מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים

מרצה: מיכאל פוליאק

28 בספטמבר 2009

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של פרופ' מיכאל פוליאק. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. **אין הטכניון או מי מטעמו ־ ובפרט, הפקולטה למתמטיקה, על מרצה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.**
הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.tehcnion.ac.il

תוכן עניינים

1 מרחבים מטריים[1]

הגדרה 1.1 תהא X קבוצה. פונקציה $\mathrm{d}: X \times X \to \mathbb{R} \geq 0$ המקיימת א תהתנאים הבאים:

1. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$, לכל $x, y \in X$

   (א) $x = y \iff \mathrm{d}(x,y) = 0$ (סימטריה)

   (ב) $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ לכל $x, y, z \in X$

   נקראת **מטריקה** על X (פונקציית המרחק, metric)

הגדרה 1.2 הזוג הסדור (X, d) נקרא **מרחב מטרי**.

1.1 דוגמאות

1.1.1 $(\mathbb{R}, \mathbf{d}_1)$, $\mathbf{d}_1(x,y) = |x-y|$

נבדוק ש־$(\mathbb{R}, \mathrm{d}_1)$ מרחב מטרי־

.1

$$\mathrm{d}_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

2. סימטריה ־

$$\mathrm{d}_1(x,y) = |x-y| = |y-x| = \mathrm{d}_1(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

חוסר ניוון

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1(x,y) = |x-y| = 0 &\iff x - y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

.3

$$\mathrm{d}_1(x,y) = |x-z| \leq \underbrace{|x-y|}_{\mathrm{d}_1(x,y)} + \underbrace{|x-z|}_{\mathrm{d}_1(y,z)}$$

נובע מאי שוויון־המשולש עבור ערך מוחלט

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

[1] הרצאה ראשונה, 16.3.09, סרגי מחליף את מיכאל

1.1.2 מטריקה דיסקרטית

X קבוצה,

$$\mathrm{d}_0(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

נבדוק (X,d_0) מרחב מטרי - די ברור מהגדרה (סימטריה, ניוון)
נראה את אי שוויון המשולש

$$\mathrm{d}_0(x,y)\leq \mathrm{d}_0(x,y)+\mathrm{d}_0(y,z)$$

- אם $x=z$, ברור (0 קטן מכל מספר אי שלילי)
- אם $x\neq z$, אז אחד מהמחוברים מימין הוא 1 , ולכן יש שוויון

1.1.3 מרחב נורמי

הגדרה 1.3 יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\|:V\to R_{\geq 0}$ שמקיימת:

- $\|v\|=0\iff v=0$
  - $\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|$, לכל $\lambda\in\mathbb{R}$, לכל $v\in V$
  - $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$ לכל $v,w\in V$

נקראת **נורמה על** V.

הגדרה 1.4 הזוג הסדור $(V,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי ממשי**.

נורמה משרה את המטריקה שנקראת **מטריקה נורמית** $\mathrm{d}_{\|\cdot\|}$.

דוגמאות

$$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_m)\,|x_i\in\mathbb{R}\}$$

לכל $1\leq p<\infty$ נגדר p־נורמה - $\|\cdot\|_p$ על $\mathbb{R}^n$ על ידי

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$$

הוכחה: (אי שוויון המשולש עבור $\|\cdot\|_p$, אי שוויון מינקוווסקי)
צריך להוכיח -

$$\left(\sum|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum|y_i|^p\right)^{1/p}$$

(עבור $p>1$) ■

למה 1.5 אי שוויון הולדר

$$\sum_{i=1}^n|x_yy_i|\leq\sum_{i=1}^n\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{1/q}$$

לכל $p,q\geq 1$, כך ש־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
עבור $p=q=2$ מקבלים את אי־שוויון קושי־שוורץ־ $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|_2\cdot\|y\|_2$

לכל $a,b\in\mathbb{R}$,
$$(|a|+|b|)^p=(|a|+|b|)^{p-1}|a|+(|a|+|b|)^{p-1}|b|$$
נציב $a=x_i$ ו־$b=y_i$ ונסכום $\sum_{i=1}^n$.
$$\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\le\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^{p^\dagger}\right)^{1/q}}_{\star}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$
עבור q כלשהו המקיים ־ $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, ולכן, $(p-1)\,q=p$, מה שמסביר את ה־p המסומן ב־$\dagger$. **הוכחה:** אם נחלק את שני האגפים ב־$\star$, ונקבל
$$\left(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=1/p}}\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right)^{1/p}$$
ולפי אי שוויון המשולש, נפתח את $|x_i|+|y_i|$ בביטוי השמאלי, ונקבל:
$$\left(\sum(|x_i+y_i|)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p}$$
■

נסמן ־ $\mathrm{d}_p(x,y)=\|x-y\|_p$
עבור $p\to\infty$, מגדירים נורמת מקסימום (או סופרימום)
$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$$
זו נורמה, ולכן משרה את מטריקת־מקסימום ־ d_∞.

1.1.4 מרחב פונקציות רציפות על $[a,b]$

על $C([a,b])$ נגדיר נורמות שונות:
לכל $1\le p<\infty$, L_p ־ נורמ על $C([a,b])$ מוגדרות כ־
$$\|f\|_{L_p}=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$
משרה L_p מטריקה,
$$\mathrm{d}_{L_p}(f,g)=\|f-g\|_{L_p}=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$
אומרים ששתי פונקציות קרובות אם הפרש השטחים ש"מתחת לגרף" הוא קטן.
עבור $p=\infty$
$$\|f\|_{L_\infty}=\max_{a\le t\le b}|f(t)|$$
עבור מרחב גדול יותר ־ של פונקציות חסומות, ואז $\|f\|_{L_\infty}$ יהיה הסופרימום.
הנורמה משראה מטריקת מקסימום ־
$$\mathrm{d}_{L_\infty}(f,g)=\|f-g\|_{L_\infty}=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|$$

1.1.5 מרחבי הסדרות הממשיות ℓ^p, $1 \leq p < \infty$

$$\ell^p = \left\{ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \;\middle|\; x_i \in R, \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}_{\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\cdots} < +\infty \right\}$$

ℓ^p מרחב וקטורי ממשי בעל p־נורמה -

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

1.1.6 מרחב הסדרות הממשיות החסומות ℓ^∞

$$\ell^\infty = \left\{ x_i = (x_i)_{i=1}^{\infty} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}, \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < +\infty \right\}$$

נורמת המקסימום -

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

1.1.7 מטריקות על מכפלות ישרות של מרחבים מטריים

נניח ש־$(X, \mathrm{d}_x), (Y, \mathrm{d}_Y)$ שני מרחבים מטריים. נתבונן במכפלה ישראה,

$$X \times Y = \{\, (x, y) \mid x \in X, y \in Y \,\}$$

כמו קודם, לכל $1 \leq p < \infty$, נגדיר:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^p_{X\times Y}\, (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &\mathrm{d}^p_{X\times Y}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \left(\mathrm{d}\left(x_1, x_2\right)^p + \mathrm{d}\left(y_1, y_2\right)^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

ועבור $p = \infty$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^\infty_{X\times Y}\, (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &\mathrm{d}^\infty_{X\times Y}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \max\left\{\mathrm{d}_x\left(x_1, x_2\right), \mathrm{d}_y\left(y_1, y_2\right)\right\} \end{aligned}$$

1.1.8 תתי מרחבים

הגדרה 1.6 יהא (X, d) מרחב מטרי, ותהא $A \subseteq X$ תת־קבוצה לא ריקה. הזוג הסדור (A, d_A), כאשר

$$\mathrm{d}_A = \mathrm{d}|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

נקרא **תתר מרחב מטרי**.

1. $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_1)$, $A = [0, 1]$.

2. $X = M_n(\mathbb{R})$, קבוצת המטריצות $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$, $\|A\|_2 = (\mathrm{trace}(AA^t))^{1/2}$, הנורמה האוקלידית. נסתכל על תת הקבוצה $O(n)$, כל המטריצות $n \times n$ המקימות

$$O(n) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; AA^t = I \right\}$$

נשים לב שכל שני איברים ב־$O(n)$, המרחק בינהם שווה - $\sqrt{n}$.

הגדרה 1.7 יהא (X, d) מרחב מטרי.

- כדור פתוח סביב $x \in X$ ורדיוס $r > 0$, היא קבוצה

$$B_{\mathrm{d}}(x, r) = \{ y \in X \mid \mathrm{d}(x, y) < r \}$$

  – כדור סגור

$$\overline{B_{\mathrm{d}}(x, r)} = B[x, r] = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq r \}$$

  – ספרה ברדיוס r סביב $x \in X$

$$S_{\mathrm{d}}(x, r) = \{ y \in X \mid d(x, y) = r \}$$

$$B_{\mathrm{d}_p}((0,0), 1) \subseteq \left(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_p\right)$$

- עבור $p = 1$,

$$B_{\mathrm{d}_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| = 1 \right\}$$

זהו ריבוע (נוטה על צידו ("פינותיו" ב־$(1,-1), (-1,1), (-1,-1), (1,1)$))

- עבור $p = 2$, זהו עיגול פתוח (השפה שלו, הספרה, היא "מעגל").
- עבור $p = \infty$, זהו ריבוע יחידה

במרחב הדיסקרטי, x,[2]

$$B(x, 1) = \{x\}$$
$$B[X, 1] = \{X\}$$

הגדרה 1.8 **סביבה של נקודה** $x \in X$, $u \subset X$, סביבה של של x אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־ $u \supset B(x, \varepsilon)$

"**סביבה של** x" היא כל קטע פתוח המכיל את נקודה x. כל סביבה מכילה סביבת ε, עבור ε קטן מספיק.

הגדרה 1.9 תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של נקודות ב־X. $x \in X$ הוא **גבול** של $\{x_n\}$ (סימון: $\lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$) אם לכל סביבה u של x, קיים N כך ש־ $x_n \in U$, לכל $N < n$.

[2] הרצאה שניה, 19.03.2009

הגדרה 1.10 $x \in X$ היא **נקודה גבולית**, (נקודת התכנסות, הצטברות...) של $A \subset X$ אם קיימת סדרה $\{x_n\}$ כך ש־$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $x_n \in A$.
$\iff$ לכל סביבה u של x, $A \cap u \neq \emptyset$

דוגמה 1.1 אם $x \in A$, אז x היא נקודה גבולית של A. (נבנה סדרה $x_n = x$)

הגדרה 1.11 **סגור** של A, הוא איחוד של כל הנקודות הגבוליות

$$\bar{A} = \{\, x \in X \mid x \,\text{Limit point of}\, A \,\}$$

תכונות של $\bar{A}$

- $A \subset \bar{A}$
- $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$

הוכחה: נניח ש־$x \in \bar{\bar{A}}$, צריך להוכיח ש־$x \in \bar{A}$.
אם $x \in \bar{\bar{A}}$, אז בכל סביבה u של X, יש נקודה ב־$\bar{A}$. צריך להוכיח שיש גם נקודה ב־A. נניח ומצאנו $x_1 \in \bar{A}$. אז, בכל כדור $B(x_1, \varepsilon_1)$, קיימת נקודה $x_2 \in A$. נבחר $\varepsilon - d(x, x_1) \geq \varepsilon_1$, אזי כל הכדור שרדיוסו ε_1, יהיה מוכל בסביבה של x (שרדיוסה ε) ■

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

הוכחה: בכיוון אחד:
נוכיח $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. מספיק להוכיח ש־ $\bar{A} \in \overline{A \cup B}$. זה נובע מכך שאם $A \subset C$ אז $\bar{A} \subset \bar{C}$ (מיידי).
אבל $A \subset A \cup B$ ולכם $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. A ו־B שקולות, ולכן זה מתקיים גם לגבי B - ולכן לגבי האיחוד
בכיוון השני:
נניח ו־$p \in \overline{A \cup B}$, אז יש סדרה, $\{p_i\}$, המתכנסת ל־p. אם נסתכל על $\{p_i\} \cup A$ ועל $\{p_i\} \cup B$, אז לפחות אחת מהן היא סדרה אינסופית. נניח ש־$\{p_i\} \cup A$ סדרה אינסופית, אזי $p \in \bar{A}$, ולכן גם $p \in \bar{A} \cup \bar{B}$. ■

- לא תמיד, מתקיים : $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$

דוגמה 2.1 דוגמא נגדית: לדוגמה, במרחב הדיסקרטי, $\overline{B(x,1)} = B(x,1) = \{x\}$ (לעומת זאת, $B[x,1] = X$))
באופן כללי יותר, יהא מרחב מטרי (X, d). נגדיר d_1 -

$$\mathrm{d}_1(x,y) = \begin{cases} \mathrm{d}(x,y) & \mathrm{d}(x,y) < 1 \\ 1 & \mathrm{d}(x,y) \geq 1 \end{cases}$$

דוגמה 3.1 (של lim)

$$f_n(x) \in C^1[-1,1]$$

$X = C[-1,1]$, $A = C^1[-1,1]$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \in A$,
. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = |x| \notin A$

הגדרה 1.12 A נקראת **סגורה** אם $\bar{A}=A$

משפט 1.13 אם F_α סגורות, אז, עבור n סופי, אז $\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ קבוצה סגורה ו־$\bigcap_\alpha F_\alpha$ קבוצה סגורה (לא חייב להיות חיתוך סופי)

הוכחה: תהא $x\in\overline{\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha}$. אזי, קיימת סדרה של נקודות $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ו־ $x_n\in\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$. .
אזי לפחות אחת הסדרות $\{x_{n_k}\}\in F_i$ היא אינסופית, עבור i כלשהו (כי יש מספר סופי של קבוצות F_i והסדרה אינסופית).
אבל F_k סגורה, ולכן $\lim x_{n_{k_i}}=x\in F_k$ ולכן x בתוך האיחוד.
תהא $x\in\overline{\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)}$ אז קיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ו־$x_n\in\bigcap F_\alpha$ לכל α, ו־$x_n\to x\in F_\alpha$, כי F_α סגורה, לכל F_α, ולכן $x\in\overline{\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)}$. ■

הגדרה 1.14 x היא **נקודה פנימית** של קבוצה A אם קיימת סביבה U של x כך ש־$U\subset A$.
$\Longleftrightarrow$ קיימם $\varepsilon>0$ כך ש־$B(x,\varepsilon)\supset A$.

הגדרה 1.15 קבוצה A היא **קבוצה פתוחה** אם כל נקודה $x\in A$ היא נקודה פנימית.

דוגמה 4.1 אם A סגורה, אז $X\setminus A$ היא קבוצה פתוחה. A סגורה, ולכן $\bar{A}=A$. אם $x\in X\setminus A=X\setminus\bar{A}$ כלומר, x אינה בסגור של A. כלומר, קיים כדור סביב x, שבתוכו אין אף נקודה של A אזי xהיא נקודה פנימית של $X\setminus A$ והקבוצה פתוחה.
בצורה דומה, $X\setminus A$ פתוחה, אז A סגורה. מספיק להוכיח ש־$X\setminus A=X\setminus\bar{A}$. נניח ש־$x\notin A$, ונוכיח ש־$x\notin\bar{A}$.
x קבוצה פתוחה, ולכן יש כדור שרדיוסו קטן, שכולו לא מוכל ב־A.
כלומר, A סגורה $\Longleftrightarrow$ $X\setminus A$ קבוצה פתוחה.
זה מקל עלינו להעביר טענות מקבוצות סגורות ופתוחות, באמצעות המשלים.
לדוגמה, נקח את משפט 1.13:

משפט 1.16 אם U_α פתוחות, אז $\bigcap_{\alpha=1}^{n} U_\alpha$ קבוצה פתוחה. ו־$\bigcup_\alpha U_\alpha$ פתוחות.

1.2 קבוצות פתוחות בישר האוקלידי, $\mathbb{R}$.

משפט 1.17 כל קבוצה פתוחה היא $\bigcup_{i=1}^{n} I_\alpha$ (כאשר I_α קטעים פתוחים) או $\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} I_\alpha$ (איחוד בין מניה) כאשר $I_\alpha=(a_\alpha,b_\alpha)$ ו־$I_\alpha\cap I_\beta=\emptyset$ (לכל $\alpha\neq\beta$) .

