זהו 4־וקטור.

2.2.3 הצגות ספינוריות

נניח שיש לנו 4־מטריצות $\gamma^\mu_{n\times n}$ ($\mu = 0,1,2,3$) שמקיימות יחסי אנטי־חילוף:

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}_{n\times n}$$

(כלומר, מקיימות את אלגברת דיראק), אזי, ניתן לקבל הצגה של אלגברת לורנץ על ידי

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

אזי $S^{\mu\nu}$ מקיימות את אלגברת לורנץ. המטריצות γ^μ הן מטריצות דיראק, מטריצות 4×4 (אותן מטריצות ממשוואת דיראק..). במקרה של הצגות 4×4 , ההצגה של אלגברת דיראק היא יחידה (עד כדי טרנספורמציות אוניטריות)

ההצגה הכיראלית (Weyl)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & \mathbb{I}_{2\times2} \\ \mathbb{I}_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{pmatrix}$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

זו ההצגה שנשתמש בה כמעט תמיד בקורס זה. במקומות אחרים עשויים להשתמש גם בהצגות אחרות.
מטריצות הסיבובים הם מהצורה:

$$S^{ij} = \frac{1}{4}\left[\gamma^i, \gamma^j\right] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}$$

$$S^{0i} = \frac{i}{4}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}$$

הצגה זו של חבורת לורנץ נקראת הצגת דיראק. לוקטורים בהצגת דיראק קוראים **ספינורי דיראק**. ספינורי דיראק הם וקטורים בעלי ארבעה רכיבים, Ψ_α . נסמן ספינורי דיראק באותיות יווניות מוקדמות, $\alpha, \beta, \ldots$ - Ψ_α וארבע וקטורים באותיות יווניות מאוחרות יותר, V_μ.

באופן כללי, מתקיים[4]

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

תחת טרנספורמציית לורנץ, ספינור דיראק משתנה:

$$\psi_\alpha \to \psi'_\alpha = \left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

$$\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)_{\alpha\beta} = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\right)_{\alpha\beta}$$

כאשר $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_k$ ו־$\omega_{0i} = \eta_i$. במרחב הספינורי, המטריקה היא מטריצת היחידה, לכן אין משמעות לאינדקסים למעלה או למטה. גם במצב כזה, כאשר חוזרים על אינדקס, סוכמים עליו.

טרנספורמציה על פי הצגת דיראק של המטריצות,

$$\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

לכן האינדקס μ הוא אינדקס ארבע־וקטורי.

האם ניתן להפוך ספינור לסקלר, על ידי מכפלה פנימית?

בניגוד לארבע וקטור, שהוא ממשי, הספינור, בהצגת דיראק, אינו ממשי.

$\psi^\dagger\psi$ לאעובד, מאחר ו־

$$\psi^\dagger\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi^\dagger\underbrace{\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}}}_{\neq\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$$

כאשר $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ אינה אונטרית עבור בוסיטים. ולכן, לאחר טרנספורמציה ב־Λ , $\psi^\dagger\psi$ אינו אינווריינטי, ולכן אינו סקאלר.

כדי למצוא סקאלר, נצטרך להגדיר **ספינור צמוד**:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

כאשר $\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{I}\\ \mathbb{I} & 0\end{pmatrix}$. זוהי מכפלה של ספינור־שורה עם מטריצה, ולכן נקבל ספינור שורה אחר, $\bar{\psi}$. תחת טרנספורמציית לורנץ אינפיניטיסימלית, הספינור הצמוד משתנה:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \to \psi^\dagger\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)^\dagger\gamma_0 \approx \psi^\dagger\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)^\dagger\right)\gamma_0$$

נרצה להעביר את $S^\dagger$ ימינה, מימין ל־γ^0 : נסתכל בנפרד על סיבובים ובוסטים:

עבור סיבובים, הם הרמיטיים: $\left(S^{ij}\right)^\dagger = S^{ij}$ ו־$\left[S^{ij}, \gamma_0\right] = 0$. עבור בוסטים, הם טרנספורמציות לא אונטיריות בהצגה זו, והיוצרים שלהם הם אנטי־הרמיטיים: $S^{0i} = -\left(S^{0i}\right)^\dagger$ ו־$\left[S^{0i}, \gamma_0\right] \neq 0$, אבל $\left\{S^{0i}, \gamma_0\right\} = 0$. לכן, מקבלים סימן שלילי מהאנטי־התחלפות וסימן שלילי מההצמדה ההרמיטית ולכן, הסימן ישאר חיובי:

$$= \psi^\dagger\gamma_0\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\gamma_0$$

[4] 1/11/2009

זוהי טרנספורמציה אינפיניטיסימלית

$$= \bar{\psi}\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)^{-}$$

כלומר, הספינור הצמוד משנה בצורה כזו, שהמכפלה שלו עם ספינור לא תשתנה: הגודל $\boxed{\bar{\psi}\psi}$ הוא **סקלר**, האורך האינווריינטי של ספינור.

2.2.4 ספינורי Weyl

בהצגת דיראק, $S^{\mu\nu}$ הן מטריצות בלוק־אלכסוניות. כלומר, הצגת דיראק היא הצגה **פריקה** של חבורת לורנץ. ניתן לפרק אותה להצגות דו־מימדיות:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

כאשר ψ_L, ψ_R הם וקטורים עם שני רכיבים, וכל בלוק ב־$S^{\mu\nu}$ פועל רק על אחד מהם.

$$S^{\mu\nu}\Psi = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star\psi_L \\ \star'\psi_R \end{pmatrix}$$

במקרה של סיבוב אינפנטיסימלי,

$$\psi_L \to \left(1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi_L$$
$$\psi_R \to \left(1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi_R$$

ובמקרה של בוסט אינפנטסימלי:

$$\psi_L \to \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi_L$$
$$\psi_R \to \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$

ψ_L הוא ספינור וויל שמאלי ו־ψ_R הוא ספינור וויל ימני.
אזי,

$$\text{scalar } \bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L$$

ψ_L היא הצגה $(\underline{2},\underline{1})$ ו־ψ_R היא ההצגה $(\underline{1},\underline{2})$.
ניתן לאפיין את ההבדל בין ψ_L,ψ_R על ידי הגדרת מטריצת דיראק חמישית:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

מטריצה זו הרמיטית, $\gamma^5 = \left(\gamma^5\right)^\dagger$, והיא שורש יחידה: $\left(\gamma^5\right)^2 = \mathbb{I}$ ו־$\left\{\gamma^5,\gamma^\mu\right\} = 0$.
כתוצאה מזה, $\left[\gamma^5, S^{\mu\nu}\right] = 0$.
כלומר, כאשר בונים את ההצגות של אלגברת לורנץ מהיוצרים, יש לנו מטריצה נוספת שניתן ללכסן אותה יחד עם היוצרים. זה ניסוח שונה לפריקות של הצגת דיראק.
בהצגה הקיראלית,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & \\ & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

זו ההצגה שבה γ^5 היא אלכסונית. אזי,

$$\gamma^5\begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^5\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

המטריצה γ^5 מכונה מטריצת הקיראליות, ψ_L הוא ספינור וויל שמאלי, בעל כיראליות שלילית, ו־ψ_R הוא ספינור וויל בעל כיראליות חיובית.

טנזורים מספינור:

$$\bar{\psi}_\alpha \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta}}_{4\times 4} \psi_\beta$$

$\Gamma = \mathbb{I}$ ו־$\bar{\psi}\psi$, לכן, ניתן לכתוב Γ כללית כסכום של מכפלות אנטי־סימטריות של מטריצות דיראק, γ^μ

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & = \mathbb{I} & 1 \\ \Gamma & = \gamma^\mu & 4 \\ \Gamma & = \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} & 6 \\ \Gamma & = \gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{6}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \ldots\right) & 6 \\ \Gamma = & \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^5 & 1 \end{array}$$

$\gamma^{\mu\nu\rho}$ הוא פסבדו־ארבע־וקטור. γ^5 הוא פסבדו־סקלר.

3 השדה הסקלארי החופשי

ביחידות טבעיות, $\hbar = c = 1$. המימד של המסה והמימד של האנרגיה שוים, והפוכים למימד של אורך ולמימד של זמן.

3.1 התורה הקלאסית

מוגדרת על ידי פעולה. במקרה של חלקיק בודד, הפעולה היא פוקנציונאל

$$S\left[q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right] = \int \mathrm{d}t\, L\left(q, \dot{q}\right)$$

החלקיק ינוע בדרך ובמהירות שבה הפעולה היא מינימלית. כדי למצוא את זה, מאפסים את הואריאציה,

$$0 = \delta s = \int \mathrm{d}t\ \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)$$

כדי לקבל את משוואות אוילר־לגרנז', נבצע אינטגרציה בחלקים על האיבר השני:

$$= \int \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{-\infty}^{\infty}$$

מניחים שהואריאציה, δq, מתאפסת באינסוף. נשאר לנו איבר שהאינטגרל שלו כפול הואראציה, בכל ואריאציה, צריך להתאפס, ולכן הגודל בסוגריים צריך להתאפס, וקיבלנו את משוואת אוילר־לגרנז':

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

וזוהי משוואת התנועה של החלקיק.

עבור אוסף של חלקיקים ללא אינטראקציה,

$$L\left(\{q_a, \dot{q}_a\}\right) = \sum_a L\left(q_a, \dot{q}_a\right)$$

לגרנז'יאן רב־חלקיקי הוא סכום של לגרנז'יאנטים חד־חלקיקים.

שדה סקאלרי הוא אוסף של $\{q, \dot{q}\}$ כפונקציות של פרמטרים רציפים, שהם הקוארדינטות של המרחב. $\phi\left(\mathbf{x}, t\right)$.

הלגרנז'יאן, באופן כללי, תלוי בשדה ובכל ארבעת הנגזרות שלו:

$$L\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right)$$

כאשר $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ הוא צפיפות הלגרנז'יאן. זוהי הכללה של סכום של לגראנזי'אנים.

הגודל הבסיסי שמאפיין את השדה הסקאלרי הוא צפיפות הלגרנז'יאן, ואז האינטגרל על הזמן מגדיר את הפעולה:

$$S[\phi, \partial_\mu] = \int \mathrm{d}t\, L = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

בהנתן צפיפות לגרנז'יאנית, יש לנו פעולה שממנה ניתן למצוא את משוואת השדה, והיא תהיה משוואת אוילר־לגרנז' של הפעולה.

נסתכל על ואריאציה קטנה של הפעולה, ונדרוש שהיא תתאפס:

$$0 = \delta S = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi)\right]$$

(יש סכימה על μ כי האינדקס של $\frac{1}{x_\mu}$ היא למעלה..). נבצע אינטגרציה בחלקים על האיבר השני, ונקבל

$$= \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\right) \delta\phi + \cancel{\int \mathrm{d}^4 x\, \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\mu \phi)} \delta\phi}$$

שוב, נניח שאיבר השפה מתאפס בגבולות, ונקבל את משוואת אוילר־לגרנז':

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

זוהי משוואת אוילר־לגרנז' של שדה סקאלרי.

שדה Klein-Gordon זהו שדה סלרי חופשי, ממשי,

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2}$$

נציב במשוואת אוילר־לגרנז':

$$\partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = 0$$

וזוהי משוואת קליין גורדון:

$$\left(\Box + m^2\right) \phi = 0$$

משוואת קליין־גורדון היא משוואה קלאסית של השדה הסקאלרי החופשי.

ההמילטוניאן עבור חלקיק,

$$H(q,p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$$
$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

עבור השדה הסקאלרי, ציפות התנע היא

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

אזי ההמילטוניאן יהיה

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \left[\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}\right] = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{H}$$

כאשר $\mathcal{H}$ היא צפיפות ההמילטוניאן.

עבור שדה קליין־גורדון, $\Pi(x) = \partial_0 \phi(x)$ ו־

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

יש לנו כאן שתי חלקים של אנרגיה: האנרגיה ה"קינטית", $\frac{1}{2}\Pi^2$, ואנרגיה שתלויה בתלות המרחבית של השדה, shear energy, אנרגיית גזירה, והאיבר השלישי, הוא האנרגיה של המסה.

3.1.1 סימטריות וחוקי שימור

משפט 3.1 (Noether) עבור כל סימטריה רציפה, ישנו זרם שנשמר.

סימטריה רציפה היא טרנספורמציה רציפה של השדה ϕ, שלא משנה את משוואת השדה. למשל, טרנספורמציות לורנץ הם סימטריות רציפות של משוואת קליין־גורדון.
טרנספורמציה אינפינטיסימלית על שדה, משנה א השדה:

$$\phi\left(x\right)\rightarrow\phi'\left(x\right)=\phi\left(x\right)+\alpha\Delta\phi\left(x\right)$$

כאשר α פרמטר אינפינטיסימלי.
סימטריה היא טרנספורמציה שאינה משנה את משוואות התנועה. במקרה הפשוט, צפיפות הלגרנז'יאן עצמה נשמרת, ולכן הפעולה נשמרת.
תחת טרנספורמציה כללית,

$$\begin{aligned}\alpha\Delta\mathcal{L}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\left(\alpha\Delta\phi\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\partial_{\mu}\left(\alpha\Delta\phi\right)\\&=\cancelto{0-\text{Euler-Lagrange eq}}{\left[\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\right)\right]}\Delta\phi+\alpha\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi\right)\end{aligned}$$

לכן,

$$\alpha\Delta\mathcal{L}=\alpha\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi\right)$$

אם הטרנספורמציה היא סימטריה (במקרה הפשוט, שבו הלגרנז'יאן לא משתנה) אז $\Delta\mathcal{L}=0$, ולכן,

$$\partial_{\mu}\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi\right)}_{j^{\mu}}=0$$

אזי נגדיר את j^{μ} כארבע־וקטור של זרם, המקיים את משוואת הרציפות:

$$\boxed{\partial_{\mu}j^{\mu}=0}$$

כאשר הזרם מוגדר על ידי:

$$\boxed{j^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi}$$

המטען ניתן על ידי אינטגרציה מרחבית על צפיפות המטען, היא הרכיב האפס של ה־4־זרם:

$$Q=\int j^{0}\mathrm{d}^{3}x\implies\frac{\partial Q}{\partial t}=0$$

בשלב זה המטען הוא פשוט "גודל שנשמר" , במקרים אחרים תהיה לו משמעות (לדוגמה, המטען החשמלי, עבור שדה וקטורי..). באופן כללי, נקרא לכל גודל שנשמר "מטען".
מהזהות:

$$\partial_{0}j^{0}=\nabla\cdot\mathbf{j}\mathrm{d}^{3}x$$

דוגמאות:

1. **שדה קליין־גורדון** (KG) חסר מסה ($m=0$)

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\phi\right)^{2}=\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\phi\right)\left(\partial^{\mu}\phi\right)$$

(א) סימטריה אחת של העתקה ב־ϕ, הוספת קבוע: $\phi\left(x\right)\rightarrow\phi\left(x\right)+\alpha$. בצורה אינפינטיסימלית, $\Delta\phi=1$, והזרם הנשמר הוא

$$j^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\cdot1=\partial^{\mu}\phi$$

ברור שהזרם נשמר, מאחר ו־

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi=\Box\phi=0$$

מאחר ו־$\Box\phi=0$ היא משוואת קליין גורדון, ולכן מתקיימת.

2. **שדה סקאלרי מרוכב**

$$\mathcal{L}=\left|\partial_{\mu}\phi\right|^{2}+m^{2}\left|\phi\right|^{2}$$

כאשר $\phi=\Re\phi+i\Im\phi$ ו־$\phi^{\star}=\Re\phi-i\Im\phi$. אפשר להסתכל על החלק המדומה והממשי בתור שתי דרגות חופש או על $\phi,\bar{\phi}$ כשתי דרגות חופש. לשדה זה יש סימטריה: $\phi\rightarrow e^{i\alpha}\phi$, ולכן $\phi^{\star}\rightarrow e^{-i\alpha}\phi^{\star}$. זוהי סימטריה של הלגרנז'יאן כי הוא תלוי בערך המוחלט, והפאזות מתבטלות. בצורה אינפינטיסימלית, $\Delta\phi=i\phi$ ו־$\Delta\phi^{\star}=-i\phi^{\star}$. אזי,

$$\begin{aligned}j^{\mu}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi^{\star}\right)}\Delta\phi^{\star}\\&=i\left[\left(\partial^{\mu}\phi^{\star}\right)\phi-\phi^{\star}\left(\partial_{\mu}\phi\right)\right]\end{aligned}$$

ניתן להראות ש־$\partial_{\mu}j^{\mu}=0$ מאחר וגם ϕ וגם $\phi^{\star}$ מקיימים א תמשוואת קליין־גורדון.

3.1.2 המקרה הכללי

סימטריה היא טרנספורמציה שאינה משנה את משוואות אוילר־לגרנז'. כדי לקבל את משוואות אוילר־לגרנז', עושים אינטגרל על הפעולה, וזורקים את איבר השפה. כלומר , אם הפעולה היתה משתנה, אבל רק באיבר שפה, משוואות התנועה לא היו משתנות.

הפעולה משתנה על ידי איבר שפה ולכן צפיפות הלגרנז'יאן יכולה להשתנות על ידי דיברגנץ.

$$\mathcal{L}\rightarrow\mathcal{L}+\alpha\partial_{\mu}k^{\mu}\left(x\right)$$

ולכן,

$$S=\int\mathrm{d}^{4}x\mathcal{L}\rightarrow S+\alpha\int\mathrm{d}^{4}x\partial_{\mu}k^{\mu}\left(x\right)$$

לפי משפט הדיברגנץ, $\int\mathrm{d}^{4}x\partial_{\mu}k^{\mu}\left(x\right)$ הוא איבר שפה, והיות והואריאציה על השפה היא אפס, משוואות אוילר־לגרנז' לא משתנות.

במקרה כזה, הזרם הנשמר הוא,

$$\boxed{j^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi-k^{\mu}}$$

3.1.3 העתקות במרחב־זמן

בתרגול, נראה יישום של משפט נטר אבל טרנספורמציית לורנץ וסיבובים. עכשיו נסתכל לעל העתקות במרחב זמן:

$$x^\mu \to x^\mu - a^\mu$$

עבור טנספורמציה אינפינטיסמילית על השדה:

$$\phi(x) \to \phi(x+a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

הלגרנזי'אן הוא גם סקאלר, ולכן הוא ישתנה באותה הצורה:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\mu \partial_\nu \left(\delta^\nu_\mu \mathcal{L}\right)$$

יש לנו כאן 4 סימטריות: a^0, a^2, a^2, a^3 .
ארבעת הזרמים הנשמרים הסך אחד עבור כל ערך של μ , העתקה בזמן, בציר x, y, z :

$$\boxed{T^\nu{}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}}$$

חוק השימור הוא שהגיברגנץ של כל אחד מארבעת הזרמים מתאפס:

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0$$

זהו **טנזור האנרגיה־תנע**, כי אלו הם הזרמים שנשמרים כתוצאה מסימטריה להעתקות בזמן ובמרחב.
מהם המטענים הנשמרים?

- $\mu = 0$,

$$Q^0 = \int \mathrm{d}^3x\, T^{00} = \int \mathrm{d}^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L}\right) = \int \mathrm{d}^3x \mathcal{H} = H$$

כלומר, הזרם שנשמר כתוצאה מסימטריה להעתקות בזמן הוא ה**אנרגיה**.

- $\mu = i$, העתקות במרחב:

$$Q^i = \int T^{0i} \mathrm{d}^3x = \int \mathrm{d}^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^i \phi = -\int \Pi \partial_i \phi \mathrm{d}^3x = P^i$$

כאשר $\Pi = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)}$, צפיפות התנע, ו-P^i התנע הכולל בכיוון i. כלומר, סימטריה להעתקות במרחב מובילה לשימור תנע.

3.2 התורה הקוונטית

משתנים דינמיים בתורה קלאסית, הופכים לאופרטורי במרחב הילברט, בתורה הקוונטית. נרצה לתאר את המצבים העצמיים ואת הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.

נכתוב את משוואת קליין גורדון, המשוואה הקלאסית של השדה הסקלארי, במרחב התנע, באמצעות טנספורם־פורייה:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t)$$

התוצאה ממשית, ולכן, $\phi^\star(\mathbf{p}, t) = \phi(-\mathbf{p})$. במרחב הקוארדינטות,

$$\left(\Box + m^2\right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0$$

ואחרי טרנספורם פורייה,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\mathbf{p}|^2 + m^2\right) \phi(\mathbf{p}, t) = 0$$

כלומר, קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה, על משתנה אחד. משוואה זו דומה למשוואת ניוטון עבור אוסצילטור הרמוני פשוט, בעל תדר,

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

תזוכרת:אוסצילטור הרמוניפשוט מוגדר על ידי ההמילטוניאן

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$$

כדי לגלות את המצבים העצמיים, נרשום:

$$q=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a+a^\dagger\right)$$
$$p=i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a-a^\dagger\right)$$

התנאי הוא $[q,p]=i$, ולכן $\left[a,a^\dagger\right]=1$ ו־$[a,a]=\left[a^\dagger,a^\dagger\right]=0$. לכן, נכתוב את ההמילטונאין באמצעות $a,a^\dagger$,

$$H=\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)$$

ואז, $[H,a]=-\omega a$ ו־$\left[H,a^\dagger\right]=\omega a^\dagger$. אזי a אופרטור מוריד ו־$a^\dagger$ אופרטור יעלה. נגדיר את מצב היסוד:

$$a\left|0\right\rangle=0\implies E_0=\frac{1}{2}\omega$$

המצבים המעוררים ניתנים על ידי פעולה של $a^\dagger$ על מצב היסוד:

$$\left|n\right\rangle\propto\left(a^\dagger\right)^n\left|0\right\rangle$$

ו־

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega$$

3.2.1 עבור שדה קליין־גורדון

נעלה את השדה והתנע הצמוד לדרגת אופרטורים, ונדרוש יחסי חילוף קאנוניים:

$$\left[\phi\left(\mathbf{x}\right),\Pi\left(\mathbf{y}\right)\right]=i\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)$$
$$\left[\phi\left(\mathbf{x}\right),\phi\left(\mathbf{y}\right)\right]=\left[\prod\left(\mathbf{x}\right),\Pi\left(\mathbf{y}\right)\right]=0$$

בשלב זה, נעבוד בתמונת שרדינגר: האופרטורים אינם תליים בזמן, והמצבים תלויים בזמן.

$$\phi\left(\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\phi\left(\mathbf{p}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$
$$\Pi\left(\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\Pi\left(\mathbf{p}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

נכתוב את ϕ באמצעות אופרטורי העלאה והורדה:

$$\phi\left(\mathbf{p}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$
$$\pi\left(\mathbf{p}\right)=i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}}\left(a_{\mathbf{p}}-a_{\mathbf{p}}^\dagger\right)$$

ויחסי החילוף בינהם:

$$\boxed{\left[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}'}^\dagger\right]=\left(2\pi\right)^3\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right)}$$

$a_{\mathbf{p}}$ הוא אופרטור מוריד של אוסצילטור ב־$\mathbf{p}$ ו־$a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ הוא האופרטור המעלה של אוסצילטור ב־$\mathbf{p}$.
נציב בהמילטוניאם:

$$\begin{aligned} H_{KG} &= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^3x \int \frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{1}{2}\Pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi(\mathbf{x})\right|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)\right] \end{aligned}$$

ראשית, נבצע אינטגרציה על $\mathbf{x}$: $\int \mathrm{d}^3x\, e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ ו־$\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}'\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$ אומר שיש להשוות: $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, ולכן

$$\boxed{H_{KG} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^{+}a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right]\right)}$$

בעיה בביטוי: עוד לפני האינטגרציה, האיבר $\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right] = 2\pi^3\delta^{(3)}(0)$, מתבדר. התבדרות זו היא מאחר והנפח של העולם היא אינסופי:

$$V = \int \mathrm{d}^3x = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \infty$$

אנחנו נתעלם מהאינסוף הזה כי הוא מספר. אנחנו נסתכל על הפרשי האנרגיה, והפרשי האנרגיה בין כל שתי אנרגיות יהיו סופיות.

לרוב זה בסדר להתעלם מהאנרגיה של מצב היסוד, חוץ מבמקרה של גרביטציה, שלא נדון בו בקורס זה. בגרביטציה, האנרגיה הל הריק משחקת תפקיד.

יחסי חילוף:

$$\begin{aligned} \left[H, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right] &= \omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \\ \left[H, a_{\mathbf{p}}\right] &= -\omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

לכן, $a, a^{\dagger}$ הם אופורטורי העלאה והורדה.
נגדיר מצב יסוד:

$$a_{\mathbf{p}}\left|0\right\rangle = 0 \qquad \forall\mathbf{p}$$

נגדיר את מצב היסוד כמצב עם אנרגיה אפס: $E_0 = 0$. זהו **הריק**. במצבים מעוררים:

$$\begin{aligned} &a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\cdots\left|0\right\rangle \\ &\qquad E = \omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \ldots \\ &\qquad\;\; = \sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^2 + m^2} + \sqrt{\left|\mathbf{q}\right|^2 + m^2} + \ldots \end{aligned}$$

כאן, האותיות $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ מגדירות תנעים. זה נראה כמו מצב רב־חלקיקי, כאשר m היא מסה של כל חלקיק כזה, וכל חלקיק הוא יחסותי.

אופרטור התנע הכולל:

$$\mathbf{p} = -\int \mathrm{d}^3x\Pi(\mathbf{x})\,\nabla\phi(\mathbf{x})$$

נציב את הפיתוח שלו באמצעות אופרטורי העלאה והורדה,

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}$$

כלומר, המצבים העצמיים של ההמילטוניאן הם גם מצבים עצמיים של התנע, $\mathbf{p}$. למשל, למצב $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle$ יש תנע $\mathbf{p}$ ואנרגיה $\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^2 + m^2}$, כצפוי מחלקיק יחסותי במסה m.

קיבלנו מצבים רבי־חלקיקים: מצד היסוד עם 0 חלקיקים, מצב חד חלקיקי וכן הלאה.
מרחב זה, מרחב הרכיבים הרב חלקיים, מכונה **מרחב Foch.** ניתן להסתכל על האופרטור $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, כאופרטור היוצר חלקיק בתנע $\mathbf{p}$. למשל, אם נפעיל את האופרטור על מצב היסוד, נקבל חלקיק בתנע $\mathbf{p}$. באופן דומה, האופרטור $\mathbf{a_p}$ הורס חלקיק בתנע $\mathbf{p}$.
נכתוב את השדה כאופרטור:

$$\phi\left(\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}p}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

השדה כאופרטור, משמיד חלקיקים יוצר חלקיקים.
חלקיקים אלו הם **בוזונים**: נסתכל על הסימטריה של המצבים:

$$a_{\mathbf{q}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle =a_{\mathbf{p}}^{\dagger}a_{q}^{\dagger}\left|0\right\rangle$$

החלפנו בין החלקיקים, ופונקציית הגל לא השתנתה, ולכן הם בוזונים.

הנורמליזציה של המצבים בריק, מצב הריק מנורמל: $\left\langle 0|0\right\rangle =1$. במצב החד חלקיקי, $\left|\mathbf{p}\right\rangle \propto a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle$. מהו קבוע הפופורציה? או, לחליפין, מ־$\left\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\right\rangle$. נרצה נורמליזציה שהיא לורנץ־אינווריינטית. המכפלה

$$\left\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\right\rangle =\left(2\pi\right)^{3}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)$$

אינה שמורת־לורנץ. תחת שינוי משתנים, מ־$x\rightarrow f\left(x\right)$,

$$\delta\left(f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)\right)=\frac{1}{\left|f'\left(x_{0}\right)\right|}\delta\left(x-x_{0}\right)$$

נסתכל על בוסט:

$$\begin{aligned}E' & =\gamma\left(E+\beta p_{3}\right)\\
p_{3}' & =\gamma\left(p_{3}+\beta E\right)
\end{aligned}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right) & =\left|\frac{\mathrm{d}p_{3}'}{\mathrm{d}p_{3}}\right|\delta\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}'\right)\\
 & =\gamma\left(1+\beta\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_{3}}\right)\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}'\right)\\
 & =\gamma\left(1+\beta\frac{p_{3}}{E}\right)\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}'\right)\\
 & =\frac{E'}{E}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{q}'\right)
\end{aligned}$$

כלומר, אחרי בוסט, המכפלה מתשנה כמו: $\frac{E'}{E}$. אבל, אם נכפול ב־E, המכפלה, $E\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)$. לכן, נגדיר את הנורמליזציה להיות,

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{p}\right\rangle & =\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\left|0\right\rangle \\
E_{\mathbf{p}} & =\omega_{\mathbf{p}}=\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^{2}+m^{2}}
\end{aligned}$$

ולבסוף, המכפלה הפנימית היא

$$\boxed{\left\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\right\rangle =2E_{\mathbf{p}}\left(2\pi\right)^{3}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)}$$

יחס השלמות של הבסיס, ביטוי של אופרטור היחידה הוא

$$\mathbb{I}_{single\,particle}=\int\frac{d^{3}p}{\left(2\pi\right)^{3}}\left|\mathbf{p}\right\rangle \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left\langle \mathbf{p}\right|$$

באופן כללי, $\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$ הוא לורנץ־אינווריינטי. כדי להדגיש זאת, נכתוב אות וכאינטגרל על 4־תנע:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p^2-m^2\right)\Big|_{p^0>0}}$$

או, כדי לבטא את זה ש־ $p_0>0$, נרשום:

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}\mathrm{d}p^0}{(2\pi)^4}(2\pi)\,\delta\left(p_0^2-|\mathbf{p}|^2-m^2\right)$$

נשים לב ש־p_0 הוא אנרגיה של החלקיק. זו זהות שמראה שגודל זה הוא לורנץ אינווריינטי: ניתן לבצע לו אינטגרציה לפי ארבע־וקטור על גודל סקלארי.

3.2.2 טרנספורמציות לורנץ במרחב Foch.

טרנספורמצית לורנץ, Λ , פועלת כאופרטור אוניטרי $U(\Lambda)$ במרחב Foch.

- הריק או אינווריינטי: $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$
- מצבים חד חלקיקיים: הדרך בה הטרנספורמציה פועלת תלויה בנורמליזציה שבחרנו במצב. אנחנו בחרנו נורמליזציה לורנץ־אינווריינטית, ולכן, בנירמול זה,

$$\boxed{U(\Lambda)|\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle}$$

דרך ארל אחרת לתאר תא זה, היא באמצעות פעולה על $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$:

$$\boxed{U(\Lambda)\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}a_{\Lambda\mathbf{p}}^{\dagger}}$$

3.2.3 במצב הקוארדינטות

עד כה דיברנו על מצבים עצמיים כחלקיקים במרחב התנע. נחזור לתאר את החלקיקים במרחב $\mathbf{x}$:

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{p}\rangle$$

כאשר, עד כדי פקטור של $\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$, זה נראה כמו מצב עצמי של חלקיק לא יחסותי. עבור $|\mathbf{p}|$ קטן (בגבול הלא יחסותי.) $E_{\mathbf{p}} \approx m + \frac{|\mathbf{p}^2|}{2m} + \ldots$, לכן, ניתן לקרוא למצב מצב של חלקיק בקודה $\mathbf{x}$.

