מכניקה אנליטית

8 במרץ 2009

מרצה: ד"ר כנרת קרן

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של ד"ר כנרת קרן, ומפורסם ברשותה. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. אין הטכניון או מי מטעמו - ובפרט, הפקולטה לפיזיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.

הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.technion.ac.il

תוכן עניינים

1 משוואות אוילר - לגרנז'

N גופים. $r^i_\alpha(t)$, כאשר $\alpha = 1,2,3$, קוארדינטות קרטזיות ו- $i = 1,2,3..,N$ גופים.
לפי החוק השני של ניוטון - $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$, ובאופן כללי , $F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

- בשלב ראשון נדבר רק בכוחות שלא תלויים במהירות (אלא רק בזמן ומיקום)
- נדון רק בכוחות משמרים - כח שאפשר להגדיר לו פוטנציאל -

$$\vec{F}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r},t)$$
$$F_\alpha(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} V(\vec{r},t)$$

או$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי במסילה - $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ ו-

$$V(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ננסח מחדש את החוק השני של ניוטון, באמצעות לגרנזיאן

$$F_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial r_\alpha} = m\ddot{r_\alpha}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{r_\alpha} &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{r_\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r_\alpha}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}_\alpha^2\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r_\alpha}}\left(\sum_{\beta=1,2,3}\frac{1}{2}m\dot{r}_\beta^2\right)\right) \end{aligned}$$

$$\sum_p \frac{1}{2}mr_\beta^2 = \frac{1}{2}mv_2$$

$$\frac{\partial \dot{r_\beta}^2}{\partial \dot{r}_\alpha} = 2$$

$$m\ddot{r}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}_\alpha}T\left(\dot{\vec{r}}\right)$$

$$T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$$

נגדיר פונקציה L - לגרנזיאן (אנרגיה קינטית + אנרגיה פוטנציאלית)

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r},t)$$

ולכן, החוק השני של ניוטון הוא

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r_\alpha}}L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)\right) = \frac{\partial}{\partial r_\alpha}L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial r_\alpha} = F_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}$$

1.0.1 עקרון הואריאציה

מרחב הקונפיגורציה - מרחב שבו כל נקודה מאפיינת איפה כל החלקיקים נמצאים.
תנועה של המערכת = מסלול במרחב הקונפיגורציה. מרחב הקונפיגורציה הוא $3N$ מימדי.

הגדרה 1.1 פעולה (פונקציונל). עבור מסלול

$$q_i(0) = Q_i$$

$$q_i(t) = Q_i'$$

הפונקציונאל

$$S\left[q(t)\right]=\int_0^T dtL\left(q_1\left(t\right)_i,..,q_m(t),\dot{q}_1(t),..,\dot{q}_m(t),t\right)$$

פתרון של משוואות תנועה הוא למצוא מסלול במרחב הקונפיגורציה ($q(t)$)

עקרון הוריאציה - עבור L, נקודת התחלה Q ונקודת סיום Q' מה המסלול שעבורו S מינימלי (אקסטימלי).
פונקציה $f(x)$. מחפשים נקודת אקסטרמום של הפונקציה. $f'(x=x_0)=0$.

$$\vec{x}=x_1,..,x_n$$
$$f(\vec{x})$$
$$x+\vec{u}\Delta\vec{x}$$
$$g(u)=f\left(\vec{x}+u\Delta\vec{x}\right)$$
$$0=g'(u)\frac{d}{du}g(u)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta x_i=\vec{\nabla}f\cdot\Delta\vec{x}$$

לכל $\Delta\vec{x}$.
המשתנה $q(t)$ (מסלול. מיקום כפונקציה של הזמן)
מחפשים: מסלול $q(t)$ שעבורו הפעולה אקסטרמלית. $S[q(t)]$ אקסטרמלי. ביחס למסלולים שמתחילים בנקודה $q(t=0)=Q$ ומסתיימים ב-$q\left(t=T\right)=Q'$.
אם יש לנו מסלול $q(t)$, ניתן להגדיר $\delta q(t)$ כך ש-

$$g(u)=S\left[q(t)+u\delta q(t)\right]$$
$$\delta q(t=0)=0$$
$$\delta q(t=T)=0$$

מחפשים ש-$\frac{dg}{du}=0$ עבור $\delta q(t)$,ועבור כל $\delta q(t)$ המקיים את תנאי השפה.

$$\begin{aligned}\frac{dg}{du}|_{u=0}&=\frac{d}{du}\int_0^T dtL\left(q(t)+u\delta q(t),\dot{q}(t)+u\delta\dot{q}(t),t\right)\\&=\int_0^T dt\left(\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)\delta q\left(t\right)}{\partial q}+\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)\delta\dot{q}(t)}{\partial\dot{q}}\right)\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה בחלקים על החלק השני $\int_0^T f\cdot\dot{g}=-\int_0^T\dot{f}g+fg|_0^T$. היות δu- מתאפס ב-0 וב-T, ניתן להסיר את החלק השני

$$\begin{aligned}\frac{dg}{du}&=\int_0^T dt\left(\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)\delta q(t)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)\delta q(t)}{\partial\dot{q}}\right)\\&=\int_0^T dt\left(\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial q}\right)\delta q(t)=0\end{aligned}$$

לכל $\delta q(t)$, כלומר, החלק הראשון מתאפס.כלומר,

$$\frac{\partial L}{\partial q}\left(q,\dot{q},t\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\left(q,\dot{q},t\right)$$

ועבור M דרגות חופש, - M משוואות (כאשר N מספר החלקיקים, $M=3N$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial\dot{q}^{(i)}}=\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial q^{(i)}}$$

כלומר, החוק השני של ניוטון שקול לכך שהפונקציונאל מינימלי!
יחידות הלגרנז'יאן:

$$L' = L + \frac{dK}{dt}$$
$$S = \int_0^T dt\left(L + \frac{dK}{dt}\right) = \int_0^T dtL + K(T) - K(0)$$

כלומר, אם נוסיף ללגרנזיאן פונקציה שהיא נגזרת שלמה לפי הזמן, מקבלים לגרנזין שמתנהג אותו דבר בפונקציונאל.

1.0.2 דוגמאות

<u>חלקיק בשדה חשמלי</u>

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$
$$V = e\varphi\left(\vec{r}, t\right)$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - e\varphi\left(\vec{r}, t\right)$$

נכתוב את משוואות לגראנז' של המערכת, עבור הקואורדינטה $\alpha = \hat{x}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

ולכן

$$m\ddot{x} = -m\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

נזכר ש־$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$

$$m\ddot{x} = eE_x$$

או, באופן כללי,

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}\left(\vec{r}, t\right)$$

נכליל למקרה בו יש כח משמר התלוי במהירות.
עבור כח שתלוי במהירות, נגדיר פוטנציאל מוכלל

$$u\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$$

שאינו אנרגיה פוטנציאלית. והלגרנזיאן יהיה

$$L = T - u\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$$

ונרצה ש־

$$F_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{r_\alpha}} - \frac{\partial U}{\partial r_\alpha}$$

עבור חלקיק בשדה מגנטי, נגדיר

$$u\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = e\varphi\left(\vec{r},t\right) - e\vec{A}\left(\vec{r},t\right)\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{A}\cdot\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x + e}A_x\right)\\ &= m\ddot{x} + e\frac{dA_x\left(\vec{r},t\right)}{dt}\\ &= m\ddot{r_\alpha} + e\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + e\vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_\alpha\end{aligned}$$

תרגיל: להסתכל על

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}$$

ומתקבל

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

1.0.3 עקרון הפעולה המינימלית עבור מערכת עם N חלקיקים

- N חלקיקים
- $3N$ דרגות חופש
- $\left(r_\alpha^i\left(t\right)\right)$ (α ־ דרגות חופש. i ־ חלקיקים)
- האנרגיה הקינטית

$$T\left(\vec{r^i},\dot{\vec{r^i}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j,\beta} m_i\dot{r_\beta}^2$$

$$V\left(\vec{r^{(i)}},...,\vec{r^{(n)}},t\right) = ..$$

$$L = T - V$$

- במהלך הפעולה, המערכת תבחר במסלול שבו הפעולה

$$S[\vec{r}(t)^{(i)}] = \int_0^T L\left(\vec{r^1},...,\vec{r^n},..\dot{\vec{r^n}},t\right)dt$$

מינימלית.

מסלול שבו נוע המערכת הוא המסלול עבורו S מינימלי, מסלול כזה יקיים את משוואת אוילר־לגרנז'.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(...\right)}{\partial \dot{r}_\alpha^i} = \frac{\partial L}{\partial r_\alpha^i}$$

הלגרנזיאן $L = T - V$ אינו מוגדר בצורה יחידה. $L' = L + \frac{dK}{dt}$ עבור K פונקציה כלשהי. לכן, אם יש לנו נגזרת של פונקציה לפי הזמן, ניתן להשמיט אותה והיא לא תשפיע על הפתרון.

1.0.4 חלקיק חופש

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

עבור חלקיק במערכת יחוס שונה,שנעה במהירות v_0. במערכת החדשה,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r} - \vec{v_0}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - m\dot{r}v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

ו־

$$L - L' = -m\dot{r}v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$K(t) = -mrv_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$
$$\frac{dK}{dt} = -m\dot{r}v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

ולכן $L - L' = \frac{dK}{dt}$, והלגרנז'יאים שקולים.

1.0.5 כוח תלוי במהירות (כח לורנץ)

נגדיר פוטנציאל מוכלל, שתלוי במיקום, מהירויות וזמן

$$u\left(\vec{r}^{(1)}, ..r^{(n)}, \dot{r}^{(1)}, ..., \dot{r^{(n)}}, t\right)$$

פוטנציאל זה אינו מהווה **אנרגיה פוטנציאלית.**

$$L = T - U$$

ומשוואות לגרנז'

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r_\alpha^{(i)}}} = \frac{\partial L}{\partial r_\alpha^{(i)}}$$

נציב את הלגרנזיאן שלנו:

$$m_i \ddot{r_\alpha^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial r_\alpha^{(i)}}$$

ולכן

$$m\ddot{r_\alpha^{(i)}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r_\alpha}}\right) - \frac{\partial U}{\partial r_\alpha^{(i)}}$$
$$F_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial U}{\partial r\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{r_\alpha^{(i)}}}$$

ואנחנו מקבלים, שוב, את חוקי ניוטון, ולכן מותר לנו לעשות את זה.

חלקיק בשדה מגנטי וחשמלי

$$u\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) = e\varphi\left(\vec{r}, t\right) - e\vec{A}\left(\vec{r}, t\right)$$

1.1 קוארדינטות מוכללות ואילוצים

N חלקיקים, $\alpha = 1,2,3 \quad i = 1, \ldots, n$
ניתן לתאר את המערכת כ־$3N$ קוארדינטות, $r_\alpha^i(t)$
נסתכל על הקוארדינטות$q^a = q^a\left(r'_\alpha, t\right)$. אז$r_\alpha^i\left(a^a, t\right)$.
נציב

$$r_\alpha^i\left(q^a, t\right)$$

$$\dot{r_\alpha^i} = \frac{d}{dt} r_\alpha^i = \frac{\partial r_\alpha^i}{dt} + \sum_{a=1}^{2N} \frac{\partial r_\alpha^i}{\partial q^a} \dot{q_a}$$

$$\ddot{r^i}_\alpha = \frac{d}{dt} r_\alpha^i = \frac{\partial^2 r_\alpha^i}{\partial t^2} + \sum_b \frac{\partial^2 r}{\partial q^b \partial t} + \sum_a \frac{\partial r_\alpha^i}{\partial q_a} \ddot{q_a} + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 r_\alpha^i}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q^a} \dot{q^b}$$

וכאן אפשר לכתוב את משוואות ניוטון

$$m\ddot{r_\alpha} = F$$

לדוגמא, כדי לעבור למרכז המסה של מערכת (שני גופים שווי מסה)

$$q_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$q_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$\vdots$$

לפי הפורמליזם הלגרנז'י

$$L(r, \dot{r}, t)$$
$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(r(q,t), \dot{r}\left(q, \dot{q}, t\right), t\right)$$
$$S = \int_0^T dt L\left(r, \dot{r}, t\right)$$
$$= \int_0^T dt L\left(q, \dot{q}, t\right)$$

ומשוואות אוילר־לגרנז'

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q^a}} = \frac{\partial L}{\partial q^a}$$

כאשר $a = 1 \ldots 3N$.

1.1.1 דוגמאות

חלקיק ב־2 מימדים בתוך פוטנציאל הפוטנציאל - $V(x,y)$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V\left(x, y\right)$$

נעבור לקוארדינטות כדוריות:$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. $q_1 = r$, $q_2 = \theta$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

נבטא את הלגרנזיאן

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - v(r,\theta)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\dot{\theta}^2$$

אז מתקבל ש־

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\dot{\theta}^2$$

נגזור עבור הקוארדינטה של θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$
$$= mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

ומתבל

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

לסיכום, קיבלנו ש־

$$\underbrace{m\ddot{r}}_{\text{Radial accelration}} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{Centrefual force}}$$
$$mr^2\ddot{\theta} + \underbrace{2mr\dot{r}\dot{\theta}}_{\text{Coriolis Force}} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

1.2 כוחות אילוץ

לדוגמא ־ חרוז על מוט. קשה לתאר את הכוחות הספציפיים שהמוט מפעיל על הכדור, אבל קל להגדיר את האילוץ "המוט מפעיל על החרוז כח שגורם לו להשאר עליו"

$$c(x,y) = x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

אילוצים הולונומיים ־ אילוצים שניתן לתאר על ידי $c(x,\ldots,x_n,t) = 0$.
אילוץ שאינו הולונומי ־ חלקיקים בקופסא. ־ $0 \le x \le L$

דוגמא אות

- חלקי זז על מישור $z = ax$

$$c(x,y,t) = z - ax = 0$$

- חרוז על חישוק, שמסתובב במהירות ω מסביב לציר z.
  - הקואורדינטות (הקרטזיות) $(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), z)$
  - האילוץ הראשון - החרוז נמצא על פני כדור

$$C_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

  - האילוץ השני - החישוק מסתובב, החרוז יכול להמצא רק בחלק מהכדור

$$C_2(x,y,z,t) = x\sin\omega t - y\cos\omega t = 0$$

  - דרך נוספת לרשום את האילוצים:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$
$$\tan\omega t = \frac{x}{y}$$

כאשר יש אילוצים:

1. הקואורדינטות אינן בלתי תלויות
   - גם משוואות התנועה אינן בלתי תלויות
2. כוחות האילוץ לא נתונים. לעיתים - הם תלויים במסלול החלקיק

באופן כללי, מערכת של $3N$ דרגות חופש ו-M אילוצים הולונומים בלתי תלויים.
כלומר, מספר דרגות החופש האמיתיות הוא $3N - M$.
יהיו $3N$ משוואות תנועה,

$$m_i \ddot{r_\alpha}^{(i)} F_\alpha^{(i)} + f_\alpha^{(i)}$$

נדבר על מצב בו כוח אילוץ $\vec{f}$ מאונך לתנועה. כלומר - הוא אינו מבצע עבודה.

$$F_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial V}{\partial r_\alpha^{(i)}}$$

נכתוב את הלגרנזיאן $L = T - V(r,t)$ (שאינו הלגרנז'יאן המלא של המערכת - הוא אינו כולל את הכח המאלץ)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r_\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial r_\alpha^i} = f_\alpha^{(i)}$$
$$S\left[r(\vec{t})\right] = \int L dt$$

באופן כללי, האקסטרמום (כרגע) לא צריך להיות על המישור המאולץ. נסתכל על המסלולים שהם על המישור המאולץ (δx רק במסלול המקיים את האילוץ)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{du} &= \frac{d}{du}\left[r\left(t\right)+u\delta x(t)\right] = -\int dt\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial r}{\partial r_\alpha}\right]\delta r_\alpha^{(i)} \\ &= \int dt\sum_\alpha f_a^{(i)}dr_\alpha^{(i)}t = \\ &= \int dt\,\overbrace{\vec{f}^{(i)}(t)}^{=0}\cdot d\vec{r}(t) = 0 \end{aligned}$$

הכח המאלץ מאונך לכיוון התנועה במרחב המאולץ, לכן המכפלה הסקאלרית בין הכח לכיוון נותנת אפס, ו-$\frac{dS}{du}$ מתאפס.

עקרון דאלמברט בהנתן בעיה עם m אילוצים

$$c_i\left(\vec{r^{(i)}},\ldots,\vec{r^{n}},t\right)=0$$

נייצג את הבעיה בעזרת $q_1,\ldots,q_{3N-m}$ קוארדינטות,

$$r_\alpha^i = r_\alpha^{(i)}\left(q,\ldots,q_{3N-m},t\right)$$

$$L\left(q_1,\ldots,q_{3N-m},\dot{q},\ldots,\dot{q}_{3N-m},t\right)=L\left(r\left(q,t\right),\dot{r}\left(q,\dot{q},t\right),t\right)$$

$$\begin{aligned} r_\alpha^{(i)} &= r_\alpha^{(i)}\left(q_a,t\right) \\ \dot{r_\alpha} &= \sum_a\frac{\partial r_\alpha^{(i)}}{\partial q_a}\dot{q^{(a)}}+\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} \end{aligned}$$

ונקבל את משוואת לגראנז'ב-$3N-m$ משוואות, שחלות על מישור האילוץ.

דוגמא

גלגל מסתובב במהירות ω. בנקודה מסויימת על היקף הגלגל, מחוברת מטוטלת באורך l. הזווית בין ציר x לנקודת החיבור של המטוטלת היא ωt.

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-mgy$$

נקודת החיבור היא $(R\sin\omega t,-R\cos\omega t)$. והאילוץ

$$\left(x-R\cos\left(\omega t\right)\right)^2+\left(y+R\sin\left(\omega t\right)^2\right)-l^2=0$$

כלומר, המשקולת של המטוטלת נמצאת במרחק קבוע מנקודה שזזה על היקף המעגל במהירות זוויתית ω.
הקואורדינטות של המטוטלת:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\left(\omega t\right)+l\sin\theta \\ y &= -R\sin\left(\omega t\right)-l\cos\theta \end{aligned}$$

והמהירויות

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega\sin\omega t+l\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} &= -R\omega\cos\omega t+l\sin\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\omega^2R^2+l^2\dot{\theta}^2-2R\omega\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)$$

.

$$L=\frac{1}{2}m\left(\omega^2R^2+l^2\dot{\theta}^2-2R\omega l\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)\right)+mg\left(R\sin(\omega t)+l\cos\theta\right)$$

נזרוק נגזרת שלמה של הזמן ($mgR\sin\omega t$)

$$L\left(\theta,\dot{\theta},t\right)=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+m\omega Rl\dot{\theta}\cos(\theta-\omega t)+mgl\cos\theta$$

נגזור את הלגרנזיאן

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}&=ml^2\dot{\theta}-m\omega Rl\cos(\theta-\omega t)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}&=ml^2\ddot{\theta}+m\omega Rl\sin(\theta-\omega t)\left(\dot{\theta}-\omega\right)\\ \frac{\partial L}{\partial\theta}&=m\omega Rl\dot{\theta}\sin(\theta-\omega t)-mgl\sin\theta\end{aligned}$$

ומשוואת התנועה היא

$$ml^2\ddot{\theta}+m\omega Rl\sin(\theta-\omega t)\left(\dot{\theta}-\omega\right)=m\omega Rl\dot{\theta}\sin(\theta-\omega t)-mgl\sin\theta$$

1.2.1 כופלי לגרנז'

יש לנו n דרגות חופש $f(x_1,\ldots,x_n)$
ו־m אילוצים - $c_i(x_1,\ldots,x_n,t)$ כאשר $i=1,\ldots m$
נגדיר

$$g(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(x_1,\ldots,x_n)-\sum_{a=1}^{m}\lambda_a c_a(x)$$

על המישור המאולץ, $f=g$, משום ש־$c_i(x)=0$ לכל i.
רוצים למצוא אקסטרמום ל־f על המישור המאולץ. אקסטרמום של g על המישור המאולץ יהיה גם אקסטרמום של f.
g היא פונקציה של $n+m$ משתנים. אקסטרמום של g הוא $\vec{\nabla}g=0$. כלומר,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial x_i}=0\\ j=1,\ldots m\quad&\frac{\partial g}{\partial\lambda_j}=c_j(x)=0\end{aligned}$$

נגדיר לגרנז'יאן חדש:

$$L'(r,\dot{r},t,\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t))=L(r,\dot{r},t)-\sum_a\lambda_a(t)c_a(r,t)$$

נגדיר פעולה

$$S\left[r(t),\lambda(t)\right]=\int dt\left(\left(L(r,\dot{r},t)-\sum\lambda_a c_a(t)\right)\right.$$

n משוואות:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r_\alpha}}=\frac{\partial L}{\partial r_\alpha}-\sum_a\lambda_a\frac{\partial c_a}{\partial r_\alpha}$$

m משוואות

$$\frac{\partial L'}{\partial\lambda_a}=ca\left(r,t\right)=0$$

אז, יש לנו $r_i(t),\lambda_a(t)$ כאשר $i=1,\dots n$ ו־$a=1,\dots m$. ו־

$$S=\int L'dt$$

נסתכל על כח האילו על חלקיק

$$f_i(t)=\sum\lambda_a(t)\frac{\partial c}{\partial r_i}$$

דוגמא (לשימוש בכופלי לגרנז') חלקיק חופשי: $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$. החלקיק קשור לראשית עם מוט באורך l ־ $c_1\left(x,y\right)=x^2+y^2-l^2=0$

$$L'=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-\lambda\left(x^2+y^2-l^2\right)$$

המשוואות יהיו:

$$\overbrace{m\ddot{x}}^{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}}=\overbrace{-2\lambda x}^{\lambda\cdot\frac{\partial c}{\partial x}}$$

$$m\ddot{y}=-2\lambda y$$

$$x^2+y^2-l^2=0$$

נגזור את III: $x^2+y^2-l^2=0$ ולכן גם $\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2-l^2\right)=0$

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0$$

נגזור פעם נוספת לפי זמן ־

$$\frac{d}{dt}\left(x\dot{x}+y\dot{y}\right)=\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0$$

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}-\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$$

$$m\left(\underbrace{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+y^2\right)\right)=0}\right)=-2\lambda\left(\underbrace{x\dot{x}+y\dot{y}}_{=0}\right)$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=T\Rightarrow x\ddot{x}++y\ddot{y}=-\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{-2T}{m}$$

$$m\left(x\ddot{x}+y\ddot{y}\right)=-2\lambda\left(x^2+y^2\right)=-2\lambda l^2$$
$$m\frac{2T}{m}=2\lambda l^2\Rightarrow\lambda=\frac{T}{l^2}$$