הוכחה: כאשר איחוד בין מניה מספיק משום שבכל קטע ניתן למצוא מספר רציונלי, ולכן מספר הקטעים הוא לכל היותר בן מניה.
נסתכל על קטע אחד מתוך קבוצה פתוחה U ב־$\mathbb{R}$. נבחר נקודה x , ולכל זוג נקודות $x,y\in U$, ונגדיר יחס שקילות ־ $x\sim y$ אם $[x,y]\subset U$.
נסמן $[x]=\{y\in U|x\sim y\}$.
טענה: $[x]$ קטע פתוח, $(\inf[x],\sup[x])\supset[x]$. האינפימום והסופרימום אינם ב־$[x]$, משום שהתחלנו מ־$[U]$ קבוצה פתוחה, שכל נקודה בה היא נקודה פנימית, ולכן $\inf[x]\notin U$. ■

דוגמה 5.1 קבוצת Cantor
נקח קטע סגור, $[0,1]$. נחסר ממנו את הקטע העמצאי, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ וקיבלנו את $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$. שוב, נסיר א תהקטע האמצעי ונקבל את $\left[0,\frac{1}{9}\right]\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$ וכן הלאה. נבדוק את האורך של כלל הקטעים שהסרנו:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\ldots=1$$

נשארו C נקודות ־ כל מספר בקטע ניתן לכתוב כשבר עשרוני: $a=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots=a_0.a_1a_2a_3a_4\ldots$. קיימות סדרות שונות שמגדירות את אותו המספר, למשל

$$0.9999\ldots=1.0000\ldots$$

ניתן לעשות את זה לפי בסיסים שונים: $a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}+\ldots$ גם כאן יש ניוון ־ $0.2222\ldots=1.000\ldots$.
נטען ־ $a\in F \iff a_i\neq 1$ (בפיתוח לפי בסיס 3)

הפיתוח הוא זהה לחיפוש בעץ בינארי, כך ש־"1" באחד הבסיסים בוחר את האמצע, "0" בוחר את השליש הימיני ו־"2" בוחר את השליש השמאלי.
מספר הסדרות הוא C.
זהו חיתוך בין C קטעים סגורים, ולכן היא קבוצה סגורה.

הגדרה 1.18 $A,B\in X$, קבוצה A היא **צפופה** בקבוצה B אם $B\subset\bar{A}$. ובפרט, A צפופה ב־X אם $\bar{A}=X$.

דוגמה 6.1

- $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$, ואכן, $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.
  - $X=\mathbb{R}^n$, $A=\mathbb{Q}^n$. עובדים קוארדינטה־קוארדינטה, ומשתמשים בסעיף הראשון
  - מרחב $X=\ell_2$, סדרות מהסוג $x_1,x_2,\ldots$, $x_i\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty$ ו־ $\mathrm{d}\left(\{x\},\{y\}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i-y_i\right)^2$. קבוצה A תהיה הסדרות $\{x_1,x_2,\ldots,0,0\}$ כלומר, שמתאפסות החל ממקום מסויים, וכל $x_i\in\mathbb{Q}$.
    - * נקרב את הסדרה $\underline{x}=\{x_1,\ldots,x_n\ldots\}$ באמצעות סדרות סופיות באורך i, $\underline{x}^{(i)}$

$$\begin{array}{lcccccccc}
\underline{x}: & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_n & \ldots \\
\underline{x}^{(1)}: & x_1 & 0 & 0 & & & & \\
\underline{x}^{(2)}: & x_1 & x_2 & 0 & 0 & & & \\
\underline{x}^{(3)}: & x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & & \\
\vdots & & & & & & & \\
\underline{x}^{(n)}: & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_n & 0
\end{array}$$

כלומר, $\underline{x}^{(i)}\xrightarrow[i\to\infty]{}\underline{x}$,

$$\mathrm{d}\left(\underline{x}^{(n)},\underline{x}\right)=\sum_{i=n+1}^{\infty}x_i^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

    - * במקום כל x_i, נבחר איברים רציונלים קרובים יותר ויותר ל־x.
  - $X=C\left[a,b\right]$, $\mathrm{d}\left(f(x),g(x)\right)=\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-g(x)\right|$ ו־A יהיו פולינום ממעלה כלשהי־ $A=\left\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|a_i\in\mathbb{Q}\right\}$ עם מקדמים רציונאלים. ידוע שכל פוונקציה רציפה ניתן לקרב על ידי פולינום.
- **דוגמא:** $X=C_2\left[a,b\right]$, $\mathrm{d}\left(f(x)g,(x)\right)=\left(\int_a^b\left(f(x)-g(x)^2\right)\right)^{1/2}$, $A=\left\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|a_i\in\mathbb{Q}\right\}$.

הגדרה 1.19 אם קיימת קבוצה A בת מניה צפופה ב־X, אז X נקרא **ספרבילי** (separable).

דוגמה 7.1 למרחב שאינו ספרבילי, $X=m$, מרחב הסדרות $\underline{x}=x_1,\ldots,x_n,\ldots$, כך ש־$\underline{x}$ חסומה, $\mathrm{d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)=\sup_i\left|x_i-y_i\right|$. המרחב הזה אינו ספרבילי. כדי להוכיח זאת, נמצא קבוצה A, מעוצמה C, כך שכל אברי הקבוצה נמצאים במרחק של לפחות אחד.

$$A=\{\underline{x}|x_i=0,1\}$$

כך ש־$\mathrm{d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)=1$. נניח והמרחב כן ספרבילי, אזי יש קבוצה בת מניה הצפופה ב־X, ובפרט ־ היא צפופה ב־A. אזי, בכל כדור ברדיס $\frac{1}{2}$, צריכה להיות נקודה מהקבוצה המפרידה, ואז היא לפחות מעוצמת הרצף.

הגדרה 1.20 A קבוצה **דלילה** (Nowhere dense) ב־X אם לכל כדור B, קיים $B'\subset B$, כך ש־ $A\cap B'=\emptyset$.
(כלומר, היא אינה צפופה באף כדור B)

1.3 מרחבים שלמים[3]

מוטיבציה: באנליזה, יש שתי הגדרות של התכנסות: (מעל $\mathbb{R}$, למשל)

- נקודת גבול x של סדרה $\{x_i\}$, שעבורה לכל $\varepsilon > 0$, קיים N כך שלכל $n < N$, $|x - x_n| < \varepsilon$.
- קרטריון קושי – $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\iff$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש־$|x_n - x_m| < \varepsilon$, לכל $m, n > N$.

אם נרצה להרחיב את ההגדרות למרחב מטרי ־ נקבל שתי הגדרות שאינן שקולות.

הגדרה 1.21

1. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה $x_n \in X$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־$x \in X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש־ , $\mathrm{d}(x, x_n) < \varepsilon$, לכל $n > N$.

(א) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא **סדרת קושי** (Couchy) אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים N כך ש־$\varepsilon > \mathrm{d}(x_n, x_m)$ לכל $n, m > N$.

הגדרה (1) $\Leftarrow$(2), לפי אי שוויון המשולש:

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \le \mathrm{d}(x_n, x) + \mathrm{d}(x_m, x)$$

כאשר אם מתקיימת הגדרה (1), נבחר את כל אחד מהאיברים מימין להיות קטן כרצוננו.

הגדרה 1.22 **במקרה הכללי** $(2) \not\Leftarrow (1)$!

דוגמה 8.1 במרחב[4] $C_2[a, b]$: פונקציות רציפות עם מטריקה $\mathrm{d}(f, g) = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx\right)^{1/2}$. נבחר את $[a, b] = [-1, 1]$.
נבחר פונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{n} \\ -1 & x < -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

הגבול הוא "פונקצית מדרגה" שאינה פונקציה רציפה (כולל ה"קו" המחבר, אז זו בכלל לא פונקציה).
נטען שהסדרה לא מתכנסת ב־$C_2[-1, 1]$. נניח כי $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \in C_2[-1, 1]$. נסמן את פונקצית המדרגה ב־f_∞. לפי אי־שוויון מינקווסקי:

$$\left(\int_{-1}^{1} (f(x) - f_\infty(x))^2\right)^{1/2} \le \left(\int_{-1}^{1} (f(x) - f_n(x))^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (f_n(x) - f_\infty(x))^2\right)^{1/2} \quad (1)$$

נמדוד כל אחד מהאיברים. נטען כי בצד שמאל, האינטגרל שונה מאפס (כי f פונקציה רציפה, ו־f_∞ לא). ריבוע ההפרש בין פונקציה רציפה לפונקציה לא רציפה, תמיד יהיה גדול ממש מאפס. נטען כי ההפרש,

$$\lim_{n \to \infty} \int (f_n(x) - f_\infty(x))^2 \, dx = 0$$

כי f_n, f_∞ שונות בכל מקום ־ מלבד בקטע שאורכו שואף לאפס:

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f_n(x) - f_\infty(x))^2$$

זהו אינטגרל על פונקציה חסומה על קטע שאורכו שואף לאפס, ולכן בגבול ־ הוא שווה לאפס.

---

[3] הרצאה רביעית, 26.03.09
[4] 30.03.09

נחזור לאי שוויון (1). אם נשאיף $n \to \infty$. אזי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int \left(f(x) - f_n(x)\right)^2 dx} \neq 0$$

וזו סתירה.

אבל $f_n(x)$ סדרת קושי –

$$\mathrm{d}\left(f_n(x), f_m(x)\right) = \left(\int_{-1}^{1} \left(f_n(x) - f_m(x)\right)^2\right)^{1/2}$$

ופונקציות אלו שוות בכל מקום מלבד על קטע שואף לאפס - בכל הישר מלבד הקטע $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ (עבור $n < m$). בקטע הזה ההפרש חסום (על ידי 1, למשל)

כלומר, הסדרה היא סדרת קושי, אבל היא לא מתכנסת גבול.

הגדרה 1.23 X נקרא מרחב **שלם**, אם כל סדרת קושי מתכנסת.

דוגמה 9.1 $L^2, m, C\left[a,b\right], \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^n_\infty$.

דוגמה 10.1 נראה ש-$C\left[a,b\right]$ הוא מרחב שלם. זהו מרחב זה ל-$C_2\left[a,b\right]$, שאינו שלם - עד כדי מטריקה.

נניח כי $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$, קיים N כך שלכל $n, m > N$, מתקיים ש-

$$\max_{x\in[a,b]} \left|f_n\left(x\right) - f_m\left(x\right)\right| < \varepsilon$$

(נכתוב max ולא sup כי פונקציה רציפה מקבלת מינימום ומקסימום בקטע סגור). מאינפי, ידוע שהסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה רציפה $f(x)$:

$$\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \to f(x) \in C\left[A,B\right]$$

זוהי התכנסות במרחב $C\left[a,b\right]$. חשוב להדגיש שההתכנסות כאן היא במידה שווה - δ אינה תלויה ב-x. התכנסות בקטע סגור היא התכנסות במידה שווה. ההתכנסות במידה שווה נותנת הנתכנסות של $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ גם במטריקה של $C\left[a,b\right]$.

תחת מטריקה זו, סדרת הפונקציות $f_n\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{n} \\ -1 & x < -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \end{cases}$. נסתכל על המרחק בין $f_n(x)$ לפונקצית מדרגה: מקסימום המרחקים, שמתקבל ב-$x = 0$, הוא 1 $f_n\left(0\right) = 0$ ו-$1 = \left|f(0)\right|$. נבחר m גדול מספיק, ונסתכל על $f_m(x)$. עבור $m \to \infty$, הפונקציה שואפת לפונקצית-מדרגה. אזי ההפרש בין $f_m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$ ל-$f_n\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}$. נקבע n, ונשאיף את $m \to \infty$, אזי

$$\left|f_n\left(\frac{1}{m}\right) - f_m\left(\frac{1}{m}\right)\right| = \frac{m-n}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

כלומר, סדרה זו **אינה** סדרת קושי.

הערה 1.24 להבדיל מבאינפי 3, הפעם נורמות מסדר שונה $(C_1, C_p, C_\infty, \ell_1, \ell_p, \ell_\infty \ldots)$ לא מתנהגות אותו דבר עד כדי קבוע (על $\mathbb{R}^n$ כן)

דוגמה 11.1 $X = \mathbb{N}$, עם מטריקה דיסקרטית

$$\mathrm{d}\left(m,n\right) = \begin{cases} 1 & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases}$$

אזי, כדור שרדיוסו חצי יכיל רק נקודה אחת.

אזי $\left\{x_n\right\}$ סידרת קושי $\iff$ קיים N כך שלכל $n < N$, $x_n \equiv x$, לכן הגבול נמצא בקבוצה, והמרחב שלם.

עבור $X=\mathbb{N}$ והמטריקה

$$\mathrm{d}\left(m,n\right)=\frac{|m-n|}{m\cdot n}$$

האם $x_n=n$ היא סדרת קושי? (עבור $m>n$)

$$\mathrm{d}\left(x_m,x_n\right)=\frac{m-n}{mn}<\frac{m}{m\cdot n}=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$$

כלומר, הסדרה היא סדרת קושי.

טענה: זהו מרחב דיסקרטי. סביב כל נקודה קיים כדור ברדיוס מסויים, ε, שאינו מכיל אף נקודה אחרת. אם אכן כך – הסדרה אינה מתכנסת.

$$B\left(k,\varepsilon\right)=\{k\}$$

נסתכל, עבור k קבוע, על

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|k-n|}{k\cdot n}=\frac{1}{k}\neq 0$$

לכן הסדרה שלנו, $\{x_n\}$, לא מתכנסת ל־k.

כדור ברדיוס ε הוא אוסף כל הנקודות המקיימות:

$$B\left(k,\varepsilon\right)=\left\{n\;\middle|\;\frac{|k-n|}{kn}<\varepsilon\right\}$$

אם נקח $\varepsilon=\frac{1}{10000k}$, אז ברור שכל הנקודות הגדולות הן מחוץ לתחום. מצאנו כדור עם מספר סופי של נקודות.

1.3.1 נקודת שבת

תזכורת מאינפי: נסתכל על סדרת קטעים סגורים ב־$\mathbb{R}$, $[a_1,b_1]\supset[a_2,a_3]\supset\ldots$ כאשר $a_1\leq a_2\leq a_3,\ldots$ ו־$b_1\geq b_2\geq b_3\ldots$.

אזי אם $\lim_{i\to\infty}|b_i-a_i|=0$, אז קיימת נקודה x אחת בדיוק הנמצאת בכל הקטעים. כלומר, $x\in[a_i,b_i]\,,i=1,2,\ldots$. המשפט נכון רק על כל $\mathbb{R}$. ההוכחה מסתמכת בעיקר על השלמות של $\mathbb{R}$. נכליל את הטענה למרחבים מטריים שלמים.

משפט 1.25 יהא X מרחב מטרי שלם. ותהא $B_i\,,i=1,2,\ldots$ סדרה של כדורים סגורים כך ש־

1. $B_m\subseteq B_n$ לכל $m>n$
2. אם $B_n=B\left[x_n,r_n\right]$ אז $r_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

אז קיים $x\in X$ יחיד כך ש־$x\in B_n$ לכל n.

משפט 1.26 X־ שלם $\iff$ לכל סידרה של כדורים מהצורה במשפט (1.25) קיימת נקודה משותפת יחידה.

מסקנה 1.27 תהי $\{F_n\}$ סידרה של קבוצות סגורות במרחב שלם X כך ש־

1. $F_m\subseteq F_n$ לכל $m>n$

(א) $\mathrm{diam}\left(F_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

אז קיימת נקודה משותפת יחידה.

הגדרה 1.28 **קוטר** של קבוצה, $\mathrm{diam}\left(A\right)=\sup_{x,y\in A}\mathrm{d}\left(x,y\right)$,

שימו לב אם נוריד את תנאי (2), יתכן שלא קיים x כזה.

דוגמה 12.1 כאשר לא דורשים $\mathrm{diam} F_n \to 0$, יתכן ולא יהיו נקודות משותפות כלל.
יהא (d, X) מרחב מטרי, נגדיר מטריקה חדשה:

$$\mathrm{d}_{bounded}\left(x,y\right)=\frac{\mathrm{d}\left(x,y\right)}{1+\mathrm{d}\left(x,y\right)}$$

זוהי מטריקה חסומה.
למשל, על $X=\mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}_{bounded}\left(x,y\right)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

נקח סדרה $F_n=[n,+\infty)$. אלו הן קבוצות סגורות. $F_m\subseteq F_n$ כאשר $m>n$. אפשר להראות שהקוטר של כל אחת מהקבוצות הוא מקסימלי ־ כלומר, 1. נקח $y=n$ ואת x נשאיף לאינסוף, אז

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{d}_{boumded}\left(x,y\right)=\frac{|x-n|}{1+|x-n|}=0$$

ו־$\bigcap_n F_n=\emptyset$.

דוגמה 13.1[5] $x=\mathbb{N}$ עם מטריקה

$$\mathrm{d}\left(n,m\right)=\begin{cases}1+\frac{1}{m+n} & ;n\neq m\\ 0 & ;n=m\end{cases}$$

ונקח את הסדר

$$\mathbb{F}_n=\{n,n+1,n+2,\ldots\}$$

תחת המטריקה הזו, $\mathbb{F}_n$ היא כדור: נקח כדור שמרכזו בנקודה n וברדיוס

$$\begin{aligned}B\left[n,1+\frac{1}{2n}\right]&=\left\{m|\mathrm{d}\left(m,n\right)\leq 1+\frac{1}{2n}\right\}\\&=\left\{m|1+\frac{1}{m+n}\leq 1+\frac{1}{2n}\cup m=n\right\}\\&=m\left\{m|m\geq n\right\}=\mathbb{F}_n\end{aligned}$$

$$\bigcap_n\mathbb{F}_n=\emptyset$$

כי אם נניח ש־k בחיתוך, אז נבחר את $\mathbb{F}_{k+1}$, ו־k אינו בכדור. כל קבוצה משוכנת בקודמת, אבל המטריקה שואפת ל־1 .