3.2.4 בתמונת הייזנברג

המצבים קבועים והאופרטורים מתפתחים בזמן:

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x},t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})\,e^{-iHt}$$
$$\Pi(x) = e^{iHt}\Pi(\mathbf{x})\,e^{-iHt}$$

בתמונת הייזנברג, התפתחות בזמן של אופרטור $\hat{O}$ נתונה על ידי

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O} = \left[\hat{O},H\right]$$

עבור השדה, $\phi(x)$:

$$i\frac{\partial t}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t) = [\phi(\mathbf{x},t),H] = i\Pi(\mathbf{x},t)$$

ועבור התנע:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Pi(\mathbf{x},t)=-i\left(-\nabla^2+m^2\right)\phi(\mathbf{x},t)$$

נבצע את הפיתוח של שדות בתמונת הייזנברג, עבור שדות הורסים ויוצרים:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a^\dagger_{-\mathbf{p}}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)\end{aligned}$$

כדי לחשב את ההשתנות של $a,a^\dagger$ בזמן, נשתמש בעובדה ש־

$$\begin{aligned}[H,a_{\mathbf{p}}]&=-E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\\H_{\mathbf{p}}&=a_{\mathbf{p}}H-a_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\\&=a_{\mathbf{p}}(H-E_{\mathbf{p}})\end{aligned}$$

או, עבור חזקה כללית של H,

$$H^na_{\mathbf{p}}=a_{\mathbf{p}}(H-E_{\mathbf{p}})^n$$

לכן,

$$e^{iHt}a_{\mathbf{p}}e^{-iHt}=e_{\mathbf{p}}e^{i(H-E_{\mathbf{p}})t}e^{-iHt}$$

ובאופן דומה,

$$e^{iHt}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-iHt}=e_{\mathbf{p}}e^{i(H+E_{\mathbf{p}})t}e^{-iHt}$$

ולכן, ההתפתחות בזמן של השדה היא

$$\phi(x)=\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip^\mu\cdot x_\mu}+a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip^\mu\cdot x_\mu}\right)\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}$$

כאשר p,x הם 4־וקטורים. כאן, השדה הוא סופרפוזיציה של שתי הפתרונות של משוואת קליין־גורדון, כאשר $p^0=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$.

אילו היו אלו פונקציהית גל חד חלקיקית, אזי הפתרונות היו: e^{+ipx} , עבור מצב בעל $E>0$, ו־e^{-ipx} עבור מצב בעל $E>0$.

בתמונת השדה הקוונטי תנודות של השדה בתדרים חיובי ושלילי. האנרגיה תהיה תמיד חיובית. כלומר, המקדם של הפתרון בתדר שלילי, הורס חלקיק בעל אנרגיה חיובית.

3.3 פרופגטור קליין־גורדון[5]

כשדיברנו על משוואת קליין גורדון, ראינו שיש בעיית קוזאליות, הנגרמת מכך שהפרופגטור אינו מתאפס מחוץ לחרוט האור של החלקיק.

אמפליטודת מעבר של חלקיק מנקודה y לנקודה x, ניתנת על ידי

$$D(x-y)=\langle 0\,|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|\,0\rangle$$

מתוך $\phi(x)$,ועל רק האיחבר $a_{\mathbf{q}}$ ומתוך $\phi(y)$ פועל רק האיבר $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ ולכן,

$$\begin{aligned}&=\left\langle 0|a_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\right\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}\end{aligned}$$

[5] 11/11/2009

כל האינטגרל הזה הוא לורנץ־אינוורינטי. נסתכל על האינטגרל תחת ההעתקה דמויית־מרחב. נסתכל על המצב שבו $\mathbf{r}=(x-y)$. במקרה כזה

$$=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{i\mathbf{pr}}$$

בקואורדינטות כדוריות, נחשב בקלות את האינטגרלים על הזוויות, ונקבל

$$=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}p\,p^2}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr}$$

באיבר השני, נחליף $p\to-p$, ונבצע אינטגרל מ־$-\infty$ ל־0 , ונחבר את האינטגרלים

$$=-\frac{i}{2\left(2\pi\right)^2r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p\,pe^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

יש לנו שורש עם שתי נקודות חתך[6], האחת מ־$i\infty\to im$ והשניה מ־$-i\infty\to-im$. נעשה איזשהי דפורמציה, שמותר לנו לעשות בגלל שיש לנו את האספוננציאן, כאשר p הולך לערך מדומה אינסופי, מאחר ו־r ממשי, יש לנו גורם אספוננציאלי דועך. כלומר, נהפוך את האינטגרל על הציר הממשי לאינטגרל על הציר המדומה שיורד מאינסוף, מקיף מלמטה את הנקודה im, ועולה לאינסוף חזרה. נעשה שינוי משתנים:$\rho\equiv ip$

$$D\left(x-y\right)=\frac{1}{4\pi^2r}\int_m^\infty\mathrm{d}\rho\,\frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2-m^2}}\overset{r\to\infty}{\sim}e^{-mr}$$

עבור כל r סופי, הוא לא מתאפס, ובגלל האיבר e^{-mr}, שאינו מתאפס בכל r סופי. כלומר, אמפליטודת המעבר מחוץ לחרוט האור אינה מתאפסת. על פניו, נראה כאילו לא פתרנו את בעיית הקוזאליות.

אבל לא שאלנו את השאלה הנכונה. אנחנו לא מדברים על מיקום של חלקיק כאופרטור. האופרטור הבסיסי הוא השדה. מה שאנחנו יכולים לדאוג זה השדה, אנחנו צריכים לדרוש – לא שאמפליטודת המעבר תתאפס, בעתקה דמויית־מרחב, אלא שמדידות של חלקיק במרחק דמוי־מרחב אחת מהשניה, לא ישיפעו זו על זו. הגודל הנמדד אינו מיקום החלקיק, כי אם ערך השדה.

בצורה מתמטית, כדי שמדידות של גדלים פיזיקאליים לא ישפיעו אחת על השניה, על האופרטורים שמייצגים את המדידות הפיזיאליות – להתחלף. כלומר, קוזאליות מתקיימת כל עוד

$$\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]=0\qquad\left(x-y\right)^2<0$$

מה שכבר ראינו, הוא שהביטוי לעיל נכון עבור $x^0=y^0$, כתוצאה של יחסי החילוף הקאנונים.

במקרה הכללי, נציב את הפיתוח של הדה באמצעות אופרטורים יוצרים והורסים

$$\begin{aligned}\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]&=\int\frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\left[a_{\mathbf{p}}e^{-ipx}+a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx},a_{\mathbf{q}}e^{-iqy}+a_{\mathbf{q}}^\dagger q^{iqy}\right]\Big|_{\substack{p^0=E_{\mathbf{p}}\\q^0=E_{\mathbf{q}}}}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{+ip(x-y)}\right)\\&=D\left(x-y\right)-D\left(y-x\right)\end{aligned}$$

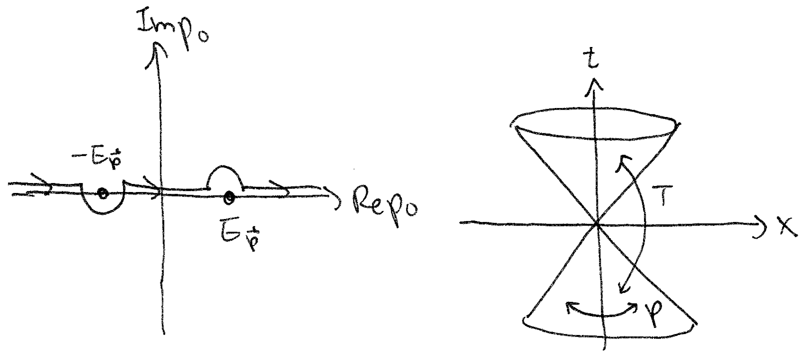
נרצה להראות שהביטוי מתאפס עבור $\left(x-y\right)^2<0$.

y נמצא מחוץ לחרוט האור של x, ולכן ניתן להעבירו באופן רציף, על גבי ההיפרבולואיד שמותר לו לנוע עליו באמצעות טרנספורמציית לורנץ, לנקודה $-y$. כלומר, על ידי טרנספורמציית לורנץ רציפה, ניתן להפוך $x-y\to y-x$ (בחרנו $x=0$, ולכן $x=-x$) . לכן, $D\left(y-x\right)=D\left(x-y\right)$, ולכן, במקרה דמוי זמן,

$$\left(x-y\right)^2<0\iff\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]$$

הערה 3.2 $D\left(x-y\right)$ הוא לורנץ־אינוורינטי תחת טרנספורמציות לורנץ רציפות בלבד.

[6] מושג שאני לא מכיר ממרוכבות



איור 6: מימין: פרופגטור Retarded. משמאל: פרופגטור פיינמן

כלומר, הקוזאליות מתקיימת עקב הביטול של אמפליטודת המעבר של חלקיק עם אמפליטודת המעבר של אנטי־חלקי, אחור (בתורת קליין־גורדון, אנטי חלקיק זהה לחלקיק, אבל בכל זאת..)

בשדה קליין־גורדון מרוכב, יש לחשב

$$\left[\phi\left(x\right),\phi^{\dagger}\left(y\right)\right]=D\left(x-y\right)-D^{\star}\left(y-x\right)=0\iff\left(x-y\right)^{2}<0$$

כאן, הרבה יותר ברור שמדובר על חלקיק ואנטי חלקיק.

בניסוח שונה, עקרון הקוזאליות דורש קיום של אנטי־חלקיקים.

3.3.1 הפרופגטור

חישבנו את הקומוטטור

$$\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]=D\left(x-y\right)-D\left(y-x\right)$$

התוצאה היא C-number, היא אינה אופרטור אלא מספר.

$$=\left\langle 0\right|\left[\phi\left(x\right),\phi\left(x\right)\right]\left|0\right\rangle =\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]\left\langle 0|0\right\rangle$$

גודל דומה לו הוא **הפרופגטור**. הפרופגטור של משוואת קליין־גורדון הוא הפרופגטור של משוואת קליין־גורדון:

$$\left(\partial_{x}^{2}+m^{2}\right)\Delta\left(x-y\right)=-i\delta^{(4)}\left(x-y\right)$$

כאשר ∂_{x}^{2} הוא הארבע־גרדיאנט של נקודה x. נבצע טרנספורם פורייה, ונקבל:

$$\boxed{\Delta\left(x-y\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{4}p}{\left(2\pi\right)^{4}}\frac{i}{p^{2}-m^{2}}e^{-ip\cdot(x-y)}}$$

לאינטגרל על p_0 יש שני קטבים: $p_{0}=\pm\sqrt{\left|\mathbf{p}\right|^{2}+m^{2}}=\pm E_{\mathbf{p}}$. הפונקציה $\Delta\left(x-y\right)$ היא אינטגרל לאורך p_0 , לכן, האינטגרל אינו מוגדר היטב עד שנטפל בקטבים. כדי לעשות זאת, נצטרך להרחיב את ההגדרה של p_0 למישור המרוכב. רוב המסלול ישאר על הציר הממשי של p_0 , וכשנתקרב לקטבים - נעקוף אותם. מאחר ויש מספר אפשרויות לעקוף את הקטבים (מלמעלה/מלמטה), עקיפות שונות יתנו לנו פרופגטורים שונים.

1. נעקוף את שני הקטבים מלמעלה. התוצאה תהיה שונה עבור $x^0>y^0$ או $x^0<y^0$. מאחר ואחרי שרצים על המישור הממשי, כדי להשתמש במשפט קושי, צריך לסגור את המסלול, באזור שבו האינטגרל יתאפס.

   (א) עבור $x^0>y^0$, נסגור את המסלול למטה, אנחנו מקיפים את שני הקטבים ולכן יהיו לנו שתי תרומות,

$$\int\frac{\mathrm{d}p^{0}}{2\pi}\frac{i}{p^{2}-m^{2}}e^{-ip\cdot(x-y)}=\left.\frac{e^{-ip(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right|_{p^{0}=E_{\mathbf{p}}}-\left.\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{2E_{\mathbf{p}}}\right|_{p^{0}=-E_{\mathbf{p}}}$$

לכן, נותר לנו לעשות אינטגל על שלוש־תנע:

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}(\ldots)=D(x-y)-D(y-x)=[\phi(x),\phi(y)]$$

(ב) עבור $x^0<y^0$, נצטרך לסגור את המסלול מלמעלה. במקרה זה, לא נקיף אף קוטב, ולכן,

$$\Delta(x-y)=0$$

באופן כללי, נבטא

$$\Delta\left(x^0-y^0\right)=\Theta\left(x^0-y^0\right)\langle 0|\left[\phi(x),\phi(y)\right]|0\rangle=D_R(x-y)$$

וזהו ה־Retarded Propagator.

אם היינו עוקפים את שני הקטבים מלמטה, אנחנו מקבלים תמונה הפוכה בדיוק, והחישוב זהה.

2. **פרופגטור Feynman** – הפעם, נבחר מסלול שעוקף את הקוטב השלילי מלמטה, ואת הקוטב החיובי מלמעלה.

(א) אם $x^0>y^0$, נסגור את המסלול מלמטה, ותופסים א תהקוטב החיובי, ולכן

$$\Delta(x-y)=D(x-y)$$

(ב) אם $x^0<y^0$, תופסים את הקוטב החיובי, ואז

$$\Delta(x-y)=D(y-x)$$

לכן,

$$D_F(x-y)=\Delta(x-y)=\Theta\left(x^0-y^0\right)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle+\Theta\left(y^0-x^0\right)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$$

נהוג לכתוב את זה בצורה יותר מקוצרת, בורה

$$D_F(x-y)=\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle$$

כאשר T אומר שצריך לסדר את הביטוי שנמצא בפנים בזמן (Time Ordering) , כלומר, הזמן המאוחר יותר – מימין.

אם נזיז את הקטבים, את השלילי נזיז מעט למעלה ואת החיובי מעט למטה, נקבל תוצאה דומה. ניתן לעשות את זה על ידי הוספת ε לקטבים:

$$\boxed{D_F(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)}}$$

ועכשיו, הקוטב הוא ב־$p_0=\pm\left(E_{\mathbf{p}}-i\varepsilon\right)$.

4 אינטראקציות ודיאגרמות פיינמן[7]

4.1 תורת ϕ^4

עד כה התעסקנו עם תורת שדה חופשית. כדי לתאר אינטאקציה, יש להוסיף איברים נוספים, לא לינארים, ללגרנז'יאן.

התורה מספקת קוזאליות אם ורק אם היא השדה הוא מכפלה של ארבע שדות באותה נקודה.

התורה משמרת לוקאליות אם ורק אם אינטראקציות לויות רק בשדה, ולא בנגזרות שלו

הלגזנז'יאן

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4}$$

נחשב מימדים (בחזקות...)

$$[\mathcal{L}] = 4 \implies [\phi] = 1$$
$$[s] = 0$$

לכן, המימדים של המקדם λ הוא $[\lambda] = 0$. ניתן לכאורה לקחת תורות אחרות: ϕ^3, ϕ^5 וכו', אבל לא באמת כולם כשרים, ואנחנו נתמקד בתורת ϕ^4.

משוואת השדה

$$\left(\Box + m^2\right)\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0$$

זוהי משוואה מסובכת, שאנחנו לא יודעים את הפתרון הכללי שלה. אין לנו ברירה אלא להשתמש בתורת הפרעות.

התורה הבסיסית שלנו היא התורה החופשית, תורת קליין גורדון, אליה מוסיפים אינטראקציות, שאליהם ניתן להתייחס בתור הפרעות קטנות לחלקיק חופשי. הקרוב של תורת ההפרעות הוא טוב כאשר האינטראקציה היא קטנה יחסית לתורה החופשית, וזה קורה כאשר λ קטן. היות ו־λ חסר מימדים, נוכל להתשמש בתורת הפרעות רק כאשר $\lambda \ll 1$.

אזי ההמילטוניאן שלנו יהיה סכום של ההמילטוניאן החופשי והמילטוניאן האינטראקציה,

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + H_{int} \\
H_0 &= \int \mathrm{d}^3x \left(\frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla\phi\right|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) \\
H_{int} &= \int \mathrm{d}^3x\, \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \\
H_{int} &\ll H_0
\end{aligned}$$

ולכן נוכל לחשב את האפקטים של האינטראקציה בפיתוח הפרעתי.

מה נחשב?

1. מצבים וערכים עצמיים של ההמילטוניאן, למשל, מצב היסוד

$$|\Omega\rangle \neq |0\rangle$$

כאשר $|0\rangle$ הוא מצב היסוד של ההמילטוניאן החופשי ו־$|\Omega\rangle$ מצב היסוד של ההמילטוניאן בתורת ϕ^4.

2. חתכי־פעולה לתהליכי פיזור.

3. זמני דעיכה של חלקיקים לא יציבים.

ראשית, נלמד לחשב גדלים פשוטים יותר.

[7] 15/11/2009

4.2 פונקציות קורלציה

בסוף נראה שהגדלים הפיזיקאליים, דומים לפונקציות קורלציה ומחושבים בצורה דומה.

פונקציית קורלציה דו נקודתית

$$\langle\Omega|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)|\Omega\rangle$$

גודל זה דומה מאוד לפרופגטרו פיינמן, $D_f\left(x-y\right)=\langle 0|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)|0\rangle$. פונקציית הקורלציה הדו־נקודתית היא הגרסא בתורה המדויקת של פרופגטור פיינמן. נרצה לבטא את פונקציית הקורלציה כהפרעה לגדלים שאנחנו יודעים חשב בתורה החופשית.

1. השדה $\phi\left(x\right)$ בתמונת הייזנברג בתורה המלאה שונה מהשדה בתורה החופשית. למשל, השדה בתורה המלאה לא יהיה פשוט סכום של אופרטורים יוצרים והורסים. זה לא יהיה נכון כאשר יש אינטראקציה.
2. מצבי היסוד שונים: $|\Omega\rangle\neq|0\rangle$.

נרצה לחשב איך הגדלים הללו משתנים ולקבל את פונקציות הקורלציה בתורה המלאה, כסכום של הפרעות על התורה החופשית

4.2.1 השדה בתורה המלאה

בכל זמן ייחוס נתון, t_0 , נוכל לכתוב את השדה שלנו בצורה:

$$\phi\left(t_0,\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

כאשר $a,a^{\dagger}$ **ספציפיים** לזמן t_0 שנבחר. בכל רגע נתון,

$$\left[\phi\left(t,\mathbf{x}\right),\Pi\left(t,\mathbf{y}\right)\right]_{\text{equel time}}=i\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)$$

נרצה לקחת את השדה ולחשב את ההתפתחות בזמן שלו בתורה המלאה, ולקבל את השדה כללי. ההתפתחות בזמן של השדה היא

$$\phi\left(t,\mathbf{x}\right)=e^{iH(t-t_0)}\phi\left(t_0,\mathbf{x}\right)e^{-i\mathbf{H}(t-t_0)}$$

לכל $t\neq t_0$. ההתפתחות בזמן נובעת ברובה מההמילטוניאן של התורה החופשית.

נגדיר את "תמונת האינטראקציה" בתמונת האינטראקציה, נכנה את השדות $\phi_I\left(t,\mathbf{x}\right)$. ההתפתחות של שדות בזמן לפי תורת האינטראקציה היא רק לפי ההמילטוניאן החופשי:

$$\boxed{\phi_I\left(t,\mathbf{x}\right)=e^{iH_0(t-t_0)}\phi\left(t_0,\mathbf{x}\right)e^{-iH_0(t-t_0)}}$$

ההפתחות בזמן של ϕ_I היא רק לפי ההמילטוניאן החופשי, ולכן ϕ_I הוא שדה חופשי.
מאחר ו־ϕ_I הוא שדה חופשי, ניתן לבטא אותו באמצעות ההמילטוניאן של שדה קליין גורדון, לכן,

$$\phi_I\left(t,\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{\substack{x^0=t-t_0\\ p^0=\mathbf{E}_p}}$$

כאשר כאן $a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ לא תלויין בזמן, כמו שמצאנו עבור שדה קליין־גורדון.
נרצה לקשר את $\phi\left(t,\mathbf{x}\right)$ ל־$\phi_I\left(t,\mathbf{x}\right)$.

$$\begin{aligned}\phi\left(t,\mathbf{x}\right)&=e^{iH(t-t_0)}\phi\left(t_0,\mathbf{x}\right)e^{-iH(t-t_0)}\\&=e^{iH(t-t_0)}\left(e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I\left(t-\mathbf{x}\right)e^{iH_0(t-t_0)}\right)e^{-iH(t-t_0)}\\&\equiv U^{\dagger}\left(t,t_0\right)\phi_I\left(U\left(t,t_0\right)\right)\end{aligned}$$

כאשר U אופרטור אוניטרי,

$$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$$

אם אין אינטראקציות, $H = H_0$, והאופרטור U הוא טריוויאלי.
נסתכל על הנגזרת בזמן של U:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}(H-H_0)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH_0(t-t_0)}}_{H_I}U(t,t_0) \end{aligned}$$

וקיבלנו את האופרטור U מוכפל בהמילטוניאן בתמונת האינטראקציה

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_I(t)U(t,t_0)}$$

אזי, אם לא היינו נזהרים עם החילופיות של אופרטורים, הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית היה $U(t,t_0) \sim e^{-i\int_{t_0}^{t}H_I(t')\mathrm{d}t'}$.
הפתרון של המשוואה הוא

$$U(t,t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_I(t_1)H_i(t_2) + \dots$$

זהו פתרון, מאחר שנגזרת של כל איבר נותנת את מינוס האיבר הקודם:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= 0 + -iH_I(t) + (-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 H_I(t)H_I(t_2) \\ &= -iH_I(t)\left[I + (+i)\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 H_I(t_2) + \dots\right] \\ &= -iH_I(t)U(t_0,t) \end{aligned}$$

זהו רישום מדויק יותר לביטוי $e^{-i\int_{t_0}^{t}H_I(t')\mathrm{d}t'}$ שמדגיש את הסידור בזמן של האיברים. נשתמש בנוטציה של סידור בזמן, ונרשום אותו בצורה:

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_I(t_1)H_i(t_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 T(H_I(t_1)H_I(t_2))$$

ניתן לראות זאת באיור (7)
בצורה דומה,

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t}T(H_I(t_1)\cdots H_I(t_n))$$

לכן, נוכל לרשום:

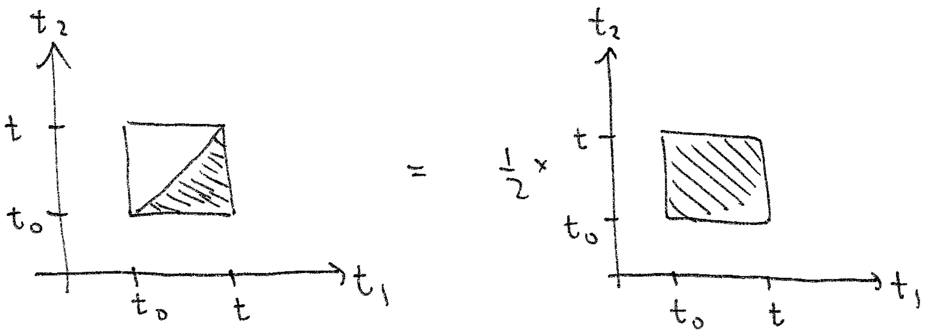
$$U(t,t_0) = T\left(e^{-i\int_{t_0}^{t}H_I(t')\mathrm{d}t'}\right)$$

כאשר ההמילטוניאן בתמונת האינטראקציה הוא

$$H_I = \int \mathrm{d}^3x\frac{\lambda}{4!}\phi_I(x)^4$$

כאשר U הוא פונקציה של שני זמנים שרירותיים,

$$U(t,t') \equiv T\left(e^{-i\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t''H_I(t'')}\right)$$



איור 7: אינטגל על הריבוע כולו הוא כמו פעמיים אינטגרל על המשולש. מתוך הרשימות של אורן ברגמן.

ונקבל, עם הגדרה זו, את היחס

$$U(t,t') == e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH\left(t-t'\right)}e^{-iH_0\left(t'-t_0\right)}$$

ולכן, ניתן לצרף אופרטורים: $t_1 \geq t_2 \geq t_3$, ולכן,

$$U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3)$$
$$U(t_1,t_3)\,(U(t_2,t_3))^\dagger = U(t_1,t_2)$$

4.2.2 מצב היסוד בתורה המלאה

נרצה לקשר את מצב היסוד בתורה המלאה, $|\Omega\rangle$, באמצעות מצב היסוד בתורה החופשית, $|0\rangle$ והשדה החופשי, ϕ_I .

נתחיל עם המצב $|0\rangle$ בתורה המלאה (שהוא אינו מצב היסוד, ובאופן כללי גם לא מצב עצמי). נסתכל על ההתפתחות של $|0\rangle$ בזמן: $e^{-IHT}|0\rangle$.

$$e^{-IHT}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n\,|\,0\rangle$$

כאשר $|n\rangle$ הם המצבים העצמיים בתורה המלאה. נפריד את מצב היסוד מהסכום:

$$= e^{0iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega\,|\,0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n\,|\,0\rangle$$

נסתכל על הגבול של $T\to\infty\cdot(1-i\varepsilon)$ [8]. נחלק את כל הביטוי ב־$e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle$:

$$\frac{e^{-iHT}|0\rangle}{e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle} = |\Omega\rangle + \underbrace{\sum_{n\neq 0} e^{-i(E_n-E_0)T}|n\rangle\frac{\langle n|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle}}_{E_n>E_0\implies\xrightarrow{T\to\infty}0}$$

לכן,

$$|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{e^{-iHt}|0\rangle}{e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle}$$

[8] הזמן שואף לאינסוף כפול $(1-i\varepsilon)$, כאשר $i=\sqrt{-1}$

מאחר והגבול הוא אינסופי, אפשר להוסיף קבע סופי ל־T, ולכתוב:

$$|\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{e^{-iH(T+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega\,|\,0\rangle}$$

נעבוד על המונה: נכניס את האופרטור אחד, ונכתוב אותו בתור $e^{-iH_0(T+t_0)}|0\rangle$ ו$|0\rangle$) לא מתפתח בזמן בהשפעת H_0 , $H_0|0\rangle=0$, הוא מצב עצמי שלו)

$$\begin{aligned}e^{-iH(T+t_0)}|0\rangle&=e^{iH(T+t_0)}e^{iH_0(T+t_0)}|0\rangle\\&=e^{-iH_0(t_0-t_0)}e^{-iH(t_0-(-T))}+e^{-iH_0(-T-t_0)}|0\rangle\\&=U(t_0,-T)|0\rangle\end{aligned}$$

לכן, נוכל לרשום את מצב היסוד בתורה המופרעת, בצורה ,

$$\boxed{|\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{U(t_0,-T)|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle}}$$

כלומר, מצב היסוד בשדה המופרע מיוצג באמצעות מצב היסוד בשדה החופשי, והשדה החופשי עצמו.
באופן דומה,

$$\boxed{\langle\Omega|=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\langle0|U(T,t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)}\langle0|\Omega\rangle}}$$

4.2.3 הרכבת פונקציית הקורלציה

נחפש ביטוי עבור פוקציית הקורלציה הדו־נקודתית. נניח ש־ $x^0>y^0>t^0$, ולכן, נוכל לרשום $T(\phi(x)\phi(y))=\phi(x)\phi(y)$

$$\begin{aligned}\langle\Omega\,|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|\,\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}&\left[e^{-iE_0(T-t_0)}\langle0|\Omega\rangle\right]^{-1}\langle0|\,U(T,t-0)\\&\times U^\dagger\left(x^0t_0\right)\phi_I(x)\,U\left(x^0,t_0\right)\cdot U^\dagger\left(y^0,t_0\right)\phi_I(y)\,U\left(y^0,t_0\right)\\&\times U(t_0,-T)|0\rangle\left[e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle\right]^{-1}\end{aligned}$$

נרשום את הביטוי לפי זהויות הצירופים:

$$\langle\Omega\,|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|\,\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\left(|\langle0|\Omega\rangle|^2e^{-iE_02T}\right)^{-1}\left\langle0\,\middle|\,U\left(T,x^0\right)\phi_I(x)\,U\left(x^0,y^0\right)\phi_I(y)\,U\left(y^0,-T\right)\middle|\,0\right\rangle$$

נשתמש בעובדה שהמצבים מנורמלים: $\langle\Omega|\Omega\rangle=1$.

$$1=\langle\Omega|\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\left(|\langle0|\Omega\rangle|^2e^{-iE_02T}\right)^{-1}\cdot\langle0\,|\,U(T,t_0)\,U(t_0,-T)\,|\,0\rangle$$

ולכן,

$$\langle\Omega\,|\,\phi(x)\,\phi(y)\,|\,\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\left\langle0\,\middle|\,U\left(T,x^0\right)\phi_I(x)\,U\left(x^0,y^0\right)\phi_I(y)\,U\left(y^0,-T\right)\middle|\,0\right\rangle}{\langle0\,|\,U(T,t_0)\,U(t_0,-T)\,|\,0\rangle}$$

נשים לב שגם במונה וגם במכנה המכפלות של האופרטורים מסודרים בזמן, ולכן, אם לא נניח יחסים בין x^0,y^0 , ונוכל לשום את התוצאה הכללית בצורה

$$\boxed{\langle\Omega\,|\,T(\phi(x)\,\phi(y))\,|\,\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\left\langle0\,\middle|\,T\left(\phi_I(x)\,\phi_I(y)\,e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\middle|\,0\right\rangle}{\left\langle0\,\middle|\,T\left(e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\middle|\,0\right\rangle}}$$

נשים לב שהנוטציה אומרת שיש לפרק את פיתוח הטיילור של האספוננט כך שהמכפלות מסודרות בזמן: מעריכים את הטור עד הזמן המוקדם, מסדרים, לוקחים עוד אינטרוול זמין וכן הלאה.
זהו ביטוי מדוייק. הפיתוח ההפרעתי יהיה הפיתוח בטור של האקספוננטים.
באופן כללי,

$$\langle \Omega \,|\, T\left(\phi\left(x\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right) \,|\, \Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)} \frac{\left\langle 0 \,\middle|\, T\left(\phi_I\left(x\right)\cdots\phi_I\left(x_n\right)e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right) \,\middle|\, 0\right\rangle}{\left\langle 0 \,\middle|\, T\left(e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right) \,\middle|\, 0\right\rangle}$$

4.3 משפט Wick ודיאגרמות פיינמן

נדבר על חישוב הגודל:

$$\langle 0 \,|\, T\left(\phi_I\left(x_1\right)\cdots\phi_I\left(x_n\right)\right) \,|\, 0\rangle$$

מעתה, נסתכל רק על השדה בתמונת האינטראקציה, ולכן נרשום פשוט ϕ במקום ϕ_I . משפט וויק מקשר את המכפלה המסודרת בזמן למכפלה המסודרת בצורה נורמלית

$$T\left(\phi_1\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right) = N\left(\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right) + \sum\left\{\xi\right\}\right)$$

כאשר ξ הם **"צימצומים"**. N מסמן **סידור נורמלי**. בסידור כזה, כל האופרטורים "$a^\dagger$" נמצאים משמאל לכל ה-"a". כדי להבין מהם צמצומים נסתכל על המקרה של $n=2$.

$$T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)$$

נפרק את אופרטור השדה לשני איברים, כך שאחד מכיל את החלק היוצר, והשני את החלק ההורס:

$$\begin{aligned}
\phi\left(x\right) &= \phi^+\left(x\right) + \phi^-\left(x\right) \\
\phi^+\left(x\right) &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} \\
\phi^-\left(x\right) &== \int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip\cdot x}
\end{aligned}$$

ברישום כזה, במקרה ובו $x^0 > y^0$,

$$T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right) = \phi^+\left(x\right)\phi^+\left(y\right) + \phi^+\left(x\right)\phi^-\left(y\right) + \phi^-\left(x\right)\phi^+\left(y\right) + \phi^-\left(x\right)\phi^-\left(y\right)$$

המכפלה היחידה שלא מסודרת נורמלית היא האיבר של $\phi^-\left(x\right)\phi^+\left(y\right)$. לכן, כדי לסדר את המכפלה נורמלית, נצטרך להוסיף את הקומוטטור

$$= N\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right) + \left[\phi^+\left(x\right),\phi^-\left(y\right)\right]\right)$$

ובמקרה שבו $y^0 > x^0$,

$$T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right) = N\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right) + \left[\phi^+\left(y\right),\phi^-\left(x\right)\right]\right)$$

באופן כללי,

$$T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right) = N\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right) + \overbrace{\phi\left(x\right)\phi}\left(y\right)\right)$$

כאשר

$$\overbrace{\phi\left(x\right)\phi}\left(y\right) = \begin{cases}\left[\phi^+\left(x\right),\phi^-\left(y\right)\right] & ,x^0 > y^0 \\ \left[\phi^+\left(y\right),\phi^-\left(x\right)\right] & ,x^0 < y^0\end{cases} = D_f\left(x-y\right)$$

ונקבל את משפט וויק עבור 2 שדות:

$$T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)=N(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)-\wick{\c\phi\left(x\right)\c\phi\left(y\right)})$$

באופן דומה, מתקבל, על ידי אינדוקציה, **משפט וויק** ,

$$\boxed{T\left(\phi_1\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right)=N\left(\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)+\sum\left\{\xi\right\}\right)}$$

כאשר $\{x\}$ הם כל הצמצומים.