נציב:

$$m\ddot{x}=-\frac{2T}{l^2}x$$

ואז

$$x=A\cos\left(\omega t+\phi\right)=l\cos\left(\omega t\right)$$
$$y=B\cos\left(\omega t+\phi'\right)=l\sin\left(\omega t\right)$$

$$\vec{f}=-\lambda\vec{\nabla}c\left(x,y\right)$$
$$c\left(x,y\right)=x^2+y^2-l^2=0$$
$$\lambda=\frac{T}{l^2}$$

אזי

$$f_x=-\lambda\frac{\partial}{\partial x}c\left(x,y\right)=\frac{T}{l^2}2x$$
$$f_y=0\frac{\partial c}{\partial y}=-\frac{T}{l^2}2y$$

וגדולו־

$$f=\sqrt{f_x^2+f_Y^2}=\frac{T}{l^2}2\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2T}{l^2}l=\frac{mv^2}{l}$$

1.3 סימטריות וחוקי שימור

הגדרה 1.2 $f(q,\dot{q})$ הוא **קבוע תנועה** כאשר $\frac{d}{dt}f\left(q,\dot{q}\right)=0$ או, $f\left(q,\dot{q}\right)=\text{const}$, או $\frac{d}{dt}f(q,\dot{q})=0$.
לכל q_a נגדיר תנע צמוד:

$$P_a\left(a,\dot{q}\right)=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_a}\left(q,\dot{q},t\right)$$

עבור $L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V\left(x,y,z\right)$ אז־$P_x=m\dot{x}$, הוא התנע המוכר.
עבור קואורדינטות של (r,θ), היחידות של P_θ אינן יחידות של תנע!

$$\frac{d}{dt}P_a\left(a,\dot{q},t\right)=\frac{\partial L}{\partial q_a}$$

הגדרה 1.3 q_a היא **קוארדינטה ציקלית** אם $\frac{\partial L}{\partial q_a}=0$ ו־ $p_a=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ הוא קבוע התנועה

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

x,y,z קוארדינטות ציקליות. ולכן

$$\begin{aligned}p_x&=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\\p_y&=m\dot{y}\\p_z&=m\dot{z}\end{aligned}$$

חלקיק בפוטנציאל $V(y,z)$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-V\left(y,z\right)$$

$$\begin{aligned}p_x&=m\dot{x}\\\frac{\partial L}{\partial x}&=0\\\frac{\partial p_x}{\partial t}&=0\end{aligned}$$

יש שימור תנע בציר x. בצירים y,z אין שימור תנע.
אם q_n קוואורדינטצה ציקלית, אז

$$L\left(q,\ldots,q_{n-1},\dot{q},\ldots q_n,t\right)$$

כלומר ־ הלגרנזיאן לא תלוי ב־q_n, אבל כן תלוי ב־$\dot{q}_n$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}=0=\frac{\partial L}{\partial q_n}fh$$

כי ־ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}=p=\text{const}$ וניתן לפתור ולקבל

$$\dot{q}_n\left(q_1,\ldots a_{n-1},\dot{q},\ldots \dot{q}_{n-1},t\right)$$

ונקבל לגרנז'יאן שתלוי רק ב־$L\left(q,\ldots,q_{n-1},\dot{q},\ldots q_{n-1},t,p\right)$ כלומר ־ תלוי ב־$n-1$ קוארדינטות. (p קבוע)

דוגמא (חלקית במישור עם כח מרכזי)

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-V\left(x^2+y^2\right)$$

נעבור לקוארדינטות כדוריות

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta \qquad & x&=r\cos\theta\\\dot{y}&=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta \qquad & y&=r\sin\theta\end{aligned}$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(r)$$

θ קואורדינטה ציקלית - $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_0}{mr^2}$$

יש לנו משוואת תנועה ב־r

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\dot{\theta}^2$$

נציב את $\dot{\theta}$ ונקבל את משוואת התנועה:

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + mr\left(\frac{p_0}{mr^2}\right)^2$$

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{p_0^2}{mr^3} \Rightarrow r(t)$$

$$\theta(t) = \int \dot{\theta}(t)dt = \int \frac{p_0}{mr^2}dt$$

1.3.1 2 גופים, עם פוטנציאל התלוי במרחק בינהם

$$\vec{r_1} - \vec{r_2}$$

בקואורדינטות המקוריות:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}^2 - V\left(\vec{r_1} - \vec{r_2}\right)$$

נעבור לקואורדינטות היחסיות - $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ ו־$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$.

$$\vec{r_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{R} + \vec{r}\right)$$
$$\dot{\vec{r_1}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\right)$$

$$\vec{r_2} = \frac{1}{2}\left(\vec{R} - \vec{r}\right)$$
$$\dot{\vec{r_2}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \dot{\vec{r}}\right)$$

אז הלגרנז'אן בקואורדינטת החדשות:

$$L = \frac{1}{8}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{8}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \dot{\vec{r}}\right)^2 - V\left(\vec{r}\right)$$

$\vec{R}$ היא קוארדינטה ציקלית -

$$\begin{aligned} P_{R_x} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_x} = \frac{1}{4} m_1 \left(\dot{R}_x + \dot{r}_x\right) + \frac{1}{4} m_2 \left(\dot{R}_x - \dot{r}_x\right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_{1x} + \frac{1}{2} m_2 \dot{r_{2x}} \\ \vec{P}_R &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{const} \end{aligned}$$

1.4 טרנסופרמציה רציפה של קוארדינטות

משפט 1.4 אם יש טרנספורמציה רציפה $q \to q_\alpha(q)$ ו־$\dot{q} \to \dot{q}_\alpha(q, \dot{q})$ כך שהלגרנזיאן אינוריאנטי ביחס לטרנספורמציה $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L(q, \dot{q}, t)$ אז יש גודל שמור (אינורינטי) Q $\left(\frac{dQ}{dt} = 0\right)$ כך ש־

$$Q = \sum_a \left[\frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} p^a(q, \dot{q})\right]$$

1.4.1 דוגמא

$q_1 \to q_1 + \alpha$ ו־$q_i \to q_i$ (לכל $i \neq 1$)

אם הלגרנז'יאן לא תלוי ב־q_1 $L(q_2, \ldots)$ כלומר - q_1 קוארדינטה ציקלית , אז־

$$L(q_a^\alpha, \dot{q}_a^\alpha, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

לכל $a \neq 1$.$\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha} = 0$ ול־$\alpha = 1$ מתקבל - $\frac{\partial q_q^a}{\partial \alpha} = 1$ והסכום המתקבל הוא $Q = p_{\alpha=1} = p_1$.ג

סימטריות בלגרנזיאן וחוקי שימור **הוכחה:** (למשפט נטר)

$$0 = \left.\frac{dL}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_a \left(\underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial q^a} \frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q_\alpha^a}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right)$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_\alpha^a = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}$$

ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_a}}\right) \left.\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} \left.\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left.\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_a p^a \left.\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right] = \frac{dQ}{dt} \end{aligned}$$

■

עבור קוארדינטה ציקלית, $q^{a=1}$, $\frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$, אז $Q = P' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'}$.
משפט נטר הוא מקרה כללי יותר של "בחירת קוארדינטה ציקלית".

דוגמא

$$L=\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}\left(\dot{r}_{\beta}^{(i)}\right)^{2}-V\left(\vec{r}^{(i)}-\vec{r}^{(j)}\right)$$

כלומר, הפוטנציאל תלוי במרחק בין הגופים. $\vec{\alpha}=(\alpha,0,0)$ והקוארדינטות החדשות הן

$$\begin{aligned}r_{x}^{(i)}\left(\vec{\alpha}\right)&=r_{x}^{(i)}+\alpha\\ r_{y}^{(i)}\left(\vec{\alpha}\right)&=r_{y}^{(i)}\\ r_{z}^{(i)}&=r_{z}^{(i)}\end{aligned}$$

ולכן $\frac{\partial r_{x}^{(i)}}{\partial\alpha}=1$ ו־$\frac{\partial r_{y,z}^{(i)}}{\partial\alpha}=0$.

$$\begin{aligned}Q&=\sum_{i,k=1,2,3}\left.\frac{\partial r_{k}^{(i)}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}p_{k}^{(i)}\\ &=\sum p_{x}^{(i)}=\sum m_{i}\dot{x}_{i}\end{aligned}$$

- r ־ מיצג מיקום של חלקיק בקוארדינטות קרטזיות
- q־ מייצג קוארדינטות מוכללות (יכולות להיות גם קרטזיות)

עוד דוגמא הפוטנציאל תלוי במרחק החלקיק מהראשית

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}\right)-V\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)$$

נגדיר טרנספורמצית סיבוב: סביב ציר z, בזווית α

$$\begin{aligned}x_{\alpha}&=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y_{\alpha}&-x\sin\alpha+y\cos\alpha\\ z_{\alpha}&=z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{\alpha}^{2}+y_{\alpha}^{2}+z_{\alpha}^{2}&=x^{2}+y^{2}+z^{2}\\ \dot{x}_{\alpha}^{2}+\dot{y}_{\alpha}^{2}+\dot{z}_{\alpha}^{2}&=\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}\end{aligned}$$

כלומר, L אינורינטי לטרנספורמציה.

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial\alpha}|_{\alpha=0}=&y\\ \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial\alpha}|_{\alpha=0}=&-x\\ \frac{\partial z_{\alpha}}{\partial\alpha}|_{\alpha=0}=&0\\ Q=&\sum_{a}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}_{\alpha}}\frac{\partial r_{\alpha}^{a}}{\partial\alpha}=P_{x}y-P_{y}x=l_{z}\end{aligned}$$

כלומר ־ יש שימור של תנע זוויתי בכיוון z.

באופן דומה, הלגרנז'יאן אינורינטי ביחס לסיבובים סביב ציר x,y ו־l_x,l_y גדלים שמורים.

לא ניתן למצוא במקרה זה 3 קוארדינטות ציקליות עם התנעים השמורים P_x,P_y,P_z, ולכן יש להשתמש במשפט נטר

1.4.2 הכללה ־ נגזרת שלמה של הזמן

עבור משפחה של טרנספורמציות רציפות $q \to q_\alpha$, $\dot{q} \to \dot{q}_\alpha$שעבורן

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L\left(q, \dot{q}, t\right) + \frac{d}{dt} K_\alpha(q, \dot{q})$$

נגזור לפי α:

$$\frac{d}{d\alpha}: \quad \sum \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

נשתמש במשוואות אוילר־לגרנז' ונחליף את סדר הגזירה, ונקבל

$$= \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{\partial q_\alpha^a}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} p^a \right) - \frac{\partial K_\alpha}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0$$

כלומר, הגודל השמור הוא הביטוי האחרון

דוגמא

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + \beta x \dot{y}$$

כאשר מבצעים טרנספורמצית סיבוב:

$$x_\alpha = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$
$$y_\alpha = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + \beta \left(x \cos\alpha - y \sin\alpha \right) \left(-\dot{x} \sin\alpha + \dot{y} \cos\alpha \right)$$

$$L' = L - \frac{d}{dt} \left(\beta \left(\beta \sin^2\alpha \, xy + \frac{\beta \sin\alpha \cos\alpha}{2} \left(x^2 - y^2 \right) \right) \right)$$

והגודל השמור

$$Q = m\dot{x}y - my\dot{x} - \beta x^2 - \frac{1}{2} \beta \left(x^2 - y^2 \right)$$

1.4.3 חוקי שימור

- לגרזיאן אינורינטי להזזות במרחב ־־ שימור תנע
- לגרנזיאן אינורינטי לסיבובים ־ שימור תנע זויתי
- אינוריינטיות ביחס להזזות בזמן ־ שימור אנרגיה

לגרנז'יאן שאינו תלוי מפורשות בזמן ־ $L(q, \dot{q})$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \sum_a \frac{\partial L}{\partial q^a} \frac{dq^a}{dt} + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d\dot{q}^a}{dt} \\
&= \sum_a \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d\dot{q}^a}{dt} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a \right)
\end{aligned}$$

נעביר אגפים, ונקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L\right) = 0$$

$$L = T - V$$

נרשום:

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\dot{q}^a\right)^2$$
$$p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = \sum m_a \dot{q}^a$$

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L = \left(\sum_a m_a \dot{q}_a^2\right) - (T - V)$$
$$= \sum \frac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2 + V = E$$

1.4.4 המשפט הויראלי

$L = \frac{1}{2}\sum m_{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b - V(q)$, כלומר, הפוטנציאל תלוי רק בקוארדינטות, ו־$T + V = E$ גודל שמור.

$$\langle V(-\tau,\tau)\rangle = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} dt\, V\left(q(t)\right)$$
$$\langle V\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} dt\, V\left(q(t)\right)$$
$$\langle T\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} dt T\left(\dot{q}(t)\right)$$

- $\sum m_{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b$ זו הכללה של $\sum_{\substack{\alpha = 1,2,3 \\ i = 1\ldots n}} \frac{1}{2}m_i \dot{r_{i,\alpha}}^2$

הגדרה 1.5 פונקציה הומוגנית מסדר m, היא פונקציה המקיימת, לכל λ, ועבור m כלשהו:

$$f(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n) = \lambda^m f\left(q_1,\ldots,q_n\right)$$

עבור פוקנציה הומוגנית f מסדר m, נראה את הקשר:

$$\vec{q}\vec{\nabla} f = \sum q_a \frac{\partial f}{\partial q^q} = m\cdot f\left(q_1,\ldots,q_n\right)$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\lambda}\underbrace{f\left(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n\right)}_{\lambda^m f(q_1,\ldots,q_n)}\right|_{\lambda=1} &= \sum\frac{\partial f}{\partial q_a}q_a \\
&= \vec{\nabla}f\cdot\vec{q} \\
\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^m f\left(q_1,\ldots,q_n\right)\right) &= m\lambda^{m-1}\left. f\left(q_1,\ldots q_n\right)\right|_{\lambda=1} \\
&= m\cdot f\left(q_1,\ldots,q_n\right)
\end{aligned}
$$

האנרגיה הקינטית היא המוגנית מסדר 2

$$
T\left(\lambda\dot{\vec{q}}\right) = \lambda^2 T\left(\dot{\vec{q}}\right)
$$

האנרגיה הפוטנציאלית היא במקרים רבים הומוגנית ־ אבל אסצילטור הרמוני ־ מסדר 2, עבור גרביטציה או אינטראקציה חשמלית ־ מסדר -1

$$
\begin{aligned}
2T &= \sum\dot{q}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}} = \sum\dot{q}^a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a} \\
\sum q_a\frac{\partial V}{\partial q_a} &= \sum q_a\left(-\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) \\
2T-mV &= \sum_a\dot{q}_a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}-\sum_q q_a\left(-\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) \\
&= \sum_a\dot{q}^a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}+\sum_a q^a\frac{\partial L}{\partial q^a} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum q_a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\right)
\end{aligned}
$$

נבצע אינטגרל בזמן:

$$
\begin{aligned}
2\left\langle T\right\rangle - m\left\langle V\right\rangle = \left\langle 2T-mV\right\rangle &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(2T-mV\right)dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}dt\left[\frac{d}{dt}\left(\sum q^a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\right] \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\left. q^a\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right|_{-\tau}^{\tau} = 0
\end{aligned}
$$

(הקוארדינטות והמהירויות לא הולכות לאנסוף, אבל $\frac{1}{2\tau}$כל הולך לאפס)
וקיבלנו את המשפט:

משפט 1.6 (הויראלי)

$$
\begin{aligned}
\left\langle T+V\right\rangle &= \left\langle E\right\rangle = \text{const} \\
\left\langle T\right\rangle + \left\langle V\right\rangle &= E \\
2\left\langle T\right\rangle - m\left\langle V\right\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

• בדוגמה של $m=2$ (אוסצילטור הרמוני), מתקבל

$$\begin{aligned}\langle T\rangle+\langle V\rangle&=E\\ 2\langle T\rangle-2\langle V\rangle&=0\\ \langle T\rangle=\langle V\rangle&=\frac{E}{2}\end{aligned}$$

• גרביטציה = $m=-1$

$$\begin{aligned}\langle T\rangle+\langle V\rangle&=E\\ 2T+\langle V\rangle&=0\end{aligned}$$

ולכן - $\langle V\rangle=-2\langle T\rangle=2E$

2 פורמאליזום המילטוני (קאנוני)

בפורמליזם הלגרנז'יאני, היו לנו n משוואות (דיפרנציאליות) מסדר שני.
בפורמליזם ההמילטוני יהיו לנו $2n$ משוואות מסדר ראשון.
התנע הצמוד: $p^a=\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}^a}$. אנחנו רוצים לקבל $\dot{q}_a\left(q,p,t\right)$.
הפונקציה הפיכה אם $J=\left|\frac{\partial^2L}{\partial q^i\partial q^j}\right|\neq0$.

$$\dot{p}^a=\frac{dp^a}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}=\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{\dot{q},t}$$

$$\begin{aligned}\Delta L(q,\dot{q},t)&=\sum\frac{\partial L}{\partial q^a}dq^a+\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}+\sum\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\right)+\frac{dL}{dt}dt\\ &=\sum_a\frac{\partial L}{\partial q^a}dq^a+\sum_a p^a d\dot{q}^a+\frac{\partial L}{\partial t}dt\end{aligned}$$

$$d\left(\sum p_a\dot{q}_a\right)-\sum dp_a\dot{q}_a$$

$$d\left(\sum p^q\dot{q}^a\right)=dp^a\dot{q}^a+p^a d\dot{q}$$

$$(\dagger)\qquad d\overbrace{\left(\sum_a p_a\dot{q}_a-L\right)}^{H}=-\sum\dot{p}\,dq^a+\sum\dot{p}^a\,dp^a-\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}H&\equiv\sum_a p_a\dot{q}_a-L\\ H(q,p,t)&=\sum p^a\dot{q}^a\left(q,p,t\right)\end{aligned}$$

$$(\star) \qquad \Delta H = \sum_a \frac{\partial H}{\partial q^a} dq^a + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p^a} dp^a + \frac{\partial H}{\partial t}$$

פיתחנו פעמיים את הביטול לדיפרנציאל שלם של המילטוניאן - ב־$(\star)$ וב־$(\dagger)$, ולכן אפשר להשוות את הביטויים

$$\dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$$
$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p^a}$$

וההמילטוניאן הוא

$$H(q,p,t) = \sum_a p^a \dot{q}^a - L$$

המעבר הזה הוא מקרה פרטי של **טרנספורמצית לג'נדר**

הגדרה 2.1 $f(x)$, $y = f'(x)$. אנחנו ורצים לקבל $x(y)$
פונקציה $g(y)$, $x = g'(y)$ אז

$$\begin{aligned} g(y) &= xy - f(x) \\ g' &= x(y) + \frac{dx}{dy} y - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dy} \\ &= x(y) + \frac{dx}{dy} y - y \frac{dx}{dy} \\ &= x(y) \end{aligned}$$

המעבר בין p ל־h הוא טרנספורם לג'נדר

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ y &= f'(x) = 2ax \Rightarrow x = \frac{y}{2a} \\ g(y) &= xy - f(x) \\ &= \frac{y^2}{2a} - a\frac{y^2}{4a} = \frac{y^2}{4a} \\ g(y) &= \frac{y^2}{4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ y &= f'(x) = e^x \Rightarrow x = \ln y \\ g(y) &= xe^x - x = (x-1)e^x = (\ln y - 1) y \end{aligned}$$

אנחנו רוצים לעבור מ־$L(q,\dot{q})$ ל־$H(q,p)$ והגדרנו את הפונקציה כמו טרנספורם לג'נדר
משוואות התנועה - $2n$ משוואות: $\dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$, $\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p^a}$

- מרחב קונפיגורציה - $(q_1, \dots q_n)$ - n מימדי.

- מרחב הפאזה ־$(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ ־ $2n$ מימדי.