הוכחה: נניח כי X שלם
תהא $\left\{\bar{B}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ סידרה של כדורים $\bar{B}_i=B\left[x_i,r_i\right]$, כך ש־$\bar{B}_m\subset\bar{B}_n$ לכל $n>m$, ו־$0\xrightarrow[i\to\infty]{}r_i$. אז $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.
לכל $\varepsilon>0$, קיים N כך ש־$\mathrm{d}\left(x_m,x_n\right)<\varepsilon$, לכל $m,n>N$.
$\bar{B}_m\subset\bar{B}_n$, ולכן $r_n>\mathrm{d}\left(x_m,x_n\right)$. אבל הסדרה $r_i\to 0$, לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש־$r_n<\varepsilon$ לכל $n>N$.
$\Leftarrow \mathrm{d}\left(x_m,x_n\right)<\varepsilon$ לכל $n,m>N$, $\Leftarrow$ x_n היא סידרת קושי. X מרחב שלם, לכן הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת לאיזשהו $x\in X$. אז $x\in B_n$ לכל n. כי $\bar{B}_n$ סגור ו־$x_i\in\bar{B}_n$ לכל $i\geq n$.
בכיוון השני:

[5] 2.4.09

תהי $\{x_n\}$ סידרת קושי ב־X. x_n קושי, ולכן קיים n_1 כך ש־ $\frac{1}{2} > \mathrm{d}\left(x_m, x_{n_1}\right)$, לכל $m > n_1$.
נגדיר, $B_1 = B\left[x_{n_1}, 1\right]$
קיים n_2 כך ש־$\frac{1}{2^2} > \mathrm{d}\left(x_m, x_{n_2}\right)$, לכל $m > n_2$. נגדיר $\bar{B}_2 = B\left[x_{n_2}, \frac{1}{2}\right]$ וכו'. קיים n_i כך ש־

$$\frac{1}{2^i} > d\left(x_m, x_{n_i}\right) \qquad \forall m > n_i$$

ונגדור

$$\bar{B}_i = B\left[x_{n_i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right]$$

אז $\bar{B}_m \subseteq \bar{B}_k$ לכל $m > k$. לכן, קיים $x \in \bar{B}_n$ לכל n.
תת־סידרה מהסוג x_{n_i}, מתכנסת ל־x (כי $r_i \to 0$)

למה 1.29 אם $\{x_n\}$ סידרת קושי שמכילה תת סידרה $\{x_{n_i}\}$ מתכנסת, אז $\{x_n\}$ מתכנסת.

■

משפט 1.30 (Baire)[6]
יהא X מרחב שלם, אז **לא קיימים** X_n כך ש־

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (X הוא איחוד בן־מניה של X_n)
2. כל X_n דלילה ב־X.

דוגמה 14.1 נקודה $x \in X$. $\{x\}$ היא קבוצה דלילה אם ורק אם x לא מבודדת.

אם x נקודה מבודדת, אז כדור ברדיוס מספיק קטן מכיל רק את x, ולכן לא ניתן למצוא תת כדור (לא ריק) שיהיה זר מהנקודה.

מסקנה 1.31 יהא X מרחב שלם בלי נקודות מבודדות. אז X אינו בן מניה. (לפי משפט Baire, הוא אינו איחוד בן־מניה של נקודות) [מספיק שיש לפחות נקודה אחת לא מבודדת]

הוכחה: נניח כי קיימים X_n כאלה, שמקיימים (1) ו־(2), ונגיע לסתירה. נבחר כדור B_0 ברדיוס 1.
X_1 דלילה ב־X, ולכן קיים כדור $B_0 \supset B_1$, ברדיוס $> \frac{1}{2}$, כך ש־ $X_1 \cap B_1 = \emptyset$.
X_2 דלילה ב־X, לכן קיים כדור $B_1 \supset B_2$, עם רדיוס, $> \frac{1}{3}$, כך ש־ $B_2 \cap X_2 = \emptyset$.
נמשיך: קיים B_3 ברדיוס $> \frac{1}{4}$ כך ש־ $B_3 \cap X_3 \neq \emptyset$, וכו'
בגלל ש־X מרחב שלם, קיימת נקודה x , $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, ($B_n$ כדורים סגורים, להגדרה של קבוצה דלילה זה לא משנה) ולכן

$$x \notin X_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

כלומר, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, אבל $x \in X$, ולכן האיחוד $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \neq X$ ■

1.4 השלמה

הגדרה 1.32 מרחב $X^\star$ הוא **השלמה** של מרחב X אם:

1. $X^\star$ שלם
2. $X^\star \supset X$
3. X צפופה ב־$X^\star$ (כלומר, $\bar{X} = X^\star$)

דוגמה 15.1 $X = \mathbb{Q}$ ו־$X^\star = \mathbb{R}$.

[6] 20.04.2009

משפט 1.33 כל מרחב מטרי אפשר להשלים.

משפט 1.34 ההשלמה היא יחידה....

הוכחה: (למשפט 1.33)

1. נגדיר

$$X^{\star}=\left\{\,{\scriptstyle (x_n)_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in X, x_n\to x}\,\right\}/_{\sim}$$

כאשר כל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ו־ $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ אם $\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}\left(x_n,y_n\right)=0$.

- למשל, כדי לבנות את $\sqrt{2}$, נסתכל על נקודה בקטע $[1,2]$, למשל $\frac{3}{2}$. נבדוק האם $\left(\sqrt{2}\right)^2>\left(\frac{3}{2}\right)^2$. אכן, נבחר את החלק הימני ונחלק אותו באמצעו, נבחר נקודה, נשווה וכן הלאה. זוהי סדרת קושי. שאפשר להראות שהיא לא שואפת למספר רציונלי. נגדיר את $\sqrt{2}$ בתור הגבול של הסדרה. יתכון עוד סדרות קושי רציונליות ששואפות לאותו גבול. לשם כך נגדיר את $\sqrt{2}$ כמחלקת השקילות של כל הסדרות שמתכנסות אליו. סדרה נוספת אפשרית:

$$\sqrt{2}=\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{x_1}.4}_{x_2}1}_{x_3}\ldots$$

באיזה מובן נרצה לדבר על כך ש־$X\subset X^{\star}$? אנחנו מזהים סדרה קבועה ב־X, או כל סדרה מתכנסת ל־$x\in X$, הן זהות.

2. נגדיר מטריקה ב־$X^{\star}$:

$$\mathrm{d}\left(\left[\{x_n\}\right],\left[\{y_n\}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\mathrm{d}\left(x_n,y_n\right)}_{\delta_n}$$

נטען ש־δ_n היא סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$, ולכן $\lim\delta_n$ קיים. צריך להראו תשעבור m,n גדולים מספיק,

$$\left|\delta_n-\delta_m\right|<\varepsilon$$

$$\left|\delta_n-\delta_m\right|\le\mathrm{d}\left(x_n,x_m\right)+\mathrm{d}\left(y_n,y_m\right)$$

בגלל ש־(x) ו־(y) הן סדרות קושי, אז אפשר לחסום אותן על ידי $\frac{\varepsilon}{2}$ החל ממקום מסויים, ואז

$$<\varepsilon$$

נניח כי $\{x_n\}\sim\{x_n'\}$ ו־$\{y_n\}\sim\{y_n'\}$. כדי להראות שהמטריקה מוגדרת היטב, נמדוד את

$$\left|\mathrm{d}\left(x_n,y_n\right)-\mathrm{d}\left(x_n',y_n'\right)\right|\le\underbrace{\mathrm{d}\left(x_n,x_n'\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}+\underbrace{\mathrm{d}\left(y_n,y_n'\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}\to 0$$

נטען ש־ $\mathrm{d}\left(\left[\{x_n\}\right],\left[\{y_n\}\right]\right)$ היא **מטריקה** ב־$X^{\star}$.

(א) $\mathrm{d}\left(x^{\star},y^{\star}\right)\ge 0$: מיידי. כי d (הרגילה) מטריקה, ולכן d הוא גבול של מספרים אי־שליליים

(ב) $\mathrm{d}\left(x^{\star},y^{\star}\right)=0\iff x^{\star}=y^{\star}$. הדרישה הזו זהה לכך ששתי סדרות הן שקולות, ואנחנו מזהים אותן.

(ג) $\mathrm{d}\left(x^{\star},z^{\star}\right)\le\mathrm{d}\left(x^{\star},y^{\star}\right)+\mathrm{d}\left(y^{\star},z^{\star}\right)$. בגלל ש־d(הרגילה) היא מטריקה אז

$$\mathrm{d}\left(x_n,z_n\right)\le\mathrm{d}\left(x_n,y_n\right)+\mathrm{d}\left(x_n,z_n\right)$$

נעבור לגבול ונקבל את אי שוויון המשולש עבור d החדש.

3. נותר לנו לבדוק שזוהי השלמה. -

(א) $X\subset X^\star$, $x\in X$ ו-

$$X^\star \ni \{x_n=x\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\mathrm{d}\left(\left[\{x_n=x\}_{n=1}^{\infty}\right],\left[\{y_n=y\}_{n=1}^{\infty}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}\left(x_n,y_n\right)=\mathrm{d}\left(x,y\right)$$

כלומר, X, על המטריקה שלה, מוכלת ב-$X^\star$.

(ב) $X^\star$ מרחב שלם: תהיא $\{x_n^\star\}$ סידרת קושי ב-$X^\star$.

$$\begin{aligned} x_1^\star &= \left\{x_1^1,x_1^2,\dots x_1^m,\dots\right\}\\ x_2^\star &= \left\{x_2^1,x_2^2\dots\right\}\\ &\vdots\\ x_n^\star &= \left\{x_n^1,x_n^2,\dots\right\}\end{aligned}$$

נגדיר סדרה: $y_n=x_n^n$. זוהי סדרה ב-X.

נטען ש-$\{y_n\}$ סדרך קושי (ב-X). כלומר,

$$\mathrm{d}\left(x_n^n,x_m^m\right)\le\underbrace{\mathrm{d}\left(x_n^n,x_n^m\right)}_{couchy,<\frac{\varepsilon}{2}}+\mathrm{d}\left(x_n^m,x_m^m\right)$$

עבור הגבול השני, קיבלנו את הגדרת מחלקת השקילות בין שתי הסדרות. לכן גם $\mathrm{d}\left(x_n^m,x_m^m\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. (שאלה שלי: למה זה אומר ש-$X^\star$ שלם?)

4. שלמות להראות ש-$\bar{X}=X^\star$ ו-$X^\star$ שלם.:

(א) נוכיח כי $\bar{X}=X^\star$. נקח נקודה ב-$x^\star\in X^\star$, ונראה שבכל סביבה של הנקודה הזו יש נקודה ב-x.

$$x^\star=\left[\{x_n\}\right],x_n\in X$$

כאשר הסדרה $\{x_n\}$ היא סידרת קושי. אזי בתוך $X^\star$, $x\in X$ מיוצג על ידי סדרת קושי המתכנסת ל-x.

נקבע $\varepsilon>0$, אז קיים N כך ש-$\mathrm{d}_x\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$, לכל $n,m>N$. נקח N כזה, ונקבע $n>N$. ו"נריץ" את m.

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{d}\left(x_n,x_m\right)\le\varepsilon$$

נחשב את המרחב בין $x_n^\star$, סדרה קבועה $\{x_n,x_n,x_n,\dots\}$ ל-$\{x_1,x_2,x_3,\dots\}=x^\star$.

$$\mathrm{d}_{x^\star}\left(x_n^\star,x^\star\right)\le\varepsilon$$

כלומר, מצאנו נקודה של X בסביבת ε של $x^\star$.

(ב) נוכיח כי $X^\star$ מרחב שלם. תהא $\{x_n^\star\}$ סדרת קושי ב-$X^\star$. (זו סדרה של סדרות)

$$\begin{aligned} x_1^\star &= x_1^1,x_1^2,\dots x_1^m,\dots\\ x_2^\star &= x_2^1,x_2^2,\dots,x_2^m\dots\\ &\vdots\\ x_n^\star &= \dots\end{aligned}$$

נבחר m_1 כך ש-

$$\mathrm{d}\left(x_1^k,x_1^\ell\right)<1$$

לכל $k,\ell > m_1$. נבחר m_2 כך ש-

$$\mathrm{d}\left(x_2^k, x_2^\ell\right)$$

לכל $m_2 < k,\ell$ וכו'. נבחר m_n כך ש- $\mathrm{d}\left(x_n^k, x_n^\ell\right) < \frac{1}{2^n}$, לכל $m_n < \ell, k$.
נתבונן בסדרה $\{y\} = x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_n^{m_n}, \dots = y_1, \dots y_n, \dots$ - זו סידרת קושי ב-X. $x^\star \sim \{y\}$ (לפי יחס השקילות בהגדרת $X^\star$).

$$\mathrm{d}\left(x_1^\star, y_1\right) < 1$$
$$\mathrm{d}\left(x_2^\star, y_2\right) < \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{d}\left(x_n^\star, y_n\right) < \frac{1}{2^n}$$

אזי, המרחק, ב-$X^\star$, בין הסדרות $\{y_n^\star\}$ ו-$\{x_n^\star\}$ (אלו הם סדרות של סדרות, $y_n^\star$ היא סדרה קבועה של y_n ואת $x_n^\star$ הגדרנו קודם) הוא קטן כרצוננו (החל ממקום מסויים).
סדרה $\{y_n\}$ מגדירה נקודה $y^\star$ ב-$X^\star$. אז $x_n^\star \xrightarrow[n\to\infty]{} y^\star$ (התכנסות ב-$X^\star$).

■

יחידות ההשלמה [7]

הגדרה 1.35 $f : X \to Y$ היא **איזומטריה** אם: f-חח"ע ועל,

$$\mathrm{d}_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) = \mathrm{d}_X\left(x_1, x_2\right)$$

משפט 1.36 אם $X^\star$, $X^{\star\star}$ השלמות של מרחב מטרי X, אז קיימת איזומטריה $f : X^\star \to X^\star$.

הוכחה: תהא $x^\star$ נקודה ב-$X^\star$. נגדיר $f\left(x^\star\right)$ על ידי: קיימת סידרת קושי $\{x_n\}$ ב-X, המתכנסת (ב-$X^\star$) ל-$x^\star$. x_n סדרת קושי, ו-$X^{\star\star}$ שלם, ולכן הסידרה $\{x_n\}$ מתכנסת (ב-$X^{\star\star}$).

$$\underbrace{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^{\star\star}}_{\in X^{\star\star}}$$

נגדיר $\boxed{f\left(x^\star\right) = x^{\star\star}}$.

- נראה ש-f מוגדרת היטב: נניח ויש x_n' המתכנסת לאותו הגבול, $x^\star$.

$$\mathrm{d}_X\left(x_n, x_n'\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

נניח ש-$x_n \to x^{\star\star}$ ו-$x_n' \to x^{\star\star\prime}$. נראה שהמרחק בין שתי הנקודות הוא קטן מכל ε נתון, כלומר, $x^{\star\star\prime} = x^{\star\star}$.

- נראה ש-f איזומטריה: נגדיר $x_n \to y^\star$ ו-$y_n \to y^\star$, סדרות קושי ב-X.

$$\mathrm{d}\left(x^\star, y^\star\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}\left(x_n, y_n\right)$$

כמו כן,

$$\mathrm{d}\left(f\left(x^\star\right), f\left(y^\star\right)\right) = \mathrm{d}\left(\underbrace{x^{\star\star}}_{\lim_{X^{\star\star}} x_n}, y^{\star\star}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(x_n, y_n\right)$$

[7] 27.04.2009

■

1.5 העתקות מכווצות וקיום נקודות שבת

הגדרה 1.37 $f:X\to Y$ היא **מכווצת** אם קיים $\alpha<1$ כך ש־

$$\mathrm{d}_Y\left(f\left(X_1\right),f\left(X_2\right)\right)\leq\alpha\mathrm{d}_X\left(x_1,x_2\right)$$

לכל $x_1,x_2\in X$.

דוגמה 16.1

•

$$[a,b]=X,Y$$

$f:[a,b]\circlearrowleft$, f גזירה, $f'(x)<1$ לכל $x\in[a,b]$.
f רציפה, קיום ה־max ב־$[a,b]$, קיים $\alpha<1$ כך ש־ $f'<\alpha$. לפי משפט לגרנז',

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\underbrace{f'\left(x_1+\Theta\Delta x\right)}_{<\alpha}\cdot\left(x_2-x_1\right)$$

ואכן, זו ההעתקה מכווצת.

• $f:[a,b]\circlearrowleft$. אם f מכווצת אז f רציפה: $\delta=\varepsilon$ בהגדרת הרציפות.

משפט 1.38 אם $f:X\to X$ מכווצ ו־X מרחב שלם, אז קיימת ויחידה, נקודה $x\in X$ כך ש־$f(x)=x$.