דוגמה עבור $n=4$

$$\begin{aligned}T\left(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\right)=N\Big(&\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4+\wick{\c\phi_1\c\phi_2\phi_3\phi_4}+\wick{\c\phi_1\phi_2\c\phi_3\phi_4}+\wick{\c\phi_1\phi_2\phi_3\c\phi_4}\\&+\wick{\phi_1\c\phi_2\c\phi_3\phi_4}+\wick{\phi_1\c\phi_2\phi_3\c\phi_4}+\wick{\phi_1\phi_2\c\phi_3\c\phi_4}\\&+\underbrace{\wick{\c1\phi_1\c1\phi_2\c2\phi_3\c2\phi_4}}_{D_F(x_1-x_2)D_F(x_2-x_4)}+\wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c1\phi_3\c2\phi_4}+\wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c2\phi_3\c1\phi_4}\Big)\end{aligned}$$

נחשב את ערך התצפית בריק: במקרה זה, רק הצמצומים המלאים המלאים יתרמו, מאחר ואם הצמצום הוא לא מלה, תשאר לנו מכפלה מנורמלת של השדות שלא צמצמו, ואז ערך התצפית מתאפס, מאחר ויש אופרטורים הורסים מימין שהורסים את הריק מימין ומשמאל.

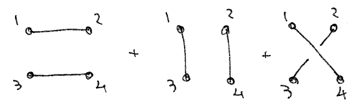
$$\left\langle 0\right|T\left(\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right)\left|0\right\rangle=\sum\left\{\bar{\xi}\right\}$$

כאשר $\bar{\xi}$ הם **הצימצומים המלאים**. בדוגמא שלנו,

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right|T\left(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\right)\left|0\right\rangle&=\wick{\c1\phi_1\c1\phi_2\c2\phi_3\c2\phi_4}+\wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c1\phi_3\c2\phi_4}+\wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c2\phi_3\c1\phi_4}\\&=D_F\left(x_1-x_2\right)D_F\left(x_3-x_4\right)+D_F\left(x_1-x_3\right)D_F\left(x_2-x_4\right)+D_F\left(x_1-x_4\right)D_F\left(x_2-x_{\#}\right)\end{aligned}$$

אפשר לכתוב זאת בצורה דיאגרמטית בצורה הבאה: כל נקודה היא נקודה, וכל פרופגטור הוא קו:

$$\left\langle 0\right|T\left(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\right)\left|0\right\rangle=$$



כאשר כל נקודה x_i מיוצגת כנקודה חיצונית בדיאגרמה, וכל פרופגטור, $D_F\left(x_i-x_j\right)$ מיוצג כקו בין הנקודות i ו־j.

אפשר לחשוב על הדיאגרמות כמייצגות תהליך במרחב־זמן: נוצרו שני חלקיקים בשתי נקודות, והם התקדמו לשתי נקודות חדשות, ונהרסו.

4.3.1 תורת ההפרעות – פיתוח המונה

נפתח את המונה של פונקציית הקורלציה הדו־נקודתית,

$$\left\langle\Omega\left|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)\right|\Omega\right\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\left\langle 0\left|T\left(\phi_I\left(x\right)\phi_I\left(y\right)e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|T\left(e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\right|0\right\rangle}$$

בשלב ראשון, נפתח את המונה,

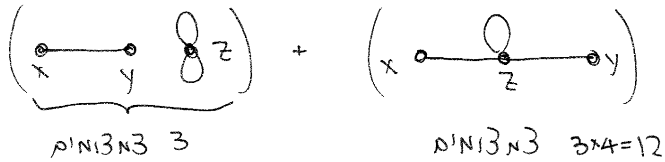
$$\left\langle 0\left|T\left(\phi_I\left(x\right)\phi_I\left(y\right)e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\right|0\right\rangle=\left\langle 0\left|T\left(\phi_I\left(x\right)\phi_I\left(y\right)\left(1-i\int H_I\mathrm{d}t+\dots\right)\right)\right|0\right\rangle$$

האיבר הראשון, הוא

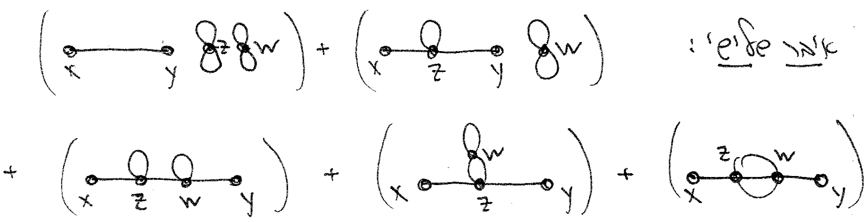
$$\langle 0|T\left[\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right]|0\rangle = D_F\left(x-y\right) = {}^{x}\!\!\underline{\quad\quad}\!\!{}^{y}$$

האיבר השני

$$\left\langle 0\left|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\left(-\frac{i\lambda}{4!}\right)\int \mathrm{d}^4z\,\phi\left(z\right)\phi\left(z\right)\phi\left(z\right)\phi\left(z\right)\right)\right|0\right\rangle = -\frac{i\lambda}{4!}\Big[3D_F\left(x-y\right)\int \mathrm{d}^4z\left(D_F\left(z-z\right)\right)^2$$
$$+\,12\int \mathrm{d}^4z D_F\left(x-z\right)D_F\left(y-z\right)D_F\left(z-z\right)\Big]$$



ובאופן דיאגרמטי,
הנקודה z היא נקודה פנימית בדיאגרמה, ומבוטאת על ידי האינטגרל, $(-i\lambda)\int \mathrm{d}^4z$, ורטקס.



איבר שלישי

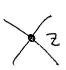
חישוב המקדם המספרי הכולל כל דיאגרמה מייצגת סכום של מספר תרומות בעלות ביטוי זהה. כלומר, הדיאגרמה מייצגת את אותו ביטוי עם פקטור נומרי מסויים. עבור מספר רב של שדות (סדרים גבוהיים), הסכימה על הצמצומים מתחילה להסתבך, אבל אפשר בקלות לחשב את הפקטור הנומרי הכולל של כל דיאגרמה שונה.

בסדר n בתורת ההפרעות, נקבל מקדם של $\frac{1}{n!(4!)^n}$. לכן, יש לנו מקדם של $n!$ מהנקודות הפנימיות (ורטקסים) ועבור כל נקודה פנימית, יהיה גם פקטור של $(4!)^n$, מתמורות של קווים נכנסים לכל ורטקס. נשאר $\frac{1}{S}$, כאשר S הוא מקדם הסימטריה.

כדי לחשב את פקטור הסימטריה,S:

1. כל קו שמתחיל ונגמר באותה נקודה נותן 2
2. שתי נקודות פנימיות מחוברות על ידי k קווים, נותן $k!$ (כנ"ל לגבי נקודה אחת המחוברת לעצמה על ידי k קווים)
3. ℓ ורטקסים זהים נותנים $\ell!$.

כלומר, הבעיה הופכת לבעיה גרפית של לצייר את כל הדיאגרמות השונות בעלות 2 נקודות חיצוניות. כל דיאגרמה כזו מורכבת משני אלמנטים[9]:

- פרופגטורים: $D_F\left(x-y\right)$, שמיוצג על ידי קו בין שני נקודות, $D_F\left(x-y\right) = {}^{x}\!\!\underline{\quad\quad}\!\!{}^{y}$
- ורטקסים: שני חלקים של דיאגרמה שנפגשים בנקודה פנימית, כל ורטקס שווה ל-  $= (-i\lambda)\int \mathrm{d}^4z$.
  כל ורטקס הוא מפגש של ארבע קווים.

[9] 22/11/2009

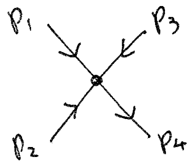
- נקודה חיצונית $\overset{x}{\text{———}} = 1$.

תורת ההפרעות היא פיתוח במספר הורטקסים. חוקים אלו נקראים **חוקי פיינמן**. כל סדר בתורת ההפרעות מוסיף נקודה פנימית אחת.

יש לחשב את פקטור הסימטריה לכל דיאגרמה בנפרד, לפי חוקים מסויימים שילמדו בפרוטרוט בתרגול.

נרצה לבטא את החוקים במרחב התנע:

$$D_F\left(x-y\right)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{\left(2\pi\right)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{ip\cdot(x-y)}$$

ובנוסף לכך, בכל ורטקס, בכל מפגש בין ארבעה קווים,  , נקבל אינטגרל על ארבעת הפרופגטורים

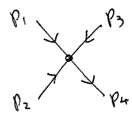
$$\int\mathrm{d}^4z\,e^{-i(p_1,p_2,p_3,p_4)\cdot z}$$

כאשר אלו הם ארבע חצים שנפגשים בורטקס

$$=\left(2\pi\right)^4\delta^{(3)}\left(p_1+p_2+p_3+p_4\right)$$

זהו שימור 4־תנע: הדלתא מאלצת את הסכום $p_1+p_2+p_3+p_4=0$.

חוקי פיינמן במרחב התנע

- לפרופגטור יש כיוון: כיוון התפשטות התנע. בכיוון החץ, התנע הוא p־חיובי. $\xrightarrow{p}=\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}$
- כל ורטקס מקבל את הביטוי  $=-i\lambda$
- נקודה חיצונית: $\overset{x\quad p}{\longleftarrow}=e^{-ipx}$

בנוסף, במרחב התנע, יש לנו חוקים נוספים:

- שימור של 4־תנע בכל ורטקס.
- יש לבצע על כל 4־תנע שלא נקבע ($\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}$) , כלומר, על כל תנע שלא מגיע "מבחוץ", כלומר, על כל קו פנימי.
- יש לחלק במקדם הסימטריה, הוא אותו מקדם בשני היצוגים.

עד כה ראינו 2 אפסילונים: ה־ε מפרופגטור פיינמן, שמזיז את הקוטב מהציר הממשי, וה־ε משאיפה לאינסוף של הזמן: $T\to\infty\left(1-i\varepsilon\right)$. ה־ε השני נבע כדי לבודד את מצב היסוד בתורה המלאה משאר המצבים.

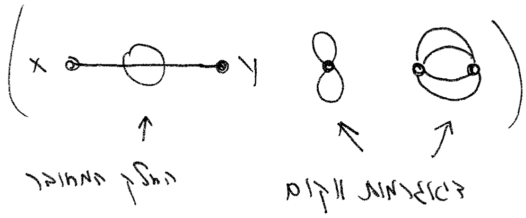
נסתכל על

$$\int\mathrm{d}^4z\,e^{-i(p_1+p_2+p_3+p_4)z}$$

בפרט, $\int_{-T}^{T}\mathrm{d}z_0$, אינטגרל על כל הזמן, T. נאיבית, האינטגרל הזה מתבדר, מאחר ול־T יש חלק מדומה, ולכן הוא יתבדר ב־$+\infty$ או ב־$-\infty$. אנחנו רוצים שהאינטגרל יהיה סופי, הן בגבול העליון והן בגבול התחתון. אנחנו מוודאים שהארגומנט של האקספוננציאל יהיה מדומה, אם כל p_i^0 אינם ממשיים, כי אם נמצאים על קו מוטה במישור המרוכב: $p_i^0\propto 1+i\varepsilon$.

4.3.2 המכנה

במונה, ישנם דיאגרמות בעלות **חלקים מנותקים**, ללא נקודות חיצוניות. החלק שאין בו נקודות חיצוניות מכונה **דיאגרמת ריק**. החלק השני, מכונה החלק המחובר.



לפעמים יהיו יותר חלקים, למשל, מסדר חמש, יש דיאגרמות כמו ()) . זוהי דיאגרמה מנותקת, שמורכבת משתי דיאגרמות ריק ומחלק מחובר אחד. במונה, יהיו תרומות כאלו, ללא נקודות חיצוניות.

דיאגרמות ריק נסמן ב־V_i , כאשר i רץ על כל דיאגרמות הריק שלנו. אם יש דיאגרמה כלשהי שמופיעה n_i פעמים. ערך הדיאגרמה יהיה המכפלה של כל החלקים המנותקים. כלומר, ניתן לבטא כל דיאגרמה בתור

$$(\text{connected part})\times\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}$$

לכן, המונה שלנו הוא

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{connected}}\sum_{\{n_i\}}(\text{connected part })\times\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\\
&=\sum_{\text{connected}}(\text{connected part })\underbrace{\left(\sum_{\{n_i\}}\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\right)}_{\prod_i\sum_{n_i}\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}}\\
&=\sum_{\text{connected}}(\text{connected part })\prod_i e^{V_i}
\end{aligned}$$

לכן, סכימה על כל הדיאגרמות על מספר מסויים של נקודות חיצונים, שווה לסכום על כל הדיאגרמות המחבורות, כפול e בחזקת הסכום של דיאגרמות הריק.
המכנה, הוא סכום על כל דיגארמות הריק, או $\left\langle 0\middle|T\left(e^{-i\int_{-T}^{T}H_I\mathrm{d}t}\right)\middle|0\right\rangle$ הוא סכום על כל דיגארמות הריק, או $e^{\sum V_i}$. לכן, $\langle\Omega|T\left(\phi\left(x_1\right)\cdots T\left(x_n\right)\right)|\Omega\rangle$ הוא פשוט סכום על הדיאגרמות **המחוברות** בעלות n נקודות חיצוניות.

המשמעות הפיזיקאלית של דיאגרמות ריק[10] הביטי המקורי עבור פונקציית הקורלציה הדו נקודתית הוא

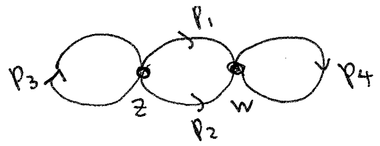
$$\langle\Omega|T\left(\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)\right)|\Omega\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\left\langle 0\middle|T\left(\phi_I\left(x\right)\phi_I\left(y\right)e^{-i\int H_I\mathrm{d}t}\right)\middle|0\right\rangle}{\left|\langle 0|\Omega\rangle\right|^2e^{iE_0 2T}}$$

כאשר המונה הוא כל הדיאגרמות והמכנה הוא $e^{-\sum v_i}$, סכימה על דיאגרמות הריק. מכוא, אנחנו יכולים להסיק ש־

$$e^{\sum v_i}\propto e^{-iE_0\cdot 2T}$$

כלומר, שאנרגיית הריק בתורה המלאה, E_0 , פופורציונית לסכום דיאגרמות הריק: $E_0\propto\sum_i v_i$. כמובן ששניהם מתבדרים.

[10] אני לא בטוח שזה לגמרי בחומר



כל דיאגרמת ריק מכילה $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(0)$, למשל, , הורטקס ב־z נותן $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2)$, ואז הורטקס w נותן $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(0)$, זהו הנפח האינסופי של המרחב־זמן:

$$\int \mathrm{d}^4 w = T\cdot V = \infty$$

צפיפות האנרגיה בריק היא

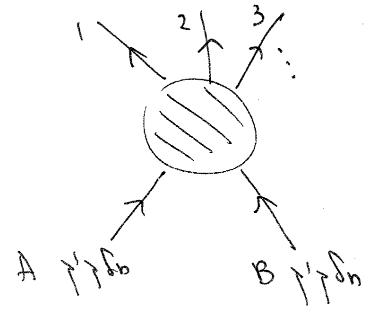
$$\frac{E_0}{V} = \frac{i\sum v_i}{(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(0)}$$

כלומר, דיגארמות הריק בעצם מהוות את השינוי בצפיפות האנרגיה של המקום בתורה המלאה (עם האינטראקציות) ביחס לתורה החופשית.

הגודל הזה עדין מתבדר כתוצראה מהאינטגרלים המתבדרים על התנעים בלולאות. על התבדרויות אלו נלמד בקורס "שדות 1" . כרגע, נניח שישנו גבול עליון באינטגרלים על תנע Λ , והוא נותן את צפיפות האנרגיה בריק.

4.4 ה־S-matrix

נרצה ללמוד לחשב את החתך הפעולה של התנגשויות בין חלקיקים. נתרכז במקרה שבו נכנסים שני חלקיקים.



כדי לדבר על פיזור, צריך לדעת קודם כל להפריד את החלקיקים: להתחיל ממצב שבו הם לא עושים אינטראקציה, כלומר, הם ממוקמים ברמה מסויימת במרחב.

אבל, כדי שהתמונה תהיה ברורה, נתחיל עם חבילות גלים, במרחב התנע.

$$|\phi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}\phi(\mathbf{k})\,|\mathbf{k}\rangle$$

שתי חבילות, A ו־B נעות בכיוונים מנוגדים, בכיוון $\hat{z}$, ופרמטר הפגיעה הוא $\mathbf{b}$, ו־$\hat{z}\perp\mathbf{b}$. A נמצאת על ציר $\hat{z}$ ואילו B מוזז ב־$\mathbf{b}$ מהציר.

יש לנו שתי חבילות גלים:

$$|\phi_A\phi_B\rangle_{in} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k_A \mathrm{d}^3 k_B}{(2\pi)^6}\cdot\frac{\phi_A(\mathbf{k}_A)\,\phi_B(\mathbf{k}_B)\,e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_B}}{\sqrt{2E_A 2E_B}}\,|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle$$

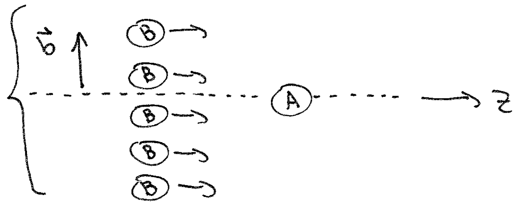
אלו הן שתי חבילות גלים שהכנו בעבר הרחוק. $e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_B}$ הוא הטרנספורם־פורייה להזזה ב־$\mathbf{b}$.

נרצה לחשב את החפיפה בין המצב הזה לחבילות גלים בעתיד הרחוק,

$$\langle\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|_{out} = \prod_{f=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3}\frac{\phi_f(p_f)}{\sqrt{2E_f}}\,\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_n|_{out}$$

באופן עקרוני, נרצה לחשב את הגודל

$$\langle\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|_{out}\,|\phi_A\phi_B\rangle_{in}$$



איור 8: התנגשות בין שני חלקיקים

אבל בתמונת הייזנברג, המצבים לא תלויים בזמן, לכן, לאופרטורים בתורה, שהם כן תלויים בזמן, יש ערכים שונים בזמנים שונים. ה"שם" של המצב, in או out קשור לערכים של אופרטורים בעתיד הרחוק או בעבר הרחוק.

ה־S-matrix מוגדרת בגבול שבו חבילות הגלים מתרכזות סביב תנעים מסויימים. בגבול הזה, החפיפה בין המצבים:

$$\begin{aligned}\langle\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|_{out}\,|\phi_A\phi_B\rangle_{in} &\to \langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n\,|\,_{out}\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{int}\\ &= \left\langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n\left|\,e^{-iH(2T)}\right|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\right\rangle\end{aligned}$$

כאשר $e^{-iH(2T)}$, אופרטור העתקה זמן (פעמיים..) מזיז את צד ימין ב־$-T$ ואת צד שמאל ב־$+T$.

ה־S-matrix הוא גבול של רצף של אופרטורים אוניטריים, בגבול שבו $T\to\infty$.

$$\langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n\,|\,_{out}\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{int} = \langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_2\,|\,S\,|\,\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle$$

כאשר S הוא ה־S-matrix, (Scattring matrix, מטריצת הפיזור). בתורה החופשית, S הוא אופרטור היחידה, לכן, נכתוב,

$$S = 1 + iT$$

כאשר T מכיל את כל התרומות שקשורות באינטראקציות.

האנרגיה והתנע נשמרים, לכן,

$$\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|iT|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle = \underbrace{(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(k_A+k_B-\sum_{f=1}^{n}p_f\right)}_{\text{Consevation of momentum}} + i\underbrace{\boxed{M\left(k_Ak_B\to\{p_f\}\right)}}_{\text{scattering amplitude}}$$

נחלק את העיסוק שלנו לשני חלקים: בקינמטיקה – חישוב חתך הפעולה מאמפליטודת הפיזור ודינמיקה – חישוב אמפליטודת הפיזור

4.5 קינמטיקה[11]

בניסוי פיזור דמיוני, יורים חלקיק A על ציר $\hat{z}$, שמתנגש בחלקיק B עם פרמטר פגיעה $\mathbf{b}$. באופן מעשי, יש לנו התפלגות מסויימת של חלקיקי $\mathbf{B}$ עם $\mathbf{b}$ שונה. נגדיר את כיוון $\hat{z}$ ככיוון התנועה של חלקיק B , במהערכת המנוחה של חלקיק A.

במצב הסופי, יהיו לנו n חלקיקים, עם חבילות גלים $\langle\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|_{out}$. הגלאי מודד את התנעים בתוך: $\mathrm{d}^3p_1,\ldots,\mathrm{d}^3p_n$. הגודל שנרצה לחשב ראשון הוא ההסתברות לכך ששתי חבילות הגלים יתפזרו ל־n חלקיקים עם $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$, בתווך־תנעים מסויים.

$$\text{(d)}\ P\left(\phi_A\phi_B\to\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n\right) = \prod_{f=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\left|\langle\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n\,|\,_{out}\phi_A\phi_B\rangle_{in}\right|$$

[11] 25/11/2009

כלומר, לכל תווח מסויים של תנעים, יש הסתברות מסויימת שהאירוע הזה יקרה. כאשר $E_f = \sqrt{\left|\mathbf{p}_f\right|^2 + m_f^2}$, ו־$f$ מונה על החלקיקים במצב הסופי.

N , מספר האירועים שהגלאי ימדוד עם $p_1 \in [\bar{p}_1, \bar{p}_1 + \mathrm{d}p_1]$ ו־$p_2 \in [\bar{p}_2, \bar{p}_2 + \mathrm{d}p_2]$ וכן הלאה, יהיה

$$N = \sum_{B\,particles} P$$

כאשר הסכימה היא על כל אלומת החלקיקים הנכנסים, B . האלומה היא רצף של חבילות גלים, עם צפיפות ליחידת שטח של n_B , ולכן,

$$\mathrm{d}N = \int \mathrm{d}^2 b \, n_B P\left(\mathbf{b}\right)$$

חתך הפעולה, הוא מספר האירועים ליחידת שטח, או

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n_B}$$

מניחים שצפיפות האלומה הפוגעת, n_B , היא אחידה, ואינה תלויה ב־$\mathbf{b}$. לכן, ניתן להוציא את הצפיפות המאינטגרל ולחלק, ולקבל ש־

$$\mathrm{d}\sigma = \int a^2 b \, P\left(\mathbf{b}\right)$$

לכן, הביטוי עבור חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\prod_{f=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{\left(2\pi\right)^3} \frac{1}{2E_p}\right) \int \mathrm{d}^2 b \left(\prod_{i=A,B} \int \frac{\mathrm{d}^3 k_i}{\left(2\pi\right)^3} \frac{\phi_i\left(\mathbf{k}_i\right)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{\mathrm{d}^3 k'}{\left(2\pi\right)^3} \frac{\phi_i^\star\left(\mathbf{k}_i'\right)}{\sqrt{2E_i'}}\right) \times$$
$$\times \, e^{i\mathbf{b}\left(\mathbf{k}_B' - \mathbf{k}_B\right)} \left\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\right|_{out} \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle \left\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\right|_{out} \mathbf{k}_A' \mathbf{k}_B'\rangle^\star$$

הביטוי האחרון הוא הביטוי של מטריצת הפיזור, S , $\left\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\right|_{out} \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle = \left\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n \right| S \left|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\right\rangle$. מטריצת הפיזור S היא מהצורה, $S = 1 + iT$. החלק החופשי, "1" , לא מעניין אותנו – לכן נתאלם מהתרומה של ה־1. כאן, ניתן לצמצם את הביטוי בצורה משמעותית, מאחר ו־S מכיל מספר רב של פונקציות δ – שמונה בסך הכל. בנוסף, יש פונקציית δ נוספת, דו מימדית, מאינטגרל על אקספוננט. בסך הכל:

-
$$e^{i\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{k}_B' - \mathbf{k}_B\right)} \implies \delta^{(2)}\left(\mathbf{k}_B^\perp - \mathbf{k}_B'^\perp\right)$$

  כאשר $\mathbf{k}^\perp$ הם הרכיבים של התנע, הנציבים לכיון $\hat{z}$

- ממטריצת הפיזור,

$$\delta^{(4)}\left(\sum k_i' - \sum p_f\right) \delta^{(4)}\left(\sum k_i - \sum p_f\right)$$

נדלג על צעד נוסף [12] , ונבצע אינטגרלים על ששת פונקציות הדלתא הראשונות, לכן,

$$\int \mathrm{d}^3 k_A' \int \mathrm{d}^3 k_B' \implies \frac{1}{\left|v_A' - v_B'\right|}$$

כאשר v_A, v_B הם המהירות של החלקיקים בכיוון ההתנגשות: $v_A' = \frac{k_A'^z}{E_A'}$ ו־$v_B' = \frac{k_B'^z}{E_B'}$. מפונקציות ה־$\delta$, נקבל לבסוף שהמשתנים המתוייגים, k^z, E, V , עבור A ו־B, שווים למשתנים הלא־מתויגים.

[12] מבוצע בפירוט ברשימות של אורן, באתר

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\cdot\int\Big[\frac{\mathrm{d}^3k_A\mathrm{d}^3k_B}{(2\pi)^6}\frac{|\phi_A(k_A)|^2|\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2}{2E_A2E_B|V_A-V_B|}\times$$
$$\times|m(k_Ak_B\to\{p_f\})|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k_A+k_B-\sum p_f\right)\Big]$$

עתה, נסתכל על הגבול שבו חבילות הגלים מרוכזות סביב תנעים מסויימים, $\mathbf{p}_A,\mathbf{p}_B$, כלומר, נסתכל על הגבול שבו חבילות הגלים מרוכזות. לכן, בכל פונקציה שהיא פונקציה חלקה של התנעים, נוכל לחשב בתנע הקבוע, $\mathbf{p}_A,\mathbf{p}_B$, ולהוציא מהאינטגרל. לכן,

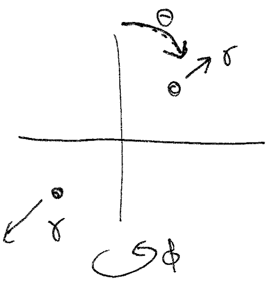
$$\boxed{\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{(2E_A)(2E_B)|B_A-V_B|}\left(\prod_p\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\right)|M(p_Ap_B\to\{p_f\})|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_A+p_B-\sum p_f\right)}$$

כאשר $E_A=\sqrt{|\mathbf{p}_A|^2+m_A^2}$, $V_A=\frac{p_A^z}{E_A}$ וכנ"ל עבור B. בחתך הפעולה הכולל, עבור n חלקיקים זהים, נחלק ב־$n!$.

חתך הפעולה הכולל הוא

$$\sigma=\int\mathrm{d}\sigma$$

4.5.1 פיזור[13] $2\to 2$



האירוע:

נסתכל על איזושהי גזרת קשת. אם נחשב,

$$\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)$$

אז תהיה לנו שגיאה, מאחר ונקבל את אותו אירוע פעמיים. אותה תמונה תתקבל אם נקח את $\theta\to\pi-\theta$ ואת $\phi\to\phi+2\pi$, תחת הטרנספורמציה הזו, התמונה תשאר בעינה. לכן, אם יש לנו שני חלקיקים זהים, נצטרך לחלק בשניים,

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)$$

כאשר הפיזור הוא של שני חלקיקים שונים, אין צורך לחלק במספר החלקיקים (עצרת..), מאחר והחלפה ביו החלקיקים משנה את האירוע.