$\eta_i=q_i$ ־ $1\le i\le n$
ו־$n+1\le i\le 2n$ ־ $\eta_i=p_i$
כלומר, n ה־ηות הראשונות מציינות את המיקום, וה־n האחרות את התנע־הצמוד
מטריצה אנטיסימטרית $2n\times 2n$

$$J=\begin{pmatrix}(0) & (I_{n\times n})\\ (-1\cdot I_{n\times n}) & (0)\end{pmatrix}$$

(כאשר כל אחד מהאיברם הוא מטריצת בלוקים בגודל $n\times n$) J אנטיסימטרית ־ $J_{ij}=-J_{ji}$

$$\dot{\eta_i}=\sum_{j=1}^{2n}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial\eta_j}\left(=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial\eta_j}\right)$$

(כתיבה מקוצרת של משוואות התנועה $\dot{p}_i=\frac{-\partial H}{\partial q^i}$ ו־$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p^i}$)

2.0.5 דוגמא ־ n חלקיקים, ללא אינטראקציה

$$L=\sum_{\alpha=1,2,3,\,i=1\dots N}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{r_\alpha}^i\right)^2-\sum_{i=1}^{N}V\left(\vec{r}_i\right)$$

$$p_\alpha^i=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}_\alpha^i}=m\dot{r}_\alpha^i\Rightarrow\dot{r_\alpha}^i=\frac{P_\alpha^i}{m}$$

$$\begin{aligned}H&=\sum p^a\dot{q^a}-L\\&=\sum_{\alpha,i}p_\alpha^i\left(\frac{p_\alpha^i}{m}\right)-\sum_{\alpha,i}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{p_\alpha^i}{m_i}\right)+\sum_i V\left(\vec{r}_i\right)\\H\left(q,p\right)&=\sum_{\alpha,i}\frac{\left(p_\alpha^i\right)^2}{2m}+\sum_i V\left(\vec{r}_i\right)\end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha^i=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha^i}=\frac{p_\alpha^i}{m_i}$$
$$\dot{p}_\alpha^i=-\frac{\partial H}{\partial r_\alpha^i}=-\frac{\partial V}{\partial r_\alpha^i}$$

2.1 סוגרי פואסון

אם $f(q,p,t)$, סוגרי פואסון: $\{f,g\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \dot{f}\left(q(t), p(t), t\right) \\
&= \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial f}{\partial p^a}\dot{p^a}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{df}{dt} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q^a}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}
$$

אם יש לנו $f(q,p,t)$ ו־ $g(q,p,t)$ נגדיר את סוגרי פואסון להיות:

$$
\{f, g\} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q^a}\right)
$$

ואז

$$
\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}
$$

אם $f(p,q) = q$

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p}}_{=0} = \frac{\partial H}{\partial p} \\
\dot{p} &= \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q}
\end{aligned}
$$

והסימון שמר לנו על משוואות התנועה..
נסמן $\eta_i = q_i$ (כאשר $1 \le i \le n$) ו־$\eta_{i+n} = p_i$ (כאשר $1 \le i \le n$)

$$
\{f(\eta), g(\eta)\} = \sum_{i,j} J_{ij} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\frac{\partial g}{\partial \eta_j}
$$

כאשר

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}
$$

2.1.1 תכונות סוגרי פואסון

- אנטיסימטריים ־ $\{f,g\} = -\{g,f\}$, ולכן $\{f,f\} = 0$
- $\{f, \mathrm{const}\} = 0$
- לינאריים ־ $\{f, \alpha g_1 + \beta g_2\} = \alpha \{f, g_1\} + \beta \{f, g_2\}$
- $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\} h + \{f,h\} g$
- "הזהות של יעקובי" ־ $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$

2.1.2 זהות יעקובי

$$\{\{f,g\},h\} = \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta_i} = \partial_i$$

הוכחה: -

$$\{\{f,g\},h\} = \sum_{i,j} J_{ij}\partial_i\left(\sum_{k,l} J_{kl}\partial_k f\partial_l g\right)\partial_j h$$
$$= \sum_{i,j,k,l} J_{ij}J_{kl}\left(\partial_i\partial_k f\,\partial l g\,\partial_j h + \partial_k f\,\partial_i\partial_l g\,\partial_j h\right)$$

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{f,g\},f\} + \{\{h,f\},g\} = \sum_{i,j,k,l} J_{ij}J_{kl}(\overbrace{\partial_i\partial_k f\,\partial_l g\,\partial_l h}^{6} + \partial_k f\,\partial_i\partial_l g\,\partial_j h$$
$$+ \partial_i\partial_k g\,\partial_l h\,\partial_l f + \partial_k g\,\partial_i\partial_l h\,\partial_j f$$
$$+ \partial_i\partial_k h\,\partial_l f\,\partial_l g + \overbrace{\partial_k h\,\partial_i\partial_l f\,\partial_j g}^{6})$$

הביטויים הלו מתאפסים בזוגות. נסתכל על $(6)+(1)$:

$$\sum J_{ij}J_{kl}\left(\partial_i\partial_k f\,\partial_l g\,\partial_j h + \partial_k h\partial_i\partial_l f\partial_j g\right)$$

נשנה אינדקסים בביטוי השני - $k\to j, l\to k, j\to l$, ואז

$$= \sum \partial_i\partial_k f\partial_l g\partial_j h\left(J_{ij}J_{kl} + J_{il}J_{jk}\right)$$

$\partial_i\partial_k = \partial_k\partial_i$ (הנגזרות מתחלפות) ואז

$$= \sum\left(\partial_i\partial_k f\,\partial_l\partial_j h\right)\left(J_{ij}J_{kl} + J_{kl} + J_{ij}\right)$$
$$= \sum(\ldots)J_{kl}\underbrace{\left(J_{ij} + J_{ji}\right)}_{=0} = 0$$

■

סוגרי פואסון על פונקציה של $f(q,p)$

$$\{f(q,p),q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$$
$$\{f(q,p),p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

כי כל הנגזרות מתאפסות מלבד אלו

$$\{q_i,q_j\} = 0$$
$$\{p_i,p_j\} = 0$$
$$\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$$
$$\{p_i,q_i\} = -\delta_{ij}$$

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{df}{dt}$$
$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \sum \underbrace{\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}}_{\frac{\partial H}{\partial p_i}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}}_{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ו־

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

f, g גדלים שמורים.

$$\frac{df}{dt} = 0$$
$$\frac{dg}{dt} = 0$$

גם h גודל שמור ־ $h = \{f, g\}$

$$\{h, H\} = \{\{f, g\}, H\}$$

ולפי זהות יעקובי

$$= -\left\{\underbrace{\{g, H\}}_{=0}, f\right\} - \left\{\underbrace{\{H, f\}}_{=0}, g\right\} = 0$$

(אם לא נאמר אחרת, L תמי יהיו לגרנז'יאן ו־H־ המילטוניאן)

דוגמה ־ תנע זוויתי חלקיק בפוטנציאל $V(\vec{r})$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

נניח שנתון ־ l_x תנע זוויתי בכיוון x, ו־l_y תנע זוויתי בכיוון y, הם גדלים שמורים $\{l_x, l_y\}$ גם גדלים שמורים

$$l_x = yp_z - zp_y$$
$$l_y = zp_x - xp_z$$

$$\{l_x, l_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\}$$
$$= yp_x \overbrace{\{p_z, z\}}^{-1} + p_y x \overbrace{\{z, p_z\}}^{-1}$$

שאר האיברים יתאפסו.. (קוארדינטה וקוארדינטה או תנע ותנע)

$$= xp_y - yp_x = l_z$$

כלומר, אם תנע זוויתי נשמר בשני כיוונים ־ הוא חייב להשמר בכיוון השלישי.

2.2 טרנספורציות קאנוניות

$Q(q,t)\Leftarrow L(q,\dot{q},t)$
$L(Q,\dot{Q},t)$ טרנספורמציה של התנאים.
$.H(p,q,t)$

$$Q_i = Q_i\left(q,p,t\right)$$
$$P_i = P\left(q,p,t\right)$$

נתייחס רק לטרנספורמציות מסויימות ־ טרנספורמציות קאנוניות ־
נדרוש

$$H'\left(Q,P,t\right)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \dot{p}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

טרנספורמציות כאלה נקראות **טרנספורמציות קאנוניות.** (ה־P,Q במכנה הם **החדשים**)

$$\eta = (q,p)$$
$$\eta' = (Q,P)$$

נדרוש ־

$$\dot{\eta'}_i = \sum_j \frac{\partial \eta'_i}{\partial \eta_j}\dot{\eta}_j$$

(כלל השרשרת)

$$= \sum_j \frac{\partial \eta'}{\partial \eta_j}\, J_{kl}\frac{\partial H}{\partial \eta_k}$$

($\dot{\eta} = \sum_k J_{kj}\frac{\partial H}{\partial \eta_k}$)

$$\dot{\eta}_1 = \sum_k J_{k1}\frac{\partial H}{\partial \eta_k}$$
$$\dot{q} = J_{11}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) + J_{21}\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = \dot{\eta}_2 = \sum_k J_{k2}\frac{\partial H}{\partial \eta_k}$$
$$= J_{12}\frac{\partial H}{\partial q} + J_{22}\frac{\partial H}{\partial p}$$
$$= -\frac{\partial H}{\partial q}$$

נבטא את ההמילטוניאן בקוארדינטות החדשות:

$$H(\eta') = H\left(\eta\left(\eta'\right)\right)$$

הקשר הפיך, $\eta' \leftrightarrow \eta$

$$\frac{\partial H\left(\eta'\right)}{\partial \eta_k} = \sum \frac{\partial H}{\partial \eta'_m}\frac{\partial \eta'}{\partial \eta_k}$$

אז קיבלנו

$$\begin{aligned}\dot{\eta'}_i &= \sum_{j,k,m} \frac{\partial \eta'_i}{\partial \eta_j} J_{jk} \frac{\partial \eta'_m}{\partial \eta_k} \frac{\partial H}{\partial \eta'_m} \\ &= \sum_m \left(\sum_{jk} \frac{\partial \eta'_i}{\partial \eta_j} J_{jk} \frac{\partial \eta'_m}{\partial \eta_k} \right) \frac{\partial H(\eta')}{\partial \eta'_m}\end{aligned}$$

כלומר, התנאי לטרנספורמציות, שישמרו על צורת משוואת התנועה:

$$J_{im} = \sum_{j,k} \frac{\partial \eta'_i}{\partial \eta_j} J_{jk} \frac{\partial \eta'_m}{\partial \eta_k}$$

או בכתיב מטריצות

$$j = \left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta} \right) J \left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta} \right)^T$$

כאשר המטריצה $\left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta} \right)$ היא היעקוביאן

$$\left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta'_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \eta'_1}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial \eta'_2}{\partial \eta_1} & \ddots & \\ \vdots & & \frac{\partial \eta'_n}{\partial \eta_n} \end{pmatrix}$$

אם הטרנספורמציה קאנונית:

$$\begin{aligned}\left\{ Q^q, Q^b \right\} &= 0 \\ \left\{ P^a, P^b \right\} &= 0 \\ \left\{ Q^a, P^b \right\} &= \delta_{ab}\end{aligned}$$

נסתכל על סוגרי פואסון (לפי הקוארדינטות הישנות)

$$\left\{ Q^a, Q^d \right\}_{p,q} = \sum_b \left(\frac{\partial Q^a}{\partial q^b} \frac{\partial Q^d}{\partial p^b} - \frac{\partial Q^a}{\partial p^b} \frac{\partial Q^d}{\partial q^b} \right)$$

$$= \sum_{b,c} \frac{\partial Q^a}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial Q^d}{\partial \eta_c}$$

$$\left\{ \eta'_a(\eta), \eta'_d(\eta) \right\}_\eta = \sum_{b,c} \frac{\partial \eta'_a}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial \eta'_d}{\partial \eta_c}$$

אבל זה בדיוק התנאי לכך שהטרנספורמציה קאנונית, ולכן

$$= J_{ad}$$

נחשב את סוגרי פואסון לפי הקוארדינטות החדשות:
נרצאה להראות

$$\left\{ f(\eta), g(\eta) \right\}_\eta = \left\{ f(\eta'), g(\eta') \right\}_{\eta'}$$

$$\{f(\eta), g(\eta)\}_\eta = \sum_{b,c} \frac{\partial f}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial g}{\partial \eta_c}$$

נסתכל על $f(\eta') = f(\eta(\eta'))$

$$= \sum_{a,b,c,d} \frac{\partial f}{\partial \eta'_a} \underbrace{\left(\frac{\partial \eta'_a}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial \eta'_d}{\partial \eta_c} \right)}_{J_{ad}} \frac{\partial g}{\partial \eta'_d}$$
$$= \sum_{ad} \frac{\partial f}{\partial \eta'_a} J_{ad} \frac{\partial g}{\partial \eta'_\alpha} = \{f(\eta'), g(\eta')\}_{\eta'}$$

טרנספורמציות קאנוניות:

- שומרות על משוואת התנועה:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}$$
$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

- שומרות על סוגרי פואסון

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{Q,P}$$

- שומרות על סוגרי פואסון בין הקוארדינטות:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0$$
$$\{P_i, P_j\} = 0$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

2.3 דוגמא ־ אוסצילטור הרמוני

חד מימדי $n = 1$

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}$$

וההמילטוניאן

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2 n^2 q^2\right)$$

נוכל להמיר את הקוארדינטת ל־

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$
$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

וההפוכה:

$$Q = \cot^{-1}\left(\frac{p}{m\omega q}\right)$$
$$P = \frac{p^2}{2m\omega} + q^2\frac{m\omega}{2}$$

ניתן לרשום:

$$p = f(P)\cos Q$$
$$q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q$$

ונציב בהמילטוניאן:

$$H = \frac{1}{m}f(P)^2\left(\cos^2 Q + \sin^2 Q\right)$$
$$= \frac{f(P)^2}{2m}$$

זו טרנספורמציה שלא ניתן היה לעשות בפורמליזם הלגרנז'יאני.

נראה שהטרנספורמציה קאנונית, כלומר, מקיימת $\{Q,Q\}_{q,p} = \{P,P\}_{q,p} = 0$, $\{Q,P\} = 1$ (קיום של אחד גורר קיום של כולם)

נראה במפורש שזה מתקיים:

$$\{Q,P\} = \left\{\cot^{-1}\left(\frac{p}{m\omega q}\right), \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega q^2}{2}\right\}$$
$$= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{p}{m\omega} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot m\omega q$$

נראה איך גוזרים את Q

$$\frac{d\cot^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \left(\frac{-1}{1+\left(\frac{p^2}{m\omega^2 q^2}\right)}\right)\left(\frac{-p}{m\omega q^2}\right)\frac{p}{m\omega} - \frac{-1}{1+\left(\frac{p^2}{m\omega^2 q^2}\right)}\left(\frac{1}{m\omega q}\right)m\omega q$$
$$= \frac{\frac{p^2}{m\omega^2 q^2}}{1+\frac{p^2}{m^2\omega^2 q^2}} + \frac{1}{1+\frac{p^2}{m^2\omega^2 q^2}} = 1$$

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

נמצא את ההמילטוניאן בקוארדינטת החדשות:

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}\left(2m\omega P\cos^2 Q + m^2\omega^2\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q\right)$$
$$== \omega P$$

משוואות התנועה מההמילטוניאן:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$
$$\dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$
$$P = \text{const} = \frac{E}{\omega}$$
$$Q = \omega t + \alpha$$

וכדי לחזור ל־q ־

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$
$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

כאשר הפוטנציאל לא תלוי במהירות, $H = p\dot{q} - L = T + V$

נעבור לכתוב את η, η' כאשר $\eta = (q,p)$ ו־$\eta' = (Q,P)$ ו־ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{\eta} = J\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)$$
$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Q} \\ \frac{\partial H}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial P} \\ -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{pmatrix}$$

ונקבל בקואורדינטות הדשות:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובמקוריות ־

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} kq \\ \frac{p}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kq \end{pmatrix}$$

באופן כללי, צריך להתקיים

$$\left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta}\right) J \left(\frac{\partial \eta'}{\partial \eta}\right) = J$$

ואם מציבים ־ זה עובד!

2.4 טרנספורמציה נקודתית היא טרנספורמציה קאנונית.

$$q(Q) \leftrightarrow Q = Q(q)$$

היא טרנספורמציה נקודתית.

$$P^a = \sum_{b=1}^{n} P^b \frac{\partial q^b}{\partial Q^a}$$

צריך להראות ש־$\{Q_a, Q_b\} = 0$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial q}\frac{\partial Q_b}{\partial p} - \frac{\partial Q_a}{\partial p}\frac{\partial Q_b}{\partial q}$$

אבל $\frac{\partial Q_a}{\partial p} = \frac{\partial Q_b}{\partial p} = 0$, ולכן הביטוי מתאפס, והטרנספורמציות קאנוניות

$$\begin{aligned}
\left\{Q^a, P^d\right\} &= \left\{Q^a, \sum_b p_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_d}\right\} \\
&= \sum_b \left\{Q^q, p_b\right\} \frac{\partial q_b}{\partial Q_d} + \sum_b p_B \underbrace{\left\{Q^a, \frac{\partial q_b}{\partial Q_d}\right\}}_{=0} \\
&= \sum_{b,c} \left(\frac{\partial Q^a}{\partial q_c}\frac{\partial p_b}{\partial p_c} - \frac{\partial Q^a}{\partial p_c}\frac{\partial p_b}{\partial p_c}\right)\frac{\partial q_b}{\partial Q_d} \\
&= \sum_b \frac{\partial Q^a}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial Q_d} = \delta_{ad}
\end{aligned}$$

נראה

$$\{P_a, P_d\} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_b \frac{\partial P_a}{\partial q_b}\frac{\partial P_d}{\partial p_b} &= \sum_{b,c} \underbrace{\left[p_c \frac{\partial}{\partial q_b}\left(\frac{\partial q_c}{\partial Q_a}\right)\right]}_{\frac{\partial P_a}{\partial q_a}} \underbrace{\left[\frac{\partial q_b}{\partial Q_d}\right]}_{\frac{\partial q_b}{\partial Q_d}} \\
&= \sum_{b,c,e} p_c \frac{\partial^2 q_c}{\partial Q_a \partial Q_e} \underbrace{\frac{\partial Q_e}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial Q_d}}_{\sum_b () = \delta_{ed}} \\
&= \sum_c p_c \frac{\partial^2 q_c}{\partial Q_a \partial Q_d}
\end{aligned}$$

נתקבל ביטוי סמטרי בין a, d ולכן

$$\sum \frac{\partial P_d}{\partial q_b}\frac{\partial P_a}{\partial p_b} = \sum \frac{\partial P_a}{\partial q_b}\frac{\partial P_d}{\partial_b}$$

ולכן

$$\{P_a, P_d\} = 0$$

2.5 פונקציות יוצרות של טרנספורמציה קאנונית

$$S = \int \underbrace{\left(p\dot{q} - H\left(p, q\right)\right)}_{L} dt$$

המסלול מקיים את הפעולה המינימלית, $\delta S = 0$, $\Longleftrightarrow$ קיום משוואות אוילר לגרנז' $\Longleftrightarrow$ קיום משוואות המילטון.
בקוארדינטות החדשות ־

$$S = \int \left(P\dot{Q} - H\left(P, Q\right)\right) dt$$

כבר הראינו שהלגרניזיאנים צריכים להיות שווים עד כדי נגזרת שלמה בזמן

$$p\dot{q}-H\left(p,q\right)=P\dot{Q}-H\left(P,Q\right)+\frac{dF}{dt}\qquad(\dagger)$$

במערכת שלנו יש $2n$ משתנים בלתי תלויים. במשוואה האחרונה יש $4n$ משתנים ($n-P,n-Q,n-p,n=Q$
) כלומר ־ הם תלויים.
נבחר $F_1\left(q,Q\right)$. זה עובד רק כש־q בלתי תלוי ב־Q, כלומר ־ $P(q,Q)$ ו־$p(q,Q)$.

$$pdq-H\left(q,p\right)dt=PdQ-H\left(Q,P\right)dt+dF_1$$

או ־

$$\begin{aligned}dF_1&=-PdQ+Pdq+\left(H\left(Q,P\right)-H\left(q,p\right)\right)dt\\dF_1&=\frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ+\frac{\partial F_1}{\partial q}dx+\frac{\partial F_1}{\partial t}dt\end{aligned}$$

כאשר השורה העליונה היא בידוד מתוך הלגרנז'יאן, והשורה השניה היא פשוט דיפרנצאיל מלא של dF.

$$\begin{aligned}P_i&=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\\p_i&=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\\H'&=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}\end{aligned}$$

$F_1\left(q,Q\right)$ פונקציה יוצרת. קיבלנו n משוואות:

$$P_i\left(q,Q,t\right)$$

בהנחה שהפונקציות פהיכות, ניתן לקבל

$$Q(q,p,t)$$

נציב את Q בטרנספורמציה של P_i ונקבל

$$P_i\left(q,p,t\right)=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\left(q,Q\left(q,p,t\right)\right)$$

נציב בהמילטוניאן ונקבל

$$H'\left(Q,P,t\right)=H\left(q\left(Q,P,t\right),p\left(Q,P,t\right)\right)+\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

דוגמה

$$F_1\left(q,Q\right)=\sum_{i=1}^{n}q_iQ_i$$

הטרנספורמציה שיוצאת מהפונקציה:

$$p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}=Q_i$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i$$

נבחן אם היא באמת קאנונית:

$$\{Q_i, P_j\} = \{p_i, -q_j\} = -\left(-\delta_{ij}\right) = \delta_{ij}$$

נחזור לבעיה מהדוגמא הקודמת - אוסצילטור הרמוני -

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

והגדרנו את הטרנספורמציה

$$P = \frac{1}{2m\omega}\left(p^2 + 2m^2\omega^2 q^2\right)$$
$$Q = \cot^{-1}\left(\frac{P}{m\omega q}\right) \to p = m\omega q \cot\left(Q\right)$$

נראה שזו טרנספורמציה קאנונית על ידי מציאת פונקציה יוצרת.
נחפש, $F_q\left(q, Q\right)$ כך ש-

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

ולכן

$$F_1\left(q, Q\right) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q + g(Q)$$

אנחנו יודעים גם ש-

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -\frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{m\omega^2 q^2}{2m\omega}\left(\cot^2\left(Q\right) + q\right) = -\frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2 Q}$$
$$f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

אם נקח

$$F_1(q, Q) = m\omega q \cot\left(Q\right)$$

אז היא מקיימת את שני התנאים.

דוגמאת נגד נראה שהטרנספורמציה

$$P = \frac{1}{2m\omega}\left(p^2 - m^2\omega^2 q^2\right)$$
$$Q = \cot^{-1}\left(\frac{p}{m\omega q}\right)$$

אינה קאנונית.

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p \Rightarrow F_1\left(q, Q\right) = \frac{m\omega q^2}{2}\cos\left(Q\right) + g(Q)$$
$$\left(q, p\right) \to Q\left(q, p\right) \to p\left(q, Q\right)$$

והתנאי השני:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P$$

נקח פונקציה מהצורה שמצאנו, ונגזור לפי Q

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2 Q}\right) + \frac{dg}{dQ}$$

מצד שני,

$$-P = -\frac{1}{2m\omega}m^2\omega^2 q^2\left(\cot^2\left(Q\right) - 1\right) = \frac{m\omega q}{2}\left(q - \cot^2 Q\right)$$

נחפש g כך ש־$\frac{dg}{dQ}$ יתן את הביטוי החסר -

$$-\frac{mq^2}{2\sin^2 Q} + \frac{dg}{dQ} = \frac{m\omega q^2}{2}$$
$$\frac{dg}{dQ} = \frac{m\omega q^2}{2}\left(1 - \cot^2 Q + \frac{1}{\sin^2 Q}\right) = m\omega q^2$$

אבל g הוא $g(Q)$, ואילו מצאנו שהוא צריך להיות $g(q)$ - ולכן הטרנספורמציה לא קיימת.
לא תמיד נוכל למצוא פונקציה יוצרת מהצורה $F_1(q, Q)$.

$$Q(q, p) \to P(q, Q)$$

אז ניתן $F_1\left(q, Q\right)$.
אם לא ניתן להפוך את הקשר אז לא נוכל למצוא $F_1\left(q, Q\right)$ ונצטרך לבחור משתנים אחרים.
כי אז q, Q לא פורשים את המרחב ולא ניתן להשתמש בהם בתור קוארדינטות.

2.5.1 עוד פונקציה יוצרת

ניקח פונקציה יוצרת

$$F = F_2\left(q, P, t\right) - QP$$

נציב ב־† ונקבל, שהנגזרת המלאה שלה לפי הזמן היא:

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_2}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$p\dot{q} - H = -Q\dot{P} - H\left(P, Q\right) + \frac{dF}{dt}$$

ומשני האיברים נקבל:

$$\left(P - \frac{\partial F_2}{\partial q}\right)\dot{q} + \left(Q - \frac{\partial F_2}{\partial P}\right)\dot{p} + \left(F\left(P, Q\right) - H\left(p, q\right) - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = 0$$

ונקבל

$$P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i}$$
$$H\left(P,Q\right) = H(p,q) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

יכולים להיות מקרים בהם המשתנים P, Q אינם בלתי תלויים.
אם p, Q הם משתנים בת"ל ־ נגדיר

$$F = F_3\left(p,Q,t\right) + qp$$

ועל ידי פיתוח דומה נקבל

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{dp}$$
$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

ואם p, P הם המשתנים הבלתי־תלויים, נקבל ש־

$$F = F_4\left(p,P,t\right) + qp - QP$$
$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$$
$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

במקרה הכללי ביותר, עבור ארבעה משתנים ־ q_1, q_2, p_1, p_2 ו־Q_1, Q_2, P_2, P_2, אפשר לקחת כל ארבע קוארדינטות ישנות+חדשות.