הוכחה: נוכיח קיום ויחידות:

• **יחידות**: נניח ומתקיים $f(x)=x$ ו־$f(y)=y$.

$$\alpha\mathrm{d}\left(x,y\right)\geq\mathrm{d}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)=\mathrm{d}\left(x,y\right)$$

בסתירה להנחה שההעתקה מכווצת ($\alpha<1$)

• **קיום**: נבחר $x_0\in X$. נגדיר

$$x_1=f\left(x_0\right),x_2=f\left(x_1\right),\ldots x_n=f\left(x_{n-1}\right)$$

– נטען שהסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי. עבור $n>m>N$, נמדוד:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(x_n,x_m\right)&=\mathrm{d}\left(f^n\left(x_0\right),f^m\left(\right)\right)\leq\alpha^m\mathrm{d}\left(f^{n-m}\left(x_0\right),x_0\right)\\&\leq\alpha^m\left[\mathrm{d}\left(f^{n-m}\left(x_0\right),f^{n-m-1}\left(x_0\right)\right)+\mathrm{d}\left(f^{n-m-}\left(x_0\right),f^{n-m-2}\left(x_0\right)\right)+\ldots+\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)\right]\\&\leq\alpha^m\left[\alpha^{n-m-1}\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)+\alpha^{n-m-2}\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)+\ldots+\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)\right]\\&=\alpha^m\left[\alpha^{n-m-1}+\alpha^{n-m-2}+\ldots+\alpha+1\right]\cdot\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)\\&=\alpha^m\cdot\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}\cdot\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)<\alpha^N\frac{1}{1-\alpha}\mathrm{d}\left(f\left(x_0\right),x_0\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

– X מרחב שלם $\Leftarrow$ $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$, ולכן $f(x)=x$.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f\left(x\right)$$

∎

למה 1.39 [8]אם f מכווצת, אז f רציפה.

הוכחה: (ללמה)
$x_n \to x$ $\{x_n\}$ סידרת קושי.

$$\mathrm{d}\left(f\left(x_n\right), f\left(x_m\right)\right) \leq \alpha \mathrm{d}\left(x_n, x_m\right) < \alpha\varepsilon$$

צריך להראות שאם $x_n \to x$ אז $f\left(x_n\right) \to f\left(x\right)$.
כלומר, לכל $\varepsilon > 0$, קיים N כך ש־$\mathrm{d}\left(x_n, x\right) < \varepsilon$ לכל $n > N$. נפעיל את f על שני הצדדים, ונקבל

$$f\left(x_n\right) =\to f\left(x\right)$$

כי

$$\mathrm{d}\left(f\left(x_n\right), f\left(x\right)\right) \leq_{(1)} \alpha \mathrm{d}\left(x_n, x\right) <_{(2)} \alpha\varepsilon < \varepsilon$$

כאשר (1) הוא בגלל ש־f מכווצת ו־(2) בגלל ש־$\{x_n\}$ סדרת קושי המתכנסת ל־x. ∎

1.5.1 שימושים

1. בעיית קושי:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x, y\right)$$

עם תנאי התחלה: $y\left(x_0\right) = y_0$. f מוגדרת ורציפה בתחום מסויים D, כך ש־ $\left(x_0, y_0\right) \in D$, נקודה פנימית של התחום. בנוסף, f ליפשיצית: היא מקיימת

$$\left|f\left(x, y\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \leq M\left|y_1 - y_2\right|$$

(א) בעיית קושי למערכות:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \qquad i = 1, \ldots, n$$

כאשר $y_i\left(x, 0\right) = y_{i0}$.

2. משוואת Fredholm: משוואות אינטגרליות.

$$f\left(x\right) = \lambda \cdot \int_a^b K\left(x, y\right) \cdot f\left(y\right) \mathrm{d}y + \varphi\left(x\right)$$

אזי

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1\left(x, y_1, y_2\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2\left(x, y_1, y_2\right)$$

או באופן כללי:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(\ldots\right)$$

[8] 04.04.2009

3. ערכים עצמיים: נגדיר פונקציה $y = F(x) = Ax + B$ כאשר A מטריצה ו־y, x, B וקטורים.
מטריקות ב־$\mathbb{R}^n$:

(א) $\mathbb{R}^n_\infty$: $\mathrm{d}(X,Y) = \max_i |x_i - y_i|$ אזי

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(y', y'') &= \max_i |y'_i - y''_i| \\
&= \max_i \left| \left(\sum_j a_{ij} x'_j + b_i \right) - \left(\sum_j a_{ij} x''_j + b_i \right) \right| \\
&= \max_i \left| \sum_j a_{ij} \left(x'_j - x''_j \right) \right| \\
&\le \max_i \sum_j |a_{ij}| \left| x'_j - x''_j \right| \\
&\le \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \cdot \mathrm{d}(x', x'')
\end{aligned}$$

אזי, אם $\left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) < 1$, אז f מכווצת. לכן, אז אפשר להשתמש במשפט נקודת השבת.
בפרט, אם $\sum_j |a_{ij}| < \frac{1}{n}$

תרגיל: לבדוק מה קורה עם $\mathbb{R}^n_1$ ו־$\mathbb{R}^n_2$.

2 מרחבים טופולוגיים[9]

הרעיון של מרחבים טופולוגיים מכליל את הנושא של מרחבים מטריים (שכוללים מרחבי פונקציות, מרחבים וקטוריים וכו').

במרחבים מטריים, הגדרנו קבוצה פתוחה על ידי מציאת כדור ברדיוס מסויים, שמוכל כולו בקבוצה, והגדרנו מושגים כמו סגור, קבוצה סגורה, קשירות, העתקות רציפות, גבולות, התכנסות, וכיוצא באלו.

כדי להגדיר את כל המושגים הללו במקרה של מרחבים טופולוגיים, נקח את מושג "**הקבוצה הפתוחה**" כמושג ראשוני, שאינו תלו במטריקה. נניח שיש קבוצות פתוחות, ובאמצעות מונחים של קבוצות פתוחות, נגדיר את המושגים האחרים.

2.1 קבוצות פתוחות

נניח שבמרחב X, קיבלנו משפחה של קבוצות, שלכל אחת מהן נקרא "**קבוצה פתוחה**". $\tau = \{U_\alpha\}$, כאשר כל U_α היא קבוצה פתוחה, $U_\alpha \subset X$. למשפחה מהסוג הזה קוראים **טופולוגיה**. כאן, **מרחב** הוא פשוט קבוצה כלשהו, ולאיבר במרחב נקרא "**נקודה**".

דוגמה 1.2 $X = \mathbb{R}$, ו־$U_\alpha = \bigcup_\beta (a_\beta, b_\beta)$, איחוד כלשהו של קטעים פתוחים שאינם נחתכים.

דוגמה 2.2 $X = \{a, b\}$, אזי $\{a\}, X, \emptyset$ יהיו קבוצות פתוחות

דוגמה 3.2 X־מרחב מטרי, τ מוגדרת על ידי קבוצות פתוחות: U פתוחה אל לכל $x \in U$, קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$B(x, \varepsilon) \subset U$.

דוגמה 4.2 X מרחב, τ מוגדרת כך שכל קבוצה ב־X היא פתוחה ("טופולוגיה דיסקרטית")

דוגמה 5.2 X מרחב כלשהו, $\tau = \{\emptyset, X\}$, והן בלבד.

[9] 07.05.2009

2.1.1 אקסיומות של קבוצות פתוחות

במרחבים מטריים נדרשנו להוכיח את התכונות הללו. כאן, אנחנו לוקחים אותן כהנחות יסוד

1. $X,\emptyset$ הן קבוצות פתוחות
2. עבור $\{U_\alpha\}$ קבוצות פתוחות,
   (א) אז איחוד כלשהו, $\bigcup_\alpha U_\alpha$, הוא קבוצה פתוחה.
   (ב) חיתוך סופי $\bigcap_{i=1}^n U_i$ של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה

הזוג (X,τ) הוא מרחב טופולוגי אם τ מקיימת את תכונות (1)ו־(2).

2.1.2 קבוצות סגורות

הגדרה 2.1 יהא (X,τ) מרחב טופולוגי, קבוצה $A\subset X$ נקראת **קבוצה סגורה**, אם $X\setminus A$ קבוצה פתוחה.

דוגמה 6.2 בטופולוגיה דיסקרטית, כל קבוצה היא גם פתוחה וגם סגורה.

דוגמה 7.2 בכל מרחב טופולוגי, $X,\emptyset$ הן גם פתוחות וגם סגורות.

הגדרה 2.2 סגור $\bar{A}$ של קבוצה $A\subset X$, הוא הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את A.
ניסוח חליפי: $\bigcap B$ כאשר B הן כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.

הגדרה 2.3 התכנסות לגבול: $x_n\to x$, אם לכל סביבה פתוחה U של xקיים N כל שלכל $N<n$, $x_n\in U$.

הגדרה 2.4 סביבה של x היא כל קבוצה פתוחה, המכילה את x.

במרחבים מטריים, הגדרנו סגור: $\bar{A}$, וגם מושג נוסף של קבוצה סגורה: A סגורה אם $x_n\in A$, $A \to x_n \Leftarrow$ $x\in A$.

למרחבים טופולוגיים, שתי ההגדרות של סגירות במרחבים מטריים, אינן שקולות. במקרה של מרחבים טופולוגיים, להתכנסות של סדרות אין משמעות גדולה כשם שהיתה במרחבים מטריים. ההגדרות המשמועתיות הן הגדרות (2.1) ו־(2.2).

דוגמה 8.2 $X=[x,b]$, $U\in\tau$ אם $X\setminus U$ היא סופית או בת־מניה, ונוסיף ל־τ גם את $\emptyset$.
מה המשמעות של $x_n\to x$? $x_n\to x$ אם לכל סביבה של x, $(u\in\tau, x\in u)$ קיים N כך ש־$x_n\in u$ לכל $n>N$.
בדוגמה שלנו, $x_n\to x$ אם ורק אם $x_n=x$ החל ממקום מסוים.

$$u=\left([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}x_n\right)\cup x$$

היא סביבה של x.
לפי הגדרה (2.1), קבוצה A היא סגורה אם ורק אם היא בת מניה או סופית.
לפי ההגדרה השניה, כל קבוצה A היא סגורה (כי היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה)

הגדרה 2.5 אוסף $\mathcal{B}$ של קבוצות ב־τ נקרא **בסיס** של טופולוגיה τ אם לכל x,U המקיימים $U\in\tau$ ו־$x\in U$, קיימת $B\in\mathcal{B}$ כך ש־ $x\in B$ ו־$B\subset U$

דוגמה 9.2 $X=\mathbb{R}$,

$$\mathcal{B}=\{(a,b)\,|a,b\in\mathbb{Q}\}$$

אם קבוצה פתוחה מכילה x כלשהו, אז קיים קטע סימטרי בגודל ε, עם קצוות רציואליים, מסביב ל־x.

דוגמה 10.2 $X = \mathbb{R}^n$, ובתור בסיס, נבחר כדורים

$$\mathcal{B} = \left\{ B(x,\varepsilon) \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon = \frac{1}{m} \right\}$$

עבור m קבוע.

אם $\mathcal{B}$ בסיס של τ, אז כל $U \in \tau$ אפשר לקבל כ־$U = \bigcup_\alpha B_\alpha$ כאשר $B_\alpha \in \mathcal{B}$:
נקח נקודה $x \in U$. $\mathcal{B}$ בסיס, ולכן קיימת סביבה של x, B_x, המוכלת ב־U ומכילה את x. נקח את האיחוד של של כל B_x, לכל $x \in U$, ונקבל קבוצה פתוחה שמוכלת ב־U(כי כל $B_x \subset U$) וגם מכילה את U (כי לכל $x \in U$ קיים $B_x \ni x$)

דוגמה 11.2 של מרחב טופולוגי שאינו מרחב מטרי־לינארי: $\mathbb{R}^\infty$. [במרחבים אלו, כן קיימת מטריקה, אבל היא לא לינארית, ראה טענה 2.7]
לכל n, $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב מטרי. בסיס לטופולוגיה של מרחב זה היא קבוצה $\mathcal{B} = \{B(x,\varepsilon)\}$ (או תיבה שצלעה ε: $\left|x_i - x_i^0\right| < \varepsilon$,$i = 1,2,3$, וכן הלאה). לבסיס אפשר להוסיף גם גלילים: אם מוחקים את אחד משלושת אי השוויונות, למשל

$$B\left(x^0;1,2;\varepsilon\right) = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \;\middle|\; \left|x_1 - x_1^0\right| < \varepsilon, \left|x_2 - x_2^0\right| < \varepsilon \right\}$$

או, $B\left(x^0;1;\varepsilon\right)$ יהיה התחום שבין שני מישורים במרחק ε זה מזה.
$\mathbb{R}^\infty$ הוא קבוצה סדורה של אינסוף x_i, כאשר כל $x_i \in \mathbb{R}^\infty$: $(x_1,x_2,\ldots)$. נגדיר איבר בטופולוגיה:

$$B\left(x^0;i_1,i_2,\ldots,i_k;\varepsilon\right)$$

כאשר $i_1,\ldots,i_k$ מספר סופי של אינדקסים,

$$= \left\{ (x_1,x_2,\ldots) \;\middle|\; \left|x_{i_j} - x_{i_j}^0\right| < \varepsilon, j = 1,2,\ldots k \right\}$$

הדרישה היחידה מטופולוגיה שלא מתקבלת באופן אוטומטי, מאוסף כל האיברים מהצורה $B\left(x^0;i_1,\ldots,i_k,\varepsilon\right)$, או $A \cap B \in \tau$ לכל $A,B \in \tau$, ואכן דרישה זו מתקבל בצורה די טבעית, כי איחוד של כל שתי "צינורות" שנמצא בטופולוגיה, גם הוא מאותה הצורה.

דוגמה 12.2 מרחב $C^\infty[a,b]$. אלו פונקציות על הקטע $[a,b]$,

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

הגזירות ברציפות אינסוף פעמיים.
המרחבים $C^r[a,b]$ הם הפונקציות הגזירות ברציפות r פעמיים על הקטע. $C[a,b] = C^0[a,b]$ הן הפונקציות הרציפות.
נבנה מטריקה על C^0:

$$\mathrm{d}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

ב־C^1 לא מספיק לעבור עם פונקציה כזו, כי יתכן ששתי פונקציות הן קרובות, אבל הנגזרות שלהן שונות זו מזו. לכן, למרחק בין הפונקציות נוסיף את המרחק

$$|f'(x) - g'(x)|$$

ובסביבת ε, חוסמים את שני הגדלים, המרחק בין הפונקציות והמרחק בין הנגזרות, על יד ε.
באופן דומה, ניתן להגדיר את המרחבים $C^r[a,b]$:

$$\mathrm{d}(f,g) = \max_{i=0}^{r}\left(\max_{i\in[a,b]}\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}(f(x) - g(x))\right)\right)$$

אזי, כדור ברדיוס ε יהיה

$$B(f,\varepsilon) = \left\{ g \in C^r \;\middle|\; \left|g^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)\right| < \varepsilon, i = 0,\ldots r \right\}$$

נגדיר טופולוגיה ב־$C^{\infty}[a,b]$, על ידי הבסיס הבא: הכדורים סביב כל פונקציה f , ברדיוס ε ,

$$B(f;m;\varepsilon)$$

כאשר $f\in C^{\infty}[a,b]$, $m\in\mathbb{R}$ ו־$\varepsilon>0$,

$$B(f;m;\varepsilon)=\left\{ g\in C^{\infty}\;\middle|\;\left|g^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)\right|<\varepsilon, i=0,\dots,m\right\}$$

זוהי טופולוגיה די בסיסית, אך לא ניתן להגדיר עליה מטריקה לינארית (ראה טענה 2.7)

הערה 2.6 בשתי הדוגמאות האחרונות, (X,τ) היה מרחב טופולוגי ווקטורי (או לינארי). כלומר, זהו מרחב טופולוגי שבין הנקודות בו יש פעולת חיבור וכפל בקבוע (כלומר, הן מהוות מרחב וקטורי).

טענה 2.7 בדוגמאות (11.2) ו־(12.2) , אין מטריקה $\mathrm{d}(x,y)$ המקיימת

$$\mathrm{d}(x+z,y+z)=\mathrm{d}(x,y)$$
$$\mathrm{d}(c\cdot x,c\cdot y)=c\mathrm{d}(x,y)$$

הן הדרישות הנוספות ממטריקה, עבור מרחבים וקטורים, המגדירה את הטופולוגיה שבדוגמא.
(על הדוגמאות הללו יש מטריקות, אבל הן לא "טבעיות" ללינאריות של המרחב)

2.2 רציפות

הגדרה 2.8 1. העתקה $f:X\to Y$ (X,Y, מרחבים טופולוגיים) נקראת **רציפה** אם לכל היא רציפה בכל נקודה.

2. $f:X\to Y$ **רציפה בנקודה** $x\in X$, אם לכל סביבה U של $f(x)=y$, קיימת סביבה $V\subseteq X$ של x כך ש־ $f(V)\subseteq U$.
הגדרה שקולה:

3. $f:X\to Y$ רציפה אם לכל קבוצה $U\subset Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

הוכחה: (לגרירה $(3)\implies(2)$)
נניח כי f רציפה, ותהא U־קבוצה פתוחה ב־Y. נוכיח כי $f^{-1}(U)$ פתוחה. כלומר, נראה שיש סביבה פתוחה של $x_0\in f^{-1}(U)$, המוכלת ב־$f^{-1}(U)$. נקבע $x_0\in f^{-1}(U)$. הרציפות של f לפי הגדרה (1), קיימת סביבה פתוחה V של x_0 כך ש־ $f(V)\subseteq U$. אבל אז, $V\subset f^{-1}(U)$. קיבלנו סביבה V פתוחה של x_0, המוכלת ב־$f^{-1}(U)$. ■

דוגמה 13.2 הכיוון ההפוך לא מתקיים. אם $V\subseteq X$ פתוחה, לא בהכרח מתקיים $f(V)$ פתוחה. לדוגמה, עבור

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{2}$$
$$f(x)\mapsto(x,0)$$

אינה מעבירה קבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה.