[13] 29/11/2009

הפקטור הקינמטי מכונה n-body final sptate phase space מוגדר על ידי

$$\mathrm{d}\Pi_n\left(\varphi\right)=\prod_1^n\left(\frac{\mathrm{d}^3p_f}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\left(2\pi\right)^4\delta^{(4)}\left(p-\sum p_f\right)$$

לכן, נוכל לכתוב את הביטוי

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\Pi_n\left(p\right)\frac{1}{2E_A2E_B\left|V_A-V_B\right|}\left|M\right|^2}$$

עבור התנגשות בין שני חלקיקים A,B עם שני תוצרים $1,2$, נעבור למצב ההתחלתה במערכת מרכז המסה. התנע הכולל הוא אפס והאנרגיה הכוללת היא

$$E_{cm}=E_A+E_B=E_1+E_2$$

כמו כן, במערכת מרכז המסה, $p_A=-p_B$ ו־ $p_2=-p_1$.
נבצע אינטגרל על הפקטור הקינמטי. נשתמש בשלוש פונקציות דלתא של שלוש רכיבים מרחביים, ונקבל,

$$\int\mathrm{d}\Pi_2=\int\frac{\mathrm{d}p_1p_1^2\mathrm{d}\Omega}{\left(2\pi\right)^3 2E_12E_2}2\pi\delta\left(E_{cm}-E_1-E_2\right)$$

נבצע את האינטגרל על הגודל, $\mathrm{d}p_1$, כלומר, על הפונקציות p_1^2 , E_1 וה־δ תלויה ב־E_1.

$$=\int\mathrm{d}\Omega\frac{p_1^2}{16\pi^2E_1E_2}\left(\frac{\bar{p}_1}{E_1}+\frac{\bar{p}_1}{E_2}\right)^{-1}$$

כאשר המעבר היה באמצעות ה־δ , $\delta\left(E_{cm}-\sqrt{p_1^2+m^2}-\sqrt{p_2^2+m^2}\right)\ \to\ \frac{\delta(p_1\ldots)}{|f'(p_1=\ldots)|}$, כך שהאיבר בסוגריים הוא למעשה החילוץ מהדלתא. כאשר $E_{cm}=\sqrt{\bar{p}_1^2+m^2}+\sqrt{(p_A+p_B-\bar{p}_1^2+m^2)}$, כאשר $\bar{p}_1^2=\frac{E_{cm}^2}{4}-m^2$, תחת ההנחה שהמסות שוות.

$$\begin{aligned}&=\int\mathrm{d}\Omega\frac{1}{16\pi^2}\frac{\left|\mathbf{p}_1\right|}{E_{cm}}\\&=\int\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\frac{2\left|\mathbf{p}_1\right|}{16\pi E_{cm}}\end{aligned}$$

כאשר השוויון הנ"ל, $\int\mathrm{d}\phi$ הוא נכון תמיד עבור אינטראקציות סימטריות סביב ציר ההתנגשות. אלו יהיו רוב האינטראקציות שנסתכל עליהן, אבל באופן כללי, אפשר לחשב בשלב זה רק את

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{cm}^{2\to2}=\frac{1}{2E_A2E_B\left|B_A-V_B\right|}\frac{\left|\mathbf{p}_1\right|}{\left(2\pi\right)^2 4E_{cm}}\left|M\right|^2$$

כאשר כל המסות זהות (כמו שקורה בתורת ϕ^4, שבה יש לנו רק חלקיק אחד)

$$\begin{aligned}E_A&=E_B=\frac{1}{2}E_{cm}=E_1=E_2\\v_a&=v_B=\frac{\left|\mathbf{p}_A\right|}{E_A}=\frac{2\left|\mathbf{p}_1\right|}{E_{cm}}\end{aligned}$$

אם נציב את הגדלים הללו, נקבל,

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{cm}=\frac{\left|M\right|^2}{64\pi^2E_{cm}^2}}$$

הערה 4.1 נדור שוב באינטגרל מהצורה $\delta\left(p_A+p_B-p_1-p_2\right)$. כאשר מבצעים $\int \mathrm{d}^3 p_2$, נחליף בכל מקום $p_2=p_A+p_B-p_1$. האינטגרל על p_1 יהיה

$$\int \mathrm{d}^3 p_1=\int\left|\mathbf{p}_1\right|^2 \mathrm{d}\left|\mathbf{p}_1\right| \mathrm{d} \Omega$$

כאשר יש לנו $\delta\left(E_a+E_B-E_1-E_2\right)$, אזי $E_1=\sqrt{\left|\mathbf{p}_1\right|^2+m_1^2}$, ו־$E_2=\sqrt{\left|\mathbf{p}_A+\mathbf{p}_B-\mathbf{p}_1\right|^2+m_2^2}$, לכן, אינטגרל על ה־$\delta$ הזה מאלץ את E_1 לקיים: $E_A+E_B-E_1-E_2=0$. $\left|\mathbf{p}_1\right|$ הוא הפתרון של המשוואה הזו.

4.6 דינמיקה

נזכר בהגדרה של מטריצת הפיזור:

$$\left\langle\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n|S| \mathbf{p}_a \mathbf{p}_B\right\rangle=\lim_{T \rightarrow \infty}\left\langle\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\left|e^{-i H(2 T)}\right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle$$

המצבים הללו, המצבים הנכנסים והמצבים היוצאים הם מצבי־תנע בתורה המלאה. ראשית, ננסה לקשר את המצבים הללו למצבים המתאימים בתורה החופשית, בדומה לתהליך שביצענו עבור מצב הריק, $\langle\Omega|$. כתבנו,

$$|\Omega\rangle=\lim_{T \rightarrow \infty(1-i \varepsilon)}\left(e^{-i E_0 T}\langle\Omega | 0\rangle\right)^{-1} e^{-i H T}|0\rangle$$

אנחנו יכולים באופן כללי לרשום,

$$\left|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i \varepsilon)} e^{-i H T}\left|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle_0$$

כאשר $\left|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle_0$ הוא המצב בתורה החופשית, אבל נצטרך למצוא את מקדם הפופורציה המדוייק. חישוב המקדם הזה יבוצע בקורס תורת השדות 1. התוצאה, שלא תוכך כאן, היא :

$$\left\langle\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n|i T| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle=\lim_{T \rightarrow \infty(1-i \varepsilon)}\left\langle\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\left|{ }_0 T\left(e^{-i \int H_I \mathrm{d} t}\right)\right| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle_0$$

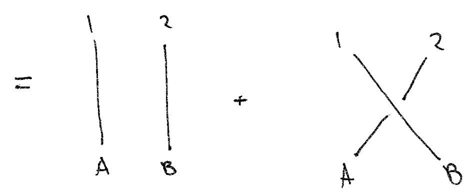
כאשר האמפליטודות מחוברות ומגודעות. ו־התנעים, $p_1, \ldots, p_n, p_A, p_B$ הם בתורה החופשית.

4.6.1 אמפליטודה לפיזור $2 \rightarrow 2$

יש לנו שני חלקיקים נכנסים, A, B ושני חלקיקים יוצאים, $1,2$. נחשב את הגודל כפיתוח הפרעתי בסדר של האקספוננט.

$$\begin{aligned}
\left\langle\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\right|{ }_0\left.\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\right\rangle_0 & =\sqrt{2 E_1 2 E_2 2 E_A 2 E_B}\left\langle 0\left|a_1 a_2 a_A^{\dagger} a_B^{\dagger}\right| 0\right\rangle \\
& =2 E_A 2 E_B(2 \pi)^6\left[\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_1\right) \delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_B-\mathbf{p}_2\right)+\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_A-\mathbf{p}_2\right) \delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_B-\mathbf{p}_1\right)\right]
\end{aligned}$$

יש לנו שתי דיאגרמות שמתארות את זה,



וזוהי התוצאה של התורה החופשית, לכן היא לא נכללת באמפליטודת הפיזור, (iT) .

דיאגרמות אלו אינן מחוברות. התנאי "מחוברות" אומר שכל החלקיקים מבצעים אינטאקציות זו עם זו, כלומר, הם מחוברים בדיאגרמות.

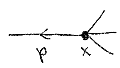
סדר ראשון

$$\left\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \middle| {}_0T\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\phi^4\left(x\right)\right) \middle| \mathbf{p}_A\mathbf{p}_B \right\rangle_0$$

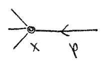
על פי משפט וויק,

$$= \left\langle \cdots \middle| N\left(-\frac{i\lambda}{4!}\int \phi^4 + \left\{\xi\right\}\right) \middle| \cdots \right\rangle$$

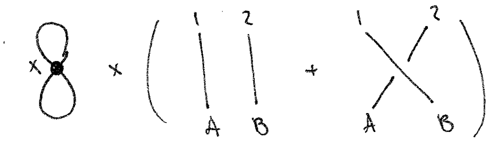
במצב היסוד, רק הצימצומים תרמו, משום שהמכפלה הנורמלית פעלה בצורה טריוויאלית על מצב היסוד. כאן, יש לנו מצבי תנע לא טריוויאלים, ולכן גם האיברים לא תמיד לא־מצטמצמים,

$$\phi\left(x\right)\left|\mathbf{p}\right\rangle_0 = e^{-ip\cdot x} =$$ 

כלומר, ניתן לצמצם שדה עם חלקיק.

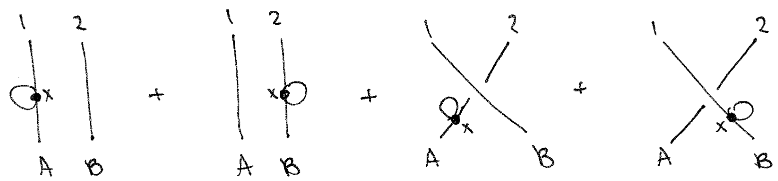
$$\left\langle \mathbf{p}\right|\phi\left(x\right) = e^{+ip\cdot x} =$$ 

לכן, מסדר ראשון יש שלושה סוגים של איברים:



צמצום של כל השדות, בזוגות , $\phi\phi\phi\phi$, אלו הם דיאגרמות ריק ודיאגרמות מסדר אפס, גם איבר זה תורם לחלק הטריוויאלי של S.

2. צמצום זו של שדות עם עצמן, וצמצום בין שדה אחד לחלקיק נכנס ושדה שני לחלקיק יוצא. $\phi\phi\phi\phi$, שדה אחד מצטמצם עם חלקיק נכנס, $\left|\mathbf{p}\right\rangle_0$, והשני עם חלקיק יוצא, ${}_0\left\langle\mathbf{p}\right|$.

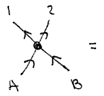


יש ארבע דרכים לעשות את זה. גם דיאגרמה זו מכילה חלקים לא מחוברים, והיא לא תורמת לנו לאמפליטודת הפיזור. יש לנו

$$\delta^{(4)}\left(p_A-p_1\right)\underbrace{\int \mathrm{d}^4x\, e^{i(p_B-p_2+p-p)x}}_{\delta^{(4)}(p_B-p_2)}$$

3. אפשרות נוספת היא צמצום של שני שדות עם שני חלקיקים נכנסים ושני שדות אם שני חלקיקים יוצאים, החלקיקים הנותרים נותנים פונקציות דלתא, .

יש $4!$ דרכים לכתוב צמצומים כאלו, לכן



$$= 4!\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)\int \mathrm{d}^4x e^{-i(p_A+p_B-p_1-p_2)x}$$
$$= -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(p_A+p_B-p_1-p_2\right)$$

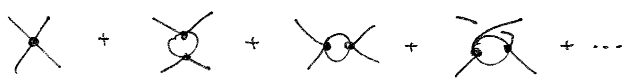
זוהי פונקציית δ של תנע.

לכן,

$$\boxed{M\left(p_Ap_B \to p_1p_2\right) = -\lambda}$$

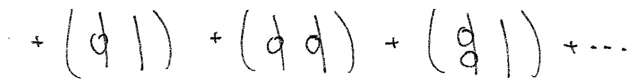
כאן, יש אינטראקציה בין החלקיקים. זוהי דיאגרמה מחוברת.

סדרים גבוהים יותר בסדרים גבוהים יותר, ניתן למצוא מספר סוגים של דיאגרמות.

1. 

2. דיאגרמות שמכילות חלקי ריק מופרדים.

3. דיאגרמות בהם החלקיקים אינם מחוברים.



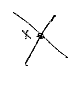
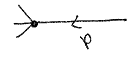
4. דיאגרמות מחוברות בהם ה"תיקונים" מופיעים על הרגליים החיצוניות. הן מופיעות מסדר שני ומעלה.

דיאגרמות מסוג זה, מכונות "דיאגרמות עם תיקוני רגליים חיצוניות". דיאגרמה מגודעת היא דיאגרמה שלא ניתן לשנות אותה על ידי חתך באחת מהרגלים החיצוניות, כלומר, דיאגרמות ללא תיקוני רגלים חיצוניות. הדיאגרמות הללו מתארות את הקשר בין מצב של חלקיק אחד בתורה המלאה למצב של חלקיק אחד בתורה החופשית. חלקיקים אלו תורמים פקטור רנורמליזציה כלשהו, התלוי בסדר.

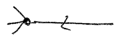
בקורס הזה, לא נעשה חישובים בסדר שכולל תיקוני רגליים חיצוניות, ולכן לא כל כך נתייחס לסוג הרביעי. לכן, נותרנו רק אם דיאגרמות מהסוג הראשון: דיאגרמות מחוברות לגמרי, ומגודעות.

4.6.2 חוקי פיינמן לאמפליטודות

במרחב הקואורדינטות

- פרופגטור – $\overset{x \qquad y}{\overline{\qquad\quad}} = D_F\left(x-y\right)$
- ורטקס –  $= -i\lambda\int \phi^4 x$
- נקודות חיצוניות:  $= e^{-ipx}$
- חלוקה בפקטור הסימטריה

אבל את החישובים נעשה דווקא במרחב התנע:

- פרופגטור מייוצג כקו עם חץ, $\longrightarrow = \frac{i}{p^2-m^2+o\varepsilon}$
- ורטקס -  $= -i\lambda$
- רגל חיצונית -  $= 1$
- בכל ורטקס: שימור תנע - $\delta^4\left(\sum \mathbf{p}\right)$, כל ורטקס, ונשאר $\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$
- לחלק בפקטור הסימטריה

לדוגמא, . נקבל את התנעים הפנימיים, q,s,r,k אזי,

$$\begin{aligned} p_1+p_2 &= q+k \\ p_3+p_4 &= -(r+k) \\ q &= r \end{aligned}$$

כמו כן, $p_1+p_2=p_3+p_4$.
בסיכומו של עניין, על כל לולאה יש תנע אחד שצריך לעשות עליו אינטגרציה.

5 שדה דיראק[14]

5.1 התורה הקלאסית

נזכר בשדה קליין־גורדון סקאלרי: זהו שדה בהצגה הסקלארית של חבורת לורנץ. טרנסופרמציית לורנץ מבצעת:

$$\phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \phi'(x')$$

שדה סקאלרי, הוא שדה שאינו משתנה תחת הטרנספורמציה: $\phi'(x')=\phi(x)$. **השדה החדש, בקוארדינטות החדשות, זהה לשדה המקורי בקוארדינטות המקוריות.** (פסקין מסמן ב־ $\phi(x)=\phi\left(\Lambda^{-1}x'\right)$).
שדה דיראק הוא ספינור דיראק:

$$\psi_\alpha(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'_\alpha(x') = \left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)$$

כאשר α הוא אינדקס ספינורי, ו־

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$$

כאשר $S^{\mu\nu}=\frac{i}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]$.

משוואת דיראק עבור ספינור ארבע־רכיבי

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi(x)=0}$$

זו משוואה מסדר ראשון שהיא לורנץ־אינוורינטית.

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi(x) &\xrightarrow{\Lambda} \left(i\gamma^\mu\partial'_\mu-m\right)\psi'(x') \\ &= \left(i\gamma^\mu\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu\partial_\nu-m\right)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(x) \end{aligned}$$

[14] 6.12.2009, החסר בפרק שלוש של פסקין

נוסיף $\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$. נעיר ש־ $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ ו־$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, ונקבל

$$= \Lambda_{\frac{1}{2}}\left(-i\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\gamma^{\mu}\Lambda_{\frac{1}{2}}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}\right)-m\right)\psi\left(x\right)$$

לפי מה שחישבנו בתרגיל הבית הראשון, $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$. נציב את הזהות הזו ונקבל

$$= \Lambda_{\frac{1}{2}}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi\left(x\right) = 0$$

כלומר, משוואת דיראק משתנה ל־$\Lambda_{\frac{1}{2}}$ כפול משוואת דיראק המקורית, ולכן היא אכן לורנץ אינווריאנטית.

משוואת דיראק גוררת את משוואת קליין גורדון: נכפול את משוואת דיראק באופרטור $\left(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)$, ונקבל:

$$\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}+m^{2}\right)\psi\left(x\right)=0$$

הביטוי $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \frac{1}{2}\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\} = g^{\mu\nu}$ ולכן קיבלנו את המשוואה:

$$\left(\Box+m^{2}\right)\psi\left(x\right)=0$$

5.1.1 פעולת דיראק

לגראנז'יאן של שדה דיראק חופשי הוא מהצורה

$$\boxed{\mathcal{L}_{dirac} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi}$$

(כאשר $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$)

משוואות אוילר לגרנז', עבור ψ:

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}$$

לכן,

$$\partial_{\mu}\left(\bar{\psi}i\gamma^{\mu}\right) = -m\bar{\psi}$$

לכן, נקבל את המשוואה,

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\bar{\psi}=0$$

אם נעשה וארצאיציה על פי $\bar{\psi}$:

$$\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}$$
$$0 = \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi\left(x\right)$$

כלומר, קיבלנו את אותן משוואות עד כדי שינוי סימן יחסי בין המסה לנגזרת.

כשלמדנו על הצגות ספינוריות של חבורת לורנץ, ראינו שהצגת דיראק הוא הצגה ארבע־מימדית ופריקה של חבורת לורנץ. בהצגת דיראק, כל המטריצות הן בלוק־אלכסוניות. ניתן היה לבטא את ההצגה כספינורי וויל:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_{L}\\ \psi_{R}\end{pmatrix}$$

כאן, משוואת דיראק תהיה מטריצת 2×2 , בהצבת המטריצות γ^{μ}, בהצגה הכיראלית:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi = \begin{pmatrix}-m & i\left(\partial_{0}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\\ i\left(\partial_{0}-\boldsymbol{\sigma}\nabla\right) & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{L}\\ \psi_{R}\end{pmatrix}=0$$

והמשוואות, בצורה מופרשת, הן:

$$i\left(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\psi_L-m\psi_R=0$$
$$i\left(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\psi_R-m\psi_L=0$$

במשוואות, יש ערבוב בין ψ_L,ψ_R. רק במקרה חסר המסה, מקבלים משוואות נפרדות. כלומר, איבר המסה, מערבב בין החלק השמאלי והחלק הימני של הספינור.

נגדיר סימון חדש: ארבע־מטריצות־פאולי־

$$\sigma^\mu=\left(1,\boldsymbol{\sigma}\right)$$
$$\bar{\sigma}^\mu=\left(1,-\boldsymbol{\sigma}\right)$$

עכשיו, ניתן לכתוב:

$$\gamma^\mu=\begin{pmatrix}0 & \sigma^\mu\\ \bar{\sigma}^\mu & 0\end{pmatrix}$$

כך, נוכל לכתוב את משוואת דיראק בבסיס הקיראלי בצורה:

$$\begin{pmatrix}-m & i\sigma\cdot\partial\\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix}=0$$

כאשר $\partial_\mu=\left(\partial_0,\pm\nabla\right)$, הוא הארבע־דיברגנץ ו־$\sigma$ הוא הארבע־מטריצת־פאולי.

5.2 סימטריות רציפות וזרמים נשמרים

נראה איזה זרמים אנחנו יכולים לבנות מהספינורים, ואז נבחן אם הם נשמרים או לא:

- וקטור אחד שניתן לבנות הוא $j^\mu\left(x\right)=\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^\mu\psi\left(x\right)$. זרם זה נקרא זרם וקטורי.
- זרם נוסף שניתן לבנות הוא עם $j^{\mu5}\left(x\right)=\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^\mu\gamma^5\psi\left(x\right)$. הוא נקרא זרם אקסיילי (והוא פסאודו־וקטור)

5.2.1 הזרם הוקטורי

$$\partial_\mu j^\mu=\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

נשתמש במשוואת דיראק:

$$=\left(im\bar{\psi}\right)\psi+\bar{\psi}\left(-im\psi\right)=0$$

וישנה סימטריה רציפה שמתאימה לזרם הזה: מכפלה בפאזה:

$$\psi\left(x\right)\to e^{i\alpha}\psi\left(x\right)$$

זו אכן סימטריה של הלגרנז'יאן, מאחר ו־$\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$, והטרנספורמציה של ψ מבטלת בדיוק את הטרנספורמציה של $\psi^\dagger$.

5.2.2 הזרם האקסיילי

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^{\mu5}&=\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi\\&=im\bar{\psi}\gamma^5\psi-\bar{\psi}\left(-im\psi\right)\\&=2im\bar{\psi}\gamma^5\psi\end{aligned}$$

כלומר, באופן כללי, הזרם האקסיאלי לא נשמר. הזרם האקסיאלי נשמר אם ורק אם $m=0$. במקרה זה,

$$\mathcal{L}_{dirac}=i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$$

סימטריה זו היא

$$\psi\left(x\right)\to e^{i\alpha\gamma^{5}}\psi\left(x\right)$$

כאשר, בהצגה הקיראלית, $\gamma^{5}=\begin{pmatrix}-I_{2\times2} & 0\\ 0 & I_{2\times2}\end{pmatrix}$. אם $m\neq0$, זו לא היתה סימטריה,

$$\bar{\psi}\psi\to\psi^{\dagger}e^{-i\alpha\gamma^{5}}\gamma^{0}e^{i\alpha\gamma^{5}}\psi=-\psi^{\dagger}\gamma^{0}\psi=-\bar{\psi}\psi$$

לכן, איבר המסה משנה סימן תחת הטרנספורמציה הזו. האיבר הקינטי:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi & \to\psi^{\dagger}e^{-i\alpha\gamma^{5}}\gamma^{0}\gamma^{\mu}e^{i\alpha\gamma^{5}}\psi\\ & =+\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}\psi\\ & =\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\end{aligned}$$

הסימטריה הוקטורית פועלת על הריכיבים: $\psi_{L}\to e^{i\alpha}\psi_{L}$ ו־$\psi_{R}\to e^{i\alpha}\psi_{R}$ ואילו הסימטריה האקסיאלית, $\psi_{L}\to e^{-i\alpha\psi_{L}}$ ו־$\psi_{R}\to e^{i\alpha}\psi_{R}$. כלומר, איבר המסה שובר את הסימטריה כי הוא מערבב את המשוואות של ψ_{L} ו־ψ_{R}.

5.3 פתרונות של משוואת דיראק

ראינו שפתרון של משוואת דיראק הוא פתרון של משוואת קליין גורדון, לכן, נוכל לכתוב פתרון של משוואת דיראק בצורה:

$$\psi_{\alpha}\left(x\right)=u_{\alpha}\left(p\right)e^{-ip\cdot x}+v_{\alpha}\left(p\right)e^{ip\cdot x}$$

נבחר $p_{0}>0$, ולכן המחובר הראשון הם פתרונות בתדר חיובי מהמחובר השני הם פתרונות בתדר שלילי.
אנחנו רוצים שהשדה יהיה גם פתרון של משוואת דיראק, לכן, נציב את הפתרונות הללו במשוואת דיראק:

$$\begin{aligned}\left(\gamma^{\mu}p_{\mu}-m\right)u\left(p\right)=0\\ \left(\gamma^{\mu}p_{\mu}+m\right)v\left(p\right)=0\end{aligned}$$

נרצה למצוא את u,v שמקיימים את המשוואות הללו.
ראשית, נחפש פתרון במערכת המנוחה: במערכת המנוחה, עבור חלקיק מסיבי, $p=\left(m,\mathbf{0}\right)$ ולכן,

$$\begin{aligned}m\left(\gamma^{0}-1\right)u\left(p\right)=0\\ m\begin{pmatrix}-I & I\\ I & -I\end{pmatrix}u\left(p\right)=0\end{aligned}$$

כלומר,

$$u\left(p\right)\propto\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}$$

כאשר ξ הוא ספינור דו־רכיבי כלשהו, ולכן u הוא פתרון עם ספינור ארבע־רכיבי ששני הרכיבים העליונים שווים לשני הרכיבים התחתונים ו־

$$v\left(p\right)\propto\begin{pmatrix}\eta\\ -\eta\end{pmatrix}$$

כאשר η ספינור דו־רכיבי כלשהו.

נשים לב שתחת סיבובים:

$$J^k \cdot \xi = \frac{1}{2}\sigma^k \xi$$

כי, $S^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & \\ & \sigma_k\end{pmatrix}$, כלומר, אלו אותם ספינורים־דו־רכיביים שראינו במכניקת קוונטים לא יחסותית.
משוואת דיראק הקטינה את מספר דרגות החופש של כל מספינור מ־4 ל־2.
נקבע נורמליזציה במערכת המנוחה:

$$u(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix}, \quad v(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\eta \\ -\eta\end{pmatrix}$$

כאשר m היא המסה ממשוואת דיראק, וכל אחד מהדו־ספינורים מנורמל ל־1: $\eta^\dagger\eta = \xi^\dagger\xi = 1$.
נבחר בסיס נוח עבור הדו־ספינורים:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$
$$\xi^2 = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

כלומר, בחרנו ללכסן את J^3, לכן, אלו הם המצבים העצמיים של J^3 עם $\pm\frac{1}{2}$.

במערכת נעה נרצה למצוא את הפתרונות עבור ארבע תנע כללי, p. נעשה בוסט ממערכת המנוחה למערכת אחרת, ונראה כיצד הפתרון משתנה. נבצע למשל, בוסט בכיוון x^3, באמצעות ה־rapidity, η .

$$p = (m, \mathbf{0}) \to p' = \left(E, p^3\hat{x}^3\right)$$

אזי,

$$\begin{pmatrix}E \\ p^3\end{pmatrix} = e^{\eta J^{03}}\begin{pmatrix}m \\ 0\end{pmatrix} = e^{\eta\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}m \\ 0\end{pmatrix}$$

(אנחנו לוקחים וקטורים דו־מימדיים כי הריכבים האחרים הם טריוויאלים). נפתח את המטריצות לטור טיילור

$$= \left[1 + \eta\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\eta^2\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \ldots\right]\begin{pmatrix}m \\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cosh\eta + \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\sinh\eta\right)\begin{pmatrix}m \\ 0\end{pmatrix}$$

מאחר ומחצית מהאיברים בטור נותנים sinh והאחרים, cosh.

$$u \to u' = e^{-\frac{1}{2}\eta S^{03}}u = e^{-\frac{1}{2}\eta\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}}u$$

ובפיתוח דומה לחלקים זוגיים ואי־זוגיים, נקבל

$$= \left[\left(\cosh\frac{\eta}{2}\right)\begin{pmatrix}I_{2\times2} & 0 \\ 0 & I_{2\times2}\end{pmatrix} - \left(\sinh\frac{\eta}{2}\right)\begin{pmatrix}\sigma^3 & \\ & -\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi \\ \xi\end{pmatrix}$$

נשתמש ביחס בין האנרגיה, התנע וה־rapidty, כדי להציב בטרנספורמציה של u . אזי

$$\cosh\frac{\eta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left(\sqrt{E+p^3} + \sqrt{E-p^3}\right)$$
$$\cosh\frac{\eta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left(\sqrt{E+p^3} - \sqrt{E-p^3}\right)$$

נציב אותם בביטוי עבור u, ונקבל

$$u' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} & \\ & \sqrt{E+p^3} \end{pmatrix} \xi \\ \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} & \\ & \sqrt{E-p^3} \end{pmatrix} \xi \end{pmatrix}$$

אנחנו לא צריכים לבדוק שזהו פתרון של משוואת דיראק, כי משוואת דיראק היא לורנץ אינווריינטית, והגענו לפתרון החדש באמצעות בוסט ממנה.

הביטוי הכללי הוא (לא נוכיח..):

$$\boxed{u^r(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}}$$

כאשר $\bar{\sigma}, \sigma, p$ הם ארבע־וקטורים. בבסיס הערכים העצמיים של אופרטור, שורש של מטריצה הוא השורשים החיוביים של כל הערכים העצמיים.

נחזור לדוגמא: ממערכת המנוחה, עשינו בוסט בכיוון x^3, לכן, $p = (E, 0, 0, p)$. לכן,

$$\sqrt{p\cdot\sigma} = \sqrt{E - p^3\sigma^3} = \sqrt{\begin{pmatrix} E-p^3 & \\ & E+p^3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} & \\ & \sqrt{E+p^3} \end{pmatrix}$$
$$\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = \sqrt{E + p^3\sigma^3} = \sqrt{\begin{pmatrix} E+p^3 & \\ & E-p^3 \end{pmatrix}}$$

נבדוק שהפתרון ל־u באמת מקיים את משוואת דיראק:

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(p) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} p_\mu - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] u(p) \\
&= \begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-m\sqrt{p\sigma}\cdot\sigma + p\sigma\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\right)\xi \\ \left(p\bar{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} - m\sqrt{p\cdot\sigma}\right)\xi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נראה שכל אחד מהרכיבים מתאפס: נכפול את הרכיב הראשו ב־ $\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}$

$$\left(-m\sqrt{p\cdot\sigma p\cdot\bar{\sigma}} + p\sigma p\bar{\sigma}\right)\xi = 0?$$

כאשר

$$\begin{aligned}
p\sigma p\bar{\sigma} = p\sigma p\bar{\sigma} = p^\mu\sigma_\mu p^\nu\sigma_\nu &= \left(p^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\right)\left(p^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&= \left(p^0\right)^2 - (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \left(p^0\right)^2 - p^i p^j \sigma^i \sigma^j \\
&= \left(p^0\right)^2 - (\mathbf{p})^2 = m^2
\end{aligned}$$

ובהצבה, הפתרון מקיים את משוואת דיראק.

בנוסף, יש לנו את הפתרונות עבור המשוואה $(\gamma^\mu p_\mu + m)\, v(p) = 0$, והם:

$$\boxed{v^r(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho\cdot\sigma}\eta^r \\ -\sqrt{\rho\cdot\bar{\sigma}}\eta^r \end{pmatrix}}$$

כאשר $\eta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו־ $\eta^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, והפתרון הללי הוא צירוף לינארי של ארבעת הפתרונות הללו.

יחסי אורתונורמליות:

$$u^s(p)^\dagger u^r(p) = \delta_{rs}(p\cdot\sigma + p\cdot\bar\sigma) = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{rs}$$

גודל זה אינו לורנץ אינווריינטי: כדי ליצור גודל לורנץ־אינווירנטי מספינורים צריך להסתכל על

$$\bar u^s(p)u^r(p) = u^\dagger\gamma^0 u = \begin{pmatrix}\sqrt{\rho\cdot\sigma}\xi^\dagger & \sqrt{\rho\bar\sigma}\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\rho\cdot\sigma}\xi\\ \sqrt{\rho\cdot\bar\sigma}\xi\end{pmatrix} = 2\sqrt{\rho\cdot\sigma\,\rho\cdot\bar\sigma}\delta^{rs} = 2m\delta^{rs}$$

ו = הוא הנורמליזציה הלורנץ־אינווריינטית של הספינור u. חישוב דומה, יתן לנו ש־

$$\bar v^s(p)v^r(p) = -2m\delta^{rs}$$
$$v^s(p)^\dagger v^r(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}$$

בנוסף, הפתרונות u אורתוגונלים ל־v :

$$\bar u^r(p)v^s(p) = \bar v^r(p)u^s(p) = 0$$

זה לא נכון ש־ $(u^r)^\dagger(p)v^s(p) \neq 0$. המכפלה הפנימית מחושבת באמצעות הספיונר הצמוד, ולא באמצעות הצמוד ההרמטי. אם משנים את הסימן של הרכיב המרחבי של התנע, $(u^r)^\dagger(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = 0$.

סט מלא של פתרונות מקיים גם "יחסי שלמות": סכום ספינים.

$$\sum_{s=1}^{2} u^s(p)\bar u^s(p) = \sum\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^2\\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{s\dagger}\sqrt{\rho\cdot\bar\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{\rho\cdot\sigma}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}m & p\cdot\sigma\\ p\cdot\bar\sigma & m\end{pmatrix} = \gamma^\mu p_\mu + m\cdot I_{4\times4}$$

(נשים לב ש־$u^s\bar u^s$ אינו מכפלה פנימית כי אם מטריצה) באופן דומה,

$$\sum_{s=1}^{2} v^s(p)\bar v^s(p) = \gamma^\mu p_\mu - m$$

זהו אינו יחס שלמות אמיתי בכלל שהנירמול שלנו הוא ל־$2m$ ולא ל־1.
נהוג לסמן,

$$\boxed{\gamma^\mu p_\mu = \not p}$$

5.3.1 פרמיונים חסרי מסה, $m=0$

נסתכל על הגבול של בוסט אין־סופי. למשל, על בוסט בכיוון x^3,

$$p \approx \left(E, E\hat x^3\right)$$

כי $p\sim E$, מאחר ו־$E \gg m$.

$$u^1(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E-p^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \sqrt{E+p^3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \xrightarrow[E\to p^3]{v\to c} \sqrt{3E}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

בצורה דומה,

$$u^2(p) \to \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$v^1(p) \to \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$v^2(p) \to \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

זה מתחיל להראות כמו ספינורי־וויל הימניים והשמאלים. לפתרונות עצמם יש רכיבים רק בשני הרכיבים העליונים או התחתונים.