טרנספורמציה היא קאנונית $\Longleftrightarrow$ יש לה פונקציה יוצרת.

2.6 קוארדינטה ציקלית בפורמליזם ההמילטוני

הגדרה 2.2 q^a קוארדינטה ציקלית, אם $\frac{\partial H}{\partial q^a}(q,p) = 0$ (כלומר, היא לא מופיעה בהמילטוניאן) ממשוואות התנועה ־

$$\dot{p}^a = \frac{\partial H}{\partial q_a} = 0$$

כלומר ־ התנע הצמוד לנקודה ־ קבוע ־ $p_a = \text{const}$ (שיקבע על סמך תנאי התחלה)

נניח ש־q_1 ציקלית אז

$$\begin{aligned} H\left(q_2,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n\right) &= H\left(q_2,\ldots,q_n,\alpha,p_2,\ldots,p_n\right) \\ &= H_\alpha\left(q_2,\ldots,q_n,p_2,\ldots,p_n\right) \end{aligned}$$

(כאשר $p_0 = \alpha$ קבוע, כי q_1 ציקלית) ויש לנו $2n-2$ משוואות תנועה עם $2n-2$ משתנים.

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_2}\left(q_2,\ldots,q_n,p_2,\ldots,p_n\right)$$
$$\vdots$$
$$\dot{p}_n = \frac{\partial H}{\partial q_n}\left(q_2,\ldots,q_n,p_2,\ldots,p_n\right)$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha}\left(q_2,\ldots,q_n,p_2,\ldots,p_n\right)$$

אם נגזור את ההמילטוניאן חלקית לפי q (כלומר - p,t קבועים)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H\left(q,p,t\right)}{dq}|_{p,t} &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum p\dot{q}-L\left(q,\dot{q},t\right)\right)|_{p,t} \\
&= P\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}|_{p}-\frac{\partial L}{\partial q}|_{\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\sum\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}|_{p} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q}|_{\dot{q}}
\end{aligned}$$

כלומר, q ציקלית בלגרנז'יאן $\Longleftrightarrow$ q ציקלית בהמילטוניאן.

דוגמה - חלקיק נע במישור בהשפעת כח מרכזי

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\theta}^{2}\right)-V\left(r\right) \\
p_{r} &= \frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r} \\
p_{\theta} &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^{2}\dot{\theta}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{p_{\theta}}{mr^{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \sum p\dot{q}-L=\frac{p_{r}^{2}}{m}+\frac{p_{0}^{2}}{mr^{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{p_{r}^{2}}{m}+\frac{p_{\theta}^{2}}{mr^{2}}\right)+V(r) \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_{r}^{2}+\frac{p_{\theta}^{2}}{r^{2}}\right)+V_{r}
\end{aligned}$$

θ אינה מופיעה בהמילטוניאן, ולכן θ ציקלית. $\frac{\partial H}{\partial\theta}=0$, ולכן $p_{\theta}=l$, קבוע.

הערה 2.3 באופן כללי, תנע צמוד אינו בהכרח "תנע". הוא יכול להיות, בקוארדינטות מסויימות, אבל הוא לא חייב להיות.

$$\begin{aligned}
H_{l} &= \frac{1}{2m}\left(P_{r}^{2}+\frac{l^{2}}{r^{2}}\right)+V\left(r\right) \\
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_{r}}=\frac{p_{r}}{m} \\
\dot{p_{r}} &= -\frac{\partial H}{\partial r}=-V'(r)+\frac{l^{2}}{mr^{3}}
\end{aligned}$$

בהנתן הפוטנציאל $V(r)$, אפשר למצוא את $r(t)$ ו-$p_r(t)$,

$$\begin{aligned}
&r(t) \\
&p_{r}(t) \\
&p_{\theta}(t)=l \\
&\dot{\theta}(t)=\frac{\partial H_{l}}{\partial l}=\frac{l}{mr^{2}(t)} \\
&\theta(t)=\theta_{0}+\int_{0}^{t}\frac{l}{mr^{2}(t)}dt
\end{aligned}$$

2.7 אנרגיה והמילטוניאן

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

כלומר, אם $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ ההמילטוניאן קבוע בזמן.
עם יש טרנספורמציה של קוארדינטות שלא מערבת את הזמן, למשל,

$$r_i=r_i\left(q_1,\ldots,q_n\right)$$

ואם הפוטנציאל לא תלוי במהירות, נקבל $H=E$ ו־$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$.
אם נקח טרנספומציה שמערבת את הזמן:

$$r_i=r_i\left(q_1,\ldots,q_n,t\right)$$

אז ההמילטוניאן לא שווה לאנרגיה ־ $H\neq E$, אבל הוא יכול להיות גודל שמור
הגדרנו

$$L=T-V$$

והוא נשאר כזה גם אחרי טרנסופרמציות של קוארדינטות.

$$H=\sum p\dot{q}-L$$

ולכן הוא כן תלוי בבחירת הקוארדינטות.
דוגמה
עגלה נוסעת במהירות קבועה v_0, על העגלה יש מוט ואליו מחובר קפיץ k עם מסה m.
x־ מיקום המסה במערכת המעבדה.

$$[(x,\dot{x},t)]=T-V=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{k\left(x-v_0t\right)^2}{2}$$

ומשוואות אוילר לגרנז':

$$m\ddot{x}=-k\left(x-v_0t\right)$$

נסתכל על ההמילטוניאן של המערכת:

$$H(p,x,t)=T+V=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}\left(x-v_0t\right)^2$$

ו־$\frac{\partial H}{\partial t}\neq 0$ אז ההמילטוניאן לא גודל שמור. (אם הפוטנציאל לא תלוי במהירות, $H=T+V$. תרגיל: להציב בהגדרה ש להמילטוניאן ולוודא)
נפתור את אותה בעיה בקוארדינטות אחרות:

$$x'=x-v_0t$$

כלומר, המיקום היחסי של הקפיץ לעגלה

$$\dot{x}'=\dot{x}-v_0$$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}'+v_0\right)^2-\frac{kx'^2}{2}$$

$$H(x',p')=\frac{\left(p'-mv_0\right)^2}{2m}+\frac{kx'^2}{2}-\underbrace{\frac{mv_0^2}{2}}_{\text{const}}$$

כאן, H הוא קבוע התנועה, אבל $H\neq E$.
(פיתוח ההמילטוניאן:

$$\begin{aligned}p'=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}'}=m\left(\dot{x}+v_0\right)\\ m\left(\dot{x}'+v_0\right)\dot{x}'-L\left(x',\dot{x}',t\right)\end{aligned}$$

והסביה לזה שהאנרגיה לא נשמרת - ביצענו טרנספורמציה שלא תלויה בזמן.

- הסיבה שאין שימור אנרגיה - מישהו כנראה "מושך" את העגלה ומאלץ אותה לנוע ב־v_0 למרות "ההפרעות" של הקפיץ.
- מעבר מערכת היחידות שקול לאילוץ שהמסה זזה במהירות קבועה.

2.8 טרנספורמציה אינפינטיסימלית

נסתכל על הטרנספורמציה:

$$(q,p)\to Q\left(q,p,\alpha\right),P\left(q,p,\alpha\right)$$

נסתכל על הפונקציה היוצרת: $F_2\left(q,P,\alpha\right)$

$$\begin{aligned}(I)\quad p_a=\frac{\partial F_2}{\partial q_a}\left(q,P,\alpha\right)\to P\left(p,q,\alpha\right)\\ (II)\quad Q_a=\frac{\partial F_2}{\partial P_a}\left(q,P\left(q,P,\alpha\right),\alpha\right)\end{aligned}$$

בודדנו את P מהטרנספורמציה הראשונה ונציב אותה בטרנספורמציה ל־Q, כדי לקבל $Q_a(q,p,\alpha)$.
נסתכל על גזירה של I ו־II לפי α :

$$\frac{\partial\left(1\right)}{\partial\alpha}$$

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}F_2\left(q,P,\alpha\right)+\sum\frac{\partial^2F_2}{\partial q_a\partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial\alpha}\left(q,p,\alpha\right)\\ &=\frac{\partial}{\partial q_a}\frac{\partial}{\partial\alpha}F_2\left(Q,P,\alpha\right)+\sum_b\frac{\partial Q_b}{\partial q_a}\frac{\partial P_b}{\partial\alpha}\end{aligned}$$

נסמן -

$$G\left(q,P,\alpha\right)=\frac{\partial F_2}{\partial\alpha}\left(q,P,\alpha\right)$$

הפונקציה היוצרת את הטרנספורמציה האינפינטיסימלית. נמשיל לפתח את הביטוי ל־"0":

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial G\left(q,P,\alpha\right)}{\partial q_a}+\sum_b\frac{\partial Q_b}{\partial q_q}\frac{\partial_B}{\partial\alpha}\,/\cdot\sum_a\frac{\partial q_q}{\partial Q_c}\\ \sum_{b,c}\frac{\partial q_a}{\partial Q_c}\frac{\partial Q_b}{\partial q_a}\frac{\partial P_b}{\partial\alpha}=-\sum\frac{\partial Q_a}{\partial Q_c}\frac{\partial G}{\partial q_a}\end{aligned}$$

אבל $\sum_a\frac{\partial q_a}{\partial Q_c}\frac{\partial Q_b}{\partial q_a}=\delta_{bc}$ וקיבלנו-

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_c}{\partial\alpha}&=-\sum_a\frac{\partial G}{\partial q_a}\frac{\partial q_a}{\partial Q_c}\\ &=-\frac{\partial G\left(Q\left(q,P\right),P,\alpha\right)}{\partial Q_c}\end{aligned}$$

והתוצאה הסופית של היפתור היא ש־

$$\boxed{\frac{\partial P_c}{\partial \alpha} = -\frac{\partial G\left(Q,P,\alpha\right)}{\partial Q_c}}$$

נגזור את המשוואה II לפי α־

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_a\left(q,p,\alpha\right)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial P_a}F_2\left(q,p,\alpha\right) + \sum \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_a \partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial \alpha} \\
&= \frac{\partial G\left(q,P,\alpha\right)}{\partial P_a} + \sum \frac{\partial Q_b}{\partial P_a}\left(-\frac{\partial G\left(Q,P,\alpha\right)}{\partial Q_b}\right) \\
\left.\frac{\partial G\left(Q(q,P),P\right)}{\partial_a}\right|_q &= \left.\frac{\partial}{\partial P_a}\right|_Q G\left(q,P\right) + \sum \frac{\partial G}{\partial Q_b}\frac{\partial Q_b\left(q,P\right)}{\partial P_a}
\end{aligned}$$

ונקבל את המשוואה השניה:

$$\boxed{\frac{\partial Q_a}{\partial \alpha} = \frac{\partial G\left(Q,P\right)}{\partial P_a}}$$

היה לנו

$$\begin{aligned}
&F_1\left(q,P,\alpha\right) \\
&\qquad \left(q,p\right) \to Q\left(q,p,\alpha\right), P\left(q,p,\alpha\right)
\end{aligned}$$

טרנספורמציה קאנונית שנוצרת מפונקציה יותר:

$$\begin{aligned}
p_a &= \frac{\partial F_2}{\partial q_a}\left(q,P,\alpha\right) \\
Q_a &= \frac{\partial F_2}{\partial p_a}\left(q,P,\alpha\right)
\end{aligned}$$

הגדרנו

$$G\left(q,P,\alpha\right) = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\left(q,P,\alpha\right)$$

ואחרי קצת חשבון קיבלנו־

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha}Q_a\left(q,p,\alpha\right) = \frac{\partial}{\partial P_a}G\left(Q,P,\alpha\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha}P_a\left(q,p,\alpha\right) = -\frac{\partial}{\partial Q_a}G\left(Q,P,\alpha\right)}$$

(כאשר $G\left(Q,P,\alpha\right) = G\left(q\left(Q,P,\alpha\right),P,\alpha\right)$)
צורת כתיבה שקולה, עם סוגרי פואסון:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_a}{\partial \alpha} &= \left\{Q_a, G\left(Q,P,\alpha\right)\right\} \\
\frac{\partial P_a}{\partial \alpha} &= \left\{P_a, G\left(Q,P,\alpha\right)\right\}
\end{aligned}$$

G היא פונקציה יוצרת של הטרנספורמציה האינפינטיסימלית.

3 פורמליזם המילטון יעקובי

נסתכל על הפרמטר α בתור זמן, ואת G בתור ההמילטוניאן.
אם התחלנו מ־q,p, ומהפתרון של משוואות התנועה יש לנו $q(t,),p(t)$
אנחנו רוצים להגדיר טרנספורמציה ל־

$$Q_a\left(q,p,t\right)=q_a(t)$$
$$P_a\left(q,p,t\right)=p_a(t)$$

$$\dot{q}_a(t)=\frac{\partial Q_a}{\partial t}(q,p,t)=\{Q,H\left(Q,P,t\right)\}$$
$$\dot{p}_a(t)=\frac{\partial P_a}{\partial t}\left(q,p,t\right)=\{Q,H\left(Q,P,t\right)\}$$

3.0.1 דוגמה ־ חלקיק חופשי

עבור חלקיק חופשי ־ $H=\frac{p^2}{2m}$.

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$$
$$\dot{p}=-\frac{\partial h}{\partial q}=0$$

אם חלקיק בזמן $t=0$ נמצא בנקודה (q,p) (תנאי ההתחלה). אזי

$$Q\left(q,p,t\right)=q+\frac{p}{m}t$$
$$P\left(q,p,t\right)=p$$

נראה במפורש שהטרנסופרמציה קאנונית.

3.0.2 דוגמה ־ אוסצילטור הרמוני

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}$$

$$\dot{q}=\frac{p}{m}$$
$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-kq$$

אם נקח

$$Q(t)=A\cos\left(\omega t\right)+B\sin\left(\omega t\right)$$
$$P(t)=-m\omega A\sin\left(\omega t\right)+m\omega B\cos\left(\omega t\right)$$
$$Q(0)=q=A$$
$$P(0)=p=m\omega B$$

אזי

$$\begin{aligned}Q\left(q,p,t\right)&=q\cos\left(\omega t\right)+\frac{p}{m\omega}\sin\omega t\\P(q,p,t)&=-m\omega q\sin\left(\omega t\right)+p\cos\omega t\end{aligned}$$

נראה שהטרנסופרמציה קאנונית:

$$\left\{Q\left(q,p,t\right),P\left(q,pt\right)\right\}=\cos^2\omega t-\left(-\sin^2\omega t\right)=1$$

אפשר להסתכל על הטרנספורמציה משני הכיוונים - קדימה

$$\left(q,p\right)\to Q\left(q,p,t\right),P\left(q,p,t\right)$$

אבל גם על הטרנספורציה ההפוכה...
אם אנחנו מוצאים טרנספורמציה כך ש-

$$\begin{aligned}Q(q,p,t)&=\mathrm{const}\\P\left(q,p,t\right)&=\mathrm{const}\end{aligned}$$

אז הטרנספורמציה ההפוכה היא פתרון משוואות תהנועה $Q\to q$, $P\to p$.
אנחנו מחפשים טרנספורמציה שתעביר אותנו למערכת שבה Q,P קבועים.

$$\begin{aligned}\dot{Q}&=\left\{Q,H'(Q,P,T)\right\}=0\\\dot{P}&=\left\{P,H'\left(Q,P,T\right)\right\}=0\end{aligned}$$

ובאופן כללי, $H'=0$ כלומר

$$H'=H\left(q,p\right)+\frac{\partial}{\partial t}S\left(q,p,t\right)=0$$

אם נמצא את הפונקציה היוצרת S, אז היא יוצרת טרנספורמציה שבה משוואות התנועה הן טריוויאליות (q,p קבוע) והטרנספורמציה ההפוכה פותרת לנו את הבעיה.
נחפש טרנספורמציה כך ש-

$$\begin{aligned}\dot{Q}&=\left\{Q,H'\left(Q,P,t\right)\right\}=0\\\dot{P}&=\left\{Q,H'\left(Q,P,t\right)\right\}=0\end{aligned}$$

כלומר, $H'=f(t)$. נחפש טרנספורנמציה S כך ש-$H'=0$

$$\boxed{0=H'\left(Q,P\right)=H\left(q,p,t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}\left(q,P,t\right)}$$

וזו היא **משוואת המילטון יעקובי.**
מהי ה-S?

$$\begin{aligned}&S(q,P,t)\\&\quad\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial S}{\partial P_i}\underbrace{\dot{P}_i}_{0}\\&\qquad=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i p_i\dot{q}_i\\&\qquad=\sum p_i\dot{q}_i-H=L\end{aligned}$$

אז

$$S = \int L \, dt$$

ואנחנו כבר מכירים אותו... אבל כדי להציב ולחשב - אנחנו צריכים את הפתרון של משוואות התנועה, אז לחשב ישירות את האינטגרל זה לא ממש פתרון.

3.1 המילטוניאן שלא תלוי מפורשות בזמן

אז הפונקציה היוצרת תהיה מהצורה

$$S\left(q,P,t\right) = W\left(q,P\right) - P_1 t$$

(כאשר P_1 היא קואורדינטה כלשהי שלנו)

כאשר W היא פונקציה יוצרת של טרנספורמציה שתעביר אותנו להמילטוניאן ששווה ל-P_1 ($H' = P_1$)

$\dot{Q}_a = \frac{\partial H}{\partial P_a} = \begin{cases} a = 1 & \dot{Q}_a = 1 \\ a \neq 1 & \dot{Q} = 0 \end{cases}$,

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1^{(0)} + t \\ Q_a(t) &= Q_a^{(0)} \quad a \neq 1 \end{aligned}$$

והתנעים יהיו כולם -

$$\dot{P}_a = \frac{\partial H'}{\partial Q_a} = 0 \Rightarrow P_a(t) = \text{const}$$

$$\begin{aligned} q &= q\left(Q_q^{(0)} + t, Q_2^{(0)}, \ldots, Q_a^{(0)}\right) \\ P &= P\left(Q_1^{(0)} + t, Q_2^{(0)}, \ldots, P_a^{(0)}\right) \end{aligned}$$

וזה הפתרון של הבעיה.

ואז -

$$\begin{aligned} S\left(q,P,t\right) &= W\left(q,P\right) - P_1 t \\ H' &= H - \frac{\partial S}{\partial t} = P_1 - \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= P_1 - P_1 = 0 \end{aligned}$$

3.1.1 דוגמה

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

נחפש $W(q,P)$ כך ש- $H' = P$,

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}\left(q,P\right)$$

ההמילטוניאן הוא

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = P$$

$$\frac{\partial W}{\partial q}=\sqrt{2m\left(P-\frac{1}{2}kq^2\right)}$$

נסמן, $P=E$ (כי במערכת הספציפית הזו ־ התנע הצמוד הוא האנרגיה)

$$\begin{aligned}
W\left(q,P\right) &= \int\sqrt{2m\left(P-\frac{1}{2}kq'^2\right)}dq' \\
&= \int\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}kq'^2\right)}dq' \\
Q=\frac{\partial W}{\partial E} &= \int\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}kq'^2\right)}dq' \\
&= \int dq'\frac{2m}{2\sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}kq^2\right)}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{2E}q'^2}}
\end{aligned}$$

נקח ־ $x'=\sqrt{\frac{k}{2E}}q'$ ונקבל

$$=\int dx'\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin\left(x\right)$$

וקיבלנו

$$\begin{aligned}
Q &= \sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}q\right) \\
q &= \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}Q\right) \\
q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\left(Q_0+t\right)\right)
\end{aligned}$$

כשהמעבר האחרון הוא לפי $Q(t)=Q_0+t$.

3.2 משפט ליוביל

בטרנספורמצית קוארדינטות ־ $q(q,p)\to\begin{matrix}Q\left(q,p,t\right)\\P\left(q,p,t\right)\end{matrix}$ ־

$$\begin{aligned}
q(t) &= Q\left(q,p,t\right) \\
p(t) &= P\left(q,p,t\right)
\end{aligned}$$

(נזכר בסימון ־ $\eta=(q,p)$, $\eta'=(Q,P)$) הטרסנפורמציה קאנונית

$$\left(\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)J\left(\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)^T=J$$

או -

$$\left|\left(\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)^T\right| = \left|\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right|$$

$$\left|\left(\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\right|^2 \det J = \det J$$

ולכן, $\left|\left(\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\right|^2 = 1$ (מתמטית, היא יכולה להיות ± 1, אבל מתנאי התחלה - 1)
נסתכל על מרחב הפאזה - ועל הנקודות η, η'.
נסתכל על הנפח, Ω, בסביבה מוגדרת של η - ונסתכל על השינוי של הנפח תחת הטרנספורמציה (והזזתו מהסביבה של η לסביבה של η')

$$\Omega = \int\limits_{\eta\in\Omega} d^{2n}\eta = \int\limits_{\eta\in\Omega} d^{2n}\eta \underbrace{\left|\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right|}_{=1}$$
$$= \int\limits_{\eta'\in\Omega'} d^{2N}\eta' = \Omega'$$

בעצם - הביטוי $\left|\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right|$ שווה לאחד, אז אפשר להוסיף אותו באופן שרירותי - אבל הוא גם היעקוביאן שמתאר את ההעתקה. [1]
השימוש של כל העסק הזה הוא במכניקה סטטיסטית - כאשר מרכת מתוארת על ידי נפח סביב נקודה - הסתברות להיות בנקודה מסויימת.

4 בעיות שני גופים

שתי מסות - m_1, m_2. הפוטנציאל תלוי במרחק בינהם - $V(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$ ו- $\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$.
מרחב הקונפיגורציה ממימד 6, ומרחב הפאזה ממימד 12

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - V(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$$
$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$$

נהפוך את המערכת לבעיה חד-גופית שקולה -
המערכת היא אינווריאנטית להזזות במרחב - $\vec{r_i} \to \vec{r_i} + \vec{x}$, אז יש שלושה גדלים שמורים - התנע הקווי הכולל במערכת

$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

נעבור למערכת מרכז המסה - ($Q: \vec{r}, \vec{R}$)

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$
$$\vec{R} = a\vec{r_1} + b\vec{r_2}$$

כאשר $a = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ ו- $b = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ ו- $a + b = 1$.
הטרנספורמציה היא נקודתית - $(q,p) \to (Q,P)$ - כאשר $Q(q)$.