הערה 2.9 $f^{-1}(U)$ לא דורשת קיום העתקה הפוכה. זוהי קבוצה המוגדרת על ידי

$$f^{-1}(U)=\{x\in X|f(x)\in U\}$$

2.2.1 מרחבים וקטוריים (טופולוגיים)

מרחב כזה הוא מרחב עם שני מבנים בכפיפה אחת: מבנה אחד הוא המרחב הוקטורי: ניתן לחבר נקודות ולהכפיל בקבוע, ויחד עם זה, מוגדרת טופולוגיה על המרחב.
נדרוש שהפעולות הבסיסיות, חיבור וכפל במספר, יהיו פעולות רציפות.

הגדרה 2.10 מרחב ווקטורי־טופולוגי הוא

- מרחב X
- טופולוגיה τ על X
- מבנה של מרחב וקטורי על X: קיום פעולת חיבור:

$$\begin{aligned} + : X \times X &\to X \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

פעולת מכפלה בקבוע:

$$\begin{aligned} c_\times : X &\to X \\ x &\to c \cdot x \end{aligned}$$

כאשר $+, c_\times$ העתקות רציפות. ($c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ או מעל כל שדה K)

הערה 2.11 טופולוגיה במרחב מכפלה $X \times Y$ היא המכפלה $\tau_X \times \tau_Y$.

דוגמה 14.2 : $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, $\mathbb{R}^\infty$, $C^\infty[a,b]$.

הגדרה 2.12 נורמה, $\|\|$, על מרחב וקטורי־טופולוגי היא פונקציה

$$\|\| : X \to \mathbb{R}$$

כך ש־

$$\|c \cdot x\| = |c| \, \|x\| \qquad (c \in \mathbb{R}, x \in X)$$

וכן

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

ולכן $x \in X$, $\|x\| \ge 0$, ו־$\|x\| = 0 \iff x = 0$.

טענה 2.13 נורמה על מרחב וקטורי מגדירה מטריקה:

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$$

הערה 2.14 אם מטריקה מקיימת את הדרישות בטענה (2.7), אזי ניתן להגדיר נורמה על המרחב:

$$\|x\| = \mathrm{d}(x,0)$$

לכן, מרחבים שמוגדרת עלהם נורמה הם מרחבים וקטוריים, ומרחבים מטריים המקיימים את הדרישה הם מרחבים נורמיים.

הגדרה 2.15 מרחב שלם נורמי נקרא **מרחב בנך** (Banach)

ראינו שתי דוגמאות של מרחבים וקטוריים, טופולוגיים שאין עליהם נורמה.

הגדרה 2.16 קבוצה A במרחב נורמי X **חסומה** אם קיים $R \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$B = \{x : \|x\| < R\} \supset A$$

הגדרה 2.17 קבוצה A במרחב וקטורי־טופולוגי היא **חסומה** אם לכל סביבה U פתוחה של 0, קיים $R \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$R \cdot U \supset A$$

הערה 2.18 בכל מרחב נורמי, יש קבוצה פתוחה לא ריקה, חסומה.
למשל, בכל נורמה, נקח את $A = \{x \in X | \|x\| < \varepsilon\}$

טענה 2.19 ב־$\mathbb{R}^{\infty}$ [מדוגמה (11.2)], אין קבוצה כזו.

2.2.2 מספר מסקנות מרציפות[10]

מסקנה 2.20 f רציפה $\Longleftrightarrow$ לכל קבוצה $A \subset Y$ **סגורה**, $f^{-1}(A)$ סגורה ב־X.

הוכחה: (כיוון אחד) $A \subseteq Y$ סגורה. אזי $Y \setminus A$ פתוחה. $f^{-1}(Y \setminus A)$ גם היא פתוחה. אזי

$$f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y - A)$$

אזי אם $f^{-1}(Y \setminus A)$ פתוחה, אז $f^{-1}(A)$ סגורה. ■

מסקנה 2.21 תהא העתקה $f : X \to Y$ ו־$g : Y \to Z$. f ו־g העתקות רציפות. אז ההרכבה

$$f \circ g : X \to Z$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

גם היא רציפה.

תהא $f : X \to Y$, כאשר X, Y **קבוצות**. ותהא τ טופולוגיה על על Y. נגדיר טופולוגיה $f^{-1}(\tau)$ על X על ידי:
קבוצות פתוחות ב־X הן המקור, f^{-1} של קבוצות פתוחות ב־Y.

הגדרה 2.22 טופולוגיה τ_1 על X יותר **חלשה** (או **עדינה**) מטופולוגיה τ_2, אם $\tau_1 \subset \tau_2$, כלומר, כל קבוצה פתוחה ב־τ_1, היא קבוצה פתוחה ב־τ_2.
τ_2 **חזקה** (או גסה) יותר מ־τ_1.

זהו יחס של סדר חלקי בין טופולוגיות (לא לכל τ_1, τ_2 ניתן לקבוע מי חלשה יותר)

הערה 2.23 f רציפה בטופולוגיה $f^{-1}(\tau)$. אם f רציפה בטופולוגיה τ_x על X, אזי $f^{-1}(\tau) \subseteq \tau_x$.

הגדרה 2.24 $f : X \to Y$ (X, Y מרחבים טופולוגיים) נקראת העתקה **פתוחה** (סגורה) אם לכל קבוצה פתוחה (סגורה) $U \subseteq X$, $f(U)$ פתוחה (סגורה) ב־Y.

הערה 2.25 f פתוחה $\not\Longleftrightarrow$ f סגורה $\not\Longleftrightarrow$ f רציפה.
אין קשר בין רציפות של העתקה, פתיחות וסגירות

דוגמה 15.2 נקח $X = [0, 1]$ עם טופולוגיה רגילה. העתקה

$$f : X \to X$$
$$x \mapsto \frac{x}{2}$$

העתקה זו אינה העתקה פתוחה: עבור $X = A$ קבוצה פתוחה ב־A, $f(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, קבוצה סגורה. לעומת זאת, העתקה זו סגורה ורציפה.
עבור $X = [0, 1)$, העתקה f כזו היא העתקה פתוחה, שאינה סגורה.

---

[10] 18.05.09

טופולוגיה מושרית על תת מרחב יהא (X,τ_x) , ותהא $Y\subset X$. נגדיר טופולוגיה על Y: אזי

$$\tau|_y=\{U\cap Y|U\in\tau_x\}$$

אזי אם $f:X\to Z$ רציפה, גם $f|_Y:Y\to Z$ רציפה (בטופולוגיה τ_y)

2.3 הומאומורפיזמים

הגדרה 2.26 $f:X\to Y$ **הומאומורפיזם** אם f חד־חד־ערכית ועל, ו־f,f^{-1} רציפות.

הומאומורפיזם מהווה יחס שקילות. $X\overset{\text{homeo}}{\sim}Y$. בין מרחבים הומאומורפים, ניתן להעביר את כל התכונות הטופולוגיות. בטופולגויה, מתבוננים במרחבים טופלוגיים עד כדי הומאומורפיזם.

אם יש מבנה נוסף על המרחב, ולא רק מבנה טופולוגי, מבנים אלו יכולים להיות מאוד שונים זה מזה, אפילו שני המרחבים הומאומורפים.

דוגמה 16.2 קטע פתוח $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ו־$\mathbb{R}$. שני המרחבים הללו (עם הטופולוגיה הטבעית) הם הומאומורפים, עם ההומאומורפיזם

$$f^{-1}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$$
$$f^{-1}(x)=\tan(x)$$
$$f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(x)=\arctan(x)$$

לעומת זאת, מבחינת מטריקה, המרחבים שונים: $\mathbb{R}$הוא מרחב שלם, ו־$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$אינו שלם.

דוגמה 17.2 של מרחבים שאינם הומאומורפים: $\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{R}^2$.

הוכחה: נקח נקודה x_0 על הישר, ונסתכל על $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}=(-\infty,x_0)\cup(x_0,\infty)$. זהו איחוד של שתי קבוצות פתוחות זרות. המרחב נקרא מרחב לא־קשיר.

ב־$\mathbb{R}^2$, נסיר נקודה (x_0,y_0). המשלים של הנקודה הוא מרחב קשיר: אי אפשר לכתוב את המשלים של נקודה כאיחוד של שתי קבוצות זרות.

ניתן להראות שהתכונה הזו, בקשירות של משלים של נקודה, נשמרת תחת הומאומורפיזם, כי תכונה זו ניתן להגדיר במונחים טופולוגיים לחלוטין. ■

הגדרה 2.27 מרחב X נקרא **קשיר** אם לא קיימות 2 קבוצות פתוחות וזרות, לא ריקות, U_1,U_2 כך ש־$U_1\cap U_2=\varnothing$ ו־$U_1\cup U_2=X$.

דוגמה 18.2 במקרה הכללי, $\mathbb{R}^m$ ו־$\mathbb{R}^n$ לא הומאומורפים עבור $n\neq m$. כאן ההוכחה הרבה יותר מסובכת.

2.4 אקסיומת ההפרדה (Separation Axioms)

התיאוריה הכללית של מרחבים טופולוגיים לא ממש מעניינת. לכן מצמצמים את הדיון למרחבים שעונים על מספר אקסיומות.

האקסיומות מסומנות ב־$T_1,T_2,T_3,T_4,T_{4\frac{1}{2}},T_5$.

רוב הדוגמאות שרואים באנליזה שייכות לקבוצות שעונות על האקסיומות, וניתן לפתח מתמטיקה יותר מעניינת.

2.4.1 מרחב T_1

לכל $x\neq y$, קיימת סביבה U_y של y כך ש־ $x\notin U_y$.

דוגמה 19.2 למרחב X שאינו מקיים את T_1: $X=\{a,b\}$, ו־$\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$. אזי, סביבה פתוחה של b היא X, המכילה את A.

משפט 2.28 אם X מרחב־T_1, אז כל נקודה $x \in X$ היא קבוצה סגורה.
במילים אחרות: משלים של נקודה היא קבוצה פתוחה.

הוכחה: כדי להוכיח את המשפט, נוכיח שהמשלים של x, $X \setminus \{x\}$ פתוחה: תהא $y \in X \setminus \{x\}$. המרחב הוא T_1, ולכן קיימת סביבה פתוחה U של y, כך ש־$x \notin U$. אבל אז, $U \subseteq X \setminus \{x\}$, ולכן, $X \setminus \{x\}$ קבוצה פתוחה. ■

מסקנה 2.29 כל $x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n$, איחוד סופי של נקודות, הוא סגור.

T_1 שקולה למסקנה (2.29).

2.4.2 מרחב T_2 (מרחב האוסדורף)

לכל $x \neq y$, קיימות סביבות פתוחות U_x, U_y כך ש־ $U_x \cap U_y = \emptyset$

הערה 2.30 כל מרחב T_2 מקיים גם T_1

דוגמה 20.2 (למרחב T_1 שאינו T_2)
$X = [0,1]$, עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, X \setminus A | |A| \leq \aleph_0\}$ (קבוצה פתוחה היא המשלימה לקבוצה סופית או בת מניה)
אזי, נקודה היא קבוצה סגורה, הסביבה של y שאינה מכיל את x היא $U_y = X \setminus \{x\}$.

2.4.3 מרחב T_3

לכל נקודה x וקבוצה סגורה $x \notin A$ קיימות סביבות פתוחות U_a של A ו־U_xשל x כך ש־$U_x \cap U_A \neq \emptyset$.
בדרך כלל לוקחים את הדרישות $T_1 + T_3$. מרחבים המקיימים הן את T_1 והן את T_3 מכונים מרחבים **רגולריים**.

דוגמה 21.2 (למרחב T_2 שאינו T_3)
$X = [0,1]$. סביבות פתוחול של כל הנקודות מלבד מנקודת האפס, מוגדרות כרגיל, וסביבות של נקודת האפס הם

$$[0, \varepsilon) \setminus \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

אזי $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ היא קבוצה סגורה, ו־$x = 0$ לא ניתן להפרדה על ידי זוג סביבות פתוחות מהקבוצה A.

2.4.4 מרחב T_4, מרחב נורמלי[11]

מרחב T_1 שמקיים: לכל שתי קבוצות סגורות וזרות ($A \cap B = \varnothing$), קיימות סביבות פתוחות U_A, U_B של A ו־B , כך ש־ $U_A \cap U_B = \varnothing$

משפט 2.31 כל מטרי הוא נורמלי

הוכחה: תהיינה A, B קבוצות סגורות במרחב מטרי X, $A \cap B = \varnothing$. לכן, לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon_x > 0$ כך שלכל $y \in B$,, $\mathrm{d}(x,y) > \varepsilon_x$ (כי B סגור)
גם לכל $y \in B$ קיים ε_y כך שלכל $x \in A$, $\mathrm{d}(x,y) > \varepsilon_y$.
נגדיר:

$$U_A = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{\varepsilon_x}{4}\right)$$
$$U_B = \bigcup_{x \in A} B\left(y, \frac{\varepsilon_y}{4}\right)$$

אזי $U_A \cap U_B = \varnothing$: נניח בשלילה שהן אינן זרות, ובנחן $z \in U_A \cap U_B$.

[11] 21.05.2009, הושלם באדיבות עמי פז

אזי יש נקודה $x \in A$ ו־$y \in B$ כך ש־ $\mathrm{d}(x,z) < \frac{\varepsilon_x}{4}$ ו־$\mathrm{d}(y,z) < \frac{\varepsilon_y}{4}$. אבל

$$\mathrm{d}(x,y) < \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{\varepsilon_y}{4} = \frac{1}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

אבל בחרנו $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ כך ש־ $\mathrm{d}(x,y) > \varepsilon_y$ ו $\mathrm{d}(x,y) > \varepsilon_x$ ולכן קיבלנו סתירה. ■

מסקנה 2.32 כל תת קבוצה Y במרחב מטרי X היא מרחב נורמלי.

כי אם נצמצם את המטריקה של X על Y נקבל מרחב מטרי.

מסקנה 2.33 במקרה הכללי, לא כל תת קבוצה במרחב נורמלי כללי היא מרחב נורמלי (עם הטופולוגיה המושרית)

משפט 2.34 (Urysson, ניתן ללא הוכחה)
יהא X מרחב מטרי, A, B קבוצות סגורות וזרות ב־X. אז קיימת פונקציה

$$f : X \to R$$

רציפה המקיימת $f|_A = 0$ ו־$f|_B = 1$, ולכל נקודה אחרת

$$0 \le f(x) \le 1$$

תכונה זו גם גוררת קיום של T_4

2.5 אקסיומת מניה

יהיה פולינום $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. נגדיר בסיס למרחב

$$Z(P) = \{x | P(x) = 0\}$$

אלו יהיו קבוצות סגורות. ו־

$$U(P) = [0,1] \setminus Z(P)$$

קבוצות פתוחות.
בהנתן שתי קבוצות פתוחות, החיתוך בינהן הוא

$$U(p) \cap U(q) = [0,1] \setminus (Z(p) \cup Z(q)) = U(p \cdot q)$$

(כי $Z(p) \cup Z(q) = Z(p \cdot q)$). זה מרחב שראינו כבר (כאן, רק מספר סופי של נקודות, שם היה בן מניה)

הגדרה 2.35 מרחב עם בסיס בן מניה:
מרחב טופולוגי X כך שקיים בסיס B לטופולוגיה τ של X ו־B בן מניה.

דוגמה 22.2 כל מרחב מטרי ספרבילי. יהא X מרחב מטרי. תהא Y קבוצה בת מניה צפופה ב־X
נגדיר בסיס B עך ידי:

$$B = \left\{ B(X, \varepsilon) | x \in Y, \varepsilon = \frac{1}{n}_{(n=1,2,\ldots)} \right\}$$

במרחב טפולוגי, A צפופה אם בתוך כל קבוצה פתוחה יש לפחות נקודה אחת מ־A.

הגדרה 2.36 מרחב X מקיים אקסיומה II-num $\iff$ ל־X יש בסיס לטופולוגיה בן־מניה.[12]

דוגמה 23.2 כל מרחב מטרי ספרבילי.
אם $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ קבוצה צפופה ב־X, אז $\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_i, \frac{1}{n}\right) \mid i = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots \right\}$ הוא בסיס בן מניה לטופולוגיה ב־X.

[12] 25.05.2009

האם במרחב טופולוגי כללי X, לכל נקודה $x \in X$, קיימת קבוצה בת־מניה של סביבות B_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ של x, כך שלכל סביבה U של x, קיים n כך ש־ $B_n \subseteq U$.