בהצגה הכיראלית,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix}-I_{2\times 2} & \\ & I_{2\times 2}\end{pmatrix}$$

לכן, ניתן לראות ש־ u^1, v^1 הם ספינורי וויל ימניים ($\gamma^5 u_1 = u_1$ ו־ $\gamma^5 v_1 \to v_1$) ו־ u^2, v^2 הם ספינורי וויל שמאליים ($\gamma^5 v_2 = -v_2$) .

נגדיר את **אופרטור הבורגיות** (helicity) :

$$h = \hat{p}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hat{p}_i\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\0 & \sigma^i\end{pmatrix}$$

כלומר, הטלה של הספין על כיוון התנועה של החלקיק ($\hat{p} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$) . אם $\langle h\rangle > 0$, הספין הוא על פי "חוק יד ימין" – מצב ימני. $\langle h\rangle < 0$ הוא חלקיק שמאלי, הפוך לחוק יד ימין.

אזי,

$$\begin{aligned} hu^1 &= +\frac{1}{2}u^1\\ hv^1 &= +\frac{1}{2}v^1\\ hu^2 &= -\frac{1}{2}u^2\\ hv^2 &= -\frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

כלומר, כאשר המסה מתאפסת, $m = 0$,

$$\text{helicity} = \frac{1}{2}\times\text{chirality}$$

h הוא לורנץ אינווריינטי רק עבור $m = 0$. אם $m \neq 0$, ניתן לשנות את הסימן של h באמצעות טרנספורמציית לורנץ, על ידי בוסט:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &\to -\mathbf{p}\\ \mathbf{S} &\to \mathbf{S}\end{aligned}$$

במקרה חסר המסה, נצטרך להגדיר את הנירמול ש להספינורים בצורה שאינה לורנץ־אינווריינטית:

$$u^{r^\dagger}(p)\, u^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}$$

(מאחר והצורה הלורנץ־אינווריינטית נותנת לנו m)

5.4 תורת דיראק הקוונטית

נתחיל מלגרנז'יאן דיראק:

$$\mathcal{L}_{Dirac}=\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=\bar{\psi}\left(i\not{\gamma}-m\right)\psi$$

אז התנע הצמוד לשדה ψ הוא:

$$\Pi_{\psi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{0}\psi\right)}=i\psi^{\dagger}\left(x\right)$$

וההמילטוניאן הוא

$$\begin{aligned}H&=\int\mathrm{d}^{3}x\,\bar{\psi}\left(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m\right)\psi\\&=\int\mathrm{d}^{3}x\,\psi^{\dagger}h_{D}\psi\end{aligned}$$

כאשר

$$h_{D}=-i\gamma^{0}\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m\gamma^{0}$$

לפני שנעשה את הקוונטיזציה, נפתח את השדה בפונקציות עמיות של האופרטור, h_D: כבר ראינו שהספינורים הם פתרון של משוואת דיראק:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)u^{s}\left(p\right)e^{-ipx}=0$$

ולכן,

$$h_{p}u^{s}\left(p\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=E_{\mathbf{p}}u^{s}\left(p\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

כלומר, $u^{s}\left(p\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ הוא מצב עצמי של h_p עם ערך עצמי $E_{\mathbf{p}}$. ובצורה דומה,

$$h_{D}\left(v^{s}\left(p\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)=-E_{\mathbf{p}}\left(v^{s}\left(p\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

ולכן, מצב כללי $\psi\left(x\right)$ הוא סכום של הפתרונות הללו:

$$\psi\left(\mathbf{x}\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\mathbf{E}_{\mathbf{p}}}}\sum_{s=1}^{2}\left(a_{\mathbf{p}}^{s}u^{s}\left(\mathbf{p}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+b_{\mathbf{p}}^{s}v^{s}\left(\mathbf{p}\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

ובצורה דומה,

$$\bar{\psi}\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{d}^{3}\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^{3}}\frac{1}{\sqrt{2\mathbf{E}_{\mathbf{p}}}}\sum_{s=1}^{2}\left(\left(a_{\mathbf{p}}^{s}\right)^{\dagger}\bar{u}^{s}\left(\mathbf{p}\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+\left(b_{\mathbf{p}}^{s}\right)^{\dagger}\bar{v}^{s}\left(\mathbf{p}\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

אנחנו מצפים לשני סוגים של חלקיקים, כאשר a,b אופרטורים היוצרים שלהם ו-$a^{\dagger},b^{\dagger}$ אופרטורים הורסים.

5.4.1 נסיון לפתרון

הניסיון הנאיבי: ננסה לדרוש יחסי חילוף קאנונים:

$$\boxed{\left[\psi_{\alpha}\left(\mathbf{x}\right),\psi_{\beta}^{\dagger}\left(\mathbf{y}\right)\right]=\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\delta_{\alpha\beta}}\qquad(\dagger)$$

אם נדרוש את הפיתוחים הללו ל-$\psi,\bar{\psi}$, אז זה מתקיים כל עוד דורשים את יחסי החילוף:

$$\begin{aligned}\left[a_{\mathbf{p}}^{r},\left(a_{\mathbf{q}}^{s}\right)^{\dagger}\right]&=\left(2\pi\right)^{3}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)\delta^{rs}\\\left[b_{\mathbf{p}}^{r},\left(b_{\mathbf{q}}^{s}\right)^{\dagger}\right]&=\left(2\pi\right)^{3}\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)\delta^{rs}\end{aligned}$$

נראה שיחסי החילוף הללו בין $a, a^\dagger$ ו־$b, b^\dagger$, נותנים לנו את יחסי החילוף ב־($\dagger$):
נציב את הפיתוחים ביחס החילוף, ונקבל:

$$\left[\psi\left(\mathbf{x}\right),\psi^\dagger\left(\mathbf{y}\right)\right]=\int\frac{\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3q}{\left(2\pi\right)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}2E_\mathbf{q}}}\cdot\Big(\sum_{r,s}\left[a_\mathbf{p}^r,\left(a_\mathbf{q}^s\right)^\dagger\right]u_r\left(\mathbf{p}\right)\bar{u}^s\left(\mathbf{q}\right)e^{i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}\right)}$$
$$+\left[b_\mathbf{p}^r,\left(b_\mathbf{q}^s\right)^\dagger\right]v^r\left(\mathbf{p}\right)\bar{v}^s\left(\mathbf{q}\right)e^{-i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}\right)}\Big)\gamma^0$$

נציב את יחסי החילוף, ונקבל:

$$=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E_\mathbf{p}}\sum_{r,s}\left(u^s\left(\mathbf{p}\right)\bar{u}^s\left(\mathbf{p}\right)e^{i\mathbf{p}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)}+v^s\left(\mathbf{p}\right)\bar{v}^s\left(\mathbf{p}\right)e^{-i\mathbf{p}\cdot\left(x-y\right)}\right)\gamma^0$$

ונוכל להמשיך באמצעות יחסי השלמות:

$$\sum_s u^s\left(p\right)\bar{u}^s\left(p\right)=\not{p}+m=\gamma^0E_\mathbf{p}-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}+m$$
$$\sum_s v^s\left(p\right)\bar{v}^s\left(p\right)=\not{p}-m=\gamma^0E_\mathbf{p}-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}-m$$

לכן,

$$\left[\psi_\alpha\left(\mathbf{x}\right),\psi_\beta^\dagger\left(\mathbf{y}\right)\right]=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\cancel{2E_\mathbf{p}}}e^{i\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)}\cdot\cancel{2E_\mathbf{p}}$$
$$=\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-y\right)\delta_{\alpha\beta}$$

כלומר, יחסי החילוף בין אופרטורי היצירה וההריסה, שקולים ליחסי החילוף בין השדות.
אבל יש כאן בעיה, כשמסתכלים על ההמילטוניאן:

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\sum_s E_\mathbf{p}\left(\left(a_\mathbf{p}^s\right)^\dagger a_\mathbf{p}^s-\left(b_\mathbf{p}^s\right)^\dagger b_\mathbf{p}^s\right)$$

כלומר, כל פעם שיוצרים חלקיק מסוג b, מורידים את האנרגיה.. כלומר, לחלקיקים מסוג b, מובילים לאנרגיות שליליות. ננסה לשנות את ההגדרה: $b_\mathbf{p}^s\to b_\mathbf{p}^\dagger$, אבל זה לא עוזר לנו, כי ניתן להחליף בינהם..

5.4.2 פתרון שאינו נסיון

לא נדרוש יחסי חילוף כי אם יחסי אנטי־חילוף קאנונים:

$$\left\{\psi_\alpha\left(\mathbf{x}\right),\psi_\beta^\dagger\left(y\right)\right\}=\delta^{(3)}\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\delta_{\alpha\beta}$$
$$\left\{\psi_\alpha\left(\mathbf{x}\right),\psi_\beta\left(y\right)\right\}=\left\{\psi_\alpha^\dagger\left(\mathbf{x}\right),\psi_\beta^\dagger\left(y\right)\right\}=0$$

מאותו פיתוח, היחסים בין אופרטורי היצירה וההצמדה יהיו יחסי אנטי־חילוף:

$$\left\{a_\mathbf{p}^r,a_\mathbf{q}^{s\dagger}\right\}=\left\{b_\mathbf{p}^r,b_\mathbf{q}^{s\dagger}\right\}=\left(2\pi\right)^3\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{q}\right)\delta^r$$
$$\left\{a,a\right\}=\left\{a,b\right\}=\left\{a,b^\dagger\right\}=0$$

ההמילטוניאן נשאר אותו המילטוניאן:

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\sum_S E_\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}^{s\dagger}a_\mathbf{p}^s-b_\mathbf{r}^{s\dagger}b_\mathbf{p}^s\right)$$

אבל עכשיו, אם נהפוך את ההגדרה, $b_\mathbf{p}^s\to b_\mathbf{p}^{s\dagger}$, בגלל יחסי האנטי־חילוף, נקבל שינוי סימן:

$$H=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\sum_S E_\mathbf{p}\left(a_\mathbf{p}^{s\dagger}a_\mathbf{p}^s+b_\mathbf{r}^{s\dagger}b_\mathbf{p}^s\right)$$

וכן יחסי האנטיחילוף לא ישתנו בעקבות ההגדרה החדשה.
לכן, המצבים הם:

- מצב הריק: $a_{\mathbf{p}}^s|0\rangle = b_{\mathbf{p}}^s|a\rangle = 0$
- מצבים מעוררים: מפעילים את $a^\dagger, b^\dagger$ על מצבי היסוד. אבל מתקיים: $\left(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}\right)^2 = 0$, כי הוא אנטי־מתחלף עם עצמו.. כלומר, יש מספר מוגבל של מצבים מעוררים בעלי אות ותנע ואותו סוג של חלקיק, שניתן לעורר!לכן, יתכן רק חלקיק אחד מכל סוג, בתנע מסויים, $\mathbf{p}$, במצב ספין מסויים, s. למשל, חלקיק a עם תנע $\mathbf{p}$ במצב s, יהיה:

$$|\mathbf{p}, s\rangle_a = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_p^{s\dagger}|0\rangle$$

הפעלה נוספת של אופרטור העלאה – תאפס את המצב. יש לנו ניוון 4 לאנרגיה: שני חלקיקי a (עם ספינים שונים) ושני חלקיקי b (עם ספינים שונים) לאותה אנרגיה.

זהו עקרון האיסור של פאולי: מספר האלקטרונים (פרמיונים..) באותו מצב קוונטי מסויים הוא $\{0,1\}$. עקרון האיסור הוא מקרה פרטי של משפט כללי בתורת השדות הקוונטית היחסותית: משפט הספין־סססטיסטקה

משפט 5.1 (הספין־סטטיסטיקה) ספין שלם $\Longleftrightarrow$ סטטיסטיקת בוז־אינשטיין ($a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}|0\rangle = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$) , פונקציות גל סימטריות) לעומת זאת, ספין שלם+$\frac{1}{2}$ מקיימים סטטיסטקת פרמי־דיראק, ($a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle = -a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$) .

שדה דיראק בתמונת הייזנברג הוא בצורה

$$e^{iHt}e_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^s e^{-iE_{\mathbf{p}}t}$$

ואותו דבר לגבי $\mathbf{b}$, לכן,

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left(a_{\mathbf{p}}^s u^s(p)e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}v^s(p)e^{ipx}\right)$$

הורס חלקיק מסוג a ויוצר חלקיק מסוג b :

$$\bar{\psi}(t,\mathbf{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left(b_{\mathbf{p}}^s\bar{v}^s(p)e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\bar{u}^s(p)e^{ipx}\right)$$

מה ההבדל בין סוג a לסוג b?

5.4.3 אנטי־חלקיקים

מה ההבדל בין חלקיקים מסוג a וחלקיקים מסוג b? ההבדל נובע מהמטען שלהם: בתורת דיראק, ישנו זרם נשמר, הזרם הוקטורי,

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)j^\mu\psi(x)$$

והמטען שלו הוא

$$Q = \int\mathrm{d}^3x\,J^0(x) = \int\mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger(x)\psi(x)$$

נבטא את המטען באמצעות אופרטורים יוצרים והורסים, באמצעות הביטוי ל־ψ :

$$= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\right)$$

נחליף בין המקומות של $b^\dagger$ו־b, באמצעות האנטי־קומוטטור :

$$= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s\right) + Const$$

כלומר, חלקיק מסוג a מוסיף מטען חיובי, $Q=+1$, וחלקיק מסוג b מוסיף מטען $Q=-1$.

כלומר, לחלקיקים הללו יש את אותה האנרגיה, אותה מסה ומטען הפוך. לכן, חלקיק מסוג b הוא אנטי־חלקיק של חלקיק מסוג a.

5.4.4 הספין של החלקיקים

נרצה לדון באופרטור התנע־הזוויתי הקוונטי. תנע־זוויתי הוא מטען שנשמר כתוצאה מסימטריית סיבובים. נבחן איך טרנספורמציית סיבוב פועלת על שדה דיראק:

$$\psi\left(x\right)\to\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi\left(\Lambda^{-1}x\right)$$

הסיבוב הוא ההפרש בינהם:

$$\delta\psi=\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi\left(\Lambda^{-1}x\right)-\psi\left(x\right)$$

נסתכל על סיבוב קטן סביב $\hat{z}$, כאן, עבור סיבוב קטן, $\Lambda_{\frac{1}{2}}\approx1-\frac{i}{2}\Theta\begin{pmatrix}\sigma_3 & \\ & \sigma_3\end{pmatrix}$.

$$-\delta\psi=\left(1-\frac{1}{2}\theta\Sigma^3\right)\psi\left(t,x+\theta y,y-\theta x,z\right)-\psi\left(t,x,y,z\right)$$

כאשר השתמשנו בקירוב: $\sin\theta\sim\theta$ ו־$\cos\theta\sim1$. נפתח לסדר ראשון ב־θ , ונקבל,

$$\begin{aligned}\delta\psi&=-\theta\left(x\partial_y-y\partial_x+\frac{1}{2}\Sigma^3\right)\psi+O\left(\theta^2\right)\\&=\Theta\Delta\psi\end{aligned}$$

נציב במשפט נטר:

$$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\Delta\psi$$

והמטען הוא

$$\int\mathrm{d}^3x\,j^0=\int\mathrm{d}^3x\left(-\bar{\psi}\gamma^0\left(x\partial_y-y\partial_x+\frac{i}{2}\Sigma^3\right)\right)\psi=J^3$$

נזהה את המטען הזה עם הרכיב השלישי של התנע הזוויתי הכולל, J^3. באופן כללי,

$$\boxed{\mathbf{J}=\int\mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\left(\mathbf{x}\times\left(-i\nabla\right)+\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}\right)\psi}$$

זהו אופרטור התנע הזוויתי הוקטורי־הקוונטי, באמצעות השדה.

נפריד את התרומות לתנע זוויתי אורביטלי, $\mathbf{L}$, שנובע מהנגזרת, ולתנע זוויתי פנימי שנובע מהספין, $\mathbf{S}$, שמבוטא על ידי $\mathbf{\Sigma}$.

$$\mathbf{J}=\text{"}\mathbf{L}+\mathbf{S}\text{"}$$

במכניקה קוונטית יחסותית, ההפרדה הזו לא כל כך ברורה, אבל במערכת המנוחה של החלקיק, האיבר הראשון יתאפס ונשאר רק עם הספין. במערכת המנוחה,

$$\mathbf{J}=\mathbf{S}=\int\mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\frac{\mathbf{\Sigma}}{2}\psi$$

נציב את הפיתוח של השדה, ונמצא ביטוי לת"ז על ידי אופרטורים יוצרים והורסים. נח לעבוד כאן עם תמונת שרדינגר, ונחשב את J_3 :

$$\begin{aligned}J^3&=\int\mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger\left(\mathbf{x}\right)\frac{\Sigma^3}{2}\psi\left(x\right)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{r,r'}\left(a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}u^{r\dagger}\left(p\right)+b_{-\mathbf{p}}^{r}v^{r\dagger}\left(-\mathbf{p}\right)\right)\frac{\Sigma^3}{2}\left(a_{\mathbf{p}}^{r'}u^{r'}\left(p\right)+b_{-\mathbf{p}}^{r'\dagger}v^{r'}\left(-\mathbf{p}\right)\right)\end{aligned}$$

נתחיל עם חלקיק במערכת המנוחה, עם תנע אפס:

$$J^3 a_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle = \left[J^3, a_{\mathbf{0}}^{s\dagger}\right]|0\rangle$$

(כי $J^3|0\rangle = 0$, אז מותר לנו לשים שם קומוטטור. רוב הקומוטטורים של מה שמרכיב את J^3 יתאפסו, נקבל,

$$= \left[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^{r'}, a_0^{s\dagger}\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})\, a_0^{r\dagger} \delta^{r's}$$

ולכן,

$$J^3 a_0^{s\dagger}|0\rangle = \frac{1}{2m}\sum_r u^{r\dagger} \frac{\Sigma^3}{2} u^2(\mathbf{0})\, a_0^{r\dagger}|0\rangle$$

נזכור שהספינור עבור $p=0$ הוא $u^r(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi^r\\ \xi^r\end{pmatrix}$, לכן,

$$J^3 a_0^{s\dagger}|0\rangle = \pm\frac{1}{2} a_0^{s\dagger}|0\rangle$$

כאשר זהו $+\frac{1}{2}$ כאשר $s=1$, וזהו הספינור $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ו־$-\frac{1}{2}$ עבור $s=2$, והספינור $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

עבור אנטי–חלקיק,

$$J^3 b_{\mathbf{0}}^{s\dagger}|0\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , s=1, \xi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ +\frac{1}{2} & , s=2, \xi = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

כלומר, עבור האנטי־חלקיק קיבלנו את הספין ההפוך מהחלקיק.

5.4.5 פרופגטור Dirac[15]

נזכר שלשדה ספינורי יש חלק ישוצר חלקיק וחלק שיוצר אנטי־חלקיק:

$$\psi_\alpha(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p}}^s u_\alpha^s(p) e^{-ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v_\alpha^s(p) e^{ip\cdot x}\right)$$

נחשב את אמפליטודת המעבר:

$$\begin{aligned} \left\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)|0\right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \cdot \sum_s u_\alpha^s(p)\bar{u}_\beta^s(p) e^{ip\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (\not{p}+m)_{\alpha\beta} e^{ip\cdot(x-y)} \end{aligned}$$

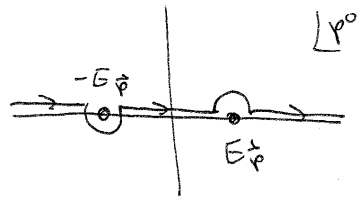
בצורה דומה,

$$\left\langle 0 \,\middle|\, \bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) \,\middle|\, 0\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (\not{p}-m)_{\alpha\beta} e^{-ip\cdot(y-x)}$$

לכן, פונקציית גרין, או, הפרופגטור היא

$$\begin{aligned} (i\not{\partial}_x - m)\Delta_{\alpha\beta}(x-y) &= i\delta^{(4)}(x-y) \\ \Delta_{\alpha\beta}(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\not{p}-m}\right)_{\alpha\beta} e^{ip\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}-m)}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)} \end{aligned}$$

[15] 20.12.2009



איור 9: פרופגטור פיינמן

יש לנו אינטגרציה על הישר הממשי. הקטבים הם כאשר $p^0 = \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = \pm E_\mathbf{p}$. האינטגרל אינו מוגדר היטב, כי הוא עובר דרך הקטבים, אז נצטרך, גם כאן, לעקוף את הקטבים.
נגדיר את הפרופגטורים לפי הצורות השונות לעקיפת הקטבים:

- פרופגטור Retarded, כאשר עוקפים את שני הקטבים מלמעלה:

  – עבור $x^0 > y^0$, נצטרך לסגור את המסלול מלמטה ונכלול את שני הקטבים:

$$\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\left[\left.\frac{\not{p}+m}{-2E_\mathbf{p}}e^{-ip\cdot(x-y)}\right|_{p^0=-E_\mathbf{p}} + \left.\frac{\not{p}+m}{+2E_\mathbf{p}}e^{-ip\cdot(x-y)}\right|_{p^0=-E_\mathbf{p}}\right]$$

בהחלפת $p \to -p$, הביטוי יהיה

$$\begin{aligned}&= \left\langle 0 \,\middle|\, \bar\psi(y)\psi(x) \,\middle|\, 0\right\rangle = \left\langle 0|\psi(x)\bar\psi(y)|0\right\rangle \\ &\left\langle 0 \,\middle|\, \left\{\psi(x), \bar\psi(y)\right\} \,\middle|\, 0\right\rangle\end{aligned}$$

עבור $x^0 < y^0$, נסגור את המסלול מלמעלה, ונקבל $\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = 0$, ולכן

$$S^R_{\alpha\beta} = \Theta\left(x^0 - y^0\right)\left\langle 0 \,\middle|\, \left\{\psi(x), \bar\psi(y)\right\} \,\middle|\, 0\right\rangle$$

  – פרופגטור **פיינמן**, כאן, עוקפים את הקטבים בכיוונים שונים: את הקוטב השלילי עוקפים מלמטה ואת החיובי מלמעלה, לכן,

$$S^F_{\alpha\beta} = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

עבור $x^0 > y^0$ נסגור את המסלול מלמטה, ועבור $x^0 < y^0$ נסגור מלמטה, ובכל מקרה יש לנו תרומה, לכן,

$$\begin{aligned}&= \begin{cases}\left\langle 0 \,\middle|\, \psi(x)\bar\psi(y) \,\middle|\, 0\right\rangle & , x^0 > y^0 \\ -\left\langle 0 \,\middle|\, \bar\psi(y)\psi(x) \,\middle|\, 0\right\rangle & , x^0 < y^0\end{cases} \\ &\equiv \left\langle 0 \,\middle|\, T\left(\psi(x)\bar\psi(y)\right) \,\middle|\, 0\right\rangle\end{aligned}$$

וקיבלנו את פרופגטור פיינמן עבור פרמיונים:

$$\boxed{S^F_{\alpha\beta} = \left\langle 0 \,\middle|\, T\left(\psi(x)\bar\psi(y)\right) \,\middle|\, 0\right\rangle}$$

כאשר עושים סידור בזמן לשדות פרמיונים, יש לכפול במינוס יחד עם כל החלפה.

הערה 5.2 **סידור בזמן של פרמיונים** כולל (-1) עבור כל החלפה שיש לעשות

5.5 סימטריות דיסקרטיות בתורת דיראק

סימטריה בתורה הקוונטית היא אופרטור אוניטרי U, שמתחלף עם ההמילטוניאן, $[U,H]=0$. האופרטור קובע כיצד משתנים האופרטורים האחרים בתורה הקוונטית. אופרטור $\mathcal{O}$ בתורה הקוונטית, משתנה תחת האופרטור U לפי החוק:

$$\mathcal{O} \to U\mathcal{O}U^{-1}$$

ראינו, שעבור טרנספורמציית לורנץ, $x \to \Lambda x$, פועלים על אופרטורים יוצרים והורסים:

$$U(\Lambda)\, a^s_{\mathbf{p}} U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} a^s_{\Lambda\mathbf{p}}$$

בתורה הפרמיונים כמו בתורה הסקאלרית. על השדה עצמו,

$$U(\Lambda)\,\psi_\alpha(x)\,U^{-1}(\Lambda) = \left(\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\right)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\Lambda x)$$

זהו ההפך מאיך ש־ψ משתנה כשדה קלאסי בטרנספורמציית לורנץ. כשדה קלאסי, $\psi(x) \to \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi\left(\Lambda^{-1}x\right)$. זה נובע מכך שבתורה הקלאסית שאלנו שאלה פסיבית: הפעולה של האופרטור נשארה וה"מרחב" השתנה, ואילו עכשיו האופרטור אקטיבי, הוא משנה את פעולתו בעקבות הטרנספורמציה.

סימטריות של חבורת לורנץ הן:

- זוגיות (Parity) , $P : \mathbf{x} \to -\mathbf{x}$
- היפוך זמן (Time-reversal), $T : t \to -t$

הן משמרות את ההעתקה, אך לאו דווקא משמרות את הפיזיקה. ואכן, בטבע, הזוגיות אינה סימטריה. ישנן ארבע אינטראקציות בטבע, והאינטראקציה הגרעינית החלשה, אינה משמרת זוגיות.

ישנה עוד טרנספורמציה דיסקרטית שאינה קשורה לטרנספורמציות במרחב־זמן, שנקראת צימוד מטען

- צימוד מטען (Charge conjugation), $C : \text{Particle} \to \text{Anti-Particle}$.

טרנספורמציה זו יכולה להיות סימטרה, או לא, של התורה. בתורת דיראק החופשית, כל הללו הן סימטריות. בטבע, P אינה סימטריה של הכח החלש.

הערה 5.3 שלושת הסימטריות שדיברנו עליהן מקיימות: $C^2 = P^2 = T^2 = 1$

סימטריות דיסקרטיות בטבע

- כל תורת שדות יחסותית מקיימת את סימטריית לורנץ הרציפה: $L^{\uparrow}_{+}$.
- האינטראקציה הגרעינית החלשה לא מקיימת את P ו־C, אבל היא כן מקיימת את מכפלתן CP ו־T.
- ישנם תהליכים נדירים שלא מקיימים CP, אלא רק CPT.

משפט 5.4 (CPT)

תורה המורכבת משדות סקאלרים, ווקטורים נגזרות שלהם, והפעולה היא סקלארית והרמיטית, אז CPT מתקיים.

5.5.1 זוגיות

נכנה $U_p = P$ הטרנספורמציה האונטירית של סימטריית הזוגיות. כמו כן, $P^2 = 1$, ולכן, הספין אינו משתנה תחת זוגיות, ומתקיים:

$$Pa^s_{\mathbf{p}}P = \eta_a a^s_{-\mathbf{p}}$$

ובאותו אופן,

$$Pb^s_{\mathbf{p}}P = \eta_b b^s_{-\mathbf{p}}$$

כאשר η_a, η_b, הן פאזות אפשריות. מהדרישה, P^2 לא משנה גדלים פיזיקאליים (בילינארים בספינורים) נקבל ש־ $\eta_a^2 = \pm 1$ (כי $P\left(Pa^s_{\mathbf{p}}P\right)P = \eta_a^2 a^s_{-\mathbf{p}} = \pm a^s_{-\mathbf{p}}$) כלומר,

$$\eta_a^2 = \pm 1$$
$$\eta_b^2 = \pm 1$$

נסתכל על הטרנספורמציה על השדות בהשפעת P

$$P\psi\left(x\right)P = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(\eta_a a^s_{-\mathbf{p}}u^s\left(p\right)e^{-ip\cdot x} + \eta_b^\star b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}v^s\left(p\right)e^{ip\cdot x}\right)$$

נבצע החלפת משתנים באינטגרל: $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, ונגדיר $\tilde{p} = \left(p_0, -\mathbf{p}\right)$ לכן, $p\cdot t = \tilde{p}\left(t, -\mathbf{x}\right)$ ו־ $\tilde{t}\cdot\sigma = p\cdot\bar{\sigma}$ ו־ $\tilde{p}\cdot\bar{\sigma} = p\cdot\sigma$. באותו אופן, $u\left(p\right) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\xi\\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\xi\end{pmatrix} = \gamma^0 u\left(\tilde{p}\right)$ ובדיוק באותו האופן, $v\left(p\right) = -\gamma^0 v\left(\tilde{p}\right)$. באמצעות כל הזהויות הללו, נכתוב מחדש את האינטגרל:

$$P\psi\left(x\right)P = \gamma^0\int \frac{\mathrm{d}^3\tilde{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s\left(\eta_a a^s_{\tilde{p}}u^s\left(\tilde{p}\right)e^{-i\tilde{p}\cdot\left(t,-\mathbf{x}\right)} - \eta_b^\star b^{s\dagger}_{\tilde{p}}v^s\left(\tilde{p}\right)e^{i\tilde{p}\cdot\left(t,-\mathbf{x}\right)}\right)$$

אם נדרוש ש־ $\eta_b^\star = -\eta_a$, נקבל

$$P\psi\left(x\right)P = \gamma_0\eta_a\psi\left(t, -\mathbf{x}\right)$$

מותר לנו לדרוש את השוויון בין ה־η, מאחר והפאזות הן שרירותיות (עד כדי היותן שורש רביעי של היחידה).
באותו אופן,

$$P\bar{\psi}\left(x\right)P = \eta_a^\star\bar{\psi}\left(t, -\mathbf{x}\right)\gamma^0$$

בהנתן הטרנספומציות של $\psi, \bar{\psi}$ תחת P, ניתן למצוא את הטרנספורציות של אופרטורים בילינארים תחת P.
לדוגמא, הסקאלר,

$$P\bar{\psi}\left(x\right)\psi\left(x\right)P = +\bar{\psi}\left(t, -\mathbf{x}\right)\psi\left(t, -\mathbf{x}\right)$$

ופסאודו־סקאלר,

$$\begin{aligned}P\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^5\psi\left(x\right)P &= \bar{\psi}\left(x\right)\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi\\ &= -\bar{\psi}\left(t, -\mathbf{x}\right)\gamma^5\psi\left(t, -\mathbf{x}\right)\end{aligned}$$

מאחר וכל הגדלים הפיזיקאלים הם בילינארים, ניתן, ללא הגבלת הכלליות, לקבוע בהתאם לאילוצים כי $\eta_a = 1$ ו־ $\eta_b = -1$, ולכן,

$$\boxed{P\psi\left(x\right)P = \gamma^0\psi\left(t, -\mathbf{x}\right)}$$

5.5.2 היפוך הזמן

אופרטור T הוא אופרטור אוניטרי שמתחלף עם ההמילטוניאן, $\left[T, H\right] = 0$ ו־ $\psi\left(t, \mathbf{x}\right) \to\propto \psi\left(-t, \mathbf{x}\right)$. אם נדרוש את שני הנ"ל, נתקל בבעיה, כי ניתן בכל זמן, לרשום את השדה בתמונת שרדינגר,

$$\begin{aligned}T\psi\left(t, \mathbf{x}\right)T &= T\left(e^{iHt}\psi\left(\mathbf{x}\right)e^{-iHt}\right)T\\ &= e^{iHt}\underbrace{\left(T\psi\left(\mathbf{x}\right)T\right)}_{time-independent}e^{-iHt}\end{aligned}$$

כאשר את ההחלפה בין T ל־e^{iHt} ניתן לבצע כי $\left[H, T\right] = 0$. נפעיל את השדה על מצב היסוד:

$$T\psi\left(t, \mathbf{x}\right)T\left|0\right\rangle = e^{iHt}\left(T\psi\left(\mathbf{x}\right)T\left|0\right\rangle\right)$$

מאחר והאנרגיות חיוביות, זהו סכום של איברים **בתדר שלילי** בלבד.
מצד שני, נרצה ש־ $T\psi\left(t, \mathbf{x}\right)T \propto \psi\left(-t, x\right)$. אם זה נכון,

$$T\psi\left(t, \mathbf{x}\right)T\left|0\right\rangle \propto \psi\left(-t, \mathbf{x}\right)\left|0\right\rangle = e^{-iHt}\psi\left(\mathbf{x}\right)\left|0\right\rangle$$

עכשיו, בצד ימין יש סכום של מצבים שכולם בתדר חיובי. קיבלנו סתירה בין הדרישות השונות של T.