[1] (ראה מחברת אינפי 3, סעיף 4.3)

הטרנספורמציה ההפוכה היא

$$\vec{r_1}=\frac{\vec{R}+v\vec{r}}{a+b}=\vec{R}+b\vec{r}$$
$$\vec{r_2}=\vec{R}-a\vec{r}$$

הטרנספורמציה על התנעים תהיה

$$P_a=\sum_b p_b\frac{\partial p_b}{\partial Q_a}$$

ונקבל ש־

$$\vec{P_r}=\vec{p_1}\frac{\partial\vec{r_1}}{\partial r}+\vec{p_2}\frac{\partial\vec{r_2}}{\partial r}=b\vec{p_1}-a\vec{p_2}$$
$$\vec{P_R}=\vec{p_1}\frac{\partial r_1}{\partial R}+\vec{p_2}\frac{\partial\vec{r_2}}{\partial R}=\vec{p_1}+\vec{p_2}=\vec{P_{cm}}$$

והטרנספורמציות ההפוכות:

$$\vec{p_1}=\vec{P_r}+a\vec{P_R}$$
$$\vec{p_2}=-\vec{P_r}+b\vec{P_r}$$

כלומר, יש לנו טרנספורמציה קאנונית (נקודתית)

$$\vec{r}=\vec{r_1}+\vec{r_2}$$
$$\vec{R}=a\vec{r_1}+\vec{a}r_2$$
$$\vec{P_r}=b\vec{p_1}+a\vec{p_2}$$
$$\vec{P_R}=\vec{p_1}+\vec{p_2}$$

ההמילטוניאן החדש שלנו הוא

$$H=\frac{\left(\vec{P_r}+a\vec{P_R}\right)^2}{2m_1}+\frac{\left(-\vec{P_r}+b\vec{P_R}\right)^2}{2m_2}+V(r)$$
$$=P_R^2\left(\frac{a^2}{2m_1}+\frac{b^2}{2m_2}\right)+P_r\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)+\underbrace{\vec{P_R}\vec{P_r}\left(\frac{a}{m_1}-\frac{b}{m_2}\right)}_{=0}+V(r)$$

הגדרה 4.1 מסה מצומצמת ־ μ ־ $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

$$\frac{a^2}{2m}+\frac{b^2}{2m}=\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{1}{2(m_1+m_2)}$$

וההמילטוניאן שקיבלנו ־

$$H=\underbrace{\frac{\vec{P_R}^2}{2(m_1+m_2)}}_{\text{Center of mass}}+\underbrace{\frac{\vec{P_r}}{2\mu}+V(R)}_{\text{Around C.M.}}$$

נראה ש־$\vec{P}_R = \text{const} \Leftarrow \frac{\partial H}{\partial \vec{R}} = 0$ ו־$R(t) = R(0) + \frac{\vec{P}_R t}{m}$.
נסתכל על המערכת מלבד מרכז המסה ־

$$H' = \frac{\vec{P}_r}{2\mu} + V(r)$$

כלומר, בעיית שני גופים שקולה לבעיה של גוף יחיד שמסתו μ, והפוטנציאל $V(r)$.
משוואות התנועה וקבועי התנועה ־ (זו בעיה בשלושה מימדים ־ r_x, r_y, r_z ו־p_x, p_y, p_z)

$$H' = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

להמילטוניאן יש סימטריה ספרית ־ ולכן התנע הזוויתי, $\vec{L}$, שמור. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ שמור, ולכן

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$$

לכן כיוון התנועה ניצב לתנע הזוויתי והתנועה היא במישור הניצב ל־$\vec{L}$.

$$H' = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2\mu} + V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

נעבור לקוארדינטות פולריות במישור ־ $x = r\cos\theta$ ו־$y = r\sin\theta$ ו־

$$p_r = \frac{\partial x}{\partial r} p_x + \frac{\partial y}{\partial r} p_y$$
$$p_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} p_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} p_y$$

או ־

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

והטרנספורמציה ההפוכה ־

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ \frac{p_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

וההמילטוניאן יהיה

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

}T{ˆagemO\I}agemO\{cev\ θ היא ציקלית ־ ולכן $l = p_\theta = \text{const}$ ונקבל

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \underbrace{V(r) + \overbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}}^{\text{Centrifugal}}}_{u(r)}$$

אזי הפוטנציאל האפקטיבי הוא $u(r)$

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + u(r) = E$$

ההמילטוניאן לא תלוי מפורשות בזמן, ולכן ההמילטוניאן, כגודל שמור, הוא האנרגיה.

$$p_r = \sqrt{2\mu\left(E - u(r)\right)}$$

ו־

$$\frac{p_r}{\mu} = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - u(r)\right)}$$

קשה לנו למצוא ישירות את r מכאן ־ כי יש לנו פונקציה של r , ולכן נהפוך את המשוואה:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - u(r)\right)}}$$

אזי

$$t = t_0 + \int_{r(t_0)}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - 2u(r')\right)}}$$

נרצה להפוך את הקשר ולקבל מ־$t(r)$ את $r(t)$.

4.1 בעיית קפלר

עבור הפוטנציאל ־ $V(r) = \frac{\alpha}{r}$.

מסתכלים על המרכז בתור אחד החלקיקים. אז תנועתו של החלקיק השני היא באליפסה סביבו.

החוק השני של קפלר ־ $\frac{dS}{dt} = \dot{S} = \text{const}$, כאשר S הוא השטח של גיזרה של האליפסה שהחלקיק עובר בשלב מסויים

$$dS = \frac{r \cdot r\theta}{2} = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\dot{S} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}$$

אבל התנע הזוויתי $l = \mu r^2\dot{\theta}$ ולכן $\dot{S}$ הוא אכן קבוע.

הרבה פעמים, מה שמעניין אותנו זה לא $r(t), \theta(t)$ אלא צורת המסלול ־ $r(\theta)$. נחפש דרך לקבל את הצורה של המסלול ־

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - u(r)\right)}}$$

כאשר $u(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$.

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{dt}{dr}\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - u\left(r\right)\right)}}$$

$$\theta(r) = \theta_0 + l\int_{r(\theta_0)}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(E - u(r')\right)}}$$

טרנספורמציות קאנוניות היו יכולות לתת לנו את אותם הביטויים -

$$H=\frac{p_r^2}{2\mu}+\frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}+V(r)$$

נחפש טרנספורמציה קאנונית שתעביר אותנו מ־$(r,\theta,p_r,p_\theta)\to(Q_l,q_H,l,H)$ (בפורמליזם המילטון־יעקובי)

$$\begin{aligned}\dot{Q}_l&=\{Q_l,H\}=\{Q_l,P_H\}=0\\ \dot{Q}_H&=\{Q_H,H\}=1\end{aligned}$$

נחפש פונקציה יוצרת מהצורה $F_2\left(q,P\right)$,

$$W\left(r,\theta,l,H\right)$$

$$\begin{aligned}p_r&=\frac{\partial W}{\partial r}\left(r,\theta,l,H\right)\\ l=p_\theta&=\frac{\partial W}{\partial\theta}\left(r,\theta,l,H\right)\\ W&=l\theta+W_1\left(r,l,\theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_r^2&=2\mu\left(H-V(r)\right)-\frac{l^2}{r^2}\\ p_r&=\sqrt{2\mu\left(H-V(r)\right)-\frac{l^2}{r^2}}=\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{\partial W_1}{\partial r}\\ W_1\left(r,l,H\right)&=\int^r\sqrt{2\mu\left(H-V(r')-\frac{l^2}{r'^2}\right)}dr'\end{aligned}$$

אזי W כולו הוא

$$\begin{aligned}W(r,\theta,l,H)&=l\theta+\int^r\sqrt{2\mu\left(H-V(r')-\frac{l^2}{r'^2}\right)}dr'\\ Q_l=\frac{\partial W}{\partial l}&=\theta-l\int\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(H-V(r')-\frac{l^2}{r'^2}\right)}}=\text{const}=\theta_0\\ \theta-\theta_0&=l\int^r\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(H-\underbrace{V(r')-\frac{l^2}{r'^2}}_{u(r')}\right)}}\\ Q_H=t-t_0=\frac{\partial W}{\partial H}&=\int^r\frac{\mu dr'}{\sqrt{2\mu\left(H-u(r')\right)}}\end{aligned}$$

4.1.1 סוגי מסלולים בבעיות שני גופים

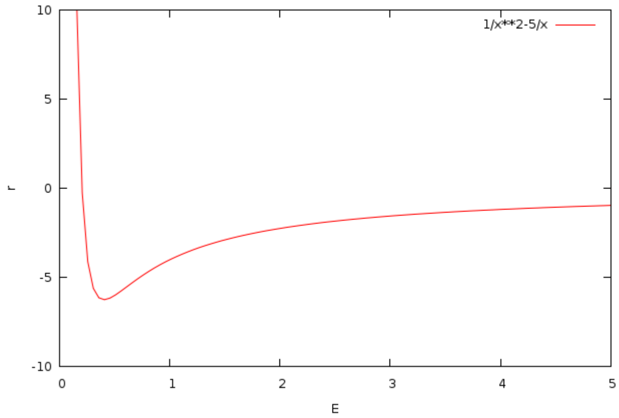
$$H=\frac{p_r^2}{2\mu}+u(r)$$

$$u(r)=v(r)+\frac{l^2}{2\mu r^2}$$

נסתכל על בעיית קפלר -

$$\boxed{v(r)=\frac{\alpha}{r}}$$

כאשר $\alpha>0$, פוטנציאל משיכה.
(יש כאן שרטוט די חשוב - פוטנציאל כפונקציה של מרחק



עבור $E_1>0$, המסלול הוא לא קשור. הרדיוס, $r>r_1$, (r_1 הוא r המקיים $V^{-1}(E_1)=r_1$
עבור $E_{min}<E_2<0$, $r_1\le r\le r_2$ (כאן - $V^{-1}(E)=r_1,r_2$)
כאשר $E=E_{min}$, מתקבל $r=\text{const}$
והמסלול יהיה

$$\theta(r)=\theta_0+l\int^r\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu E-2\mu\frac{\alpha}{r'}-\frac{l^2}{r'^2}}}$$

שינוי משתנה - $u=\frac{1}{r}$ ו־$du=-\frac{1}{r^2}dr$ ונקבל

$$\theta(u)-\theta_0=-\int^u\frac{du'}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2}-\frac{2\mu\alpha u'}{l^2}-u'^2}}$$

$$=-\int\frac{du'}{\sqrt{\left(\frac{2\mu E}{l^2}+\frac{\mu^2}{l^4}\right)-\left(u'+\frac{\mu\alpha}{l^2}\right)^2}}$$

נבצע החלפה נוספת - $x=u+\frac{\mu\alpha}{l^2}$ ואז $dx=du$

$$=\int^{\frac{1}{r}+\frac{\mu\alpha}{l^2}}\frac{dx}{\left(\frac{2\mu E}{l^2}+\frac{\mu^2\alpha^2}{l^4}-x^2\right)^{1/2}}$$

ולפי $\int\frac{dx}{A^2-x^2}=\arccos\frac{x}{a}$ אזי

$$\theta-\theta_0=-\arccos\left(\frac{l^2\left(\frac{1}{r}+\frac{\mu\alpha}{l^2}\right)}{\sqrt{2\mu El^2+\mu^2\alpha^2}}\right)$$

$$\cos(\theta-\theta_0)=\frac{l^2\left(\frac{1}{r}+\frac{\mu\alpha}{l^2}\right)}{\sqrt{2\mu El^2+\mu^2\alpha^2}}$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu\alpha}{l^2} + \frac{\sqrt{2\mu E l^2 + \mu^2\alpha^2}}{l^2}\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

נסמן -

$$e = \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$
$$p = -\frac{\mu\alpha}{l^2}$$

וקיבלנו -

$$\frac{1}{r} = p\left(1-e\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right)$$

אזי

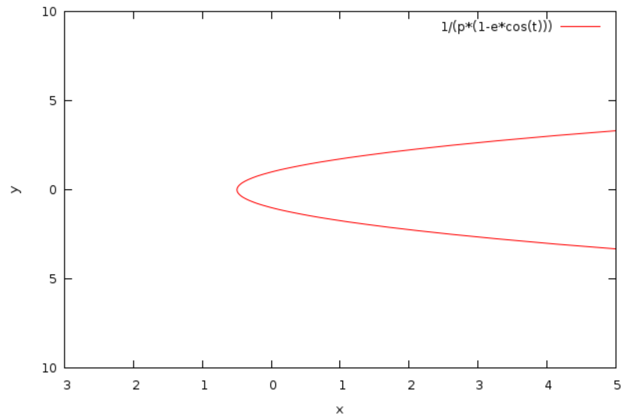
$$or - pe\overbrace{r\cos\left(\theta-\theta_0\right)}^{x} = 1$$

נחזור לקואורדינטות קרטזיות - xy -

$$p\sqrt{x^2+y^2} = 1+pex$$
$$p^2\left(x^2+y^2\right) = 1+2pex+p^2e^2x^2$$
$$p^2\left(1-e^2\right)x^2 - 2pex + p^2y^2 = 1$$

- מקרה ראשון - כאשר $E=0$ ואז $e=1$ ו-

$$p^2y^2 = 1+2pex$$

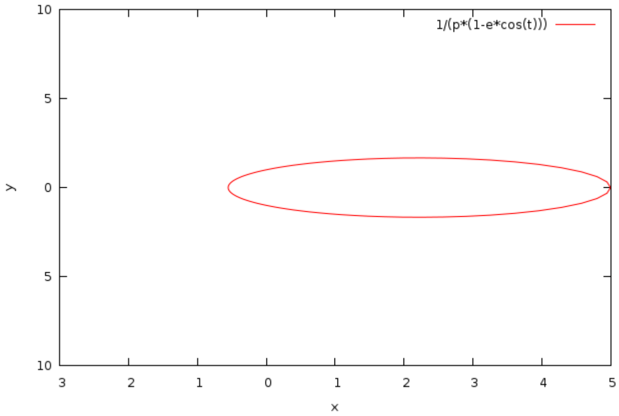


- עבור $e\neq 1$, נחלק ב-$1-e^2$ ונקבל -

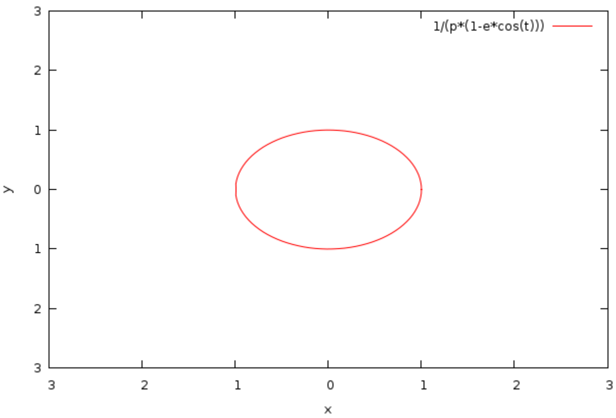
$$p\left(1-e^2\right)\left(x-\frac{e}{p\left(1-e^2\right)}\right)^2 + py^2 = \frac{1}{p\left(1-e^2\right)}$$
$$p^2\left(1-e^2\right)^2\left(x-\frac{e}{p\left(1-e^2\right)}\right)^2 + p^2\left(1-e^2\right)y^2 = 1$$

– אם $e<1$, $E<0$, אזי נקבל אליפסה. נמן $A=\frac{1}{p(1-e^2)}$ ו־$B=\frac{1}{p\sqrt{1-e^2}}$

$$\frac{(x-eA)^2}{A^2}=\frac{y^2}{B^2}=1$$



כאשר אחד המוקדים של האליפסה הוא $(0,0)$.



– כאשר $E=E_{min}$, $e=0$ ומתקבל מעגל ־

עבור $E<0$, נחשב זמן מחזור של התנועה ־

$$\mu r^2\dot{\theta}=\text{const}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{l}{2\mu}=\text{const}$$

באינטגרל על כל האליפסה ־ נקבל ש שטח האליפסה חלקי זמן המחזור הוא קבוע ־

$$\frac{\pi AB}{T}=\frac{l}{2\mu}$$

$$T=\frac{\pi AB\cdot 2\mu}{l}$$

$$=\pi\sqrt{\frac{\mu}{2}}\alpha E^{-\frac{3}{2}}$$

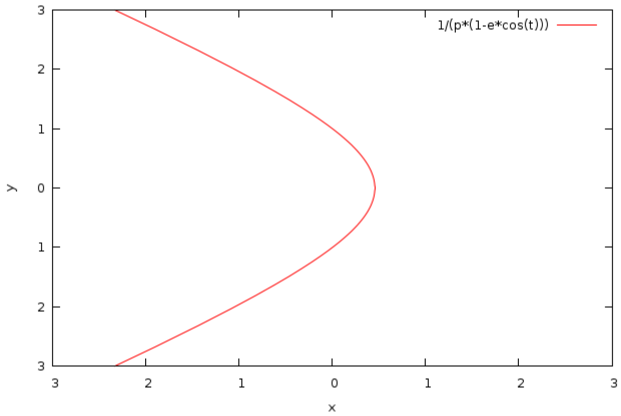
- עבור $E>0$, כלומר ־ $e>1$ ־

$$A=\frac{1}{p\left(e^2-1\right)}$$

$$B=\frac{1}{p\sqrt{e^2-1}}$$

ונקבל

$$\frac{(X+eA)^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$



- היפרבולה - (הענף הימני הוא עבור כח דחיה, ולכן לא ציירנו אותו כאן)

4.2 בעיית פיזור בכח מרכזי

השטף I הוא מספר החלקיקים חלקי (זמן $\times$ שטח)

נסתכל על חתך הפעולה לפיזור בכיוון מסויים.

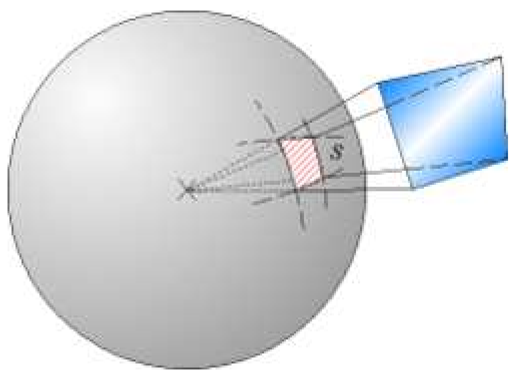
מגדירים את חתך הפעולה לפיזור כתלות בזווית המרחבית Ω, אזי חתך הפעולה

$$\sigma\left(\Omega\right)d\Omega=\frac{\text{Number of particals per time}}{\text{Initial flux}}$$

הכח הוא ב־$(0,0)$, כיוון התנועה הוא בציר x. אזי מקדם הפגיעה s יהיה המרחק על ציר ה־y של החלקיק טרם הפגיעה.

תהא θ הזווית בין $(0,0)$ למסך (שנמצא, נניח על ציר $x=1$) ואזי $\sin\theta$ יהיה מיקום הפגיעה על ציר ה־y. נסובב את כל המערכת הזו סביב ציר x ונקבל את הזווית המרכזית -

$$d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta$$



(זווית מרחבית - מתוך ויקיפדיה)

$E=\frac{mv_0^2}{2}$. E ו־l (תנע זוויתי) גדלים שמורים -

$$l=\left|\vec{r}_0\times\vec{p}_0\right|=s\cdot mv_0=s\sqrt{2mE}$$

כאשר $\vec{r}_0,\vec{p}_0$ הם הערכים בשלב מסויים "לפני" תחילת השפעת הכח ($\vec{r}_0$ - וקטור המיקום ביחס למקור הכח)

$$2\pi I s\,|ds| = 2\pi\sin(\theta)\, I\sin\theta\,|d\theta|$$
$$\sigma(\theta) = \frac{S}{\sin\theta}\left|\frac{dS}{d\theta}\right|$$

משוואות המסלול (כאשר הזווית ביחס למרכז הכח היא $\mathrm{theta}(r)$)

$$\mathrm{theta}(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2}-\frac{2mV}{l^2}-\frac{1}{r'^2}}}$$

כאשר $r_0=\infty$ אזי $\mathrm{theta}_0=\pi$. וכאשר $r=r_m\Rightarrow \mathrm{theta}=\theta+\varphi=\pi-\varphi$

$$\varphi = \int_{r_m}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2}-\frac{2mv}{l^2}-\frac{1}{r^2}}}$$
$$\theta(s) = \pi-2\varphi = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{rm(E-V)}{s^2 2mE}-\frac{1}{r^2}}}$$

נציב $r=\frac{1}{u}$, $dr=-\frac{1}{u^2}du$

$$\theta(s) = \pi - 2\int_0^{u_m}\frac{s\,du}{\sqrt{1-\frac{V(u)}{E}-s^2u^2}}$$

עבור $v(r)=\frac{z_1z_2e^2}{r}$ (דחיה אלקטרוסטטית). $E>0$, ולכן המסלולים הם היפרבוליים. צורת המסלול (עכשיו, ε הוא מה שסימנו e כשפתרנו את בעיות קפלר) ־

$$\frac{1}{r} = \frac{mz_1z_2e^2}{l^2}\left(\varepsilon\cos(\mathrm{theta})-1\right)$$

כאשר $r\to\infty$, הזווית היא φ ־

$$\cos\varphi = \frac{1}{e}$$
$$\theta = \pi-2\varphi$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \varepsilon^2-1$$

נציב את ε^2 , ונקבל ש־

$$\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{2Es}{z_1z_2e^2}\right)^2$$
$$s(\theta) = \frac{z_1z_2e^2}{2E}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ו־

$$\sigma(\theta) = \frac{S}{\sin\theta}\frac{ds}{d\theta}$$
$$\sigma(\theta) = \left(\frac{z_1z_2e^2}{2E}\right)^2\frac{1}{4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

- החישוב נעשה בהנחה שמרכז הכח הוא קבוע. אחרת, זווית הפיזור היא במערכת מרכז המסה. כדי לקבל את הזווית האמיתית ־ צריך לעבור למערכת המעבדה
- $\sigma_T=\int\sigma(\theta)\,d\theta$ ־ שטח המפזר ־ הוא אינסופי ־ כי הכח לא דועך. בפועל, חתך הפעולה אינו סופי, כי "קליפת האלקטרונים" מבטלת את הכח.