הגדרה 2.37 מרחב טופולוגי X מקיים אקסיומה I-num, אם לכל $x \in X$, קימת קבוצה $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ של סביבות כנ"ל.

משפט 2.38 (Urysonn, לא נוכיח)
אם X מקיים II-num, אז X־מטריזבילי $\Longleftrightarrow$ X נורמלי (מקיים T_4)

2.5.1 דוגמה לשימוש ב־לשימוש ב־II-num

הגדרה 2.39 $\{U_\alpha\}$ כיסוי (פתוח) של X, אם כל U_α קבוצה פתוחה ו־

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = X$$

דוגמה 24.2 ב־$\mathbb{R}$ יש כיסוי מן הסוג $\left(\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon\right)$ כאשר $\varepsilon > 0$ קבוע ו־$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

השאלה היא מתי, לכל כיסוי, ניתן לבחור תת־כיסוי, סופי או בין מניה.

הגדרה 2.40 מרחב טופולוגי X נקרא **מרחב Lindelöf** אם מכל כיסוי $\{U_\alpha\}$ אפשר לבחור תת־כיסוי $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, בן מניה.

דוגמה 25.2 עבור הכיסוי של $\mathbb{R}$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, עבור ε קבוע ו־$x \in \mathbb{R}$, ניתן למצוא את תת הכיסוי שבדוגמא (24.2)

משפט 2.41 (לינדלהוף)
אם X מקיים II-num, אז X הוא מרחב לינדלהוף.

הוכחה: יהא $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה של X, ו־$\{U_\alpha\}$ כיסוי של X.
U_α קבוצה פתוחה ו־$\{B_n\}$ בסיס לטופולוגיה, לכן, $x \in U_\alpha$, קיים $n(x)$ כך ש־ $x \in B_{n(x)} \subset U_\alpha$. קבוצה $\left\{B_{n(x)}\right\}$ (לכל U_α ולכל x) היא כיסוי של X והוא לכל היותר בן מניה, כי יש מספר בין מניה של B_n. לכל $B_{n(x)}$, נבחר אחד מה־U_α כך ש־$B_{n(x)} \subseteq U_{\alpha(n(x))}$. אזי, ה־$U_{\alpha(n(x))}$ שבחרנו מגדירות כיסוי, כי הם מכילים את כל ה־$\{B_n\}$־ים שמגדירים בעצמם כיסוי. היה לנו מספר בן מניה של $\left\{B_{n(x)}\right\}$, ולכן עכשיו יש לנו מספר בן מניה של $\left\{U_{\alpha(n(x))}\right\}$, שהם תת כיסוי בן־מניה של $\{U_\alpha\}$. ■

- קיימים מרחבים שהם ספרביליים ומקיימים I-Num, שלא מקיימים בהכרח II-num (עבור מרחבים מטריים, I-num יחד עם ספרביליות מבטיחים II-num)
- קיימים מרחבים שהם ספרביליים, אבל קיים $Y \subseteq X$, עם טופולוגיה מושרית, כך ש־Y אינו ספרבילי.

דוגמה 26.2 למרחב כזה: מישור Niemytzky.
נקח

$$X = \mathbb{R}^2_{\geq} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq 0 \right\}$$

כאשר אנחנו רחוקים מציר X, נקח טופולוגיה רגילה. הבסיס לטופולוגיה יהיה כדורים פתוחים $B(x, \varepsilon)$ כך ש־ $\bar{B}(x, \varepsilon) \cap (x, 0) = \emptyset$ נותר לנו להשלים את הבסיס בסביבות ציר ה־$\hat{x}$: נקח כדורים פתוחים המשיקים לציר ה־$\hat{x}$, יחד עם נקודת ההשקה שלהם (למשל, $B((1,0), 1) \cup \{(1,0)\}$).
X ספרבילי: קבוצה $\mathbb{Q}^2_{\geq} = \{(x, y) \,|x, y \in \mathbb{Q}, y \geq 0\}$, צפופה ב־X.
נקח תת קבוצה $Y = \{(x, 0)\} \subset X$, הטופולוגיה המושרית על Y, היא טופולוגיה דיסקרטית: כל נקודה היא קבוצה פתוחה. לכן, Y אינו ספרבילי.

X מקיים I-num: סביב כל נקודה $x \in X$, נבחר סידרה $\{B_n\}$ של סביבות כך שלכל U פתוח, אם $x \in U$, קיים n כך ש־ $B_n \supset U$: אם x אינה על ציר ה־$\hat{x}$, אזי

$$B_n = B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

ואם $(x,0)$ על ציר ה־$\hat{x}$, אז נקח

$$B_n = B\left(\left(x, \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right) \cap \{(x,0)\}$$

X לא מקיים II-num: אין בסיס בן־מניה לטופולוגיה, כי לכל נקודה על ציר ה־ $\hat{x}$, צריך לבחור לפחות סביבה אחת בבסיס. על הציר יש רצף של נקודות, ולכן הבסיס אינו בן מניה.

2.6 מרחבים קומפקטיים

חזרה על חדוו"א:

משפט 2.42 (היינה־בורל)
מכל כיסוי של הקטע הסגור $[a,b]$, ניתן לבחור תת־כיסוי סופי.

לא מכל כיסוי של קטע פתוח ניתן לבחור תת־כיסוי סופי. זהו אחד ההבדלים החשובים בין קטעים פתוחים וסגורים. אנחנו מעוניינים במרחבים שהם מעין הרחבה של הקטע הסגור

במרחבים טופולוגיים:

הגדרה 2.43 מרחב טופולוגי X נקרא מרחב **קומפקטי** אם מכל כיסוי $\{U_\alpha\}$ של X אפשר לבחור תת כיסוי סופי
מרחב האוסדורף קומפקטי נקרא **קומפקט**.

דוגמה 27.2 כל קבוצה סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}^n$ היא קומפקט.

משפט 2.44 יהא X מרחב קומפקטי, ותהא $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset X$ קבוצה בת מניה (של נקודות שונות). אז ל־A קיימת נקודת הצטברות.

הגדרה 2.45 **נקודת הצטברות** p ב־Y אם בכל סביבה U של p, קיימת $Y \ni y \neq p$. (p לא חייבת להיות ב־Y)

הוכחה: נניח שאין נקודת הצטברו כזו. אזי, עבור k מסויים, נבחר $A_k \subseteq A$

$$A_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\} = \{x_i \in A | i \geq k\}$$

לכן,

$$A = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

ו־A_k קבוצה סגורה: נתבונן ב־$X \setminus A_k$, זוהי קבוצה פתוחה (למה?). ולכן כל A_k קבוצה סגורה.
כל חיתוך סופי, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$, משום שהוא מכיל, למשל, את הנקודה x_{n+1}, x_{n+2} וכן הלאה, אבל $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$.
נעבור למשלים של כל קבוצה A_k: $U_k = X \backslash A_k$, אזי U_k פתוחה.
מאחר ו־$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$, אז $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = X$. לכן $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ כיסוי של X. איחוד סופי של A_k אינו ריק, ולכן $\bigcup_{k=1}^{n} U_k \neq X$, ולכן בכיסוי $\{U_k\}$ **אין** תת־כיסוי סופי, בסתירה לקומפקטיות של X. ■

2.6.1 מרחבים קומפקטיים סדרתיים

הגדרה 2.46 מרחב X שמקיים: לכל קבוצה בת מניה יש נקודת הצטברות, נקרא **מרחב קומפקטי־סידרתי** (Countably-Compact or Sequentially compact)

הערה 2.47 מרחב קומפקטי־סידרתי אינו בהכרח קומפקטי

מסקנה 2.48 כל מרחב קומפקטי הוא קומפקטי סידרתי.

משפט 2.49 אם X מרחב עם בסיס בן־מניה (II-num), אז קומפקטי סידרתי $\Leftarrow$ קומפקטי.

הגדרה 2.50 משפחה $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_\alpha$ (לאו דווקא בת מניה) של קבוצות $A_\alpha \subset X$, מקיימת FIP (Finite Intersection property) אם לכל $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, מספר סופי של קבוצות, $\bigcap_{i=1}^k A_{\alpha_i} \neq \varnothing$.

משפט 2.51 X מרחב קומפקטי $\iff$ לכל משפחת FIP $\{A_\alpha\}$ של קבוצות סגורות, אז $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$

הוכחה: בכיוון אחד, זהה להוכחה של משפט 2.44.
בכיוון השני, אם $\{U_\alpha\}$ כיסוי של X, נגדיר $A_\alpha = X \setminus \{U_\alpha\}$, קבוצות סגורות. אזי

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \varnothing$$

ומאחר ויש תת כיסוי סופי של X, $\{A_\alpha\}$ לא FIP. קיימים $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, אזי $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ הוא תת כיסוי סופי.■

משפט 2.52 X מרחב טופולוגי, שלושת התנאים הנ"ל שקולים:

1. X מרחב קומפקטי סידרתי
2. מכל כיסוי $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ בן מניה[13], אפשר לבחור תת כיסוי סופי.
3. לכל משפחת־FIP , $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ משפחה בת מניה של קבוצות סגורות, $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \neq \varnothing$.

הוכחה: (למשפט 2.49, בהתבסס על המשפט האחרון)
X מקיים II-num , אז לפי משפט לינדלהוף, לכל כיסוי יש תת־כיסוי בן־מניה, ולפי (2), יש תת כיסוי סופי ■

הוכחה: (לשקילויות)

- $(2) \iff (3)$: $U_i \leftrightsquigarrow A_i = X \backslash U_i$, אזי , אם $\bigcap^n A_i \neq \varnothing$, $\bigcup^n U_i \neq X$
- $(1) \implies (3)$: נניח כי (1) לא מתקיים. כלומר, קיימת קבוצה $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, בת מניה, כך שלכל $x \in X$, קיימת סביבה U של x כך ש־$A \cap U \setminus \{x\} = \varnothing$.

  אז, $A_k = \{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ היא משפחה בת־מניה של קבוצות סגורות, המקיימות את FIP (למשל, $x_{n=1} \in \cap_{k=1}^n A_k$), אבל

  $$\bigcap_{k=1}^\infty A_k = \varnothing$$

  בסתורה ל־(3).
- $(3) \implies (1)$: תהיה $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ משפחת FIP של קבוצות סגורות. נגדיר $F_k = \bigcap_{i=1}^k A_i \,(\neq \varnothing)$ קבוצות סגורות. אזי

  $$A_1 = F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots \supset F_n$$

  ישנם כמה אפשרויות: או שהחל משלב מסויים, כל הקבוצות שוות, או, שיש תת־סידרה של הכלות־ממש

[13] זה ההבדל בין קומפקטיות רגילה: קומפקטיות מדברת על כל כיסוי פתוח

– אם החל ממקום מסויים, $F_n = F_{n+1} = F_{n+2} + \dots$, אז $\varnothing \neq \bigcap^n F_i = \bigcap^\infty F_i = \bigcap^\infty A_i$

– $\{F_n\}$ תהיה נקח תת סידרה "יורדת ממש" של $\{F_n\}$.

$$F_n \supsetneq F_{n+1} \supsetneq F_{n+2} \dots$$

אז, נבחר $x_n \in F_n \backslash F_{n+1}$. נסתכל על הסידרה $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, נקודות שונות. כלומר, קיימץ נקודה x כך שלכל סביבה U של x, קיים n: $x \neq x_n \in U$. , אז $x \in F_n$ (לכל n). אבל

$$\bigcap^\infty F_n = \bigcap^\infty A_n \implies x \in \bigcap^\infty A_n \implies \bigcap^\infty A_n \neq \varnothing$$

■

2.6.2 תתי קבוצות של מרחבים קומפקטיים[14]

משפט 2.53 כל תת־קבוצה סגורה Y של מרחב קומפקטי, גם מהווה מרחבים קומפקטיים.

הגדרה 2.54 הטופולוגיה המושרית על Y,

$$\tau_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$$

משפט 2.55 נבדוק ש־Y מקיים את התנאי שבמשפט (2.51): לכל משפחת FIP של קבוצות סגורות, גם חיתוך אינסופי אינו ריק.

הוכחה: תהא $\{A_\alpha\}$ משפחת FIP של קבוצות סגורות ב־Y. A_α סגורה ב־Y, ולכן המשלים,

$$Y \backslash A_\alpha = U_\alpha \cap Y$$

כאשר U_α קבוצה פתוחה ב־X.

למה 2.56

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_\alpha\right) \cap Y \neq Y \tag{$\star\star$}$$

הוכחה: (ללמה)

מאחר ו־A_α היא FIP, כל חיתוך סופי שלהם אינו ריק, ולכן, איחוד של המשלימים, אנו כל Y:

$$\bigcup_{i=1}^{n} (Y \backslash A_{\alpha_i}) \neq Y$$

ולכן,

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \neq X$$

(נשים לב שלא מדובר על איחוד של כל U_{α_i} אלא רק של המשלימים ל־A_α: משום שקיימת נקודה אחת של Y (לפחות) שאינה באיחוד:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_\alpha\right) \cap Y \neq Y$$

[14] 04.06.2009

ולכן, בפרט, זה אינו כיסוי של X, כי

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_\alpha\right)\cap Y&=\bigcup_{i=1}^{n}(Y\backslash A_{\alpha_i}\cap Y)\\&=Y\backslash\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_{\alpha_i}\right)}_{\neq\varnothing,FIP}\\&\neq Y\end{aligned}$$

■

(המשך הוכחת המשפט)

יש לנו משפחה של קבוצות פתוחת ב־X, U_α, כך שכל U_α מתאימה ל־A_α. אנחנו רוצים להוכיח שחיתוך אינסופי של $\{A_\alpha\}$ הוא לא ריק. כלומר, $Y\backslash\bigcap A_\alpha=\bigcup U_\alpha\neq\varnothing$.

$\{U_\alpha\}$ אינו כיסוי של X: נניח שהוא כן כיסוי. X הוא קומפקטי ולכל כיסוי, חייב להיות תת־כיסוי סופי, והוכחנו שאין זה כך.

נקח את $(X\backslash Y)\cup\{U_\alpha\}$ כאשר $(X\backslash Y)$ פתוח כי Y סגורה. זה **לא** כיסוי של X, כי $\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}\right)$ אינם כיסוי של Y, לפי $(\star\star)$, ולכן, לפי הקומפקטריות של X, זה אינו כיסוי של X.

לכן,

$$Y\neq\bigcup_\alpha U_\alpha=\bigcup_\alpha(Y\backslash A_\alpha)=Y\backslash\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)$$

ולבסו, קיבלנו

$$Y\backslash\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)\neq Y$$

■

מסקנה 2.57 אם X קומפקט (קומפקטי+האוסדורף) ו־$Y\subset X$ סגורה, אז Y קומפקט.

משפט 2.58 X מרחב האוסדורף, $K\subset X$, ו־K קבוצה קומפקטית (עם טופולוגיה מושרית) אז K סגורה ב־X.[15]

הוכחה: רוצים להוכיח, כי לכל $y\notin K$, קיימת סביבה (פתוחה) $V\ni y$ כך ש־ $V\cap K=\varnothing$.

לכל $x\in K$, קיימת סביב U_x וסביבה V_x של y, כך ש־$U_x\cap V_x=\varnothing$ (כי X האוסדורף). אז, סביבות $\{U_x\}_{x\in K}$ מהוות כיסוי ל־K. K קבוצה קומפקטית, ולכן קיים תת־כיסוי סופי, $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$ של K. נגדיר $V=\cap_{i=1}^{n}V_{x_i}$, אזי

$$\varnothing=V\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}\right)$$

אבל $\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i}$ הוא כיסוי של K, ולכן בנינו V כך ש־ $V\cap K=\varnothing$ (V קבוצה פתוחה כי היא חיתוך **סופי** של קבוצות פתוחות, ולכן נזקקנו לקומפקטיות) ■

2.6.3 נורמליות

משפט 2.59 כל **קומפקט** (מרחב קומפקטי והאוסדורף) הוא מרחב נורמלי (T_4)

[15] 08.06.09

הוכחה: צריך להראות שעבור שתי קבוצות סגורות, $X,Y\in K$ ומקיימות: $X\cap Y=\varnothing$, K קומפקט, קיימות סביבות פתוחות, $Y\subset V$, $X\subset Y$ כך ש־ $U\cap V=\varnothing$.

כבר הוכחנו שלכל קבוצה קומפקטית X ונקודה $y\in Y$, קיימת סביבה V_y של y וסביבה U_y של הקבוצה X, כך ש־

$$U_y\cap V_y=\varnothing$$

לכן, איחוד של $\{V_y\}_{y\in Y}$ הוא כיסוי של y, אבל Y־קבוצה קומפקטית (קבוצה סגורה במרחב קומפקטי) ולכן, קיים תת כיסוי סופי, $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{m}$, של Y.

נגדיר $Y\subset V=\bigcup_{i=1}^{m}V_{y_i}$ ו־ $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$.

לכל נקודה ב־Y מצאנו שתי סביבות: סביבה אחת של הנקודה עצמה וסביבה שניה שמכילה את X, אבל לא חותכת אותה.