הבעיה היא הדרישה ש-T הוא לינארית.

הפתרון לוותר על לינאריות, ולקבוע:

$$\boxed{T\left(\text{C-number}\right)=\left(\text{C-number}\right)^{\star}T}$$

לכן T הוא **אנטי־לינארי** / אנטי־אוניטרי. כלומר, $[T,H]=0$, אבל $[T,i]\neq 0$: $Ti=-iT$.

השפעה על ספין אנחנו יודעים שתנע זוויתי משנה סימן תחת T, $T:\mathbf{J}\to-\mathbf{J}$, כלומר, החלפה בין ξ^1 ו-ξ^2.
בהרצאות הקודמות, סימנו את מצב הספין ב-s, ועל הספינורים ξ^s . בבסיס שבו J_3 אלכסוני, $\xi^1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ו-$\xi^2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. **מעתה, נשתמש באות s כדי לסמן את הספין הפיזיקאלי של החלקיק.** הספינור $u^1(p)$ יהיה חלקיק בעל ספין $\uparrow$, ואילו $v^1(p)$ יהיה אנטי־חלקיק בעל ספין $\uparrow$. כלומר, v^1 יהיה, מעכשיו, קשור ל-ξ^2 במקום ל-ξ^1.
נגדיר גם את **הספין ההפוך**,

$$\boxed{\xi^{-s}=-i\sigma^2\left(\xi^s\right)^{\star}}$$

לצמוד המרוכב יש משמעות אם לא מסתכלים על המצבים העצמיים של J^3, אלא למשל, על המצבים העצמיים של תנע זוויתי בכיוון שרירותי (θ,ϕ),

$$\xi'=\xi\left(\uparrow\right)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

או, או, $x^{-1}=\xi^2,\xi^{-2}=-\xi^1$. עם ההגדרות הללו, האופרטור $a^s_{\mathbf{p}}$ הורס אלקטרון בעל ספינור

$$u^s\left(p\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix}$$

ואילו האופרטור $b^s_{\mathbf{p}}$ הורס פוזיטרון בעל ספינור:

$$v^s\left(p\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{-s}\\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{-s}\end{pmatrix}$$

אזי u^1 ו-v^1 יהיו קשורים לחלקיק ואנטי חלקיק עם ספין $\uparrow$,ו- u^2 ו-v^2 יהיו קשורים לחלקיק עם ספין $\downarrow$.

לכן, הפעולה של T על אופרטורי העלאה והורדה

$$Ta^s_{\mathbf{p}}T=a^{-s}_{-\mathbf{p}}$$
$$Tb^s_{\mathbf{p}}T=b^{-s}_{-\mathbf{p}}$$

ועבור המצבים, $b^{-s}_{\mathbf{p}}=\left(b^2_{\mathbf{p}},-b^1_{\mathbf{p}}\right)$ $a^{-s}_{\mathbf{p}}=\left(a^2_{\mathbf{p}},-\mathbf{a}^1_{\mathbf{p}}\right)$ (כלומר, $b_{\mathbf{p}^{-1}}=b^2_{\mathbf{p}},b^{-1}_{\mathbf{p}}=-b^1_{\mathbf{p}}$) נקבל שאופרטור השדה הוא מהצורה:

$$T\psi\left(t,\mathbf{x}\right)T=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\left(2\pi\right)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\mathbf{p}}\left(u^s\left(p\right)\right)^{\star}e^{ip\cdot x}+b^{-s\dagger}_{-\mathbf{p}}\left(v^s\left(p\right)\right)^{\star}e^{-ip\cdot x}\right)$$

זה לא הצורה הקלאסית של שדה, ולכן ננסה לבטא את האינטגרנד מצד ימין באמצעות $\tilde{p}=\left(p^0,-\mathbf{p}\right)$.

$$\left(u^s\left(p\right)\right)^{\star}=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma^{\star}}\xi^{s\star}\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}^{\star}\xi^{s\star}\end{pmatrix}$$

כאשר $\sigma^{1\star}=\sigma^1,\sigma^{2\star}=-\sigma^2,\sigma^{3\star}=\sigma^3$. ו-

$$\xi^{-s}\equiv-i\sigma^2\left(\xi^s\right)^{\star}\implies\xi^{s\star}=i\sigma^2\xi^{-s}$$

נציב, ונקבל ש־

$$(u^s(\mathbf{p}))^\star = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma^\star} i\sigma^2\xi^{-s} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^\star} i\sigma^2\xi^{-s} \end{pmatrix}$$

נשתמש בזהות שלא נוכיח כאן: $\boxed{\sqrt{p\cdot\sigma^\star}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}}$. באופן דומה, $\boxed{\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^\star}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}}$.

$$\begin{aligned} (u^s(p))^\star &= \begin{pmatrix} i\sigma^2\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\xi^s \\ i\sigma^2\sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} \sigma^2 & \\ & \sigma^2 \end{pmatrix} u^{-s}(\mathbf{p}) \\ (u^s(p))^\star &= \gamma^1\gamma^3 u^{-s}(\tilde{p}) \\ (v^s(p))^\star &= \gamma^1\gamma^3 v^{-s}(\tilde{p}) \end{aligned}$$

כלומר, הצגנו הצמדה של ספינורים באמצעות מכלפה במטריצות, ו־$p\to\tilde{p}$. נחליף באינטגרל את $p\to\tilde{p}$, ונקבל,

$$T\psi(t,\mathbf{x})T = \gamma^1\gamma^3\int\frac{\mathrm{d}^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s\left(a_{\tilde{p}}^{-s}u^{-s}(\tilde{p})e^{i\tilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x})} + b_{\tilde{p}}^{-s\dagger}v^{-s}(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x})}\right)$$

אם נחליף $\tilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x}) = -\tilde{p}(-t,\mathbf{x})$, ואז נקבל

$$\boxed{T\psi(t,\mathbf{x})T = \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\mathbf{x})}$$

ובצורה דומה, השדה הצמוד:

$$\boxed{T\bar{\psi}(t,\mathbf{x})T = \bar{\psi}(-t,\mathbf{x})\gamma^1\gamma^3}$$

5.5.3 הצמדת מטען – Charge Conjugation

מסומנת ב־C, היא החלפת חלקיק באנטי־חלקיק.

$$Ca_{\mathbf{p}}^sC = b_{\mathbf{p}}^s$$

(כאשר s הסימן הפיזיקאלי של הספין, כלומר, C יקח חלקיק עם תנע p וספין מעלה לאנטי־חלקיק עם תנע p וספין מעלה)

$$Cb_{\mathbf{p}}^sC = a_{\mathbf{p}}^s$$

אפשר להציב את הפעולה בפיתוח של השדה, ולראות כיצד הפעולה פועלת על השדה, אבל לשם כך, נצטרך למצוא קשר בין u ל־v, הפתרונות של חלקיק ואנטי־חלקיק.

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{-s} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^{-s} \end{pmatrix}$$

נכתוב אותו באמצעות $\xi^{s\star}$

$$(v^s(p)) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\left(-i\sigma^2\xi^{s\star}\right) \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\left(-i\sigma^2\xi^{s\star}\right) \end{pmatrix}$$

נשתמש בזהויות $\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma^\star} = \sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^\star}$, ומזהות דומה, נקבל:

$$= \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^\star}\xi^{s\star} \\ i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^\star}\xi^{s\star} \end{pmatrix}$$

ולאחר הצמדה מרוכבת:

$$\left(v^s\left(p\right)\right)^\star=\begin{pmatrix}-i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s\\ i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma^2\\ i\sigma^2 & 0\end{pmatrix}u^s\left(p\right)$$

כלומר, ניתן לקשר בין u^s ו־v^s, באמצעות:

$$\boxed{\begin{array}{c}\left(v^s\left(p\right)\right)^\star=-i\gamma^2u^s\left(p\right)\\ v^s\left(p\right)=-i\gamma^2\left(u^s\left(p\right)\right)^\star\end{array}}$$

לכן, נוכל לכתוב את השדה בעקבות הצמדת מטען, בצורה,

$$C\psi\left(x\right)C=-i\gamma^2\int\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(b^s_{\mathbf{p}}\left(v^s\left(p\right)\right)^\star e^{-ip\cdot x}+a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\left(u^s\left(p\right)\right)^\star e^{ip\cdot x}\right)$$

כלוצר,

$$\boxed{C\psi\left(x\right)C=-i\gamma^2\psi^\star\left(x\right)}$$
$$=-i\gamma^2\left(\psi^\dagger\right)^T=-i\left(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\right)^T$$

והשדה הצמוד:

$$C\bar{\psi}C=\left(-i\gamma^0\gamma^2\psi\right)^T$$

5.5.4 פעולות על בילינארים

נסכם את הפעולות של C,P,T על בי־לינארים (שהוכחו בתרגול)

	Scalar $\bar{\psi}\psi$	Pseudo-Scalar $i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi$	Anti-symmetric Tansor $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\bar{\psi}\partial^\mu\psi$
P	$+1$	-1	$"\left(-1\right)"^\mu$	$-\left(-1\right)^\mu$	$\left(-1\right)^\mu\left(-1\right)^\nu$	$\left(-1\right)6\mu$
T	$+1$	-1	$"\left(-1\right)^\mu"$	$\left(-1\right)^\mu$	$-\left(-1\right)^\mu\left(-1\right)^\nu$	$-\left(-1\right)^\mu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
CPT	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1

כאשר
$$\left(-1\right)^\mu=\begin{cases}-1 & \mu=1,2,3\\ 1 & \mu=0\end{cases}$$

5.6 תורת Yukawa

בשלב זה, נוכל לכתוב תורה שיש בה אינטראקציות בין ספינורים וסקאלרים. באופן עקרוני, ניתן לחשוב על תורה שיש בה אינטראקציה בין ספינורים לספינורים, ולהסתכל על אינטראקציה של ארבעה פרמיונים. התורה הזו היא בעייתית, מאחר וקבוע הצימוד שלה אינו חסר מימדים, כי המימד של הספינור, בפעולת דיראק אינו המימד של שדה סקאלרי. המימד של שדה סקלארי הוא 1 (אורך) והמימד של הספינור הוא $\frac{3}{2}$.

תורת יוקווה היא תורה שמכילה ספינור וסקאלר, ואינטראקציה בינהם:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{Dirac}+\mathcal{L}_{KG}-g\bar{\psi}\psi\phi$$

כאשר $[g]=0$, חסר מימדים. זהו מספר חסר מימדים, ולכן ניתן להשוות אותו ל־1, ולפתח בתורת ההפרעות.

במודל הסטנדרטי, צימודים מהסוג הזה, בין פרמיונים לחלקיק הסקאלרי היגס, הוא האינטראקציה שמעניקה מסה לפרמיונים. ל־$\mathcal{L}_{Dirac}$ אין איבר מסה, וערך התצפית של ϕ לא מתאפס עקב האינטראקציה.

משפט Wick נרצה להכליל את משפט וויק לתורת יוקווה. עבור פרמיונים, סידור בזמן מחליף סימן:

$$T\left(\psi(x)\bar{\psi}(y)\right)=\begin{cases}\psi(x)\bar{\psi}(x) & ,x^0>y^0\\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & ,x^0<y^0\end{cases}$$

לכן, עבור

$$x_3^0>x_1^0>x_4^0>x_2^0 \qquad T\left(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\right)=(-1)^{2+1}\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2$$

אז הסימן הוא שלילי, כי ביצענו שלוש החלפות על מנת להחליף בין החלקיקים. הסימן יופיע גם בסידור נורמלי:

$$N\left(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{r}}^{\dagger}\right)=(-1)^2\,a_{\mathbf{r}}^{\dagger}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}=(-1)^3\,a_{\mathbf{r}}^{\dagger}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}$$

יש לנו שני סידורים נורמלים תקינים, עם סימן שונה. אותו דבר לגבי צימצומים:

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y)=S_F(x-y)=\left\langle 0\middle|T\left(\psi(x)\bar{\psi}(y)\right)\right\rangle$$

לכן, נקבל

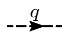
$$T\left[\psi_1\psi_2\psi_3\cdots\right]=N\left[\psi_1\psi_2\psi_3+\sum\{\text{Contractions}\}\right]$$

כאשר יש לזכור שכל החלפה נותנת מינוס:

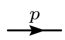
$$N\left(\overbracket{\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3}\bar{\psi}_4\right)=-\overbracket{\psi_1\bar{\psi}_3}N\left(\psi_2\bar{\psi}_4\right)$$

חוקי פיינמן (במרחב התנע)

1. פרופגטורים:

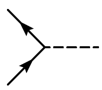


$$=\overbracket{\phi(x)\phi}(y)=\frac{i}{q^2-m_\phi^2+i\varepsilon}$$



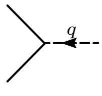
$$=\overbracket{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta}(y)=\frac{i\left(\not{p}+m\right)_{\alpha\beta}}{p^2+m^2+i\varepsilon}$$

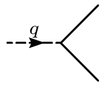
2. ורטקס:



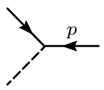
$$=-ig$$

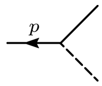
3. רגליים חיצוניות:

In:  $=\overbracket{\phi|q}\rangle=1$

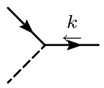
Out:  $=\langle\overbracket{q|\phi}=1$

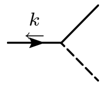
פרמיונים:

In:  $= \psi|\mathbf{p}, s\rangle = u^s\left(p\right)$

Out:  $= \langle\, \mathbf{p}, s|\bar{\psi} = \bar{u}^s\left(p\right)$

אנטיפרמיונים:

In:  $= \bar{\psi}|k, s\rangle = \bar{v}^s\left(k\right)$

Out:  $= \langle\, \mathbf{k}, s|\psi = v^s\left(k\right)$

4. שימור תנע ומטען בכל ורטקס
5. אינטגרל על תנע בלולאה
6. חישוב **הסימן** של הדיאגרמה

הערה 5.5 1. אין פקטור סימטריה: $\bar{\psi}, \psi, \phi$ לא חליפיים. כלומר, באינטראקציה משתתפים שלושה חלקיקים **שונים.**

2. כיוון החץ על קו **פרמיוני** הוא כיוון (מגמת) זרימת המטען. (על קו פנימי, כיוון החץ הוא כיוון התנע)
3. אינדקסים ספינורים מצטמצמים לאורך קוים פרמיונים, נגד כיוון החצים.
נסתכל על פרמיון $p_0 \to p_1 \to p_2 p_3$, שעושה אינטראקציות עם חלקיקים סקאלרים.

$$=\sim \bar{u}\left(p_3\right)_\alpha \frac{i\left(\not{p}_2+m\right)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2} \cdot \frac{i\left(\not{p}_1+m\right)_{\beta\gamma}}{p_1^2-m^2} \cdot u\left(p_0\right)_\gamma$$

לכן, הכיוון של החץ נשמר בורטקס (המטען נשמר)
4. כל החלפה של 2 פרמיונים בצמצום מסויים, נותנת פקטור (-1)

בשלב האחרון, כדי לחשב את הסימן של הדיאגרמה, נצטרך לחזור לביטוי המקורי של הצימצומים. לא מספיק להסתכל על הדיאגרמה.

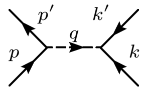
5.6.1 **דוגמא: פיזור** 2 פרמיונים

$$f\left(p\right)+f\left(h\right) \to f\left(p'\right)+f\left(k'\right)$$

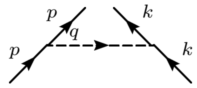
אזי,

$$\left\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' \middle| {}_0 T\left(\frac{1}{2!}\left(-ig\right)\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}\psi\phi\left(-ig\right)\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}\psi\phi\right) \middle| \mathbf{p}, h\right\rangle_0$$

הדיאגרמות הם:



$$= \left\langle \mathbf{p}', \mathbf{h}' \,\middle|\, (\bar{\psi}_x \psi_y \phi_x)(\bar{\psi}_y \bar{\psi}_y \phi_x \,\middle|\, \mathbf{p}, \mathbf{h} \right\rangle$$



$$= \left\langle \mathbf{p}', \mathbf{h}' \,\middle|\, (\bar{\psi}_x \psi_y \phi_x)(\bar{\psi}_y \bar{\psi}_y \phi_x \,\middle|\, \mathbf{p}, \mathbf{h} \right\rangle$$

הסימן: מה שחשוב זה הסימן היחסי, לכן, נגדיר,

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle &\sim a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle \\ \left\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' \right| &\sim \langle 0| \, a_{\mathbf{h}'}, a_{\mathbf{p}'} \end{aligned}$$

ו־

$$(|p, k\rangle)^{\dagger} = \langle p, h|$$

נסתכל על הדיאגרמה הראשונה:

$$(1) \sim \left\langle 0 | a_{\mathbf{h}'} a_{\mathbf{p}'} \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} | 0 \right\rangle_{contcat}$$

אנחנו רוצים לשנות את הסדר כך שהקווים לא יחתכו אחד את השני, לכן, נצטרך לשים את ה־$\bar{\psi}_y$ הראשון ללפני ה־$\bar{\psi}_x$, וזה דורש שתי החלפות, ולכן הסימן הוא 1. בצורה אחרתף ניתן פשוט לראות כמה חציות יש של הקווים, והחזקה של (-1) הוא מספר החציות של הצמתים.

לכן, האמפליטודה היא סכום של הדיאגרמות,

$$\begin{aligned} iM &= (1) + (2) \\ &= (ig)^2 \left[\bar{u}_{\alpha}(p') \, u_{\alpha}(p) \, \frac{i}{(p - p')^2 - m_{\phi}^2} \bar{u}_{\beta}(k') \, u_{\beta}(k) \right] \\ &- (ig)^2 \left[\bar{u}(k') \, u(p) \, \frac{i}{(p - k')^2 - m_{\phi}^2} \bar{u}(p') \, u(k) \right] \end{aligned}$$

6 השדה הוקטורי

6.1 השדה הוקטורי המסיבי

6.1.1 התורה הקלאסית

נרצה לכתוב את הלגרנז'יאן של השדה, A_{μ}, ממשי. נחפש לגרנז'יאן ש־

- לורנץ־אינווריינטי
- כדי לתאר תורה חופשית – הלגרנז'יאן צריך להיות ריבועי בשדה
- לא יותר מ־2 נגזרות.

עם הדרישות הללו, נכתוב לגרנז'יאן:

$$\mathcal{L} = \pm \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} A_{\nu} \partial^{\mu} A^{\nu} + a \partial_{\mu} A^{\mu} \partial_{\nu} A^{\nu} + b A_{\mu} A^{\mu} \right)$$

זהו הלגרנז'יאן הכללי ביותר שמקיים את התנאים, כאש a, b הם קבועים שרירותיים.

משוואת השדה:

$$-\Box A_\nu - a\partial_\nu\partial_\mu A^\mu + bA_\nu = 0$$

אזי, הפתרונות שלה יהיו מהצורה:

$$A_\nu = e_\nu e^{-ik\cdot x}$$

כאשר e_ν הוא וקטור קבוע, המכונה קיטוב. נציב בתוך המשוואה, ונקבל משוואה אלגברית:

$$\boxed{k^2 e_\nu + ak_\nu k\cdot e + be_\nu = 0}$$

אפשר לחלק את הפתרונות לשני סוגים:

- $e \propto k$. פתרון זה נקרא **גל אורכי** (במובן ה־4 מימדי). למשל, במערכת המנוחה, $e = (e_0, \mathbf{0})$.
- $e\cdot k = 0$, הוא **גל רוחבי**, במערכת המנוחה, $e = (0, \mathbf{e})$.

גל אורכי מתאר חקיק סקאלרי (ספין 0) , ואילו גל רוחבי, מתאר חלקיק וקטורי (ספין 1)
לכן, הגלים האורכיים לא יעניינו אותנו . נרצה להגביל את התורה כך שהיא תתאר גלים רוחביים בלבד.
נציב את הדרישה הזו במשוואה. עבור גל אורכי, חייב להתקיים:

$$\left(k^2\left(1+a\right)+b\right)k_\nu = 0$$

במקרה שב־ $a=-1$, $b\neq 0$, אין פתרון למשוואה, כלומר, אין פתרונות שהם גלים אורכיים.
גל רוחבי מקיים $e\cdot k = 0$, אזי

$$\left(k^2+b\right)e_\nu = 0 \implies \mu^2 \equiv -k^2 = b$$

לכן, קיבלנו את הלגרנז'יאן:

$$\boxed{\mathcal{L} = \pm\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu A^\nu\right)^2 - \left(\partial\cdot A\right)^2 - \mu^2 A_\mu A^\mu\right]}$$

ומשוואת השדה היא:

$$\boxed{\Box A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu A^\mu + \mu^2 A_\nu = 0} \tag{2}$$

(משוואות אוילר לגרנז': $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(A^\nu)} = \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\mu)}$) תורה זו מכונה תורת Proca.

הגדרה 6.1 ניתן להגדיר את טנזור השדות:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

והוא טנזור אנטיסימטרי תחת החלפת אינדקסים: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. בסימון הזה, הלגרנז'יאן ומשוואות התנועה הם:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{L} = \pm\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A^\mu\right] \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 A^\nu = 0\end{array}}$$

ממשוואות אלו, ניתן לראות שעבור $\mu^2 = 0$, נקבל את תורת מקסוול החופשית.
אם נגזור אתת משוואת תהנועה ביחס ל־ν, נקבל

$$\cancelto{0}{\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}} + \mu^2\partial_\nu A^\nu = 0$$

ונקבל תנאי על השדה הוקטורי: $\boxed{\partial_\nu A^\nu = 0}$. תנאי זה נובע בהכרח ממשוואות התנועה עבור התורה המסיבית (אם $\mu = 0$, התנאי אינו קיים). מהתנאי הזה מתקבל כי האיבר $(\partial \cdot A)^2$ בלגרנז'יאן, מתאפס. נציב את האילוץ הזה במשוואת התנועה, ונקבל

$$\boxed{\left(\Box + \mu^2\right) A_\nu = 0}$$

כלומר, המשוואה זהה לארבע משוואות קליין־גורדון. לכן, הפתרונות הם ידועים:

$$A_\nu = e_\nu e^{-ik\cdot x}, \qquad k^2 = m^2$$

ומההתאפסות של הדיברגנץ,

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \implies \boxed{e \cdot k = 0}$$

ושוב, קיבלנו שהפתרונות של המשוואה הם גלים רוחביים.

נבחר בסיס לוקטורי הקיטוב במערכת המנוחה, כמצבים עצמיים של J^3, הרכיב השלישי של תנע־זוויתי

$$e_\mu^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0) \qquad J^3 = +1$$

קיטוב שבו גל מסתובב בכיוון אחד,

$$e_\mu^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0) \qquad J^3 = -1$$

גל מסתובב בכיוון השני,

$$e_\mu^{(3)} = (0,0,0,1)$$

וזהו גל מקוטב לינארית.

במערכת המנוחה, אין קיטוב בכיוון הזמן, ולכן האיבר הראשון הוא אפס בכל הוקטורים,

$$k = (E,0,0,0)$$

בכל מערכת אחרת, הקיטובים הם $e_\mu^{(r)}(k)$ שמתקבלים מ־$e_\mu^{(r)}(k=0)$, על ידי טרנספורמציית לורנץ. זהו בסיס אורתונורמלי, ומתקיים:

$$e^{(r)\star} \cdot e^{(s)} = -\delta^{rs} \qquad r,s = 1,2,3$$

זה נכון במערכת המנוחה, וזהו סקלאר לורנץ, ולכן נכון בכל מערכת יחוס. יחס השלמות:

$$\sum_{r=1}^{3} e_\mu^r(k)\, e_\nu^{(r)}(k)^\star = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}$$

זה כמובן נכון במערכת המנוחה , וזהו הטנזור־הסימטרי־הכללי היחיד שנותן את הביטוי הנכון במערכת המנוחה, ולכן הוא נכון בכל מערכת.

התנע הצמוד נפרק את הלגרנז'יאן לרכיבי זמן ורכיבי מרחב:

$$\mathcal{L} = \pm\left(\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{\mu^2}{2}A^iA_i - \frac{\mu^2}{2}A^0A_0\right)$$

נזכר ש־ $F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$. נחשב את הרכיבים המרחביים של התנע הצמוד:

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_i\right)}$$

יש לנו $\partial_0 A^i$ בתוך F_{0i}, F^{0i}, ונקבל:

$$= \pm F^{0i}$$

מפורשות:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \partial A_i\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \partial A_i\right)} \frac{1}{2}\left[\partial_0 A_i-\partial_i A_0\right]\left[\partial^0 A^j-\partial^j A^0\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_0 \partial A_i\right)} \frac{1}{2}\left[\partial_0 A_i-\partial_i A_0\right]\left[\partial_0 A_j-\partial_j A_0\right] g^{ij} \ldots\end{aligned}$$

ו־

$$\Pi^0=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_0\right)}=0$$

כלומר, אין תנע צמוד ל־A_0.

נראה כאילו בעייתי לנסח את השדה הוקטורי בצורה המילטוניאנית, ולכן בעייתי לבצע קווינטות. אלא אם כן, אפשר לבנות שדות המהווים קבוצה מלאה של תנאי התחלה באמצעות הרכיבים המרחביים בלבד: Π_i ו־A_i לבדם מהווים סט מלא של תנאי התחלה. נראה שזה אכן מתקיים במקרה שבו $\mu \neq 0$. **הוכחה:** משוואת התנועה שלנו היא ארבעה עותקים של משוואת קליין גורדון,

$$\left(\square+\mu^2\right) A_\mu=0$$

לכן, אנחנו יודעים שארבעת השדות ונגזרותיהם, הם סט מלא של תנאי התחלה: $\{A_i, A_0, \partial_0 A_i, \partial_0 A_0\}$. נראה שאפשר לבטא את ששת הגדלים: $\{A_0, \partial_0 A_i, \partial_0 A_0\}$ באמצעות A_i ו־Π_i בלבד. כלומר, שיש לנו שש דרגות חופש, ולא שמונה.

- כאן, נכנס התנאי ש־ $\partial_\nu A^\nu=0$. אם נכתוב ברכיבים,

$$\partial_0 A^0=-\partial_i A^i$$

  לכן, בהנתן A^i בזמן נתון, נקבע $\partial_0 A^0$ באותו זמן.

- התנע הצמוד:

$$\Pi^i= \pm F^{0i}= \pm\left(\partial^0 A^i-\partial^i A^0\right)$$

  לכן, ניתן לכתוב

$$\partial_0 A_i= \pm \Pi_i+\partial_i A_0$$

  כלומר, בהנתן Π_i, ניתן לקשר בין $\partial_0 A_i$ ל־$\partial_i A_0$

- נסתכל על רכיב 0 של משוואת השדה:

$$\partial_\mu F^{\mu 0}+\mu^2 A^0=0 \Longrightarrow A^0=\frac{1}{\mu^2} \partial_i F^{0i}= \pm \frac{1}{\mu^2} \partial_i \Pi^i$$

לכן, ביטאנו את $A_0, \partial_0 A_0, \partial_0 A_i$ בזמן נתון על ידי A_i ו־Π_i באותו הזמן.

■

כלומר, הסט $\{A_i, \Pi_i\}$ מהווה סט מלא של תנאי התחלה. הסיבה שיכולנו לעשות זאת, היא שדרשנו תנאי שיבטל את הפתרונות האורכיים, לכן, יש לנו פחות דרגות חופש ממה שיכול היה להיות בתורה הכללית.

לכן, אפשר לנסח את המערכת בצורה המילטוניאנית, שכוללת רק את התנאים הצמודים המרחביים:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi^i \partial_0 A_i-\mathcal{L} \\ &= \pm F^{0i} \partial_0 A_i-\mathcal{L} \\ &= \pm\left(F^{0i} F_{0i}+F^{0i} \partial_i A_0\right)-\mathcal{L}\end{aligned}$$

כשעושים אינטגרל כדי לקבל המילטוניאן, ניתן לבצע אינטגרציה מחלקים ולהתאלם מדיברגנצים, לכן,

$$= \pm F^{0i}F_{0i} \mp \partial_i F^{0i} A_0 - \mathcal{L}$$

ולפי הקשר שקיבלנו ל-A^0 : $A^0 = \frac{1}{\mu^2}\partial_i F^{0i}$,

$$\begin{aligned} &= \pm F^{0i}F_{0i} \mp \mu^2 A^0 A_0 - \mathcal{L} \\ &= \pm \left[\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A^i A_i - \frac{\mu^2}{2}A_0 A^0\right] \end{aligned}$$

נקבע את הסימן על ידי הרמת כל האינדקסים. אם נרים את כל האינדקסים, כל הסימנים יהיו שליליים בתוך הסוגריים, ולכן, כדי שהאנרגיה תהיה חיובית, נבחר את הסימן הכולל $-$, ונקבל

$$\mathcal{H} = -\left[\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A^i A_i - \frac{\mu^2}{2}A_0 A^0\right]$$

6.1.2 התורה הקוונטית של שדה וקטורי מסיבי

עבור $i = 1, 2, 3$, נכתוב את השדות: A_i, והתנעים הצמודים:

$$\Pi_i = -F_{i0} = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$$

אזי, יחסי החילוף הקאנונים, הם ,

$$\left[A_i(\mathbf{x}, t), F^{j0}(\mathbf{y}, t)\right] = i\delta_i{}^j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ו־

$$[A_i, A_j] = F^{i0}F^{j0} = 0$$

נפתח את השדה כסכום של אופרטורים הורסים ויוצרים:

$$A_\mu(x) = \sum_{r=1}^{3}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left[a_{\mathbf{p}}^{(r)} e_\mu^{(r)}(p)\, e^{-ip\cdot x} = a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} e_\mu^{(r)}(p)^\star e^{ip\cdot x}\right]$$

ואכן, מקיים,

$$\begin{aligned} \left[a_{\mathbf{p}}^{(r)}, a_{\mathbf{p}'}^{(s)\dagger}\right] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, \delta^{rs} \\ [a, a] &= \left[a^\dagger, a^\dagger = 0\right] \end{aligned}$$

אזי, אם נכתוב את ההמילטוניאן באמצעות אופרטורים הורסים ויוצרים:

$$H = \sum_{r=1}^{3}\int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(r)t} a_{\mathbf{p}}^{(r)}$$

כלומר, השדה הוא שלוש־פעמים שדה סקאלרי.