4.3 פוטנציאל עם רכיב ריבועי

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda/2}{r^2}$$

(למשל, קירוב של בעיית שלושה גופים)

$$L = \frac{1}{2}m_1\vec{v_1} + \frac{1}{2}m_2\vec{v_2} - V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)$$
$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V\left(|r_1 - r_2|\right)$$
$$\vec{r}, \vec{R}$$

ואחרי שמסירים את מרכז המסה, מקבלים המילטוניאן של גוף אחד

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$
$$u_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2 - \lambda\mu}{2\mu r^2}$$

על פניו, זה מאוד דומה לבעיית קפלר רגילה, עד כדי החלפת l^2 ו־$l^2 - \lambda\mu$
בפועל, זה לא בדיוק ככה
נסמן - $j^2 = l^2 - \mu\lambda$.

$$u(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{j^2}{2\mu r^2}$$

עבור $l^2 - \mu\lambda < 0$ - כבר פתרנו את הבעיה. נפתור הפעם עבור $l^2 - \mu\lambda > 0$.

$$\frac{p_{2r}^2}{2\mu} + U(r) = E = \text{const}$$
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{P_\theta}{\mu r^2}$$
$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

אם לא מעניין אותנו $r(t)$, $\theta(t)$ אלא רק צורת המסלול, אז

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{\mu}{\sqrt{2\mu\left(E - u(r)\right)}}$$
$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu} = \frac{\sqrt{2\mu\left(E - u(r)\right)}}{\mu}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2\mu\left(E - u\left(r\right)\right)}}$$
$$\theta = \theta_0 + l\int\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2\mu\left(E - u(r)\right)}}$$

$$\theta = \theta_0 + l\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2-\lambda\mu}{2\mu r^2}\right)}}$$
$$\theta_0 + \frac{l}{j}\left(j\right)\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{j}{2\mu r^2}\right)}}$$

נשתמש באינטגרל שכבר חישבנו בשיעור הקודם -

$$= \theta_0 + \frac{l}{j}\left[\arccos\left[\frac{j^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{j^2}\right)}{\sqrt{2\mu E j^2-\mu^2\alpha^2}}\right]\right]$$

$$\cos\left(\frac{j}{l}\left(\theta-\theta_0\right)\right) = \frac{j^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{j^2}\right)}{\sqrt{2\mu E j^2-\mu^2\alpha^2}}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{l^2-\mu\lambda} + \sqrt{\frac{2\mu E\left(l^2-\mu\lambda\right)+\mu^2\alpha^2}{l^2-\mu\lambda}}\cos\left[\frac{\sqrt{l^2-\mu\lambda}}{k}\left(\theta-\theta_0\right)\right]$$

נשים לב, שאם נציב $\theta' = \theta + 2\pi$, לא חזרנו לאותו מקום ($r' \neq r$) - להבדיל מבעית קפלר קלאסית.
המחזור דורש - $\frac{j}{l}\Delta\theta = 2\pi$, $\Delta\theta = 2\pi\frac{l}{j} = \frac{2\pi l}{\sqrt{l^2-\mu\lambda}}$. זמן המחזור תלוי ב-$\lambda$.

אם $\frac{m}{n} = \frac{l}{\sqrt{l^2-\mu\lambda}}$, אזי בסופו של דבר - המסלול יהיה סגור (אבל אחרי יותר ממחזור 1)
אם זה לא רציונאלי, אז המסלול לא יהיה סגור, והתנועה תכסה את כל המרחב שבין (r_{min}, r_{max}).
$t(r)$,

$$t = t_0 + \int_{r(t_0)}^{r}\frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-u(r)\right)}}$$

$$T = 2\int_{r_{min}}^{r_{mx}}\frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\sqrt{E-u(r)}}}$$

נחשב את מהירות הפרספציה, עבור λ קטן.

$$\cos\frac{\sqrt{l^2-\mu\lambda}}{l}\left(\theta-\theta_0\right)$$

עבור $\mu\lambda \ll l^2$.
נחשב את קצב הפרסציה עבור λ קטן: $\mu\lambda \ll l^2$.

$$\Delta\Omega = 2\pi\frac{l}{\sqrt{l^2-\mu\lambda}} - 2\pi$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\mu\lambda}{l^2}}} - 2\pi$$

נפתח לתור טיילור -

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

$$\Delta\Omega = 2\pi\frac{\mu\lambda}{2l^2} = \frac{\pi\mu\lambda}{l^2}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\Delta\Omega}{T} = \frac{\pi\mu\lambda}{l^2 T}$$

5 תנועת גוף קשיח

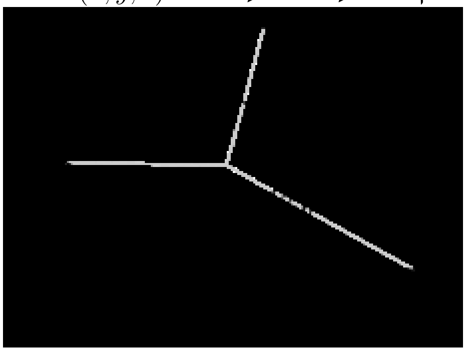
המרחק בין כל שתי נקודות הוא קבוע,

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij}$$

כלומר, ברגע שהגדרנו שלוש נקודות על גבי הגוף (לא על אותו ישר) (שמאולצות - המרחק בינהן קבוע) - הגדרנו את הגוף

$$\begin{aligned} r_{12} &= c_{12} \\ r_{13} &= c_{13} \\ r_{23} &= c_{23} \end{aligned}$$

אז יש לנו 6 דרגות חופש.
נסמן את מערכת המעבדה ב- (x, y, z) ואת מערכת הגוף ב-(x', y', z').



(כאשר $x', y', z' = x_b, y_b, z_b$ בציור)
אזי יש לנו 3 דרגות חופש שמגדירות את המעבר בין הקואורדינטות ושלוש דרגות חופש עבור האורינטיציה של הגוף ביחס למערכת הצירים.

טרנספורמציה אינפינטיסימלית (x, y, z) - מערכת המעבדה ו-(x', y', z') מערכת הגוף. נבצע טרנספורמציה אינפניטסימילת.
כל טרנספורמציה אפשר לייצג באמצעות הזזה של נקודת היחוס + סיבוב סביב נקודת היחוס.

- $\vec{k}$ המיקום במערכת המעבדה ו-$\vec{r}$ - במערכת הגוף ו-$\vec{R}$ - המיקום של מערכת היחוס במערכת המעבדה

$$\begin{aligned} d\vec{k} &= \left(d\vec{k}\right)_{trans} + \left(d\vec{k}\right)_{rot} \\ &= d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}$$

כאשר $\frac{d\vec{k}}{dt}$ - v במערכת המעבדה. $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ היא מהירות של נקודת היחסות של הגוף במערכת המעבדה. $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dr}$ היא המהירות הזויתית של הגוף ו-$\vec{r}$ המיקום של נקודה במערכת הגוף. לכן, עבור כל נקודה בתוך הגוף הקשיח - במערכת המעבדה -

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}}$$

נסתכל על נקודה $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{a}$.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{r'} + \vec{a}) \\ &= \left[\vec{V} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{a}\right)\right] + \vec{\Omega} \times \vec{r'} \end{aligned}$$

כלומר, המהירות הזוויתית אינה תלויה בנקודת היחוס, ולכן אפשר לדבר על המהירות הזוויתית של הגוף בלי לדבר על נקודת היחוס.
המהירות של נקודת היחוס תלויה בנקודה.

5.1 האנרגיה הקינטית של גוף צפיד - טנזור האינרציה

עבור מערכת של n חלקיקים שהמרחקים בינהם נשמרים -

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(V+\vec{\Omega}\times\vec{r_i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum m_i V^2 + \sum m_i \vec{V}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r_i}\right) + \frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{2}M_{tot}V^2 + \vec{V}\cdot\vec{\Omega}\times\underbrace{\left(\sum m_i\vec{r_i}\right)}_{=0\text{ for c.m.}} + \frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{\Omega}\times\vec{r_i}\right)^2
\end{aligned}$$

כלומר, אם בוחרים את נקודת היחוס שלנו במרכז המסה, אז $\vec{V}\cdot\vec{\Omega}\times\left(\sum m_i\vec{r_i}\right)$ מתאפס , והאנרגיה הקינטית שלנו תלויה בתנועה של מרכז המסה ובסיבוב סביב מרכז המסה.

$$\begin{aligned}
(\Omega\times r)^2 &= \Omega^2 r^2\sin^2\theta \\
&= \Omega^2 r^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\
&= \vec{\Omega}^2\vec{r}^2 - \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right)^2
\end{aligned}$$

אזי

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\qquad\underbrace{\sum m_i\left(\Omega^2 r_i^2 - \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r_i}\right)^2\right)}_{\text{Kintetic Energy of spinning around C.M.}}$$

אם המערכת מסתובבת במהירות זוויתית $\vec{\Omega}$, שכיוונה הוא ציר הסיבבוב וגודלה - קצב הסיבוב

$$\vec{\Omega} = \omega_x\hat{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k} = \begin{pmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{pmatrix}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\Omega^2 r_i^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r_i}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\Omega_x x_i + \Omega_y y_i + \Omega_z z_i\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\sum m_i\Omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\Omega_x^2+\Omega_y^2+\Omega_z^2\right)\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)$$

$$\begin{aligned}
T_{rot} = \frac{1}{2}&\left(I_{xx}\Omega_x^2 + I_{yy}\Omega_y^2 + I_{zz}\Omega_z^2\right) \\
&+ I_{xx}\Omega_x\Omega_y + I_{xz}\Omega_x\Omega_z + I_{yz}\Omega_y\Omega_z
\end{aligned}$$

ואם נתאים מקדמים - נקבל

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum m_i\left(y_i^2+z_i^2\right) \\
I_{yy} &= \sum m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) \\
I_{zz} &= \sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)
\end{aligned}$$

והאיברים המעורבים -

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i \\
I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i \\
I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i
\end{aligned}$$

כלומר, כל המקדמים הללו תלויים רק במבנה הגוף ־ הם מקדמים שמייצגים את צורת הגוף.
I הוא טנזור האינטרציה. הוא מטריצה 3×3,

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum m\left(y^2+z^2\right) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הטנזור הוא סימטרי ־ $I_{xy}=-I_{yx}$.

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k \qquad (i,k=1,2,3) \\ &= \frac{1}{2}\vec{\Omega}\left(I\vec{\Omega}\right) \end{aligned}$$

דוגמאות לחישוב טנזור האינרציה המסה בנקודות ־

$$\begin{aligned} (-a,a,0) &- m \\ (-a,-a,0) &- 2m \\ (a,-a,0) &- m \\ (a,a,0) &- 2m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_i\left(y_i^2+z\right) = 6ma^2 \\ I_{yy} &= \sum m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) = 6ma^2 \\ I_{zz} &= \sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) = 12ma^2 \\ I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i = 2ma^2 \\ I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i = 0 = I_{yz} \end{aligned}$$

אזי

$$I = \begin{pmatrix} 6ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 2ma^2 & 6ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12ma^2 \end{pmatrix}$$

נסתכל על אותה מערכת, שבה המסות הן על הצירים (סיבוב ב־90 מעלות) ־

$$\begin{aligned} \left(0,-\sqrt{2}a\right) &- m \\ \left(-\sqrt{2}a,0\right) &- 2m \\ \left(0,\sqrt{2}a\right) &- m \\ \left(\sqrt{2}a,0\right) &- 2m \end{aligned}$$

ונחשב את אלמנטי המטריצה ־

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 2\cdot 2m\left(\sqrt{2}a\right)^2 = 8a^2 \\ I_{yy} &= 4ma^2 \\ I_{zz} &= 12ma^2 \\ I_{xy} &= I_{xz} = I_{yz} = 0 \end{aligned}$$

ובמערכת הזו, הטנזור יהיה אלכסוני

$$I=\begin{pmatrix}8ma^2 & & \\ & 4ma^2 & \\ & & 12ma^2\end{pmatrix}$$

זוהי מערכת הצירים הראשית של הגוף. עבור מערכות עם סימטריה, זו אינה בחירה יחידה.

טנזור אנרציה של תיבה שצלעותיה - $(2a,2b.2c)$.
I_{ij} - טנזור האינרציה.

$$I_{ij}=\int_V\rho\left(\vec{r}\right)\left(r^2\delta_{ij}-x_ix_j\right)dV$$

הצפיפות בתיבה אחידה, ולכן

$$\begin{aligned}I_{xx}&=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\rho\left(x^2+y^2\right)dxdydz\\&=\rho 2a\int_{-b}^{b}\int\left(\frac{z^3}{3}+y^2z\right)\Big|_{-c}^{c}\\&=\rho\cdot 2a\int_{-b}^{b}\left(\frac{2c^3}{3}+2y^2c\right)dy\\&=\rho 2a\cdot 2b\cdot 2c\left(\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}\right)\\&=M\left(\frac{b^2+c^2}{3}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$I=\begin{pmatrix}\frac{M}{3}\left(b^2+c^2\right) & & \\ & \frac{M}{3}\left(a^2+c^2\right) & \\ & & \frac{M}{3}\left(a^2+c^2\right)\end{pmatrix}$$

חישוב מומנט התמד ביחס לנקודה שונה אם אנחנו מחשבים את מומנט ההתמד ביחס לנקודה אחרת, $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$
או - $x_i=x_i'+a_i$ ($i=\{1,2,3\}$)

$$\begin{aligned}I_{ik}&=\sum m\left[\left(x_i-a\right)^2\delta_{ik}-\left(x_i-a_i\right)\left(x_k-a_k\right)\right]\\I'_{ik}&=I_{ik}+m\left(a^2\delta_{ik}-a_ia_k\right)\end{aligned}$$

הערה 5.1 תמיד תהיה R - מטריצת סיבוב כך ש- $I_D=R^TIR$ ו-I_D אלכסונית.

5.1.1 סביבונים

- סביבון ספרי - כדור - $I_y=I_x=I_z$
- סביבון סימטרי - ציר z יהיה ציר הסיבוב. יש חופש בבחירת x,y ו-$I_y=I_x\neq I_z$
- מצב כללי - $I_1\neq I_2\neq I_3$.

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\Omega_1^2I_1+\frac{1}{2}\Omega_2^2I_2+\frac{1}{2}\Omega_3^2I_3$$

תנע זוויתי כאשר נבחר את נקודת היחוס במרכז המסה -

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r} \times \vec{v} = \sum m_i \vec{r_i} \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right) \\ &= \underbrace{\left(\sum m_i \vec{r_i} \vec{V}\right)}_{=-} + \sum m_i \vec{r_i} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right)\end{aligned}$$

ולפי הזהות - $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.

$$= \sum m_i \left(r_i^2 \vec{\Omega} - \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \vec{\Omega}\right)\right)$$

נכתוב ברכיבים (j, k, l אינדקס של הכיוון, i האינדקס של המסות)

$$\begin{aligned}L_j &= \sum_{i,l,k} m_i \left(x_l^{(i)} x_l^{(i)} \Omega_j - x_j^{(i)} x_k^{(i)} \Omega_k\right) \\ &= \sum m_i \left(x_l x_l \delta_{jk} \Omega_k - x_j x_k \Omega_k\right) \\ &= \sum_k I_{jk} \Omega_k\end{aligned}$$

$$\vec{L} = I \vec{\Omega}$$

בצירים הראשיים -

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \\ I &= \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix} \\ \vec{L} &= (I_1 \Omega_1, I_2 \Omega_2, I_3 \Omega_3)\end{aligned}$$

5.2 סביבון סימטרי חופשי

עבור סביבון סימטרי - $I_1 = I_2$. כרגע, נפתור את הבעיה בהנתן שאין כוחות ומומנטים חיצוניים.

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 = I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

$$L = T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_k \Omega_i \Omega_k$$

אם מרכז המסה זז, אז נתעלם ממנו בכל זאת. הפתרון של בעית מרכז המסה - טריוויאלי

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_k \Omega_i \Omega_k$$

בהעדר כוחות חיצוניים $\vec{L} = \text{const}$
x_3 קבוע, אבל יש חופש בבחירת x_1, x_2.

נסתכל על x_3 רגעי (אם מודדים אותו במערכת המעבדה... אז x_3 קבוע יחסית לסביבון, אבל הוא עלול להשתנות במערכת המעבדה). $\vec{L}, x_3$ מגדירים מישור. נבחר את x_2 בניצב למישור של $\vec{L}, x_3$.

$$\vec{L} = (L_1, 0, L_3)$$

(כי L הוא במישור של (x_1, x_3), בניצב ל־x_2)

$$\vec{L} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$$
$$\Omega_2 = 0$$

$$\vec{\Omega} = (\Omega_1, 0, \Omega_3)$$

על הציר הראשי x_3 - $\vec{r} = (0, 0, x_3)$ -

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{v}\hat{2}$$

כלומר, הציר יסתובב סביב התנע הזוויתי.

5.3 משוואות התנועה של גוף קשיח

יש לנו 6 דרגות חופש $\leftarrow$ 6 משוואות תנועה.
אלו 3 דרגות חופש של נקודת יחוס - מרכז המסה, ו־3 דרגות חופש של הכיוון (מוגדר באמצעות זוויות אוילר)
עבור כל חלקיק -

$$\vec{p} = m\vec{v}$$
$$\dot{\vec{p}} = \vec{f}$$
$$\vec{P} = \sum \vec{p}$$
$$\dot{\vec{P}} = \sum \vec{f} = \vec{F}_{\text{ex}}$$

כאשר כאן - F הוא הכח החיצוני.

$$\vec{F} = -\nabla_R U$$

של איזשהו פוטנציאל U -

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= T_{cm} + T_{rot} - U \\ &= \frac{1}{2}MR_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U \end{aligned}$$

נסתכל על משוואות אוילר־לגרנז' -
שלושת משוואות התנועה של מרכז המסה הן:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial R}$$
$$M\ddot{\vec{R}} = -\vec{\nabla}_R U$$

ושלושת המשוואות של הסיבוב -

$$\vec{L}=\sum \vec{F}\times\vec{p}$$
$$\dot{\vec{L}}=\sum \dot{\vec{r}}\times\vec{p}+\vec{r}\times\dot{\vec{p}}$$

אבל $\vec{v}\times(m\vec{v})=0$ ולכן נשאר לנו (עבור מערכת מרכז המסה)

$$\dot{\vec{L}}=\sum \vec{r}\times\dot{\vec{p}}=\sum \vec{r}\times\vec{f}=\vec{N}$$

כאשר $\vec{N}$ הוא סכום המומנטים החיצוניים. (כוחות פנימיים מתאפסים בסכימה)
כאשר מחבים את המומנט במערכת אחרת, ועוברים מ־$\vec{r}\to\vec{r}'=\vec{r}-a$,

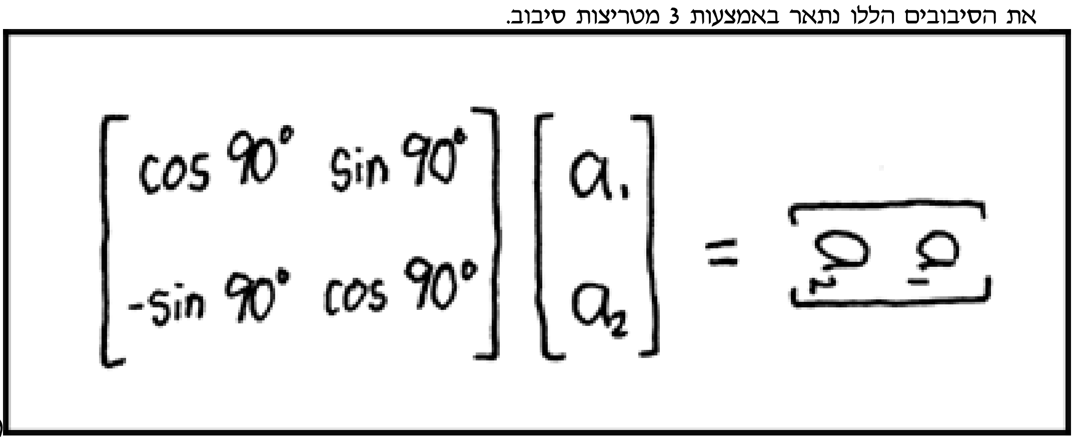
$$\begin{aligned}\vec{K}' &= \sum \vec{r}'\times\vec{f}\\ \vec{K} &= \sum \vec{r}\times\vec{f}+\sum \vec{a}\times\vec{f}\\ &= \sum \vec{r}\times\vec{f}+\vec{a}\times\sum \vec{f}\\ &= \vec{K}'+\vec{a}\times\vec{F}\end{aligned}$$

5.3.1 זוויות אוילר.

במערכת הצירים של המעבדה, $x-y-z$.
$x'-y'-z'$ היא מערכת הצירים שצמודה לגוף.
הראשית של 2 המערכות מתלכדת.

- מתחילים בסיבוב במערכת המקורית, $x-y-z$ בזווית φ מסביב ל־z. (כלומר, הזווית בין β ל־x במישור $x-y$ היא φ)
- סיבוב $\alpha\beta\gamma$ בזווית θ ביחס ל־α (ציר x החדש)
- סיבוב $\alpha'\beta'\gamma'$ בזוית ψ ביחס ל־γ'

נסתכל על הישר N שמתקבל מהחיתוך של מישור xy ומישור $x'y'$ (ניצב ל־z ול־z'). הוא ניצב הן לציר ה־z המקורי והן לציר z' החדש. φ היא הזווית בין x ל־N, ו־ψ היא הזווית בין x' ל־N.
הזוויות θ,φ,ψ הן קוארדינטת מוכללות התלויות בזמן.
את הסיבובים הללו נתאר באמצעות 3 מטריצות סיבוב.



(מתוך xkcd.com)

• המטריצה A היא מטריצת הסיבוב הכללית והיא תהיה מורכבת בסדר הבא:

$$A = BCD$$

כאשר D היא סיבוב ב־φ סביב ציר z, C היא סיבוב בזווית θ סביב ציר x צ־B היא סיבוב בזווית ψ סיבב ציר z -

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ומכפלת שלוש המטריצות, A היא

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(מתוך ויקיפדיה, עם פחות טעויות העתקה: $\begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_3s_1 - c_1c_2s_3 & s_2s_3 \\ c_2c_3s_1 + c_1s_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_3s_2 \\ s_1s_2 & c_1s_2 & c_2 \end{bmatrix}$)

$$\vec{x'} = A\vec{x}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{x}' = A^T\vec{x}'$$

(המטריצה אורתוגונלית ולכן $A^T = A^{-1}$). A תלויה בזמן - $A(t)$.

מהירות הסיבוב $\vec{\Omega}$ במערכת הגוף (מערכת הצירים הראשית)

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$
$$\vec{L} = I\vec{\Omega}$$

במערכת הגוף - $I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$. נבטא את $\vec{\Omega}$ באמצעות ψ, φ, θ, $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$.