אזי

$$U\cap V=\varnothing$$

■

2.6.4 העתקות על מרחבים קומפקטיים

משפט 2.60 יהא K מרחב קומפקטי, Y מרחב טופולוגי ו־$f:K\to Y$, העתקה רציפה.

אזי $f(K)$ קבוצה קומפקטית ב־Y.

הוכחה: יהא $\{U_\alpha\}$ כיסוי של $f(K)$ ב־Y. נסתכל על $V_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)$[16]. V_α קבוצה פתוחה ב־K, ו־$\{V_\alpha\}$ כיסוי של K.

K קומפקטי, לכן קיים תת כיסוי סופי, $\{V_i\}_{i=1}^{n}\subset\{V_\alpha\}$, ולכן $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ הוא תת כיסוי סופי של $f(K)$. ■

משפט 2.61 K קומפקטי, Y מרחב האוסדורף ו־$f:K\to Y$ העתקה רציפה. נניח כי f חח"ע ועל, אז f הומואמורפיזם.

הוכחה: רוצים להראות ש־f^{-1} רציפה, כלומר, לכל קבוצה $U\subset K$ קבוצה פתוחה, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)=f(U)$ פתוחה ב־Y.

אזי $F=K\backslash U$ קבוצה סגורה במרחב קומפקטי K, ולכן F קבוצה קומפקטית, ההעתקה f רציפה, ולכן $f(F)$ קבוצה קומפקטית. ב־Y. $f(F)$ קומפקטית במרחב האוסדורף Y, ולכן $f(F)$ סגורה ב־Y. ■

משפט 2.62 $f:K\to\mathbb{R}$, f רציפה ו־K קומפקטי, אז f חסומה ומקבלת ערך מינימלי ב־K ומקסימלי ב־K.

הוכחה: $f(K)$ קבוצה קומפקטית ב־$\mathbb{R}$ ולכן $f(K)$ חסומה וסגורה, ו־$\inf f(K)\in f(K)$ ו־$\sup f(K)\in f(K)$.
■

2.6.5 אידיאלים ב־$\mathcal{C}(K)$

$$\mathcal{C}(K)=\{\,f:K\to\mathbb{R}\mid f\text{ continuous}\,\}$$

אז מתקיים,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

אם f ו־g רציפות, אז גם סכומם רציף. ניתן להגדיר גם מכפלה בין פונקציות (באופן נקודתי)

$$(f\cdot g)(x)=(f(x))\cdot(g(x))$$

[16] יש מקור רק לנקודות שב־$U_\alpha\cap K$

וגם מכפלתן של פוקנציות רציפות היא רציפה.

יש לנו היפוך לחיבור, $(-g)$ $f-g=f+(-g)$, אבל אין היפוך למכפלה: לא בהכרח לכל f קיימת g כך ש־ $f\cdot g=1$.

הפעולות הללו קומטטיביות, דיסטריביוטביות, אסוציאטיביות וכו'.

נקבע $x\in K$ ונגדיר:

$$I_x=\{\, f\in\mathcal{C}(K)\mid f(x)=0\,\}$$

I_x סגור תחת חיבור: עם $f,g\in I_x$ אז $f+g\in I_x$.

$0\in I_x$, ולכן, עם $f\in I_x$ אז גם $-f\in I_X$.

עבור f,g, אם $f\in I_x$ ו־$g\in\mathcal{C}(K)$, $f\cdot g\in I_X$.

הערה 2.63 פונקציית האפס היא הפונקציה הקבועה היחידה ב־I_x.

הגדרה 2.64 **אידיאל** הוא מבנה עם סגירות לגבי פעולה אחת (חיבור, במקרה שלנו) ו"סגירות יותר חזקה" לפעולה שניה.

באמצעות הנקודה x, בנינו את $I_x\subset\mathcal{C}(K)$

בכיוון השני: נניח שקיים $I\subset\mathcal{C}(K)$, המקיים את תכונות האידיאל: סגירות וכו'. האם אפשר, באיזשהו דרך, למצוא נקודה x_I כך ש־ $I_{X_I}=I$.

לא כל אידיאל I הוא מהצורה I_X לנקודה מסויימת $x\in K$, לדוגמה: $I_{xy}=\{f\in\mathcal{C}(K)\,|f(x)=f(y)=0\}$.

הגדרה 2.65 אידיאל I הוא **מקסימלי**, אם אין אידאל $I'\neq\mathcal{C}(K)$, כך ש־ $I\subset I'$.

טענה 2.66 כל אידיאל מקסימלי הוא מהצורה I_x, $x\in K$.

למה 2.67 האידיאל I_x הוא מקסימלי.

הוכחה: (ללמה)

נניח שהאידיאל I_x מוכל באידיאל I, ב־$\mathcal{C}(K)$.

נניח ו־$f\in I\backslash I_x$, אזי $f(x)=c\neq 0$. נראה שהפונקציה הקבועה c $g(x)\equiv c$, ב־I:

$$f(x)-g(x)=f(x)-c=0\implies(f-c)\in I_x$$

לכן $f\in I$ ו־$f-g\in I_x$, וכן $I_x\subset I$. נחסיר את $f,f-c\in I$, אזי

$$g=f-(f-c)\in I$$

נטען: אם I מכיל פונקציה קבועה, אז I הוא כל המרחב: מחסירים מ־g קבוע, או משהו... ■

הוכחה: (לטענה)

נניח ו־I הוא אידאל מקסימלי. רוצים להוכיח כי קיימת נקודה $x\in K$, כך ש־$f(x)=0$ לכל $f\in I$.

נניח כי אין x כזו, אז לכל $x\in K$, קיימת פונקציה $f_x\in I$, כך ש־ $f_x(x)\not>0$.

f_x רציפה, ולכן קיימת סביבה U_x כך ש־$f_x(U_x)>0$. לכל נקודה $x\in K$ קיבלנו פונקציה כזו וסביבה כזו. אזי $\{U_x\}_{x\in K}$ הוא כיסוי של K. K קומפקטי, ולכן קיים תת כיסוי סופי $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$, נגדיר

$$I\ni f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}^2>\varepsilon>0$$

על כל K, כי תמיד, לפחות אחת מהפונקציות הללו שונה מאפס (או, $f^2>0$).

מסקנה 2.68 קיימת $f\in I$ כך ש־$f(x)>0$ לכל $x\in X$.

אז $\frac{1}{f(x)}$ מוגדרת בכל נקודה ($f(x) \neq 0$ לכל x) ורציפה. כלומר, $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}(x)$, ולכן הפונקציה

$$\underbrace{f(x)}_{\in I} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\in C(x)} = \mathbb{I} \in I$$

ואם האידיאל מכיל קבוע השונה מאפס, אז $I \neq \mathcal{C}(x)$. קיבלנו סתירה: כי אנחנו מעוניינים רק באידיאלים מקסימליים, כלומר, אידיאלים ששונים מהאלגברה עצמה.

■

הקומפקטיות אפשרה לנו לחבר מספר סופי של פונקציות. לו היינו מחברים מספר אינסופי של פונקציות, זה היה יותר מסובך..

תרגיל 2.69 $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$. מהם הפונקציות הרציפות $\mathcal{C}(X)$? מהם האידיאלים?[17]

2.6.6 קומפקטיות של מרחבים מטריים

במרחב האוקלידי, כל קבוצה סגורה וחסומה היא מרחב קומפקטי.

הגדרה 2.70 X מרחב מטרי, ו־$0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. קבוצה $A \subset X$ נקראת **רשת** ε**,** אם לכל $x \in X$, קיימת $a \in A$ כך ש־ $\mathrm{d}(x, a) < \varepsilon$.

דוגמה 28.2 $X = [0, 1]^n$, קוביה במימד האוקלידי ממימד n. עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, נחלק את הקוביה לשמונה קוביות (עבור $n = 3$), שצלען $\frac{1}{2}$, ונקח את המרכז של כל קוביה. אורך האלכסון הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ולכן, המרחק המקסימלי בין נקודה שבמרכז קוביה, הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

לכל ε ולכל n, ניתן לחלק את X לקוביות שצלען 2^m, עבור m מסויים, כך שמרכזיהן יהוו ε־רשת.

הגדרה 2.71 מרחב מטרי X נקרא **חסום לחלוטין**, אם לכל $\varepsilon > 0$, קיימת רשת־ε סופית.

משפט 2.72 X חסום לחלוטין $\Leftarrow$ X חסום

הוכחה: נקבע את ε. אז המרחק המקסימלי בין כל שתי נקודות הוא חסום: עבור n כדורים שנותנים לנו n־רשת, ורדיוס מינימלי של כדור של 2ε, הזי המרחק בין 2 נקודות הוא לכל היותר $n \cdot 2\varepsilon$ ■

בכיוון השני לא מתקיימת גרירה: אם X חסום $\not\Leftarrow$ X חסום לחלוטין.

דוגמה 29.2 $X = \ell^2$: סדרות כך שרק מספר סופי של איברים שונה מאפס. ב־ℓ^2 יש איברים מהצורה $e_i = \left(0, 0, \ldots, 0 \underbrace{, 1,}_{i\text{th place}} 0, \ldots 0\right)$.

$$\mathrm{d}(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x'_i)^2}$$

אזי, לפי הגדרה זו,

$$\mathrm{d}(e_i, e_j) = \sqrt{2}$$

נתבונן בקבוצה $A = \{e_i\}$. קבוצה זו חסומה: כל איבה נמצא במרחק 1 לכל היותר מסידרת האפס. אזי, $diam(A) = \sqrt{2}$. אז עבור כל $\varepsilon < \sqrt{2}$, לא קיימת ε רשת בקבוצה.

הערה 2.73 ב־$\mathbb{R}^n$, מרחב X חסום $\iff$ הוא חסום לחלוטין.

[17] 11.06.2009

מסקנה 2.74 אם X (מרחב מטרי) חסום לחלוטין, אז X ספרבילי, ובפרט, X מרחב בעל בסיס בן מניה[18]

משפט 2.75 יהיה X מרחב מטרי, אז X קומפקטי $\iff$ X שלם ו־X חסום לחלוטין

מסקנה 2.76 למרחב מטרי X, קומפקטיות $\iff$ קומפקטיות סידרתית. **הוכחה:** (למסקנה) X קומפקטי סידרתי. לפי המשפט, X חסום לחלוטין, ולפי (2.74), X הוא II-num. למרחב שמקיים II-num, קומפקטיות סידרתית גוררת קומפקטיות רגילה. ■

הוכחה: (למשפט) ראשית, נוכיח שמרחב הוא קומפקטי סידרתי אם ורק אם הוא שלם וחסום לחלוטין, וראינו, לפי המסקנה, שבמרחבים מטריים, קומפקטיות סידרתית גוררת קומפקטיות רגילה.

נוכיח כי אם X קומפקטי סידרתי, אז הוא שלם וחסום לחלוטין.

שלמות: נניח ש־X לא שלם. אזי קיימת סידרת קושי שאינה מתכנסת: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ללא נקודת גבול. לקבוצה זו, $A = \{x_n\}$, היא קבוצה אינסופית ללא נקודת הצטברות: אם לסידרת קושי יש נקודת הצטברות, אז היא נקודת הגבול. [נניח שיש לנו נקודת הצטברות, והסדרה היא סידרת קושי. יש נקודת הצטברות, ולכן קיימת תת סידרה $\{x_{n_i}\}$, המתכנסת אליה. אבל מרחק בין כל שתי נקודות בסדרה שואף ל־0, $|x_i - x_j| \le \frac{\varepsilon}{2}$. תהא x נקודת הצטברות, אזי לכל x_i, x_j עבור i, j גדולים מספיק, $|x_j - x| < \varepsilon$] לכן, X אינו קומפקטי סידרתי, בסתירה להנחה.

חסום לחלוטין: נניח ש־X אינו חסום לחלוטין. כלומר, קיים $\varepsilon > 0$, כך שאין רשת־ε סופית ב־X. נבחר $x_1 \in X$, ובגלל שאין ε־רשת סופית, קיימת נקודה הנמצא במרחק הגדול מ־ε מ־X, כלומר , קיימת $x_2 \in X$ כך ש־ $\varepsilon < \mathrm{d}(x_1, x_3)$. מאותה סיבה, קיימת נקודה x_3 כך ש־ $\mathrm{d}(x_2, x_3) >, \mathrm{d}(x_1, x_3) > 0$, וכן הלאה: קיימת $x_{n+1} \in X$ כך ש־ $\varepsilon < \mathrm{d}(x_i, x_{n+1})$ לכל $i = 1, \dots n$.

לקבוצה $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ אין נקודות הצטברות, לכן X אינו קומפקטי סידרתי, בסתירה להנחה.

בכיוון השני, נוכיח כי אם X שלם וחסום לחלוטין, אז X קומפקטי סידרתי. נקבע סידרה $\{x_1, x_2, \dots\}$. נרצה להוכיח שלסידרה זו יש נקודת הצטברות. ב־X קיימת רשת־1 סופית: $A_1 = \{a_1, a_2, \dots a_{n_1}\}$. אזי

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} \bar{B}(a_j, 1)$$

הוא כיסוי **סופי** של X. כלומר, לכן, קיים i (נניח בלי הגבלת הכלליות $i = 1$) כך שב־ $\bar{B}(a_1, 1)$ יש אינסוף נקודות של הסדרה $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

לכל ε קיים ε־רשת סופי. לכן, לכל ε נוכל למצוא כדור כזה שבו אינסוף נקודות מ־$\{x_n\}$. מהשלמות, אפשר לבנות סידרה של כדורים סגורים, שאחד יושב בתוך השני ורדיוסיהם שואפים לאפס. נקודה זו תהיה נקודת הצטברות של הסדרה. ■

מסקנה 2.77 קבוצה A במרחב מטרי שלם. A בעלת סגור $\bar{A}$ קומפקטי, $\iff$ A חסומה לחלוטין.

הוכחה: כל קבוצה סגורה במרחב מטרי שלם היא שלמה, בתוספת למשפט האחרון.

הערה 2.78 נקודות ברשת־ε בהוכחה אפשר לבחור ב־A (במקום $\bar{A}$).

■

2.6.7 משפט ארצלה

משפט 2.79 קבוצה $\mathcal{F} \subset C[a,b]$[19] של פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$, בעלת סגור $\bar{\mathcal{F}}$ קומפקטי, אם ורק אם היא מקיימת:

1. $\mathcal{F}$ חסומה במידה אחידה (Uniformly bounded)
2. $\mathcal{F}$ רציפה במידה אחידה (Equicontinuous)

הגדרה 2.80 $\mathcal{F}$ **חסומה במידה אחידה** אם קיים $M > 0$, כך שלכל $x \in [a,b]$ ולכל $f \in \mathcal{F}$ מתקיים: $|f(x)| < M$

[18] 18.06.2009

[19] עם המטריקה $\mathrm{d}(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

הגדרה 2.81 $\mathcal{F}$ **רציפה במידה אחידה,** אם לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ לכל $|x_1 - x_2| < \delta$ ב־$[a,b]$ ולכל $f \in \mathcal{F}$.

הוכחה:

נניח כי $\mathcal{F}$ **בעלת סגור קומפקטי.** נקבע $\varepsilon > 0$. אז קיימת רשת $\frac{\varepsilon}{3}$ סופית, ב־$\mathcal{F}$ (לפי מסקנה והערה (2.78)). נסמן את הרשת ב־$\{f_1, \ldots, f_n\}$. כל פונקציה $f \in \mathcal{F}$ היא גם פונקציה ב־$C[a,b]$, רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן חסומה בו: לכל f קיים M_f כך ש־ $|f(x)| < M_f$. אזי, לכל $f \in \mathcal{F}$ מתקיים:

$$|f(x)| < \max_{i=1,\ldots n} M_{f_i} + \frac{\varepsilon}{3} = M$$

לכן, הקבוצה חסומה במידה אחידה.

כל פונקציה $f \in \mathcal{F}$ רציפה בקטע $[a,b]$, ולכן רציפה בו במידה שווה. לכן, לכל $\varepsilon > 0$, קיימת δ_i כך ש־

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \,\forall\, |x_1 - x_2| < \delta_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

נסמן $\delta = \min_{i=1,\ldots n} \delta_i$ אז לכל $f \in \mathcal{F}$, קיימת f_i כך ש־ $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. אזי,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)|$$

כל אחד מהביטויים חסום על ידי $\frac{\varepsilon}{3}$, ולכן,

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ולכן f רציפה במידה אחידה.

נראה ש־$(1) + (2)$ גורר ש־ $\mathcal{F}$ **בעלת סגור קומפקטי.** במקום להראות ש־ $\mathcal{F}$ בעלת סגור קומפקטי, נראה שהיא חסומה לחלוטין. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$, צריכים לבנות ε־רשת סופית ב־$\mathcal{F}$. נקבע $\varepsilon > 0$. לפי (1) ו־(2), יש לנו M החוסמת כל $f \in \mathcal{F}$ ו־δ כך ש־ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ לכל $f \in \mathcal{F}$ ו־$|x_1 - x_2| < \delta$.

נסתכל על המלבן $[a,b] \times [-M, M]$. כל הפונקציות ב־$\mathcal{F}$ הן רציפות ומוכלות ממש בתוך המלבן.