פרופגטור הפרופגטור הוא פונקציית־גרין של משוואת השדה. עבור השדה הוקטורי המסיבי, הפרופגטור הוא פונקציית גרין של משוואת פרוקה, משוואה (2). נכתוב אותה בצורה שונה מעט:

$$\left[\left(\Box_x + \mu^2\right) g^{\mu\nu} - \partial_x^\mu \partial_x^\nu\right] \Delta_{\nu\lambda}(x - y) = i\delta^{(4)}(x - y)\, \delta^\mu{}_\lambda$$

הפעם, לפונקציית גרין יש שני אינדקסים, מאחר והיא פונקציית גרין עבור וקטור. אזי,

$$\Delta_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p)\, e^{ip\cdot(x-y)}$$

נציב במשוואה ונקבל משוואה אלגברית עבור p,

$$\left[\left(-p^2+\mu\right)g^{\mu\nu}+p^\mu p^\nu\right]\tilde{\Delta}_{\nu\lambda}\left(p\right)=i\delta^\mu{}_\lambda$$

נהפוך את המטריצה, ונקבל:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}\left(p\right)=\frac{i}{p^2-\mu^2}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{\mu^2}\right)$$

אפשר היה לנחש תשובה כזו: יש לה מימד של $\frac{1}{[m^2]}$, זהו פרופגטור. לפונקציה צריכים להיות קטבים ב־$p_0=\pm E$, לכן צריך להופיע $\frac{1}{p^2-\mu^2}$. הביטוי צריך להיות טנזור־לורנץ סימטרי מדרגה שניה, ולכן הוספנו את האיברים שיוצרים טנזור כזה.

נציב את הפונקציה בביטוי האלגברי:

$$\begin{aligned}&\frac{i}{p^2-\mu^2}\left[\left(-p^2+\mu^2\right)g^{\mu\nu}+p^\mu p^\nu\right]\left[-g_{\mu\nu}+\frac{p_\nu p_\lambda}{\mu^2}\right]\\&=\frac{i}{p^2-\mu^2}\left[\left(p^2-\mu^2\right)\delta^\mu{}_\lambda-\left(p^2-\mu^2\right)\frac{p^\mu p_\lambda}{\mu^2}-p^\mu p_\lambda+\frac{p^2p_\mu p_\lambda}{\mu^2}\right]\end{aligned}$$

שלושת הביטויים האחרונים מסתכמים לאפס, ולכן, נקבל

$$=i\delta^\mu{}_\lambda$$

כרגיל, התמרת הפורייה של הביטוי אינה מוגדרת היטב, מאחר ויש שני קטבים על הציר הממשי. נתענייין ב**פרופגטור פיינמן** שעוקף את הקטבים מכיוונים שונים:

$$\boxed{\left(\tilde{D}_{\mu\nu}\right)^F\left(p\right)=\frac{i}{p^2-\mu^2+i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{\mu^2}\right)}$$

כאשר $\mu\to 0$, כלומר, המקרה מתנוון למקרה חסר המסה, יש לנו בעיה, כי האיבר השני שואף ל־∞.

6.2 השדה הוקטורי חסר המסה

כאשר $\mu=0$, נקבל את צפיפות הלגרנז'יאן:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

בתורת מקסוול, יש לנו את משוואות מקסוול,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0\implies\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}=0\\\nabla\times\mathbf{B}-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0\end{cases}$$

המשוואות הנותרות מתקבלות מזהות Bianchi: $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$. ו־

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu F_{\rho\lambda}=0\implies\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{B}=0\\\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0\end{cases}$$

בשלב זה, ניתן לנסות לבצע קוונטיזציה קאנונית לתורה, אבל היינו נתקלים במספר בעיות:
אין תנע־צמוד ל־A_0. אבל הפעם, הקבוצה $\{A_i,\Pi_i\}$ כבר אינה מהווה קבוצה מלאה של תנאי התחלה:

- כי הפעם, התנאי $\partial_\nu A^\nu=0$, לא נובע ממשוואות התנועה, ולכן $\partial_0 A^0$, לא נקבע על ידי $\partial_i A^i$.
- במקרה המסיבי, $\partial_i F^{0i}=-\partial_i\Pi^i$ היה קשור ל־A^0, אבל הפעם, $\partial_i F^{0i}=-\partial_i\Pi^i=0$, ולכן לא ניתן לקבוע את A^0 על ידי Π^i, ואי אפשר להפטר מדרגת החופש A_0 שאין לה תנע צמוד.

לכן, אי אפשר לעשות קוונטיזציה קאנונית. כן ניתן לעשות קוונטיזציה באמצעות אינטגרלי־מסלול, אבל זה יטופל בתורת־שדות־קוונטית 1.

6.2.1 סימטריית כיול (Gauge Symmetry)

סימטריית כיול היא טרנספורמציה שהפעולה אינוורנטית תחתה. הטרנספורמציה היא

$$A_\mu \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

עבור $\alpha(x)$ פונקציה סקאלרית כלשהי. לא רק הפעולה אינוורינטית תחת הטרנספורמציה, אלא השדה עצמו,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha = 0$$

סימטריית הכיול שונה מסימטריה רגילה. סימטריה רגילה היא טרנספורמציה של השדות שלא משנה את משוואות התנועה. סימטריית כיול לא משנה את הפעולה, אבל היא הרבה יותר מזה: היא לא משנה את הגודל הפיזיקאלי, השדה האלקטרומגנטי, $F_{\mu\nu}$, בעוד סימטריה רגילה כן משנה את הנ"ל. **סימטריית כיול לא משנה אף גודל פיזיקאלי.**

סימטריית הכיול משנה את התאור של הגדלים הפיזיקליים, באמצעות גדלים־לא פיזקאליים. במקרה שלנו, היא משנה את התיאור באמצעות הפוטנציאל A_μ. A_μ אינו גודל פיזיקאלי כי אם תיאור מסויים של הפיזיקה, אותו ניתן לשנות באמצעות טרנספורמציית הכיול. במילים אחרות, סימטריית כיול נובעת מיתירות בתיאור הפיזיקה. כלומר, A_μ מכיל דרגות חופש יתירות, מעבר לדרגות החופש הפיזיקאליות בשדה $F_{\mu\nu}$.

לכן, ניתן להטיל תנאי קביעת־כיול, למשל, כיול קולון, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, או כיול Temporal, $\phi = 0$. תנאים אלו נפתרים מדרגות החופש היתירות. שני כיולים אלו, נפתרים מדרגות החופש היתירות, ובכיול זה, ניתן לבצע קוונטיזציה של משוואות מקסוול. אבל תנאים אלו אינם לורנץ־אינוורינטים, לכן לא נשתמש בהם.

ניתן לקבוע תנאי כיול לורנץ אינוורינטי, כיול לורנץ:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \tag{3}$$

כיול זה אינו פותר את הבעיה לגמרי, משום שזהו תנאי אחד, וכדי להפטר משתי דרגות חופש, דרושים שני תנאים. לכן, גם באמצעות כיול לורנץ, לא ניתן לעשות קוונטיזציה קאנונית. בכיול זה, אפשר לעשות קוונטיזציה באמצעות אינטגרלי־מסלול.

6.3 הגבול של השדה הוקטורי המסיבי

נדון בשדה הוקטורי המסיבי, בגבול ב־$\mu \to 0$. אם נסתכל על פרופגטור פיינמן:

$$\tilde{D}^F_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p^\mu p_\nu}{\mu^2}\right) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

אז הוא מתבדר בגבול $\mu \to 0$. לבסוף, נגשל שהמחובר השני בפרופגטור, לא תורם לתוצאה.

6.3.1 צימוד לחומר

נוסיף מקורות: זרם j^μ. נכתוב את הלגרנז'יאן:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\mu^2 (A_\mu)^2 - A_\mu j^\mu$$

משוואת השדה מקבלת תרומה נוספת:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 A^\nu = j^\nu$$

נגזור פעם נוספת את משוואת התנועה, ונקבל:

$$\boxed{\partial_\nu A^\nu = \frac{1}{\mu^2} \partial_\nu j^\nu}$$

ושוב, איבר המסה נראה כאילו הוא הולך להתבדר כאשר $\mu \to 0$.

אם נדרוש שהזרם נשמר, $\partial_\nu j^\nu = 0$, נקבל את המשוואה,

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

לכן, כדי לצמד שדה־וקטורי חסר־מסה לחומר, דרוש זרם נשמר.
ואכן, לתורת דיראק החופשית, יש זרם נשמר כזה:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}\left(i \not\partial - m\right)\psi$$

והזרם הנשמר הוא $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, כאשר $\psi \to e^{i\alpha}\psi$,ולכן, לגרנז'יאן האינטראקציה יהיה,

$$\mathcal{L}_{int} = ej^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

כאשר e הוא מקדם הצימוד, וכאשר $\mu \to 0$, e יהיה "המטען החשמלי" של הפרמיון.
לכן, התורה המלאה שלנו תהיה:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\left(A_\mu\right)^2 + \bar{\psi}\left(i \not D - m\right)\psi$$

כאשר נגדיר:

$$\begin{aligned} D_\mu &\equiv \partial_\mu + ieA_\mu \\ \not D &= \gamma^\mu D_\mu \end{aligned}$$

לתורה הזו יש סימטריה, $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, שיוצרת את הזרם $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.
בגבול של שדה־וקטורי חסר מסה, זהו,

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \bar{\psi}\left(i \not D - m\right)\psi$$

, הלגרנז'יאן של QED.
לתורה זו יש סימטריה גדולה בהרבה מאשר לשדה המסיבי:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned}$$

כלומר, α אינה קבועה, כי אם תלויה במיקום, $\alpha(x)$, ויש לבצע את הטרנספורמציה ביחד לשדה הוקטורי ולשדה הספינורי.
ברור שהאיבר של $F_{\mu\nu}$ אינווריינטי, מאחר ועבור A זוהי טרנספורמציית כיול. נראה שהאיבר המעורב אינווריינטי לטרנספורמציה:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}D_\mu\psi = \bar{\psi}\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\psi &\to e^{ie\alpha(x)}\bar{\psi}\left(\partial_\mu + ieA_\mu + ie\partial_\mu\alpha(x)\right)e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \\ &= \bar{\psi}\left(\partial_\mu - ie\partial_\mu\alpha(x) + ieA_\mu + ie\partial_\mu\alpha(x)\right)\psi = \bar{\psi}\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\psi \end{aligned}$$

האובייקט $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ מכונה נגזרת קוואריאנטית , והיא קווריאנטית תחת סימטריית הכיול.

6.3.2 הפרופגטור של השדה הוקטורי

כזכור, עבור שדה וקטורי מסיבי,

$$\tilde{D}^F_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p^\mu p_\nu}{\mu^2}\right)\frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

נשתמש בטריק של Stukelberg. נסתכל על תורה עם שדה וקטורי B_μ, שדה סקלארי B ושדה דיראק ψ.

$$\mathcal{L}_{stuk} = -\frac{1}{2}\partial_\mu B_\nu\partial^\mu B^\nu + \frac{1}{2}\mu^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}\mu^2 B^2 + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\left[p_\mu + ieB_\mu + \frac{ie}{\mu}\partial_\mu B\right] - m\right)\psi$$

כאן, הצימוד בין השדה הסקאלרי והספינור הוא בנגזרת של השדה הסקאלרי. בתורה זו יש גם גלי אורך, בנוסף לגלי הרוחב.
נראה שתורה זו נותנת בדיוק את אותו S-Matrix כמו QED.

הפרופגטורים

- עבור הוקטור:

$$\overbrace{B_\nu B_\mu} = \overset{\nu \quad k \quad \mu}{\sim\!\sim\!\sim} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$$

מגיעים אליו בצורה דומה לפרופגטור של A_μ, עבור הלגרנזיאן השונה. הפעם זה יותר קל, כי המטריצה של משוואת השדה היא אלכסונית.

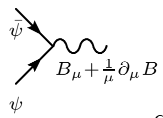
- השדה הסקאלרי,

$$\overset{\nu \quad k \quad \mu}{- - \to - -} = \overbrace{BB} = \frac{i}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$$

- נרצה לדעת אין לצמצם נגזרות של B:

$$\partial_\mu \overbrace{B \partial^\nu B} = \frac{ik_\mu k_\nu}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$$

אבל מכיוון שרק הצירוף של $B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B$ מופיע באינטאקציה, נקבל,



הפרופגטור שיופיע בפיתוח של ה־S-matrix הוא הצירוף:

$$\overbrace{\left(B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B\right)\left(B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B\right)} = \frac{i}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right)$$

- עבור הספינור

$$= \overbrace{\psi\bar{\psi}} = \frac{i\left(\not{p}+m\right)}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

- ועבור הורטקסים:

$$\psi\bar{\psi} \to B_\mu = -ie\gamma^\mu$$
$$\psi\bar{\psi} \to B = -\frac{ie}{\mu}k_\mu\gamma^\mu$$

$$= \psi\bar{\psi} \to B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B$$

נשים לב שהוקטור והסקאלר מופיעים תמיד ביחד בתורה הזו, לכן, ה"פרוטפגטור" האפקטיבי בפיתוח של ה־S-matrix הוא כלומר, לתורה הזו יש אותה S-Matrix כמו ל־QED.

רק הפרופגטור של הצירוף $B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B$ מופיע ב־$S-matrix$, מאחר ובסדר הראשון, שני הפרופגטורים, הוקטורי והסקאלרי, מופיעים ביחד.

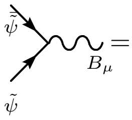
$$= (-ie)^2\, \bar{u}\left(p_1'\right)\gamma^\mu u) p' \frac{i}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right)\bar{u}\left(p_2'\right)u\left(p_2\right)$$

כלומר ה־$S-matrix$ הוא הסכימה של שתי הדיאגרמות, והוא זהה ל־$S-matrix$ של שדה וקטורי מצומד עם שדה־דיראק.

החצי השני של הטריק נחליף משתנים: נגדיר שדה חומר חדש: $\tilde{\psi}(x) = e^{ieB(x)/\mu}\psi(x)$ (כאשר $B(x)$ הוא השדה הסקאלרי). יש לזה צורה של טרנספורמציית כיול, אבל אין לנו סימטריית יכול בתורה. עכשיו, איבר האינטראקציה בלגרנז'יאן, יאבד את השדה הסקאלרי:

$$\left[\partial_\mu + ie\left(B_\mu + \frac{1}{\mu}\partial_\mu B\right)\right]\psi(x) = (\partial_\mu + ieB_\mu)\,\tilde{\psi}(x)$$

נפתרנו מהצימוד לסקאלר, עכשיו הפעולה נראית יותר כמו פעולה של QED. השדה הסקאלרי הוא שדה חופשי, שאין לו אינטראקציה, ואינו משחק שום תפקיד בתורה. ולכן, והא לא תורם לשום תהליך ב־S-matrix. האינטראקציה הבסיסית היא רק עם הוקטור:



$= -ie\gamma^\mu$

אחרי ההגדרה המחודשת, הלגרנזי'אן שהתקבל הוא

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\partial_\mu B_\nu \partial^\mu B^\nu + \frac{1}{2}\mu^2 B_\mu B^\mu \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B - \frac{1}{2}\mu^2 B^2 \\ &+ \bar{\tilde{\psi}}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieB_\mu) - m\right]\psi\end{aligned}$$

השדה הסקאלרי החופשי לא טורם ל־S-matrix, ולכן רק הפרופגטור של B_μ יופיע בה:

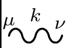
$= \dfrac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$

הסיבה שהתורה לא השתנתה, היא שלא שינינו את הצמצום של הפרמיונים:

$$\tilde{\psi}\bar{\tilde{\psi}} = \psi\bar{\psi}$$

לכן, הפרופגטור החדש שווה לפרופגטור המקורי. לכן, עבור הפרופגטור הוקטורי, ניתן להשתמש בביטוי $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$ ולשכוח מהרכיב התלוי במסה.

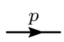
לכן, קיבלנו את הפרופגטור של הפוטון, עבור $\mu \to 0$, ב־QED:



$$\boxed{= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}}$$

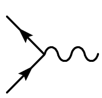
חוקי פיינמן של QED

- פרמיון:

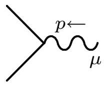


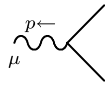
$$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

- ורטקס:

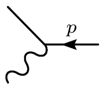

$= ie\gamma^\mu$

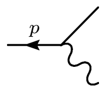
- וקטור חיצוני:

 $= \mathcal{E}_{\mu}(p)$ in

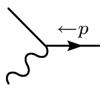
 $= \mathcal{E}^{\star}_{\mu}(p)$ out

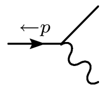
פרמיון חיצוני:

 $= u^{s}(p)$ in

 $= \bar{u}^{s}(p)$ out

אנטי־פרמיון חיצוני:

 $= \bar{v}^{s}(p)$ in

 $= v^{s}(p)$ out

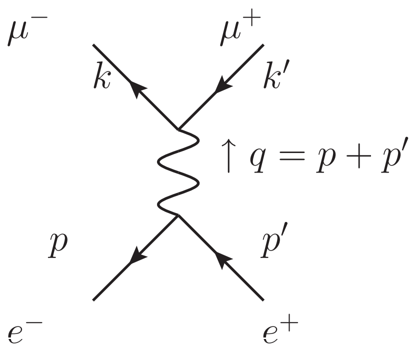
- אין פקטור סימטריה
- הסימן היחסי בין דיאגרמות – הוא חשוב.
- עובדים בכיול לורנץ: $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$.

7 תהליכים בסיסיים ב־QED

7.1 פיזור $e^{+}e^{-} \to \mu^{+}\mu^{-}$

זהו התהליך הפשוט ביותר ב־QED, אבל גם אחד מהחשובים ביותר. יש לו יישומים פיזיקאלים רבים בניסוים ומאיצים. באופן כללי, ראוי להבין אותו עד סדר גבוהה, אבל אנחנו נדון בו עד סדר ראשון בתורת ההפרעות.

מסדר ראשון, יש רק דיאגרמה אחת שתורמת:



$$i\mathcal{M}\left(e^{-}(p)\,e^{+}(p') \to \mu^{-}(k)\,\mu^{+}(k')\right) = \left(\bar{v}^{s'}_{\alpha}(p')\left(-ie\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)u^{s}_{\beta}(p)\right)\left(\frac{ig_{\mu\nu}}{q^{2}}\right)\left(\bar{u}^{r}_{\gamma}(k)\left(-ie\gamma^{\nu}_{\alpha\delta}\right)v^{r'}_{\delta}(k')\right)$$

האיבר הזה הוא סקאלר (חשוב לבדוק דברים כאלו).
איבר הצימוד בין המיואון לפוטון זהה לצימוד בין פוטון ואלקטרון, כאשר המסות שלהם שונות.
נחשב את ריבוע האמפליטודה:

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\star$$

נסתכל על האיברים השונים:

$$\begin{aligned}(\bar{v}\gamma^\mu u)^\star &= u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \left(\gamma^0\right)^\dagger v \\ &= u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v \\ &= u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v \\ &= \bar{u}\gamma^\mu v\end{aligned}$$

לכן,

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\star = \frac{e^4}{q^4} \left(\bar{v}\left(p'\right)\gamma^\mu u\left(p\right)\right)\left(\bar{u}\left(p\right)\gamma^\nu v\left(p'\right)\right)\left(\bar{u}\left(k\right)\gamma_\mu v\left(k'\right)\right)\left(\bar{v}\left(k'\right)\gamma_\nu u\left(k\right)\right)$$

נפשט את הבעיה על ידי התייחסות לבעיה אמיתית: בניסויים, אנחנו לא יודעים מצבי הספין של החלקיקים הנכנסים והיוצאים.
בעקרון, אנחנו יכולים לחשב את כל האפשרויות של אמפליטודה יוצאת ונכנסת בתלות בספינים.

- אין שליטה על הספינים הנכנסים – לכן צריכים לעשות ממוצע
- הגלאי אינו רגיש לספין היוצא – ולכן צריך לסכום על כל המצבים.

לכן, נחשב את חתך הפעולה הלא מקוטב:

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{s,s'}\right)\left(\sum_{r,r'}\right) = |\mathcal{M}|^2$$

את הסכומים, נעשה באמצעות יחסי השלמות של הספינורים:

$$\begin{aligned}\sum_s u^s\left(p\right)\bar{u}^s\left(p\right) &= \not{p} + m \\ \sum_s v^s\left(p\right)\bar{v}^s\left(p\right) &= \not{p} - m\end{aligned}$$

אז, נכתוב מחדש את הסכום שלנו: בחצי הראשון של $\mathcal{M}^2$, החצי שקשור לאלקטרון הנכנס:

$$\sum_{s,s'} \bar{v}^{s'}_\alpha\left(p'\right)\gamma^\mu_{\alpha\beta}u^s_\beta\left(p\right)\left(\bar{u}^s_\gamma\left(p\right)\gamma^\nu_{\gamma\delta}v^{s'}_\delta\left(p'\right)\right)$$

עכשיו, כולם מספרים, לכן נוכל לסדר אותם מחדש:

$$= \gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\gamma\delta}\left(\sum_{s'} v^{s'}_\delta\left(p'\right)\bar{v}^{s'}\left(p'\right)\right)\left(\sum_s u^s_\beta\left(p\right)\bar{u}^s_\gamma\left(p\right)\right)$$

כאשר, לפי הסכם הסכימה, יש סכימה על האינדקסים הספינורים, שמופיעים פעמיים. אבל, הסוגריים מקבצים בדיוק את יחסי השלמות, לכן,

$$= \gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\gamma\delta}\left(\not{p} - m\right)_{\delta\alpha}\left(\not{p} + m\right)_{\beta\gamma}$$

הביטוי הזה נותן לנו את העקבה של מכפלת מטריצות (כי יש לנו "מעגל סגור" של אינדקסים) :

$$= \mathrm{trace}\left(\left(\not{p} - m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p} + m_e\right)\gamma^\nu\right)$$

החצי השני של המטריצה, החצי של המיואון הוא

$$\sum_{r,r'}\left(\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k')\right)\left(\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^t(k)\right) = \mathrm{trace}\left(\left(\not{k} + m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not{k}' - m_\mu\right)\gamma_\nu\right)$$

כאשר m_μ היא המסה של המיואון.

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{trace}\left(\left(\not{p} - m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p} + m_e\right)\gamma^\nu\right)\mathrm{trace}\left(\left(\not{k} + m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not{k}' - m_\mu\right)\gamma_\nu\right)}$$

באופן כללי, חישוב של חתך פעולה לא־מקוטב הוא ביטוי שמכיל עקבות של מטריצות דיראק.

7.1.1 חישוב עקבות של מטריצות דיראק

נרצה לדעת איך לחשב עקבות של מכפלות של מטריצות דיראק.
באופן כללי, עבור מכפלה של n מטריצות דיראק:

$$\mathrm{trace}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}\right) = ?$$

- עבור $n=0$ $\mathrm{trace}(I) = 4$.
- עבור $n=1$, ראינו, שבהצגה הכיראלית, מטריצות γ הם מטריצות בלוקים, כשהבלוקים מחוץ לאלכסון, לכן, $\mathrm{trace}(\gamma^\mu)$. אפשר להסתכל על זה בצורה קצת אחרת:

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(\gamma^\mu) &= \mathrm{trace}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right)\\ &= -\mathrm{trace}\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\right)\end{aligned}$$

בגלל התכונה הציקלית של העקבה, ניתן להחליף בצורה מעגלית את המטריצות, ולקבל

$$\begin{aligned}&= -\mathrm{trace}\left(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right)\\ &= -\mathrm{trace}(\gamma^\mu) \implies \mathrm{trace}\gamma^\mu = 0\end{aligned}$$

- $n=2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= \mathrm{trace}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\\ &= 8g^{\mu\nu} - \mathrm{trace}(\gamma^\nu\gamma^\mu)\end{aligned}$$

לכן,

$$\mathrm{trace}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

- עבור $n=4$,

$$\mathrm{trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right)$$

בצורה דומה, ניתן לחשב את העיקבה של כל מספר זוגי של מטריצות דיראק.

- עבור n זוגי כללי: ניתן להפוך אותה לסכום של עקבום עם $n-2$ מטריצות.

תכונות של עקבות שכוללות את γ^5 עם המטריצה γ^5 , יש רק עקבה אחת שאינה טריוויאלית:

$$\text{trace}\left(\gamma^5\right) = 0$$

$$\text{trace}\left(\gamma^5 \underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu\cdots}_{odd}\right) = 0$$

גם עבור מספר זוגי של מטריצות, זה בדרך כלל מתאפס. המקרה היחיד שאינו מתאפס הוא

$$\text{trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\right) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

זהויות שימושיות

$$\text{trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\cdots\right) = \text{trace}\left(\cdots\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\right)$$

(הפיכת הסדר של המכפלה.
זהויות צמצום:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\cdot I$$

ניתן לצמצם אותם גם כשיש מטריצה בינהן:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$$

ואפשדר להמשיך..

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4\gamma^{\nu\rho}\cdot I$$

7.1.2 חזרה לחישוב:

$$\begin{aligned}\text{trace}\left(\left(\not p - m_e\right)\gamma^\mu\left(\not p + m_e\right)\gamma^\nu\right) &= \text{trace}\left[\left(p'_\alpha\gamma^\alpha - m_e\right)\gamma^\nu\left(p_\beta\gamma^\beta + m_e\right)\gamma^\nu\right] \\ &= 4p'_\alpha p_\beta\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\right) - 4m_e^2 g^{\mu\nu} \\ &= 4\left[p'^\mu p'^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}\left(p\cdot p' + m_e^2\right)\right]\end{aligned}$$

בצורה דומה,

$$\text{trace}\left(\left(\not k + m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not k' - m_\mu\right)\gamma_\nu\right) = 4\left[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}\left(k\cdot k' + m_\mu^2\right)\right]$$

מאחר ו־$\frac{m_u}{m_e} \approx 200$, נקרב: $m_e \approx 0$. לכן, התיקון ממסת האלקטרון קטן מקבוע המבנה הדק, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$, הוא הקבוע הקטן לפיו אנחנו עישים הפרעות. אם היינו עובדים מסדר גבוהה יותר בתורת ההפרעות, היינו צריכים להניח את מסת האלקטרון.
לכן,

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^2}{q^4}\left[\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right) + \left(p\cdot k'\right)\left(p'\cdot k\right) + \mu_2^2\left(p\cdot p'\right)\right]}$$

הצבת קבועים: נעבוד במערכת מרכז המסה:

$$e^- : p = (E, E\hat{z}), \qquad e^+ : p\,(E, -E\hat{z})$$

ומיואונן ואנטי מיואון עם אותה האנרגיה E, והפיזור הוא במישור $x-z$,

$$\mu^- : (E, \mathbf{k}), \qquad , \mu^+ : (E, -\mathbf{k})$$

כאשר $\hat{z}\cdot\hat{k} = \cos\theta$, θ הזווית בין כיוון החלקיקים הנכנסים ליוצאים.

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \\ \mathbf{k}\cdot\hat{z} &= |\mathbf{k}|\cos\theta \end{aligned}$$

התנע של הפוטון,

$$\begin{aligned} q^2 &= (p+p')^2 = 4E^2 \\ p\cdot p' &= 2E^2 \\ p\cdot k &= p'\cdot k' = E^2 - E\,|\mathbf{k}|\cos\theta \\ p\cdot k' &= p'\cdot k = E^2 + E\,|\mathbf{k}|\cos\theta \end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4}\left[E^2\left(E - |\mathbf{k}|\cos\theta\right)^2 + E^2\left(E + |k|\cos\theta\right)^2 + 2m_\mu^2E^2\right] \\ &= e^4\left[\left(1 + \frac{m_u^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] \end{aligned}$$

7.1.3 חתך הפעולה הדיפרנציאלי

נחשב את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפי הנוסחא:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm} = \frac{1}{2E_A 2E_B\left(v_A - v_B\right)}\frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2\,4E_{cm}}\left|\mathcal{M}\left(p_Ap_B \to p_1p_2\right)\right|^2$$

במקרה שלנו, האלקטרון חסר מסה, ולכן $|v_A| = |v_B| = 1$, ולכן $|v_A - v_B| = 2$. כמו כן, האנרגיה של החלקיקים שווה, ולכן

$$E_A = E_B = E = \frac{E_{cm}}{2}$$

ו־

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm} &= \frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2E_{cm}}\left(\frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2\right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{cm}}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{cm}^2}}\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] \end{aligned}$$

כאשר $E \gg m_\mu$, נקבל

$$\boxed{\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2}\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

ניתן לעשות אינטגרל על שתי הזוויות:

$$\boxed{\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)}$$

7.1.4 חתכי פעולה מקוטבים

בגבול שבו $m_e, m_\mu = 0$, מצבי ספין הם מצבים עצמיים של Helicity. ניתן לחשב חתכי פעולה מקוטבים, בשני דרכים.
ניתן לחשבת זאת בשני דרכים:

- בתרגיל, נחשב באופן ישיר על ידי חישוב האמפליטודות, עם מצבי Helicity מסויימים, באמצעות הביטויים המפורשים של הספינורים, u, v.
- באמצעות הטלה וסכימה.