הכיוון של נגזרת של זווית היא בכיוון ציר הסיבוב. כלומר - $\dot{\varphi}$ בכיוון $\hat{z}$, $\dot{\theta}$ בכיוון $\hat{N}$ ו־$\dot{\psi}$ בכיוון z'.

• נחשב את $\dot{\theta}$ במערכת הצירים $x' - y' - z' = 1, 2, 3$.

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$$
$$\dot{\theta}_3 = 0$$

• $\dot{\varphi}$ בכיוון z. אזי

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$$
$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

• $\dot{\psi}$ הוא בכיוון z' ולכן, $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ־ ושאר הרכיבים מתאפסים.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \vec{\Omega_1} \\ \vec{\Omega_2} \\ \vec{\Omega_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

האנרגיה הקינטית של סיבוב סביב מרכז המסה היא

$$T_{rot} =_{\sum} \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$

סביב המערכת הצירים הראשית, $I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$ ו־

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) \\ &= \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \end{aligned}$$

עבור סביבון סימטרי, $I_1 = I_2$ ־

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$$

דרך אחרת לראות שזה מתקבל עבור סביבון סימטרי ־ יש לנו חופש לבחור את הצירים x, y, כלומר ־ את x', y' . כך, אפשר לבחור את x' על $\hat{N}$ (באופן רגעי) ולקבל ־ $\psi = 0$.

סביבון סימטרי חופשי בוחרים מערכת מעבדה עם $\vec{L} = L\hat{z}$, ברגע מסויים נבחר $\psi = 0$,

$$\dot{\vec{L}} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I\vec{\Omega} \\ L_1 &= I_1\Omega_1 = \dot{\theta} \\ L_2 &= I_2\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta \\ L_3 &= I_3\Omega_3 = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \end{aligned}$$

אבל $\vec{L} = L\hat{z}$כלומר, $Z \perp \hat{x}'$ ולכן

$$\vec{L} = (0, L\sin\theta, L\cos\theta)$$

נשוואה ונקב ל

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0 \\ L\sin\theta &= I_1\dot{\varphi}\sin\theta \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{I_1} \\ L\cos\theta &= I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \end{aligned}$$

אזי, קיבלנו ש־θ קבועה

φ היא מהירות הפרסציה ־

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{I_1} = \text{const}$$

הנגזרת קבועה, ולכן φ משתנה במהירות קבועה.

5.4 סביבון סימטרי בשדה גרביטציה :־)

נסתכל על המקרה שבו הנקודה הנמוכה ביותר קבועה. נקודה זו תהיה הראשית של מערכת המעבדה.
l הוא המרחק מהראשית למרכז המסה.
נחשב את I ביחס לנקודת המגע (לראשית)

$$I = I_{cm} + M\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$$

אבל $a = (0,0,l)$ ו־

$$I = I_{cm} + Ml^2$$

הלגרנזיאן של המערכת הוא

$$L = \frac{1}{2}\left(I_1 + Ml^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

φ, ψ הן קוארדינטות ציקליות - p_φ, p_ψ קבועים!

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) = \text{constant} = L_3 \\ p_\varphi &= \left[\left(I_1 + ml^2\right)\sin^{2\theta} + I_3\cos^2\theta\right]\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta \\ &= \text{const} = L_z \\ E &= \frac{1}{2}\left(I_1 + Ml^2\right)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + Mgl\cos\theta \\ &= \text{const} \end{aligned}$$

נקבל את $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ כפונקציה של המקדמים ושל L_3, L_z

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}$$

כאשר $I_1' \triangleq I_1 + Ml^2$

$$\dot{\psi} = \frac{L^3}{I_3} - \cos\theta\frac{L_z - L_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}I'\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \\ &\Downarrow \\ E' &\triangleq E - \frac{L_3^2}{2I_3} - Mgl \end{aligned}$$

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)}{2I_1'\sin^2\theta} - Mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

אז קיבלנו אנרגיה שתלויה רק ב־$\theta, \dot{\theta}$.

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}I_1'\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \\ t &= \int\frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{2(E' - U_{eff}(\theta))}{I_1'}}} \to \theta(t) \end{aligned}$$

ואחר כך, קל למצוא את $\theta(t),\psi(t)$.
נסתכל איך U_{eff} נראה...

$$U_{eff}=\frac{\left(L_z-L_3\cos\theta\right)^2}{2I_1'\sin^2\theta}-Mgl\left(1-\cos\theta\right)$$

1. אם הסביבון מסתובב סביב הציר הראשי שלו - $L_z=L_3$. זוהי נקודת שיווי משקל רופף.
2. מקרה כללי - $L_z\neq L_3$ -

$$U_{eff}(\theta)\underset{\to\pi}{\overset{\to 0}{\longrightarrow}}\infty$$

לכן - θ נע בין θ_1 ל־θ_2 התלויים באנרגיה של המערכת (ועבור θ מסויים, שנמצא במינימום - θ יהיה יציב)

$$\dot{\varphi}=\frac{L_z-L_3\cos\theta}{I_1'\sin\theta}$$

(φ היא הזווית עם ציר x) אם $L_z-L_3\cos\theta$ לא מחליף סימן בתחום $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, אז $\dot{\varphi}$ יהיה באותו כיוון והתנועה תהיה באותו כיוון. (במקרה הנגדי - לא מדובר בשינוי כיוון התנועה אלא "ראש" הסביבון" נע במעגלים בין θ_1 ל־θ_2)
כאשר $L_z-L_3\cos\theta$ - מקרה שכיח, כי הרבה פעמים התנאי התחלה הם $\dot{\varphi}=0$ ו־$\dot{\theta}=0$.

- המשמעות הפיזיקאלית של φ - אם המישור של הסביבון יפגע בקרקע - הזווית בינו לבין הקרקע.

5.4.1 משוואות אוילר

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

$\vec{L}'$ במערכת גוף,

$$\frac{dL'}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{L}'=\vec{N}$$

ו־$\vec{N}$ הוא המומנט על הגוף.
נפרק את זה לרכיבים.

$$\vec{L}'=\begin{pmatrix}I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3\end{pmatrix}\vec{\Omega}$$
$$\vec{L}_i'=I_i\Omega_i$$

ברכיב i . והנגזרת -

$$\dot{L}_u=I_i\dot{\Omega}_i$$

$$I_i\dot{\Omega}_i+\varepsilon_{ijk}\Omega_jL_k=N_i$$

$$\boxed{I_i\dot{\Omega}_i+\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\Omega_jI_k\Omega_k=N_i}$$

ברכיבים -

$$\boxed{\begin{array}{l}I_1\dot{\Omega}_1+\Omega_2\Omega_3\left(I_3-I_2\right)=N_1\\ I_2\dot{\Omega}_2+\Omega_3\Omega_1\left(I_1-I_3\right)=N_2\\ I_3\dot{\Omega}_3+\Omega_1\Omega_2\left(I_2-I_1\right)=N_3\end{array}}$$

משוואות אלו נקראות **משוואות אוילר.**

5.4.2 סביבון סימטרי חופשי - במשוואות אוילר

סביבון סימטרי - $I_1 = I_2$. חופשי - $\vec{N} = 0$.
נסמן - $\omega = \Omega_3 \left(I_3 - I_2\right)$

$$I_3\dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3 = \text{const}$$
$$I_1\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2$$
$$I_2\dot{\Omega}_2 = \omega\Omega_1$$

ומתקבל -

$$\ddot{\Omega}_1 = \omega^2\Omega_1$$

וקיבלנו

$$\Omega_1 = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$
$$\Omega_2 = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

5.4.3 סביבון לא-סימטרי, חופשי.

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3, \quad \vec{N} = 0$$

יש שני גדלים שמורים:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2 = \text{const}$$

הגודל של התנע הזוויתי גם קבוע -

$$I^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2 = \text{const}$$

לא נפתור את הבעיה במדויק.

תנועה קבועה מתקבלת כאשר $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$
ולכן, ממשוואות אוילר -

$$\Omega_2\Omega_3 = 0$$
$$\Omega_3\Omega_1 = 0$$
$$\Omega_1\Omega_2 = 0$$

כלומר, רק אחד מהרכיבים שונה מאפס - כלומר, התנועה היא סביב ציר ראשי!
כל תנועה שמערבבת יותר מציר ראשי אחד, גורם לזה שהמהירות הזוויתית תשתנה במהלך התנועה

יציבות אם נסמן

$$I_1 < I_2 < I_3$$

אזי התנועה סביב ציר ראשי היא **יציבה** $\Longleftrightarrow$ התנועה היא סביב ציר 1 או 3. אם התנועה היא סביב הציר שמומנט ההתמד שלו באמצע, התנועה אינה יציבה.
בגלל שהתנע הכולל צריך להשמר, היחס בין ה-Ω_i הוא ששלושתן צריכות לחול על אליפסואיד -

$$I^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2$$

אם אנחנו סביב הציר הגדול או סביב הציר הקטן, אזי הנגזרת של האליפסואיד בסביבת הנקודה היא קטנה. לעומת זאת, בסביבת Ω_2 היא גדולה.
נראה א תזה ממשוואות אוילר נסמן -

$$\alpha_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} < 0$$
$$\alpha_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} > 0$$
$$\alpha_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} < 0$$

נניח שאנחנו מסתובבים סביב אחד הצירים הראשיים.

$$\Omega_3 = \omega$$
$$\Omega_1 = \Delta\omega_1$$
$$\Omega_2 = \Delta\omega_2$$

נבצע פיתוח מסדר ראשון סביב Ω_1, Ω_2 כאשר $\Delta\omega \ll \omega$.
נסתכל על משוואות לגרנז' בקירוב מסדר ראשון ב־$\Delta\omega$ -

$$\dot{\omega}_3 = 0$$
$$\dot{\omega}_1 = \omega\Delta\omega_2\alpha_1$$
$$\dot{\omega}_2 = \omega\Delta\omega_1\alpha_2$$

נפתור את המשוואות, ונקבל -

$$\omega = \mathrm{const}$$
$$\ddot{\omega_1} = \omega\alpha_1\dot{\omega_2} = \omega^2\alpha_1\alpha_2\omega_1$$

(הפתרון - $\omega = e^{i\sqrt{-\alpha}t}$, ולכן עבור α שלילי יש תנודות ועבור α חיובי יש אקספוננט)
אם $\alpha_1\alpha_2 < 0$, אז התנועה היא תנודות סביב הבסיס.
אם $\Omega_2 = \omega$, ו־$\Omega_1, \Omega_3 \sim \Delta\omega$, אז מכפלת האלפות גדולה מאפס, והתנועה לא תהיה יציבה.

6 תנודת קטנות

הפוטנציאל שלנו הוא

$$V(q_1, \ldots, q_n)$$

(כאשר $q_!, \ldots, q_n$ הם דרגות החופש)
בנקודת שיווי המשקל Q_i -

$$Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{q_{i0}} = 0$$

הפוטנציאל בנקודה זו הוא V_0.
נבצע פיתוח של הפוטנציאל סביב הנקודה

$$V(q_1, \ldots, q_n) = V(q_{i0}) + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{q_{i,0}}}_{=0}\eta_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\eta_i\eta_j + o\left(\eta^3\right)$$

כאשר $\eta_i = q_i - q_{i0}$.

$$V\left(q-q_0\right) = V_0 + \frac{\left(q-q_0\right)^2}{2}$$

כל פוטנציאל עם נקודת שיווי משקל יציבה, אפשר לפתח לתנודה הרמונית בקירוב ראשון.

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

(כאשר V_{ij} הן הגזרות - או הפוטנציאל הנתון)

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{\eta}_i^2$$

והלגרנז'יאן ש להמערכת הוא

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \dot{\eta}_i^2 - \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j\right)}$$

(כאשר V_0 הושמט כי הלגרנז'יאן קבוע עד כדי נגזרת שלמה בזמן)
משוואות אוילר לגרנז' הנגזרות ממנו

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$$

ויש לנו n משוואות - $i = 1, \ldots, n$ -

$$\boxed{m_i \ddot{\eta}_i + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0}$$

במקרה הכללי, n המשוואות מצומדות.
ננחש פתרון מהצורה:

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}$$

כאשר Cהוא פקטור קבוע לכל i. נציב את הפתרון ונקבל:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_i &= C a_i \left(-i\omega\right)^2 e^{-i\omega t} \\ &= -\omega^2 C a_i e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

ונקבל n משוואות מהצורה

$$i = 1, \ldots, n \qquad \boxed{\sum_i V_{ij} a_j - \omega^2 m_i a_i = 0}$$

וקיבלנו n משוואות לינאריות־הומוגניות עבור המקדמים.
תמיד למערכת יש פתרון טריוויאלי ($a = 0$, לא זזים..) .
פתרון לא טריוויאלי מתקבל כאשר הדטרמיננטה שווה לאפס.

$$0 = \det\left(V_{ij} - \omega^2 m_i \delta_{ij}\right) = \begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 m_1 & V_{21} & \cdots \\ V_{12} & V_{22} - \omega_2 m_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

וזו משוואה מסדר n ל־ω^2. נחפש את השורשים של המשוואה האלגברית. זהו ניסוח שונה של בעיית ערכים עצמיים.
מצב־תנועה עצמי של המערכת הוא "וקטור עצמי" של המערכת. הערכים העצמיים הם תדירויות עצמיות של המערכת.
המשוואה־

$$\begin{aligned} V\vec{a} &= \omega^2 T\vec{a} \\ T_{ij} &= m_i\delta_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נסמן ־ $\lambda = \omega^2$. נראה שכל הפתרונות הם ממשיים וחיוביים.
נראה שכל ה־λ ־ $|V - \lambda T| = 0$ הם ממשיים.

$$V\vec{a} = \lambda T\vec{a} \quad (1)$$

($\dagger$ ־ צמוד הרמיטי ־ צמוד קומפלקסי+טרנספוז. $\star$ ־ צמוד קומפלקסי)
נצמיד את המשוואה ־ עבור כל λ_l

$$\vec{a}_l^\dagger V = \lambda_l^\star \vec{a}_l^\dagger T \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &a_l^\dagger(1) - (2)a_k \Rightarrow \\ &\qquad 0 = (\lambda_k - \lambda_k^\star)\,\vec{a}_l^\dagger T a_k \end{aligned}$$

כאשר $k = l$,

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_k^\star)\,\vec{a}_k^\dagger T a_k &= 0 \\ \sum_i m_i \left|a_{k_i}\right|^2 &> 0 \end{aligned}$$

ולכן $\lambda_k = \lambda_k^\star$, ו־$\lambda_k$ ממשי.
λ_k ממשי. $\vec{a}_k$ כולם ממשיים.
נזכר בקשר

$$V\vec{a}_k = \lambda_k T\vec{a}_k$$

$$\vec{a}_k^\dagger V\vec{a}_k = \lambda_k \vec{a}_k^T T\vec{a}_k$$

אז

$$\lambda_k = \frac{a_k^T V a_k}{a_k^T T a_k} = \frac{> 0}{\text{kintetic Energy} \geq 0}$$

(V הוא הנגזרת של הפוטנציאל, ולכן חיובי, כי אנחנו בסביבות מינימום)
ולכן λ_k חיובי, ו־$\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ ממשיים, וכל הפתרונות הם אוסצילטורים.
V_{ij}, T_{ij} מטריצות סימטריות..
נניח שאין ניוון, $l \neq k \Rightarrow \lambda_k \neq \lambda_k$.

$$(\lambda_k - \lambda_l)\,\vec{a}_l^T T a_k = 0$$

אזי

$$\vec{a}_l^T T\vec{a}_k = 0$$

נבחר א תתנאי הנרמול כך ש־

$$a_k^T T a_k = I$$

אש יש לנו מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{a_k} = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

את תנאי הנירמול ניתן לכתוב כך ־

$$A^T T A = I$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אז

$$V_{ij} a_{jk} = T_{ij} a_{jk} \lambda_{lk}$$

או בצורה מטריצית

$$VA = TA\lambda$$

נכפול את המטריצה משמאל ב־A^T, ונקבל

$$A^T V A = \underbrace{A^T T A}_{I} \lambda$$
$$A^T V A = \lambda$$

טרנספורמציה לקוארדינטות נורמליות

$$\vec{\eta} = A\vec{\xi}$$

כאשר הקוארדינטות הנורמליות הם המצבים העצמיים.
נסתכל על הלגרנז'יאן בקוארדינטות נורמליות.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{\eta}}^T T \dot{\vec{\eta}} - \vec{\eta}^T V \vec{\eta}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\dot{\xi}^T A^T A \dot{\xi} - \xi^T A^T V A \xi\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\dot{\xi}^2 - \omega_k^2 \xi_k\right] \end{aligned}$$

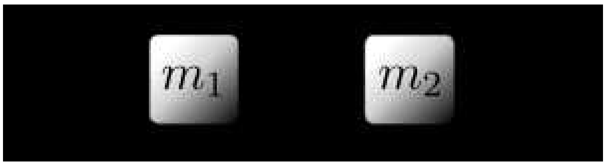
וקיבלנו את המשוואות, באמצעות אוילר־לגרנז'

$$\ddot{\xi_k} = -\omega^2 \xi_k$$

בהנתן תנאי התחלה, $\xi(0), \dot{\xi}(0)$, נבין באיזה אמפליטודה כל אחד מהמודים

$$\xi_k = c a_k e^{-i\omega k t}$$

6.0.4 דוגמה ־ תנועה חד מימדית



בדוגמא שלנו, $m_1 = m_2 = m$, k קבוע לכל הקפיצים

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right) \\
T &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\
V &= \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

התדירויות העצמיות ־

$$
\begin{aligned}
\left|V - \omega^2 T\right| &= 0 \\
\begin{vmatrix} 2k - M\omega^2 & -k \\ -k & 2k - M\omega^2 \end{vmatrix} &= 0 \\
\left(2k - M\omega^2\right)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M\omega^2 - 2k &= \pm k \\
\omega_1 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

אנחנו מצפים למצבים עצמיים סימטריים ואנטיסימטריים ־

- במצב הסימטרי ־ מרכז המסה עושה אוסצילציות
- במצב האנטיסימטרי ־ מרכז המסה קבוע במקום וכל אחת מהמסות עושה אוסצילסציות

אופני תנודה עצמיים

$$
\begin{aligned}
(V - \lambda T)\,\vec{a} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \\
\alpha &= -1
\end{aligned}
$$

אז

$$
\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

נציב את ω_2^2, ונקבל $\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

תנאי ההתחלה ־

$$
x(t) = \sum_{i=1,2} b_i a_k \cos\left(\omega_i t\right) + \sum_i c_i a_i \sin\left(\omega_i t\right)
$$

$$x\left(t=0\right)=\sum b_{i}a_{i}=A\vec{b}$$
$$\dot{x}\left(t=0\right)=\sum c_{i}\omega_{i}a_{i}=A\vec{c}$$

6.1 כח מאלץ

F_j הוא הכח המאלץ על η_j.
נעבור למערכת הקוארדינטות הלא־מצומדת, באמצעות מטריצת המעבר A^t, ונקבל -

$$Q_{i}=\sum_{j}a_{ji}F_{j}$$

אזי Q_i הוא "כח מוכלל" שפועל על ξ_i.
נקבל ש־

$$\ddot{\xi}_{i}+\omega_{i}^{2}\xi_{i}=Q_{i}$$

כאשר במקום הכח המאלץ המקורי יש לנו כח מאלץ מוכלל, שמאפשר לעבור ל־n משוואות לא־מצומדות.

6.1.1 אילוץ מחזורי

$$Q_{i}=Q_{0_{i}}\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)$$

$$\ddot{\xi}_{i}+\omega_{i}^{2}\xi_{i}=Q_{0i}\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)$$

הפתרון הכללי של משוואה כזו הוא הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית (בהעדר כח) ועוד הפתרון הפרטי של הבעיה הלא הומוגנית.
הפתרון הפרטי - ננחש פתרון מהצורה

$$\xi_{i}=B_{i}\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)$$

נציב את הפתרון ונקבל -

$$B_{i}\left(-\omega^{2}+\omega_{i}^{2}\right)\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)=Q_{0i}\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)$$

וכדי שזה יהיה פתרון, נדרוש ש־

$$B_{i}=\frac{Q_{i}}{\omega_{i}^{2}-\omega^{2}}$$

נשים לב שרמת העירור של המצב העצמי תלויה בכח המאלץ, ובהפרש הריבועים בין תדר הכח, לתדר העצמי.
עם התדר המאלץ שווה לאחד התדירויות העצמיות - תהיה התבדרות.
אבל כאשר האפליטודה גדולה, הקירוב של תנודות קטנות אינו רלוונטי.
הפתרון הכללי יכיל גם את הפתרון הכללי של החלק ההומוגני -

$$\xi_{i}=\frac{q_{i0}}{\omega_{i}^{2}-\omega^{2}}\cos\left(\omega t+\delta_{i}\right)+a\cos\left(\omega_{i}t+d_{i}\right)$$

אם נוסיף חיכוך, האיבר השני ידעך לאפס, אבל באופן כללי, נשאיר אותו בנתיים. המקדמים תלויים בתנאי ההתחלה.
כאשר התדירות שלנו קטנה מתדירות התהודה, הפאזה של שני הכוחות הן אותו הדבר. כאשר התדירות המאלצת גדולה מתדירות התהודה־ מתקבל היפוך פאזה יחסית לתנודה העצמית.