נבחר חלוקה של הקטע $[a,b]$: $a = x_0$ ו־ $x_0 < x_1 < x_2, \ldots < x_{n-1} < x_n$ יהיו נקודות ביניים. $b = x_n$.

הקטע יקצה מלבן על המישור שצלעו האחת היא באורך $|a-b|$ וצלעו השניה $2M$ (הקטע $[-M, M]$) .

האורך המקסימלי של קטע בחלוקה של $[a,b]$ יהיה $|x_i - x_{i-1}| < \delta$. נבחר גם חלוקה של הקטע $[-M, M]$ כך ש־

$$-M = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = M$$

כך ש־ $|y_j - y_{j-1}| < \frac{\varepsilon}{5}$.

נקרב כל פונקציה $f \in \mathcal{F}$ על ידי פונקציה פיליגונאלית: נבנה פונקציות שלכל x בחלוקה, מקבלות y מהחלוקה. כלומר, כל הפונקציות עוברות בקודקודים של החלוקה שבנינו על $[a,b] \times [-M, M]$, ובין הקודקודים, הן משתנות לינארית. יש מספר סופי של פונקציות כאלו: אם אנחנו יודעים את הערכים של הפונקציה בתוך x_i (שנקבע מתוך רשימה סופית של y_j־ים), אז אנחנו קובעים באופן יחיד פונקציה כזו.

נרצה לקרב כל פונקציה מ־$\mathcal{F}$, עד כדי ε, לפונקציה פוליגונלית.

נרצה לקרב את $f \in \mathcal{F}$ על ידי פונקציה פוליגונלית g: נבנה את g כך שלכל $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$|f(x_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

(ו־ $g(x_i) = y_j$, עבור y_j כלשהו). נראה ש־g מקרבת את f כנדרש: שלכל x,

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

כלומר, $\mathrm{d}_{c[a,b]}(g, f) < \varepsilon$ וכל הפונקציות הפוליגונליות מגדירות ε־רשת סופית.

$$|f(x) - g(x)| \leq$$

כל x הוא בין $x_{i-1} \le x \le x_i$ עבור i כלשהו, ולכן,

$$\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)|$$

$|x - x_i| < \delta$, ולכן $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$. את g בחרנו כך שבכל נקודה x_i , $|f(x_i) - g(x_i)| \le \frac{\varepsilon}{5}$.

$$\le \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

נותר לנו להסביר למה $|g(x_i) - g(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}$. בין כל הפונקציות הפוליגונליות, זה אינו חסם מספיק, אבל השיפוע המקסימלי של f הוא לכל היותר במלבן אחד (שיפוע של $\frac{\varepsilon/5}{\delta}$). לכן, g יכולה לעלות או לרדת לא יותר משלושה מלבנים, או $\frac{\varepsilon}{5}$. ■

הכללה של משפט ארצה אסקולי הקבוצה היא

$$\mathcal{F} = C(X,Y) = \{f : X \to Y, f \in C(X)\}$$

X,Y מרחבים מטריים שלמים, X מרחב מטרי קומפקטי, $f(X)$ חסום (לכל $f \in \mathcal{F}$).

2.6.8 שימושים של המשפט

משפטי קיום במד"ר: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$. יש לנו נקודה $(x_0, y_0) \in D$. נרצה לדעת האם באופן מקומים, קיימת $y(x)$ המקיימת את המד"ר. אם $f(x,y)$ רציפה בתחום סגור, היא חסומה בו: $|f(x,y)| < M$ ב-D. אפשר לחפש את הפתרון על ידי קירובים: לבנות סידרה של קירובים. אם נוכיח שלסדרה יש גבול מסויים, שהיא מתכנסת לפונקציה רציפה, נקבל קיום של פתרון.

נבנה שני ישרים:

$$y = Mx$$
$$y = -Mx$$

העוברים דרך הנקודה (x_1, y_0). אם הפתרון קיים, אז הפתרון הוא פונקציה y העוברת בין הישרים הללו. נקח ישר עם שיפוע $y = f(x_0, y_0)\,x$. נמתח קו ישר באורך δ_0, עד הנקודה (x_1, y_1), ונעביר שם ישר ששיפועו $f(x_1, y_1)$, וכן הלאה. נקבל פונקציה פוליגונלית. ניתן להקטין את הגודל δ_0, ולקבל סידרה של פונקציות שהולכות ומתקרבות ל-y. אוסף כל הפונציות הללו מקיים את הדרישות של משפט ארצלה, ולכן, ניתן להוכיח, שיש גבול לסדרה מהסוג הזה, כאשר מקטינים את הקטעים בחלוקה. פונקציות אלו מכונות קירובי euler.

3 קשירות[20]

קומפקטיות הינה הכללה של קטע ב-$\mathbb{R}$ למרחב כללי. משפט ערך הבינקיים לא מתקיים לקבוצה קומפקטית. לכן נזדקק למושג נוסף – **קשירות**.

יהא X מרחב טופולוגי. נניח $X = A \cup B$, $A, B \neq \varnothing$.

הגדרה 3.1 (A, B) היא **הפרדה** (Seperation) של X אם: $A \cap \bar{B} = \varnothing$ או $\bar{A} \cap B = \varnothing$.

למה 3.2 התנאים הבאים שקולים ($A, B \neq \varnothing$)

1. קיימת הפרדה (A, B) של X.
2. קיימות A, B פתוחות כך ש- $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$
3. קיימות A, B סגורות, כך ש- $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ ($A = B^C, B = A^C$)
4. קיימת קבוצה A שהיא גם פתוחה וגם סגורה, $X \neq A \neq \varnothing$.

[20] 29.06.09 , הושלם בעדיבות עמי פז

הוכחה:

- $(3) \implies (2)$: עם לקיחת משלים לשני הצדדים, ולהפך, $(2) \implies (3)$.
- $(1) \implies (3)$: ברור
- $(2) \implies (1)$ יש (A,B). נגדיר $B' = X \backslash \bar{A}$ ו־$A' = X \backslash \bar{B}$. נניח בשלילה, $x \in \left(X \backslash \bar{A}\right) \cap \left(x \backslash \bar{B}\right)$, אז $x \in X \backslash \bar{B}$, ולכן $x \in A$, כי $X = A \cup B$. ובאופן דומה, $x \in B$. אבל $A \cap \bar{B} = \varnothing$, ולכן $A \cap B = \varnothing$ - סתירה.

■

הגדרה 3.3 מרחב נקרא **קשיר** אם לא קיימת הפרדה (A,B) של X .

למה 3.4 אם $A \subseteq A$ קבוצה קשירה, אז כל קבוצה B המקיימת $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ היא גם קשירה.

למה 3.5 אם (A,B) הפרדה של X, ו־$C \subseteq X$ קשירה, אז $C \subseteq A$ או $C \subseteq B$.

הוכחה: $A \cap C$, $B \cap C$ פתוחות ב־C, אז C מקיימת את הגדרה (?), אלא אם אחת מהן ריקה. לכן, אחת מהן ריקה: $A \cap C = \varnothing$ או $B \cap C = \varnothing$. $X = A \cup B$, ולכן $C \subseteq A$ או $C \subseteq B$. ■

משפט 3.6 אם X מרחב קשיר, $f : X \to Y$ העתקה רציפה, אז $f(X)$ קבוצה קשירה.

הוכחה: אם $f(X)$ לא קשירה, אז יש (A,B) פתוחות ב־Y שמכסות אותה. אזי $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ פתוחות ב־X ומכסות את X , בסתירה לקשירות של X. ■

משפט 3.7 (הפרח?)
תהא $\{X_\alpha\}$ משפחה של קבוצות קשירות, המקיימות, $\bigcap_\alpha X_\alpha \neq \varnothing$. אזי $\bigcup_\alpha X_\alpha$ קשיר.

הוכחה: נבחר $x \in \bigcap_\alpha X_\alpha$.
נניח שקיימת הפרדה, (A,B) פתוחות, $A \cup B = \bigcup X_\alpha$, $A \cap B = \varnothing$, אז $x \in A$ או $x \in B$. בלי הגבלת הכלליות, $x \in A$.
כל X_α קשירה, ולכן או $X_\alpha \subseteq A$ או $X_\alpha \subseteq B$, לכל X_α. אבל, $x \in X_\alpha$, $x \in A$, ולכן, $X_\alpha \subseteq A$ לכל α, ולכן $\bigcup X_\alpha \subseteq A$, בסתירה להנחה. ■

דוגמה 1.3 גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$, הומאומורפי ל־$\mathbb{R}^1$. נוסיף לו את $y = 0$.

$$X = \text{graph}\left(y = \frac{1}{x}\right) \cup \{(x,y)\,|y=0\}$$

אינו קשיר. זהו איחוד של שתי קבוצות סגורות, זרות ב־$\mathbb{R}^2$.
אבל $\Pi_y(X) = (0,\infty) \cup \{0\} = [0,\infty]$ קשיר.

שימוש במשפט הפרח:

משפט 3.8 אם X_i, $i = 1,2,\ldots n$ קשירים, אז גם $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ קשיר.

הוכחה: עבור $n=2$, $X \times Y$: נבחר נקודה $a \in X$, $b \in Y$, ונקח חתכים, $X \times b$, $a \times Y$.
נסמן לכל $x \in X$,

$$T_x = (x \times Y) \cup (X \times b)$$

אז $\bigcup_{x \in X} T_x = X \times Y$.
T_x קשיר לכל $x \in X$, כי $Y \simeq x \times Y$, $X \simeq X \times b$, ו־X,Y קשירים. לכן, לפי הפרח, T_x קשיר. ■

מסקנה 3.9 $\mathbb{R}^n$ קשיר.

מכפלה אינסופית, $\mathbb{R}^\infty$. תלוי בטופולוגיה. עבור $\mathbb{R}^\infty$בטופולוגית המכפלה, הבסיס לטופולוגית המכפלה הוא

$$(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)\times\cdots\times(a_n-\varepsilon,a_n+\varepsilon)\times\mathbb{R}^1\times..$$

טענה 3.10 $\mathbb{R}^\infty$ עם טופולוגיית המכפלה - קשיר.

הוכחה: יש תת־מרחבים של $\mathbb{R}^\infty$ שהומאומורפים ל־$\mathbb{R}^n$: (??)
$\bigcup_{n=1}^\infty\mathbb{R}^n$ קשיר לפי משפט הפרח. (זה לא ממש $\mathbb{R}^\infty$..) ■

טענה 3.11 $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^\infty$. לפי טענה קודמת, $\bigcup\mathbb{R}^n\subseteq\mathbb{R}^\infty\subseteq\overline{\bigcup\mathbb{R}^n}$, $\mathbb{R}^\infty$ קשיר.

הוכחה: ???? ■

זה לא עובד עם Box-topology. המרחב מתפרק לקבוצות חסומות, ולא־חסומות.

משפט 3.12 $\mathbb{R}$ קשיר (עם מטריקה רגילה)[21]

הוכחה: $\mathbb{R}$ שלם. $\mathbb{R}$ הוא השלמה של $\mathbb{Q}$, לכן:

1. קיום של sup לכל קבוצה חסומה מלעיל, כלומר, אם $A\subseteq\mathbb{R}$ ו־$a<M$ לכל $a\in A$, אז קיים $\sup A$.
2. לכל $a<b$ ב־$\mathbb{R}$, קיים c כך ש־ $a<c<b$.

נניח בשלילה ש־$\mathbb{R}$ אינו קשיר.

$$A\cup B=\mathbb{R},\quad A,B\neq\varnothing\quad \bar{A}\cap B=A\cap\bar{B}=\varnothing$$

נבחר $a\in A,b\in B$. נניח, בלי הגבלת הכלליות, $a<b$.
קיום sup של $\{x\in A,x<b\}\neq\varnothing$, ונסמנו ב־ c.

$$c=\sup\{x\in A,x<b\}$$

$c\in A$ או $c\in B$.
אם $c\in B$, אז $c\in\bar{A}'$כי בכל סביבה של c יש נקודה של A, כי c הוא סופרימום של נקודות מ־A. ושוב, $\bar{A}\cup B\neq\varnothing$.
אם $c\in A$, אז $c\in\bar{B}'$כי לכל $x>c$, $x\notin A$ ולכן, $x\in B$. לכן $x\in\bar{B}\cup A$. ■

טענה 3.13 הוכחנו כי אם $A\subset\mathbb{R}$, קבוצה קשירה, ו־$a\in A$, $b\in A$, $a<b$, אז לכל c: $a<c<b$, מתקיים $c\in A$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $c\notin A$, נקח $A_c\in\{x\in A,x\leq c\}$ ו־$B_x=\{x\in A,x\geq x\}$ ומצאנו הפרדה של A.
($x\leq c\iff x<c$, $x\geq c\iff x>c$ כי $c\notin A$, ולכן (A_c,B_c) הפרדה של A. ■

את הטענה הראשונה אפשר ליישם על קטע, ולהוכיח שכל קטע ב־$\mathbb{R}$ הוא קשיר. ולכן, קבוצה A ב־$\mathbb{R}$ קשירה אם ורק אם:

$$A=(a,b)\ \text{ or }\ [a,b)\ \text{ or }\ (a,b]\ \text{ or }\ [a,b]$$

ובפרט, יתכן $a=\infty$ או $b=\infty$.

הגדרה 3.14 קטע הוא קבוצה שעם כל שתי נקודות מקטע, מכסה את כל הנקודות שבינהן.

[21] 2.07.2009

ובפרט, $\mathbb{Q}$ **אינו קשיר**, נראה שאפשר לפרק אותה:

$$A_C=\left\{x\in\mathbb{Q},x<\sqrt{2}\right\},B_C=\left\{x\in\mathbb{Q},x>\sqrt{2}\right\}$$

וזוהי הפרדה.

דוגמא לקבוצה **קשירה** ב־$\mathbb{R}^2$:

$$A=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right),x>0\right\}$$

נוכיח שהיא קשירה:

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^+&\to\mathbb{R}^2\\ x&\mapsto\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

היא העתקה רציפה, ולכן התמונה $f\left(\mathbb{R}^+\right)$ קשירה, אם $\bar{A}$ קשירה.

3.0.9 משפט ערך הביניים

משפט 3.15 $f:X\to\mathbb{R}$, העתה רציפה, X קשיר.
נניח כי $f\left(x_1\right)=a$, $f\left(x_2\right)=b$, $a<b$, אז לכל $a<c<b$ קיים $y\in X$ כך ש־$f\left(y\right)=c$.

הוכחה: נגדיר $A=\{x\in x|f\left(x\right)\leq c\}$, $B=\{x\in X|f\left(x\right)\geq c\}$, אם לא קיים y כך ש־ $f\left(y\right)=c$, אז $\left(A,B\right)$ הפרדה של X. ∎

3.1 קשירות מסילתית

הגדרה 3.16 X הוא **קשיר מסילתית** אם לכל זוג נקודות, $x_1,x_2\in X$, קיים עקום רציף γ ב־X שמחבר בינהן: $\gamma\left(0\right)=x_1,\gamma\left(1\right)=x_2$, $\gamma\subseteq X$, כאשר ההעתקה $\gamma:\left[0,1\right]\to X$ רציפה.

משפט 3.17 אם X קשיר מסילתית, אז X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה X קשיר מסילתית, X לא קשיר.
אם A,B הפרדה של X, אז:
γ רציפה, $\left[0,1\right]$ קבוצה קשירה, ולכן $\gamma\left(\left[0,1\right]\right)$ קשירה ב־X. לכן, $\gamma\subseteq A$ או $\gamma\subseteq B$. (אם יש הפרדה של המרחב וקבוצה קשירה במרחב, אז כולה שייכת ל־A או ל־B). אבל זה לא יתכן, כי $\gamma\left(0\right)=a\in A$, ו־$\gamma\left(1\right)=b\in B$. ∎

הכיוון ההפוך אינו נכון: $\bar{A}$ קשיר, אך לא מסילתית.
נניח מסילה שתחילתה ב־$\gamma\left(0\right)=\left(0,0\right)$, וסופה ב־ $\gamma\left(1\right)=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)$, $x\neq0$.
נתבונן ב־

$$O=\{t\in\left[0,1\right]|\pi\left(x\right)\left(\gamma\left(t\right)\right)=0\}$$

$0\in O$, ולכן $O\neq\varnothing$, $1\notin O$, ולכן קיים $c=\sup O\neq1$, נתבונן ב־$\gamma\left(\left[0,c\right]\right),\gamma\left(c,1\right)$, וננפנף ידיים.

4 עקומים רציפים ב־$\mathbb{R}^2$

הגדרה 4.1 $\begin{cases}x=f\left(t\right)\\y=g\left(t\right)\end{cases}$, $0\leq t\leq1$, f,g פונקציות רציפות הוא עקום ב־ $\mathbb{R}^2$.
עקום **פשוט** אם

$$\left(f\left(t_1\right),g\left(t_1\right)\right)=\left(f\left(t_2\right),g\left(t_2\right)\right)\implies t_1=t_2$$

דוגמה 1.4 דוגמא פתולוגית: העקום של פיאנו: עקום פשוט, שעובר דרך כל הנקודות בריבוע $\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$.