האמפליטודה,

$$\mathcal{M}\left(e^-(p)\,e^+(p') \to \mu^-(k)\,\mu^+(k')\right) = \frac{e^2}{q^2}\bar{v}^{s'}(p')\,\gamma^\mu u^s(p)\,\bar{u}^r(u)\,\gamma_\mu v^{r'}(k')$$

המטריצה: $\frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, היא הטלה על Helicity חיובי (ימני). $\frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ יהא הטלה על helicity שמאלי.
באמפליטודה יש את הביטוי הבילנארי $\bar{v}^{s'}(p')\,\gamma^\mu u^s(p)$, של האלקטרון והפוזיטרון, ואת החלק השני, של המיואון. אם נסתכל על להחלק של האלקטרון,

$$\bar{v}(p')\,\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u(p)$$

המטריצה פועל על u, והופכת אותו לאלקטרון ימני. זה גם מחייב את $v(p')$ להיות ימני: מכיוון שניתן להעביר את המטריצות:

$$\underbrace{\bar{v}^\dagger(p')\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)}_{right\,spinor}\gamma^0\gamma^\mu u(p)$$

$\gamma^0\gamma^\mu$ היא בלוק־אלכסונית, ולכן כל אחד מתתי־המרחבים הספינוריים הוא $\gamma^0\gamma^\mu$־אינווריינטים. אבל הבורגיות של הספינור ושל החלקיק, הם זהים עבור חלקיקים, והפוכים עבור אנטי־חלקיקים. לכן, הפוזיטרון הוא שמאלי.
ספינור v ימני $\Leftarrow$ אנטי־חלקיק שמאלי.
האמפליטודה עם $\frac{1+\gamma^5}{2}$ מתאפסת, אלא אם כן, האלקטרון הוא ימני והפוזיטרון שמאלי.
$\frac{1-\gamma^5}{2}$, אלקטרון שמאלי ופוזיטרון שמאלי.
נחשב את אחד המקרים, ונרשום את התוצאות לשאר המקרים

נחשב את המקרה של $e^-_R e^+_L \to \mu^-_R \mu^+_L$

$$\sum_{e^\pm spins}\left|\bar v\left(p'\right)\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u\left(p\right)\right|^2=\sum_{s,s'}\bar v^{s'}\left(p'\right)\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u^s\left(p\right)\bar u^s\left(p\right)\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v^{s'}\left(p'\right)$$

יש לנו סכימה על כל המצבים, אז אפשר להשתמש ביחסי השלמות, אבל בעצם, בגלל ההטלה, רק המצבים שמעניינים אותנו טורמים:

$$=\mathrm{trace}\left[\not p'\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\not p\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right]=\mathrm{trace}\left[\not p'\gamma^\mu\not p\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right]$$

נחשב את שתי העקבות:

$$=2\left(p'^\mu p^\nu+p'^\nu p^\mu-g^{\mu\nu}p\cdot p'+i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p'_\alpha p_\beta\right)$$

באותה צורה, עבור המיואונים נשתמש גם בהטלה עם $\frac{1+\gamma^5}{2}$,

$$\sum_{e^\pm spins}\left|\bar u\left(k\right)\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)v\left(k'\right)\right|^2=2\left(k_\mu k'_\nu+k_\nu k'_\mu-g_{\mu\nu}k\cdot k'-i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}k^\rho k'^\sigma\right)$$

נכפול את שני הביטויים, ונקבל,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{M}\right|^2&=\frac{4e^2}{q^4}\left[2\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+2\left(p\cdot k'\right)\left(p'\cdot k\right)-\underbrace{\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu}}_{-2\left(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma-\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho\right)}p'_\alpha p_\beta k^\rho k^\sigma\right]\\&=\frac{16e^2}{q^4}\left[2\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+2\left(p\cdot k'\right)\left(p'\cdot k\right)\right]\end{aligned}$$

במערכת מרכז המסה,

$$p\cdot k'=p'\cdot k=E^2\left(1+\cos\theta\right)=\frac{1}{4}q^2\left(1+\cos\theta\right)$$

לכן,

$$\left|\mathcal{M}\right|^2=e^4\left(1+\cos\theta\right)^2$$

נציב בחתך הפעולה:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\left(e^-_R e^+_L\to\mu^-_R\mu^+_L\right)&=\frac{\left|\mathcal{M}\right|^2}{64\pi^2E^2_{cm}}\\&=\frac{\alpha^2}{4E^2_{cm}}\left(1+\cos\theta\right)^2\end{aligned}$$

האפשרויות הנוסחות הן:

$$\begin{aligned}e^-_R e^+_L\to\mu^-_L\mu^+_R&\implies\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm}=\frac{\alpha^2}{4E^2_{cm}}\left(1-\cos\theta\right)^2\\e^-_L e^+_L\to\mu^-_R\mu^+_R&\implies\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm}=\frac{\alpha^2}{4E^2_{cm}}\left(1-\cos\theta\right)^2\\e^-_L e^+_R\to\mu^-_L\mu^+_R&\implies\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm}=\frac{\alpha^2}{4E^2_{cm}}\left(1+\cos\theta\right)^2\end{aligned}$$

כאשר הסימן של ה־"cos" מתחלף כאשר מחליפים כל אחד מהמצבים, וכאשר מחליפים את שניהם, הסימן מתחלף פעמיים.

הערה 7.1 • יש רק ארבע אפשרויות שאינן טריוויאליות: כל האפשרויות האחרות מתאפסות.

- אם נסכום ונמצע על הספינים הנכנסים (נסכום ונחלק ב־4) נקבל חזרה את חתך הפעולה הלא־מקוטב.
- מחתכי הפעולה מתאפסים בזוויות מסויימות, בגלל שימור תנע זוויתי. למשל:

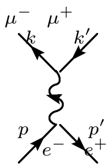
$$e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+ : \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta = \pi) = 0$$

כלומר, האלקטרונים "מוחזרים" אחורה בתור מיואונים, והופכים את התנע הזוויתי שלהם.

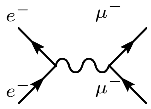
7.2 סימטריית הצלבה ומשתני Mandelstam

זוהי סימטריה שנובעת מכך שדיאגרמות פיינמן, שמייצגות תהליכים פיזקאליים שונים, נראות אותו הדבר. אפשר להשתמש בכך כדי לפשט את החישוב של אמפליטודות פיזור.

עד כה חישבנו תהליך אחד, $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$, שמיוצגת על ידי דיאגרמה אחת בלבד:



דיאגרמה זו דומה מאוד לדיאגרמה של תהליך שונה: $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$:



$$= \frac{ie^2}{q^2}\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p')\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(p_2)$$

שני האמפליטודות נראות אותו הדבר, אבל מסובבות ב־$90°$.

אזי, אמפלטטודת הפיזור היא:

$$\frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}\left(e^-\mu^- \to e^-\mu^-\right)\right| = \frac{e^4}{4\tilde{q}^4}\text{trace}\left(\left(\not{p}_1 + m_e\right)\gamma^\mu\left(\not{p}_1 + m_e\right)\gamma^\nu\right)\text{trace}\left(\left(\not{p}_2' + m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_2 + m_\mu\right)\gamma_\nu\right)$$

בתהליך המקורי, היה לנו:

$$\frac{1}{4}\sum\left|m\left(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+\right)\right| = \frac{e^4}{4q^4}\text{trace}\left(\left(\not{p}' - m_E\right)\gamma^\mu\left(\not{p} + m_e\right)\gamma^\nu\right)\text{trace}\left(\left(\not{k} + m_\mu\right)\gamma_\mu\left(\not{k}' - m_\mu\right)\gamma_\nu\right)$$

$$\overset{m_e=0}{=} \frac{8e^4}{q^4}\left[(p\cdot h)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) + m_\mu^2(p\cdot p')\right]$$

ניתן להפוך את הביטוי המקורי לביטוי החדש, על ידי ההחלפה: $p \to p_1$, $p' \to -p_1'$ ו־$k \to p_2'$, $k' \to -p_2$. תחת ההחלפה הזו, שני הביטויים מזדהים. זה שימושי לפעמים כאשר החישוב של העקבות מסובך. לאחר החלפת המשתנים, נקבל,

$$\frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}\left(e^-\mu^- \to e^-\mu^-\right)\right| = \frac{8e^4}{\tilde{q}^4}\left[(p_1\cdot p_2')(p_1'\cdot p_2) + (p_1\cdot p_2)(p_1'\cdot p_2') - m_\mu^2 p_1 p_1'\right]$$

הקינמטיקה שונה המרכיב השני של חתך הפעולה הוא הקינמטיקה. הקינטמטיקה של שני התהליכים היא מאוד שונה.

במערכת מרכז המסה של התהליך השני, בקירוב $m_e = 0$, נקבל, במערכת מרכז המסה,

$$p_1 = (k, k\hat{z})$$
$$p_2 = (E, -k\hat{z}) \qquad E^2 = k^2 + m_\mu^2$$

האלקטרון מתפזר לזווית θ, אזי

$$p_1' = (k, \mathbf{k}) \qquad \mathbf{k}\cdot\hat{z} = k\cos\theta$$
$$p_2' = (E, -\mathbf{k})$$

אזי

$$p_1\cdot p_2 = p_1'\cdot p_2' = k\,(E+k)$$
$$p_1'\cdot p_2 = p_1\cdot p_2' = k\,(E+k\cos\theta)$$
$$p_1\cdot p_1' = k^2\,(1-\cos\theta)$$
$$q^2 = (p_1-p_1')^2 = -2p_q\cdot p_1' = -2k^2\,(1-\cos\theta)$$

כמו כן, מתקיים, $E^2 = k^2 + m_\mu^2$, לכן יש רק שני משתנים, בסך הכל. לכן,

$$\frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}\left(e^-\mu^-\to e^-\mu^-\right)\right| = \frac{2e^4}{k^2\,(1-\cos\theta)^2}\left[(E+k)^2 + (E+k\cos\theta)^2 - m_\mu^2\,(1-\cos\theta)\right]$$

הביטוי הזה שונה מאוד מהביטוי האנלוגי שקיבלנו עבור התהליך השני. אחד ההבדלים המשמעותיים יותר הוא $\frac{1}{k^2(1-\cos\theta)^2}$. נחשב את חתך הפעולה:

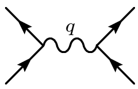
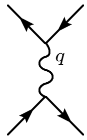
$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm} = \frac{1}{2E_1E_2\,|V_1-V_2|}\frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2\,4E_{cm}}\left(\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2\right)$$

מאחר והאלקטרון חסר מסה, $v_1=1$, ו־ $v_2=\frac{k}{E}$, ולכן $|v_1-v_2| = 1+\frac{k}{E}$, נציב את E_1 אנרגיית האלקטרון, ו־E_2, אנרגיית המיואון, ונסתכל על הגבול של מיואון חסר מסה (שם יש לנו ביטוי פשוט שאפשר להשוות לתהליך המקורי) $E\gg m_\mu$, ולכן נניח $m_\mu=0$, ונקבל

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm}\left(e^-\mu^-\to e^-\mu^-\right) = \frac{\alpha^2}{2E_{cm}^2\,(1-\cos\theta)^2}\left[4+(1+\cos\theta)^2\right]}$$

כאשר $E_{cm} = E+k$, האנרגיה הכוללת במרכז המסה. נשווה לביטוי עבור $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$, במקרה ש־$E\gg m_\mu$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{cm}\left(e^-e^+\to\mu^-\mu^+\right) = \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

המכנה, $(1-\cos\theta)^2$**, והתבדרות ב־**$\theta=0$ מכאן, אנחנו מקבלים שחתך הפעולה מתבדר בזווית $\theta=0$, בפיזור קדמי. הסיבה נובעת מהעובדה, שכאשר θ קטן, הפוטון הוירטואלי,  , מתקיים $q^2=(p_1-p_1')^2 = -2k^2\,(1-\cos\theta)$. חלקיק וירטאלי הוא off-shell, $p^2\neq m^2$, אבל כאשר $\theta\to 0$, הוא מתקרב לשוויון, ובמצב כזה, הפרופגטור מתבדר. בתהליך המקורי,  , $q^2=(p+p')^2=(2E)^2$, q לא מתאפס, ולכן אין התבדרות כזו. ניסוח אחר לסיבה להבדל: אין ורקס שבה אלקטרון ומיואון נפגשים והופכים לפוטון.

7.2.1 הצלבה

הגדרה 7.2 אלמנט של ה־S-matrix עם חלקיק נכנס בתנע p, שווה לאלמנט עם אנטי־חליקיק בתנע $k=-p$.

כלומר, אם יש לנו

$$\mathcal{M}\left(\phi\left(p\right)+\ldots\rightarrow\cdots\right)=\mathcal{M}\left(\ldots\rightarrow\cdots+\bar{\phi}\left(k=-p\right)\right)$$

השוויון הזה הוא קצת בעייתי כשחושבים על מצבים פיזיקאליים. אם אנחנו מחליפים תנע של חלקיק נכנס למינוס־תנע של אנטיחלקיק יוצא, לא כולם יכולים להיות מצבים פיזיקאליים. סימטריית הצלבה מקשרת בין אלמנטים של S-matrix, אבל לא On-shell, כי לאחד החלקיקים יש עכשיו אנרגיה שלילית. האמפליטודות מוגדרות רק עבור חלקיקים עם אנרגיות חיוביות, אבל ניתן להרחיב את ההגדרה על ידי "המשכה אנליטית" (של פונקציות מרוכבות). התהליך משנה חלקיק פיזקאלי לאנטי־חלקיק לא פיזקאלי, אבל ניתן להשתמש בו גם עבור אנטי־חלקיקים פיזיקאליים (עם $k_0>0$)

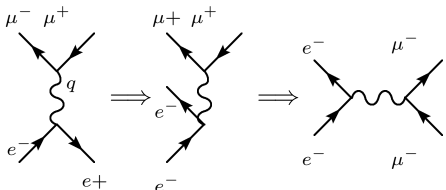
עבור פרמיונים, יש הרחבה של המשפט. יהיה סימן שלילי נוסף, מאחר ויש הבדל בין חלקיקים ואנטי־חלקיקים: עבור חלקיקים,

$$\sum u\left(p\right)\bar{u}\left(p\right)=\not{p}+m\rightarrow-\not{k}+m=-\sum v\left(p\right)\bar{v}\left(p\right)$$

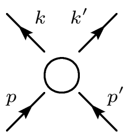
כלומר, **כל פעם שמצליבים פרמיון לאנטי־פרמיון, כופלים ב־(-1)** .

7.2.2 משתני Mandlestam

נרצה לקבל תהליך $e^-e^-\rightarrow\mu^-\mu^-$



ביצענו שני החלפות אז הסימן הכללי נשאר בעינו, אבל מסובך לעקוב אחרי התנעים. נגדיר את משתני מנדלסטם: עבור תהליך הללי עם p,p' נכנסים ו־k,k' יוצאים,



אזי נגדיר את המשתנים, להיות:

$$\begin{aligned}s&\equiv\left(p+p'\right)^2=\left(k+k'\right)^2\\t&\equiv\left(k-p\right)^2=\left(k'-p'\right)^2\\u&\equiv\left(k'-p\right)^2=\left(k-p'\right)^2\end{aligned}$$

ומתקיים, באופן כללי,

$$s+t+u=\sum_{i=1}^{4}m_i^2$$

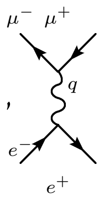
כאשר המסות שוות, $k=(E,\mathbf{p})$, $p=(E,p\hat{z})$, $p'=(E,-p\hat{z})$, $k'=(E,-\mathbf{p})$, אז

$$\begin{aligned}s&=\left(2E\right)^2=E_{cm}^2\\t&=-2p^2\left(1-\cos\theta\right)\\u&=2p^2\left(1+\cos\theta\right)\end{aligned}$$

כאשר s הוא ריבוע אנרגיית מרכז המסה, t הוא ה־Momentum Transfer, כמות האנרגיה שעברה מהחלקיק הנכנס הראשון ליוצא הראשון, ו־u הוא Cross-momentum-transfer, התנע שעבר מהנכנס הראשון לנכנס השני, לכן,

$$s+t+u=4m^2$$

עבור התהליך המקורי, $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, במקרה שבו $m_e = m_\mu = 0$, הדיאגרמה,



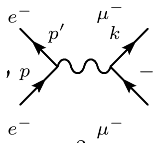
, אז

$$s = (p+p') = q^2$$
$$t = (k-p)^2 = -2p\cdot k = -2p'\cdot k'$$
$$u = -2p'\cdot k = -2p\cdot k'$$

אזי,

$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]$$

אזי, עבור התהליך החדש, $e^-e^- \to \mu^-\mu^-$



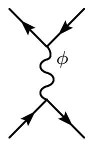
, אז

$$s' = (p\cdot k')^2 = u$$
$$t' = (-p'-p)^2 = s$$
$$u' = (k-p)^2 = t$$

אזי, כל שנדרש כדי לקבל את הדיאגרמה החדשה, היא לעשות את ההחלפה הנ"ל,

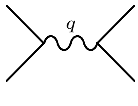
$$\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(t')^2}\left[\left(\frac{u'}{2}\right)^2 + \left(\frac{s'}{2}\right)^2\right]$$

ערוץ S זוהי דיאגרמה מהצורה



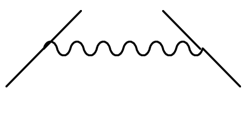
$$\sim \frac{1}{s-m_\phi^2}$$

ערוץ t **,**



$$\sim \frac{1}{t-m_\phi^2}$$

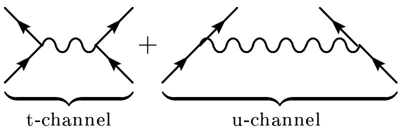
ערוץ u



$$\sim \frac{1}{u-m_\phi^2}$$

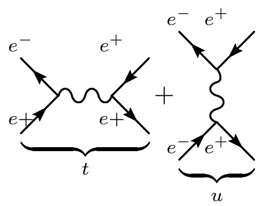
7.2.3 דוגמאות מ־QED

- פיזור Moller, $e^-e^- \to e^-e^-$, הדיאגרמות הן:

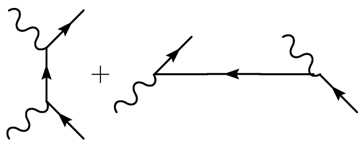


נשים לב לקשרי ההצלבה: עבור הדיאגרמה לפיזור t , נהפוך פוזיטרון יוצא לאלקטרון נכנס ופוזיטרון יוצא לאלקטרון נכנס, ונקבל על פיזור Bhabha., בערוץ s.

- פיזור Bhabha, $e^-e^+ \to e^-e^+$



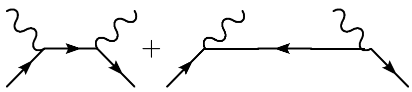
- פיזור קומפטון, $e^-\gamma \to e^-\gamma$,



ואלו הם דיאגרמת s (מימין) ו־u (משמאל)

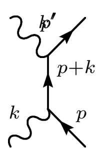
– ניתן להפוך דיאגרמת קומפטון בערוץ s להשמדה..

- השמדה, $e^-e^+ \to \gamma$,

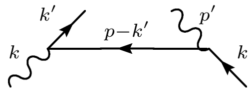


7.3 פיזור קומפטון $e^-\gamma \to e^-\gamma$

יש לנו דיאגרמה אחת מערוץ S:

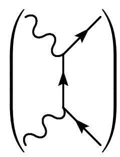


ובערוץ u:



נרצה לחשב את חתך הפעולה הלא־מקוטב.
נסמן את הרגל החיצונית של פוטון נכנס ב־$\epsilon_\nu(k)$ ושל פטון יוצא ב־$\epsilon^\star_\mu(k')$.

נסתכל ראשית על ערוץ s, ולאחר מכן על ערוץ u:



$$i\mathcal{M}=\bar{u}^s_\alpha\left(p'\right)\left(-ie\gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)\epsilon^\star_\mu\left(k'\right)\frac{i\left(\not p+\not k+m\right)_{\beta\gamma}}{\left(p+k\right)^2-m^2}\left(-ie\gamma^\nu_{\gamma\delta}\right)\epsilon_\nu\left(k\right)u^r_\delta\left(p\right)$$

$$+\bar{u}\left(p'\right)\left(ie\gamma^\nu\right)\epsilon_\nu\left(k\right)\frac{i\left(\not p-\not k'+m\right)}{\left(p-k'\right)^2-m^2}\left(-ie\gamma^\mu\right)\epsilon^\star_\mu\left(k'\right)u\left(p\right)$$

נשים לב שעכשיו לא נוכל להזניח את מסת האלקטרון, מאחר שהפוטון הוא באמת חסר מסה.

$$=-ie^2\epsilon^\star_\mu\left(k'\right)\epsilon_\nu\left(k\right)\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^\mu\left[\not p+\not k+m\right]\gamma^\nu}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{\gamma^\nu\left(\not p-\not k+m\right)\gamma^\mu}{\left(p-k'\right)^2-m^2}\right]u\left(p\right)$$

אפשר לפשט את המכנים באמצעות הזהויות: $p^2=\left(p'\right)^2=m^2$, ו־$k^2=\left(k'\right)^2=0$, לכן,

$$\left(p+k\right)^2-m^2=2p\cdot k$$
$$\left(p-k'\right)^2-m^2=-2p\cdot k'$$

וניתן לפשט את המונים באמצעות הזהות המגדירה של מטריצות דיראק, $\left\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\right\}=2g^{\mu\nu}$, ואז

$$\left(\not p+m\right)\gamma^\nu u\left(p\right)=\left(2p^\nu-\gamma^\nu\not p+\gamma^\nu m\right)u\left(p\right)\qquad\text{By Dirac Eq:}(\not p+m)u(p)=0$$
$$=2p^\nu u\left(p\right)$$

לכן, הביטוי החדש יהיה

$$i\mathcal{M}=ie^2\epsilon^\star_\mu\left(k'\right)\epsilon_\nu\left(k\right)\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^\mu\not k\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{-\gamma^\nu\not k'\gamma^\mu+2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u\left(p\right)$$

נסכום על הקיטובים - הקיטובים של הפוטונים ומצבי הספין של הפרמיונים. נסכום על הקיטובים:

$$\sum_s u^s\left(p\right)\bar{u}^s\left(p\right)=\not p+m$$

לפי יחסי השלמות של הפרמיונים. נראה כי כל עוד הביטוי יושב בתוך אמפליטודה ב־QED, ניתן להחליף:

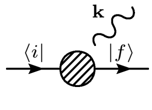
$$\sum_{r=1}^{2}\epsilon^{r\star}_\mu\left(k\right)\epsilon^r_\nu\left(u\right)\to-g_{\mu\nu}$$

עבור פוטון שנע על ציר $\hat{z}$, $k_\mu=\left(k,0,0,k\right)$, הקיטובים הפיזיקאליים הם:

$$\epsilon^{(1)}_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,i,0\right)$$
$$\epsilon^{(2)}_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,-i,0\right)$$

כי הקיטוב השלישי קיים, אבל לא תורם לתהליכים פיזיקאליים.

נסתכל על תהליך כללי ב־QED:



$$=i\mathcal{M}=i\mathcal{M}^\mu\left(k\right)\epsilon^\star_\mu\left(k\right)$$

אזי, חתך הפעולה המקוטב יהיה

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \sum_{r=1}^{2} \left| \mathcal{M}^\mu e_\mu^{(r)\star} \right|^2 = \left|\mathcal{M}^1\right|^2 + \left|\mathcal{M}^2\right|^2$$

מצד שני, ניתן לבטא את $\mathcal{M}^\mu$ באמצעות הזרם,

$$\mathcal{M}^\mu (k) = \int \mathrm{d}^4 x e^{ik\cdot x} \left\langle f \mid j^\mu (k) \mid i \right\rangle$$

כדי להצמיד חומר לוקטור חסר מסה, יש לעשות זאת באמצעות וקטור שנשמר, כי לאחר שמצמצמים $\left\langle f, \boxed{\gamma_k | A_\mu} j^\mu | i \right\rangle$, נותר רק $\langle f | j^\mu | i\rangle$. מסימטריית כיול, $\partial^\mu j_\mu = 0$, ולכן

$$\boxed{k_\mu \mathcal{M}^\mu (k) = 0}$$

כי כפל ב־k_μ של פורייה טרנספורם של משהו, זה כמו לעשות פורייה טרנספורם של נגזרת (פורייה טרנספורם של נגזרת, היא מכפלה בתנע). זוהי זהות כללית, עבור כל אמפליטודה ב־QED, ונקרת **זהות Ward**, ונובעת מסימטריית־כיול בתורה.

לכן, נוכל לכתוב

$$k_\mu = (k,0,0,k) \implies \mathcal{M}^0 = -\mathcal{M}^3$$

ולכן, נוכל לקחת את הסכום,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega} &= \sum_{r=1}^{2} \left| \mathcal{M}^\mu \epsilon_\mu^{\star(r)} \right|^2 = \left(\mathcal{M}^1\right)^2 + \left(\mathcal{M}^2\right)^2 \\ &= \left(\mathcal{M}^1\right)^2 + \left(\mathcal{M}^2\right)^2 + \underbrace{\left(\mathcal{M}^3\right)^2 - \left(\mathcal{M}^0\right)^2}_{=0} \\ &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\star\nu} \end{aligned}$$

לכן, כל עוד מדובר על אמפליטודה ב־QED, ניתן להחליף $\sum_{r=1}^{2} \epsilon_\mu^{r\star}(k)\, \epsilon_\nu^r (u) \to -g_{\mu\nu}$.

חזרה לחישוב האמפליטודה

$$\frac{1}{4}\sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \mathrm{trace} \left[(\not p + m) \left(\frac{\gamma^\mu \not k \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not k' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k} \right) (\not p + m) \left(\frac{\gamma^\sigma \not k \gamma^\rho + 2\gamma^\rho p^\sigma}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not k' \gamma \ldots}{2 \ldots} \right.\right.$$

נכתוב את הביטוי כמכפלה של מטריצות, אזי

$$= \frac{e^4}{4} \left[\frac{A}{(2p\cdot k)^2} + \frac{B}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')} + \frac{C}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)} + \frac{D}{(2p\cdot k')^2} \right]$$

ונרצה לחשב את A, B, C, D, שכל אחד מהם הוא עקבה של עד שמונה מטריצות.
מספיק לחשב שניים מהם, ואז נסים את השניים האחרים:

- נשים לב של־A ול־D יש אותו מבנה: $A \leftrightarrow D$, תחת $k \leftrightarrow k'$
- $B = C$ ו־, מכיוון שאפשר להפוך לגמרי את סדר המטריצות בעקבה. למשל,

$$\underbrace{g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \mathrm{trace} \left(\not p' \gamma^\mu \not k \gamma^\nu \not p \gamma^\rho \not k \gamma^\sigma \right)}_{\in B} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \mathrm{trace} \left(\gamma^\sigma \not k \gamma^\rho \not p \gamma^\nu \not k \gamma^\mu \not p \right)$$

נזיז באופן ציקלי,

$$= g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \mathrm{trace}\left(\not{p}' \gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \right)$$

נחליף $\rho \leftrightarrow \mu$ ו־$\sigma \leftrightarrow \nu$, ונשתמש בסימטריות של $g_{\mu\nu}$,

$$= g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \left(\not{p}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho \right)$$

ונקבל את האיבר ב־C.

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{trace}\left(\left(\not{p} + m \right) \left(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu \right) \left(\not{p} + m \right) \left(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu \right) \right) \\ B &= \mathrm{trace}\left(\left(\not{p}' + m \right) \left(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu \right) \left(\not{p} + m \right) \left(\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - \gamma_\nu p_\mu \right) \right) \end{aligned}$$

יש לנו לכאורה 16 חישובים בכל אחד מהם, אבל בעצם רק 8 בכל ביטוי, כי אי־זוגיים מתאפסים. נחשב את הארוך ביותר:

$$\mathrm{trace}\left[\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \right]$$

הדרך הלא טובה היא לחשב רקורסיבית. נשתמש בזהויות צמצום: $\gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu = -2 \not{p}$, לכן,

$$= \mathrm{trace}\left[\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \left(-2 \not{p} \right) \not{k} \gamma_\mu \right]$$

נשתמש שוב פעם בזהות צמצום: $\gamma^\mu \not{k} \left(-2 \not{p} \right) \not{k} \gamma^\mu = 4 \not{k} \not{p} \not{k}$, ולכן

$$= 4\mathrm{trace}\left(\not{p}' \not{k} \not{p} \not{k} \right)$$

כאשר יש לנו נוסחא לעקבה של 4 מטריצות דיראק כסכום של מכפלות של מטריקות

$$= 16 \left[p' \cdot k \, p \cdot k + p' \cdot k \, p \cdot k - \cancelto{0}{k^2 p' \cdot p} \right] = 32 \left(p \cdot k \right) \left(p' \cdot k \right)$$

החישובים של שאר התרומות פשוטים יותר.

$$\begin{aligned} A &= 32 \left(m^4 + m^2 \left(p \cdot k \right) + \left(p \cdot k \right) \left(p \cdot k' \right) \right) \\ B = C &= -16 \left(2m^4 + m^2 p \cdot k - m^2 p \cdot k' \right) \\ D &= 32 \left(m^4 - m^2 \left(p \cdot k' \right) + \left(p \cdot k \right) \left(p \cdot k' \right) \right) \end{aligned}$$

לכן,

$$\frac{1}{4} \sum \left| \mathcal{M} \right|^2 = 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]$$

נבחר מערכת ייחוס בגלל שלפוטון ולאלקטרון יש מסות שונות, הפעם נעבור למערכת ה"מעבדה", אנחנו מאירים על אלקטרונים סטטיים. עבור הפוטון, $k = (\omega, \omega \hat{z})$, ועבור אלקטרון, $p = (m, \mathbf{0})$. לאחר הפיזור,

$$\begin{aligned} k' &= \left(\omega', \omega' \sin\theta, 0, \omega' \cos\theta \right) \\ p' &= \left(E', \mathbf{p}' \right) \end{aligned}$$

כאשר θ היא זווית הפיזור של הפוטון. נרצה לבטא את כל הביטויים באמצעות תדר הפוטון, מסת האלקטרון, והזווית. ראשית, נחשב את התדר של הפוטון היוצא כפונקציה של התדר של הפוטון הנכנס, וזווית הפיזור:

$$\begin{aligned} p' &= p + k - k' \\ \left(p' \right)^2 &= m^2 = \left(p + k - k' \right)^2 \\ &= p^2 + 2p \cdot \left(k - k' \right) - 2k \cdot k' \\ &= m^2 + 2m \left(\omega - \omega' \right) + 2\omega\omega' \left(1 - \cos\theta \right) \end{aligned}$$

לכן,

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}\left(1 - \cos\theta\right)}$$

נחזור לאמפליטודה, במערכת המעבדה,

$$p \cdot k = m\omega$$
$$p \cdot k' = m\omega'$$

אזי, במערכת המעבדה, האמפליטודה תהיה:

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}^2\right| = 2e^4\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + \frac{2m}{\omega}\left(1 - \frac{\omega}{\omega'}\right) + \frac{m^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega}{\omega'}\right)^2\right]}$$

אזי,

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}\right|^2 \cdot \frac{1}{2\omega 2m\underbrace{\left|v_\gamma - v_{e^-}\right|}_{!}} \cdot \mathrm{d}\Pi_2$$

כאשר $\mathrm{d}\Pi_2$ היא ה־Two Body phase space.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)}\frac{1}{2\omega'}\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(k' + p' - k - p\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega' E'}(2\pi)\,\delta\left(\omega' + E' - \omega - m\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\underbrace{\left|\frac{1}{1 + \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}\omega'}}\right|}_{\int \mathrm{d}\omega'\,\delta(\ldots)}\end{aligned}$$

כאשר E' האנרגיה של האלקטרון היוצא,

$$\begin{aligned}E' &= \sqrt{\left(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}'\right) + m^2} \\ &= \sqrt{m^2 + \omega^2 + \left(\omega'\right)^2 - 2\omega\omega'\cos\theta} \\ \frac{\partial E'}{\partial \omega'} &= \frac{\omega' - \omega\cos\theta}{E'}\end{aligned}$$

ולכן,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Pi_2 &= \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\frac{\omega'}{E' + \omega' - \omega\cos\theta} \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\frac{\omega'}{m + \omega\left(1 - \cos\theta\right)} \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\frac{\frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}\left(1 - \cos\theta\right)}}{m + \omega\left(1 - \cos\theta\right)} \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\frac{\left(\omega'\right)^2}{m\omega}\end{aligned}$$

לכן, הביטוי עבור חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)} &= \frac{1}{4\omega m}\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{\left(\omega'\right)^2}{m\omega}\cdot\frac{1}{4}\sum\left|\mathcal{M}\right|^2 \\ &= \frac{e^4}{16\pi}\frac{\left(\omega'\right)^2}{\left(m\omega\right)^2}\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}+2\left(\cos\theta-1\right)+\left(\cos\theta-1\right)^2\right] \\ \left(\alpha=\frac{e^2}{4\pi}\right) \qquad &= \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]\end{aligned}$$

נוסחאה זו, $\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]}$, המכונה נוסחאת קליין־נישינה לפיזור קומפטון.
בגבול שבו $\omega\to 0$, ולכן $\omega\approx\omega'$, נקבל

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\left(\cos\theta\right)}\to\frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

היא הנוסחא הקלאסית של תומפסון מפיזור פוטון מאלקטרון.

fin.