6.1.2 כח מרסן

(משהו כאן לא נכון, יושלם ביום רביעי)
נוסיף ללגרנז'יאן פונקצית דיספציה שתראה $\mathcal{F}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_i\eta_j$ כאשר הפונקציה סימטרית - $\mathcal{F}_{ij}=\mathcal{F}_{ji}$.
משוואת התנועה -

$$\sum_j\left(T_{ij}\ddot{\eta}_j+\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j+V_{ij}\eta_j\right)=0$$

(/משהולא נכון)
(תיקון)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\eta}=0$$

כאשר מתווספת דיסיפציה, זה מוכנס למשוואת התנועה כך:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\eta}=F$$

כאשר $F=-\gamma\dot{\eta}$ - כח חיכוך לינארי במהירות. אזי נגדיר פונקצית דיסיפציה

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\gamma v^2$$

העבודה שכח החיכוך עושה,

$$dW=-\vec{F}\overbrace{d\vec{r}}^{vdt}=\gamma vvdt=2\mathcal{F}dt$$

אזי

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}$$

כלומר, פונקצית הדיסיפציה היא קצב איבוד האנרגיה במערכת.
משוואות התנועה -

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{x}}=0$$

הגדרנו פונקצית דיסיפציה -

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$$

וקיבלנו -

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j+V_{ij}\eta_j+\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j=0$$

(n משוואות תנועה, אחת לכל i, יש סכימה על j)
(/תיקון)
כלומר יש לנו n משוואות תנועה עבור $i=1,\ldots,n$. לשלושת המטריצות הללו לא חייב להיות לכסון משותף. אם אין להן לכסון כזה, אז אי אפשר למצוא מצבים עצמיים.
אנחנו נסתכל על המקרה שבו ניתן ללכסן סימולטנית.
נלכסן, ונקבל את משוואות התנועה - $F_i=A^t\mathcal{F}_{ij}A$

$$\ddot{\xi}_i+F_i\dot{\xi}+\omega^2\xi_i=0$$

כאשר $F_i > 0$, כי החיכוך תמיד צורך אנרגיה.
ננחש פתרון -

$$\xi_i = c_i e^{-\omega_i' t}$$

נציב ונקבל משוואע עבור ω_i'

$$\begin{aligned}
\omega_i'^2 + iF_i\omega_i' - \omega_i^2 &= 0 \\
\omega' &= \pm\sqrt{\omega_i^2 - \frac{F_i^2}{4}} - i\frac{F_i}{2}
\end{aligned}$$

קיבלנו חלק מדומה וחלק ממשי, לכן נקבל -

$$\xi_i = c_i e^{-F_i t/2} e^{-i\mathrm{Re}\left(\omega_i'\right)t}$$

התדירות של התנודה זזה מהתדירות העצמית. במקרים שבהם החיכוך הוא חלש - התדירות נשארת התדירות העצמית. האיבר הראשון הוא אמפליטודה שדועכת בזמן, והאיבר השני הוא אוסצילטיות ב-ω_i'.

במקרה ולא ניתן ללכסן סימולטנית

$$\vec{\eta} = \vec{a} e^{-i\omega t}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\left(-\omega^2 T + i\omega\mathcal{F} + V\right)\vec{a} = 0$$

כדי שיהיה פתרון לא טרוויאלי - נדרוש

$$\left|V + i\omega\mathcal{F} - \omega^2 T\right| = 0$$

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_R + i\Omega_I \\
\vec{\eta} &= \vec{a} e^{i\omega_R t} e^{-\omega_I t}
\end{aligned}$$

זהו פתרון דומה, אבל אין בו איברים לא מצומדים.

- באופן כללי - כאשר מתקבלת תדירות אפס - זה אומר שיש לנו חופש לבצע טרנסלציה (כלומר - אנחנו בסוגשל שיווי משקל אדיש)

6.1.3 מקרה מרוסן ומאולץ

משוואות התנועה שלנו הן

$$V_{ij}\eta_j + \mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j + T_{ij}\ddot{\eta}_j = F_{0i}e^{-i\omega t}$$

אזי

$$\begin{aligned}
V\vec{\eta} + \mathcal{F}\dot{\vec{\eta}} + T\ddot{\vec{\eta}} &= \vec{F} \\
\eta_i &= A_j e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(V_{ij} - i\omega\mathcal{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right)}_{B_{ij}(\omega)} A_j = F_{0_i}$$

יש לנו סט של משוואות לינאריות לא הומוגניות

$$B_{ij}(\omega) A_j = F_{0i}$$

פותרים באמצעות כלל קרמר -

$$\begin{aligned} B &= \vec{A} = \vec{F} \\ A_i &= \frac{\det(B_i)}{\det(B)} \end{aligned}$$

כאשר ב-B_i, מחליפים את הוקטור ה-i ב-B בוקטור F.

הדטרמיננטה מתאפסת כאשר יש פתרון לא טריוויאלי לבעיה בלי-אילוץ - $B_{ij}(\omega) A_{ij} = 0$. יש לזה פתרון לא טריוויאלי כאשר $\det B = 0$. אזי

$$\det B = C \prod_i (\omega - \omega_i)(\omega + \omega_i^\star)$$

כאשר $\star$ הוא הצמדה קומפלקסית, ω_i הם התדירויות העצמיות של הבעיה עם ריסון, ללא אילוץ (מרוכבים, כמו שראינו בסעיף הקודם).

אזי

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\det B_i(\omega)}{\det B(\omega)} = \frac{\det B_i(\omega)(\det B(\omega))^\star}{\det(B(\omega))(\det B(\omega))^\star} \\ &= \frac{\det B_i(\omega)(\det B(\omega))^\star}{\prod_i \left[(\omega - \omega_{i,R})^2 + \omega_{iI}^2\right]\left[(\omega + \omega_{iI}^2)^2 + \omega_{iI}^2\right]} \end{aligned}$$

כאשר ω_R, ω_I הם החלק המדומה והממשי של ω. נראה שהריסון גרם לכך שהתגובה לא מתבדרת. בתדירות התהודה- נקבל אמפליטודה סופית.

6.1.4 דוגמה עם חיכוך

לקיר מחוברות 2 מסות זהות עם 2 קפיצים זהים. (בטור - קיר-קפיץ-מסה-קפיץ-מסה)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) \\ V &= \frac{1}{2} k \left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2\right) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} T &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ V &= k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תדירויות עצמיות ללא חיכוך -

$$\begin{aligned} \left|V - \omega^2 T\right| &= 0 \\ \omega_{1,2}^2 &= \frac{k}{m}\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \\ \vec{a_1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ \vec{a_2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + a_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

נוסיף חיכוך -

$$\mathcal{F}=\gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

כלומר, מקדם חיכוך γ לכל אחת מהמסות. נקבל את המשוואות

$$\ddot{\xi}_i+\omega_i^2+\frac{\gamma}{m}\xi_i=0 \quad ,i=1,2$$

נציב -

$$\xi_i=c_ie^{i\omega_i' t}$$

ונקבל

$$-\omega_i'^2+\omega_i^2+i\frac{\gamma}{m}\omega_i'=0$$

ונקבל -

$$\begin{aligned}\omega_1' &= \frac{\gamma}{2m}i\pm\frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{4km}{\gamma^2}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}-1}\\ \omega_2' &= \frac{\gamma}{2m}i\pm\frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{4km}{\gamma^2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-1}\end{aligned}$$

מה שקרה לנו כאן הוא דעיכה של האמפליטודה (החלק המדומה) ושינוי בתדירות (החלק הממשי)
באופן כללי -

$$A(t)\sim e^{-\gamma t/2m}$$

6.2 תהודה פרמטרית

עבור נדנדה עם אורך מוט קבוע l, הלגרנז'יאן שלה הוא

$$L=\frac{1}{2}mv^2+mgl\cos\theta$$

אם l תלוי בזמן, $l(t)$, (לדוגמה, כאשר המתנדנד מזיז את רגליו, מרכז המסה משתנה).

$$l(t)=l_0\left(1+\varepsilon\cos\left(2\omega t\right)\right)$$

(התדירות כאן היא התדירות העצמית של מטוטלת רגילה - $\omega^2=\frac{g}{l_0}$, $\varepsilon\ll 1$).
(אנחנו מתאלמים מהחלק שבכיוון r, נסתכל רק על כיוון θ.. אין תנועה בציר r)

$$v_\perp^2=\left(l(t)\dot{\theta}\right)^2$$

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m\left(l(t)\dot{\theta}\right)^2+mgl(t)\cos\theta\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgl(t)\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left(l^2(t)\dot{\theta}\right) &= -gl(t)\sin\theta\end{aligned}$$

בזוויות קטנות, $\sin\theta\sim\theta$, ומתקבל

$$\frac{d}{dt}\left(l^2(t)\dot{\theta}\right) = -gl\theta$$

נגדיר - τ, כך ש-$d\tau = l^{-2}(t)\,dt$, נסמן - $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) \\ &= \frac{l^2}{l^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) =_? \frac{1}{l^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\theta}{d\tau^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\theta'' = -gl^3(t)\theta}$$

נחשב את $l^3(t)$ -

$$\begin{aligned}l^3(t) &= l_0^3\left(1+\varepsilon\cos(w\omega t)\right)^3 \\ &= l_0^3\left(1+3\varepsilon\cos(2\omega t)\right)+o\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

אם $\varepsilon = 0$, זו מטוטלת רגילה - הפתרון הוא פתרון הרמוני - $\theta(t) = Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$.
נזניח הרמוניות גבוהות, ואיברים מסדר גודל גדול מ-ε . ננחש פתרון מהצורה

$$\theta(t) = e^{\mu t}\left(Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\right)$$

נציב -

$$\ddot{\theta} = e^{\mu t}\left[A(\mu+i\omega)^2e^{i\omega t}+B(\mu-i\omega)^2e^{i\omega t}\right]$$

נסתכל על איברים מסדר ε. - $\mu\sim\varepsilon$,

$$= -\omega^2\theta(t)+2i\omega\mu e^{\mu t}\left(Ae^{i\omega t}-B_e^{i\omega t}\right)+\underbrace{o\left(\mu^2\right)}_{O(\varepsilon^2)}$$

האגף הימני יהיה

$$\begin{aligned}&-\frac{g}{l_0}\left(1+3\varepsilon\cos(2\omega t)\right)\theta(t) \\ =\;&-\frac{g}{l}\left(1+\frac{3\varepsilon}{2}\left(e^{2i\omega t}+e^{-2i\omega t}\right)\right)e^{\mu t}\left(Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\right)\end{aligned}$$

(בפתיחת סוגריים, נזרוק הרמוניות גבוהות, כלומר - $e^{3i\omega t}$ וכו')
נשווה את המקדמים של $e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned}e^{i\omega t} &: \quad 2i\omega\mu e^{\mu t}A = \omega^2\frac{3}{2}\varepsilon e^{\mu t}B \\ e^{-i\omega t} &: \quad -2i\omega\mu e^{\mu t}B = \omega^2\frac{3}{2}\varepsilon e^{\mu t}A\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2i\mu & -\frac{3}{2}\omega\varepsilon \\ -\frac{3}{2}\omega\varepsilon & -2i\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי - והדטרמיננטה תתאפס -

$$(2\mu)^2 = \left(\frac{3}{2}\omega\varepsilon\right)^2$$

$$\mu = \pm\frac{3}{4}\omega\varepsilon$$

נבחר $A = 1$, $i\mu A = \frac{3}{4}\mu\varepsilon B$.

7 חזרה למבחן

7.1 הפורמליזם הלגרנז'י

- החוק השני של ניוטון

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

שקול להגדרת הפונקציה $L = T - V$, והגדרת הפונקציונאל פעולה $S = \int L(q, \dot{q}, t)\, dt$. המסלול שיתקבל ממשוואות ניוטון הוא המסלול שבו הפעולה תהיה מינימלית. שקול למשוואות אוילר־לגרנז' -

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

- אילוצים הולונומיים - $C(r_1, \ldots, r_n, t) = 0$. פותרים את הכל על מישור האילוץ. בוחרים קוארדינטת מוכללות שכוללות את האילוץ.
  - במקרה ובו לא ניתן להגיע בקלות לפרמטריזציה של המישור המאולץ - כופלי לגרנז' -

$$L' = L - \sum \lambda_i c_i$$

ופותרים את משוואות אוילר לגרנז' על הלגרנז'יאן החדש (עבור הקוארדינטות $r_1, \ldots, r_n, \lambda, \ldots, \lambda_k$). אפשר לקבל ביטוי לקוחות המאלצים.

  - משוואות אוילר לגרנז' שמתקבלות -

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}^i_\alpha} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial r^i_\alpha}}_{Orginal\, Force} - \underbrace{\sum \lambda_{ii}\frac{\partial C_\alpha}{\partial r_{\alpha^i}}}_{Aditional\, Force}$$

  - לרוב, יותר נוח להגיע לקוארדינטות מוכללות.

- משפט נטר - יש קשר בין סימטריות בלגרנז'יאן לחוקי שימור (סימטריה - טרנספורמציה רציפה שלא משנה את הלגרנז'יאן)
  - סימטריה להזזות - כאשר יש חלקיק בלי פוטנציאל (או כאשר יש שני חלקיקים שהפוטנציאל תלוי רק במרחק בינהם ומזיזים את שניהם ביחד) אז יש שימור תנע.
  - כאשר יש סימטריה לסיבובים - יש שימור תנע זוויתי.
  - אינווריינטיות בזמן - שימור המילטוניאן (כאשר האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק בקוארדינטות - אז זה גם שימור אנרגיה)

7.2 הפורמליזם ההמילטוני

- יש סימטריה בין הקוארדינטות לתנעים - p,q
- מעבר בין הלגרנז'יאן להמילטוניאן -

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Rightarrow \dot{q}\left(q,p,t\right)$$
$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\left(q,p,t\right)$$

- משוואות המילטון - $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$,$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- עברנו מ־n משוואות תנועה מסדר שני ל־$2n$ משוואות מסדר ראשון.
- סוגרי פואסון -

$$\frac{dF}{ft} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}$$

הגדרה -

$$\{u,v\} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial u}{\partial p_i}\right)$$
$$\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0$$
$$\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$$

- טרנספורמציה קאנונית - יכולה לערבב את הקוארדינטות והתנעים. שומרות על הצורה של משוואות התנועה.

$$q,p \rightarrow Q,P$$

סוגרי פואסון יתקיימו $\Longleftrightarrow$ משוואות התנועה יתקימו.

- פונקציות יוצרות -

$$F_1(q,Q) \rightarrow \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial q} = p,}_{Q(q,p)} \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P}_{P(q,p)}$$
$$F_2\left(q,P\right) \rightarrow$$
$$F_3\left(p,Q\right) \rightarrow$$
$$F_4\left(p,P\right) \rightarrow$$

(במקרה הכללי, עלולים להדרש לערבב q,p)

– ההמילטוניאן החדש יהיה

$$H' = H\left(q\left(Q,P\right),p\left(Q,P\right)\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

7.3 בעיית שני גופים

לגרנז'יאן -

$$L = \frac{1}{2}\dot{m}_1\dot{r}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2 - V\left(|r_1 - r_2|\right)$$
$$H = \frac{p_1}{2m_1} + \frac{p_2}{2m_2} + V\left(|r_1 - r_2|\right)$$

6 דרגות חופש, או 12 במרחב הפאזה.
נעבור לקואורדינטות -

$$r = r_1 - r_2$$
$$R_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}r_2$$

וההמילטוניאן -

$$H = \frac{\vec{P}_R^2}{2M} + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu} + V\left(r\right)$$

נתעלם מהתנועה של מרכז המסה ונדבר על חלקיק שמסתו μ בפוטנציאל מרכזי $V(r)$.
$\vec{l}$ נשמר. $\vec{r} \perp \vec{l}$, אזי נעבור למימדים xy ($z = 0$), כי התנועה במישור. במישור נעבור לקואורדינטות פולריות ונקבל

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + U_{eff}\left(r\right)$$

(כי $l = cont$)

$$U_{eff}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$E = \frac{p_r^2}{2\mu} + U_{eff}(r) = \text{const}$$

אזי

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}(r)\right)}$$
$$\int dt = \int \sqrt{\frac{2}{\mu\left(E - U_{eff}(r)\right)}}$$

לפעמים רוצים לקבל את צורת המסלול -

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{dt}{dr}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\theta(r) = \theta_0 + \int \frac{dr}{r^2\sqrt{r\mu\left(E - U_{eff}(r)\right)}}$$

7.4 גוף צפיד

המרחקים בין כל 2 נקודות על הגוף נשמרים. אז יש 6 דרגות חופש.
קואורדינטות מוכללות - $x_{cm}, y_{cm}.z_{cm}$, קרטזיות של מרכז המסה.
3 זוויות אוילר , (ψ, θ, φ).

האנרגיה הקינטית שלו -

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}\Omega_i I_{ik}\Omega_k$$
$$I = \int \rho(\vec{r})\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) dV$$

כאשר המהירות של כל נקודה היא $V = V_{cm} + \vec{\Omega}\times\vec{r}$.

בכל גוף יש מערכת צירים שבה הטנזור אלכסוני. $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$.

אם מבטאים את $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ במערכת הצירים הראשית של הגוף, ואז

$$T = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2$$
$$\vec{L} = I\vec{\Omega}$$

- את I ניתן לחשב מכל נקודה!
- הלגרנז'יאן (בקואורדינות $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$)

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi = \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

אזי

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$
$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}^{'} + \vec{\Omega}\times\vec{L} = \vec{N}$$

$$I_i\Omega_i + \sum_{jk}\Omega_j I_k \Omega_k = N_i$$

7.5 תנודות קטנות

$$L = \frac{1}{2}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\right)$$

נניח שב־$\eta = 0$, V בנקודת מינימום, ולכן כל הערכים העצמיים של המטריצה V, חיוביים.
מתקבלות n משוואות תנועה מצומדות -

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0$$

נעבור למערכת שבה היא מתוארת בתור n קפיצים בת"ל.
ננחש את הפתרון $\eta_i = Ca_i e^{i\omega t}$, נפתור את התנאי - $\det\left(V - \omega^2 T\right) = 0$. נמצא את הפתרונות λ ונקבל -

$$VT - TA\lambda = 0$$

המודים העצמיים הוא $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ וזה כאשר

$$L = \frac{1}{2}\sum_k\left(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2\xi_k^2\right)$$

8 שאלות ממבחנים

8.1 שאלה

ארבע נמלים יוצאות מקודקודי ריבוע. בכל רגע נתון, נמלה מתקדמת לכיוון הנמלאה הבאה.

- למצוא את המסלול של נמלה.
- להראות שניתן לקבל את המסלול כמסלול של חלקיק בכח מרכזי, $F(r) \propto \frac{1}{r^3}$

המסלול נבחר את הראשית במרכז הריבוע.

$$\begin{aligned}
\hat{r} \cdot \hat{v} &= -rv\cos 45^\circ \\
\vec{r} &= r\hat{r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\
\vec{v}\vec{r} &= r\dot{r}
\end{aligned}$$

ולכן -

$$\begin{aligned}
r\dot{r} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}rv \Rightarrow v = \sqrt{2}\dot{r} \\
v^2 &= 2\dot{r}^2 \\
v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\
\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2 &= \dot{\theta}^2 \\
\frac{\dot{r}}{r} &= -\dot{\theta}
\end{aligned}$$

(אם r קטן אז θ גדלה, אז הסימן הוא "-")

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{r} &= -d\theta \\
\theta(r) &= -\ln(r) + \ln r_0 \\
r(\theta) &= r_0 e^{-\theta}
\end{aligned}$$

בכח מרכזי בהנתן המסלול, עבור תנועה בכח מרכזי, l קבוע.

$$\begin{aligned}
l &= mr^2\dot{\theta} = mr^2\left(-\frac{\dot{r}}{r}\right) \\
&= -mr\dot{r} \\
\dot{r} &= -\frac{l}{mr} \\
E &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)
\end{aligned}$$

נבודד את $V(r)$ - (נציב את $\dot{r}$)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \\
V(r) &= E - \frac{l^2}{mr^2}
\end{aligned}$$

ולכן $F = \frac{dV}{dr} = \frac{2l^2}{mr^3}$. מסלול שמתאים לכח מרכזי כזה כאשר $E = 0$.

8.2 שאלה

גליל בצפיפות אחידה עם מסה M, ורדיוס a. הגליל מסתובב סביב ציר. על הגליל חרוטה מסילה, ועליה גוף שמסתו m, שמחליק על המסילה.

צריכים למצוא את הלגרנז'יאן, ההמילטוניאן ואת פתרון הפעולה.

המסילה -

$$\begin{aligned} x' &= a\cos\theta \\ y' &= a\sin\theta \\ z' &= b\theta \end{aligned}$$

בזמן $t = 0$, החרוז והגליל מתחילים ממנוחה.

הגליל מסתובב ב־ϕ, ולכן מיקומה של המסה m ביחס למערכת המעבדה -

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\theta+\phi) \\ y &= a\sin(\theta+\phi) \\ z &= b\theta \end{aligned}$$

הפתרון של הבעיה יהיה $\theta(t), \phi(t)$.

נחשב את הנגזרות שלהם -

$$\begin{aligned} \dot{z} &= b\dot{\theta} \\ \dot{x}^2+\dot{y}^2 &= \dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2 \end{aligned}$$

אז עבור המסה הקטנה -

$$T_m = \frac{1}{2m}\left(a^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\right)+b^2\dot{\theta}^2\right)$$

הגליל הגדול מסתובב סביב ציר ראשי -

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{2}I_3\dot{\phi}^2 \\ I_3 &= \int_0^a \rho 2\pi h r dr \underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{r^2} \\ 2\pi h\rho \int_0^a r^3 dr &= \frac{Ma^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= mgz = mgb\theta \\ L &= \frac{1}{2}m\left(a^2\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)^2+b^2\dot{\theta}^2\right)+\frac{Ma^2}{4}\dot{\phi}^2 - mgb\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_\theta &= ma^2\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)+mb^2\dot{\theta} = m\left(a^2+b^2\right)\dot{\theta}+ma^2\dot{\phi} \\ p_\phi &= ma^2\left(\dot{\theta}+\dot{\phi}\right)+\frac{Ma^2}{2}\dot{\phi} = \left(m+\frac{M}{2}\right)a^2\dot{\phi}+ma^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$H = p_\theta\dot{\theta}+p_\phi\dot{\phi}-L$$

(נשים לב שההמילטוניאן הוא פשוט $T+V$... אבל לא נעשה את זה)

$$= \frac{1}{2} m a^2 \left(\dot{\theta} + \dot{\phi}\right)^2 + \frac{m b^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{M a^2 \dot{\phi}^2}{4} + m g b \theta$$

$$\begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m\left(a^2 + b^2\right) & m a^2 \\ m a^2 & \left(m + \frac{M}{2}\right) a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix}$$

מחשבים את המטריצה ההפוכה, מציבים ומקבלים את ההמילטוניאן.

$$H\left(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi\right) = \frac{m a^2}{2D^2} \left(\frac{M a^2}{2} p_\theta + m b^2 p_y\right)^2 + \frac{m b^2}{2D^2} \left(\left(m + \frac{M}{2}\right) a^2 p_\theta - m a^2 p_y\right)^2$$
$$+ \frac{M a^2}{4D^2} \left(-m a^2 p_\theta + m\left(a^2 + b^2\right) p_\varphi\right)^2 + m g b \theta$$

φ קואורדינטה ציקלית, לכן $P_\phi(t) = p_\phi(0)$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = m g b = -\dot{p}_\theta$$
$$p_\theta(t) = m g b t$$
$$p_\phi = 0$$
$$\dot{\theta}, \dot{\phi} \to p_\phi, p_\theta$$

$$\theta(t) =\sim t^2$$
$$\phi\left(t\right) =\sim t^2$$