סכומים וטורים חשובים:

סכום סדרה הנדסית: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $(|q| < 1)$ **:**

$S = \frac{a_1}{1-q}$ **, טור חשבוני:** $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

טור חזקות: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **,** $\sum_{a=0}^{\infty} \frac{k^a}{a!} = e^k$

הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

זהויות בינומיות: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\qquad$ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

אינטגרלים: $\int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = 1$ **,** $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ $\qquad$ $\int_0^\infty S^{n-1} \cdot e^{-S} dS = (n-1)!$

קירוב סטרלינג: $n! = \sqrt{2\Pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

חוק הכפל: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

אם A, B **ב"ת אז** $P(A|B) = P(A|B^c) = P(A)$

הסתברות מותנית: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

הסתברות שלמה וכלל בייס:

בהינתן חלוקה $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ **של מרחב המדגם**

יתקיים $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A | B_k) \cdot P(B_k)$ **וכן**

$$P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

כלל ההכלה וההפרדה:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ...$

$.. + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - .. + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap .. \cap A_n)$

הגדרת תלות בין מאורעות:

המאורעות A, B **בלתי תלויים**

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$

- **מאורעות זרים שאינם ריקים – תלויים.**
- **מאורעות מוכלים שאינם ריקים – תלויים.**
- **מאורעות בלתי תלויים שאינם ריקים – נחתכים.**

מאורעות A, B **הם ב"ת אמ"מ האינדיקטורים שלהם ב"ת: [צריך לבדוק גם עבור (1,0),(0,1),(0,0)]**

$P(I_A = 1, I_B = 1) = P(I_A = 1) \cdot P(I_B = 1)$

מספר הבדיקות לאי-תלות n **מאורעות:**

$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$

חוק המספרים הגדולים: $X_1, X_2, ..., X_n$ **מ"מ ב"ת**

בעלי תוחלת $E(X_k) = \mu$ **ושונות** $Var(X_k) = \sigma^2$ **, אזי**

לכל $\varepsilon > 0$ **מתקיים:** $\lim_{m\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 1$ **;**

$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k$ **הינו ממוצע על סמך הנתונים. כמו כן**

$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k = \mu$ **.**

אמינות רכיבים בטור: $p_1 \cdot p_2$

אמינות רכיבים במקביל: $\left[1 - (1-p_1) \cdot (1-p_2)\right]$

המתנה לאוטו: אם $X \sim Pois(\lambda)$ **אז** $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ **.**

מקרה זה מפגין חוסר זיכרון.

עבור מ"מ בדיד: $P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$ **.**

פונקציה של מ"מ: אם $Y = f(x)$ **אז**

$$P(Y = y) = \sum_{x: f(x)=y} P(X = x)$$

הסתברות שולית של מ"מ בדיד:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

אי-תלות מ"מ בדידים:

אם הסתברות משותפת $P(X = x, Y = y)$ **היא מכפלת שתי פונקציות, האחת של** x **והשנייה של** y**, כלומר** $f(x) \cdot g(y)$ **אזי ניתן להסיק שקיימת אי-תלות בין המשתנים.**

פונקציות ותת-קבוצות זרות של מ"מ בלתי תלויים הן בלתי תלויות.

תלות בסטטיסטי הסדר: משתנים שנוצרים מסטטיסטי הסדר של משתנים שאינם תלויים הם כן תלויים.

התפלגות גיאומטרית:

ההסתברות להצלחה ראשונה בנסיון ה- k **כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי היא** p **. חוסר זיכרון.**

התפלגות בינומית: ההסתברות לקבל בדיוק k **הצלחות בסדרה של** n **ניסויים שלכל אחד הסתברות הצלחה** p **.**

אם $X \sim B(n, p)$ **וגם** $Y \sim B(m, p)$ **(אותו** p **בשניהם)**

אז : $X + Y \sim B(m + n, p)$

נוסחא רקורסיבית לחישוב התפלגות בינומית: אם

$X \sim B(n, p)$ **אז** $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k}$

התפלגות בינומית שלילית:

ההסתברות לקבל את ההצלחה ה- m **-ית בדיוק בנסיון ה-** k **כאשר לכל ניסוי הסת' הצלחה** p **.**

התפלגות היפר-גיאומטרית: בכד נמצאים N **כדורים שחורים ו-** M **כדורים לבנים. מוציאים** n **כדורים באקראי ללא החזרה. ההסתברות שבין הכדורים שהוצאו נמצאים** k **כדורים שחורים.**

מרובה סוגים:

$$P(n_j \text{ of type } 1 \le j \le k) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2} \cdot ... \cdot \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

כאשר $n_1 + ... + n_k = n$ **ובוחרים** n **מ-** N**.**

התפלגות פואסון בדידה עם פרמטר μ **:** μ **מדד לקצב הגידול.**

אם $X \sim Pois(\lambda)$ **וגם** $Y \sim Pois(\mu)$ **והם ב"ת אז** $(X + Y) \sim Pois(\lambda + \mu)$ **וגם (תקף גם להרבה ואז מולטינטמי):**

$$(X | X + Y = x + y) \sim Bin\left(x + y, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$

התפלגות מולטינומית: מבצעים n **ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי קיימות** k **תוצאות אפשריות כל שהסתברות לתוצאה** i **היא** p_i **ומתקיים:**

$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ **.** X_i **מציין את מספר התוצאות מסוג** i **שהתקבלות ב-** n **ניסויים.**

תוחלת: **(** I_A **- אינדיקטור למאורע)**

$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$ **(רק אם** $\sum_x |x| \cdot P(X = x) < \infty$ **)**

$E(\alpha X) = \alpha \cdot E(X)$ $\qquad$ $E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$

$E(I_A) = E(I_A^2) = P(A)$ $\qquad$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P(X = x, Y = y)$ $\qquad$ $E(c) = c$

אם X, Y **ב"ת אז** $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ **- ההיפך לא בהכרח נכון.**

אם X **מ"מ המקבל ערכים בין** a **ל-** b **אז**

$a \le E(X) \le b$

נוסחת הזנב: $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \ge k)$ **(** $X \in \mathbb{N}$ **)**

תוחלת מותנית: $E(X | Y = y) = \sum_x x \cdot P(X = x | Y = y)$ **,**

$E(Y) = \sum_x E(Y | X = x) \cdot P(X = x)$

אם X, Y **ב"ת אז** $E(X|Y) = E(X)$

במקרה הרציף: $E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$

נוסחת ההחלקה: $E(X) = \sum_y E(X | Y = y) \cdot P(Y = y)$

אם $E(X|Y) = g(Y)$ **אז** $E(X) = E(E(X|Y)) = E(g(Y))$

במקרה הרציף

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot E(Y|X=x) dx$$

נוסחאות נוספות: $E(X + Y|Y) = E(X|Y) + Y$

$E(X + Y|Y = y) = E(X|Y = y) + y$

$E(XY|Y) = Y \cdot E(X|Y)$ $\qquad$ $E(XY|Y = y) = y \cdot E(X|Y = y)$

$E(XY) = E(E(XY|Y = y))$ $\qquad$ $E(X^2) = E(E(X^2|Y = y))$

$E(X^2|Y = y) = Var(X|Y = y) + (E(X|Y = y))^2$

שונות: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

$Var(I_A) = pq$ $\qquad$ $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$

אם X, Y **ב"ת:** $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

c **קבוע אמ"מ** $Var(c) = 0$

אם $E(X) = \mu$ **אז** $Var(X) = \min_\mu E(X - \mu)^2$

נוסחת הסכום, מקרה כללי: $X_1, X_2, ..., X_n$ **מ"מ:**

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + 2 \cdot \sum_{k<l} Cov(X_k, X_l)$$

סטיית תקן:

$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$ **;** $SD(aX + b) = |a| \cdot SD(X)$

נוסחת החלקה לשונות: השונות המותנית של Y **בהנתן** X **כמ"מ שערכו כאשר** $X = x$ **הוא השונות של** Y **בהנתן** $X = x$ **, כלומר,**

$g(x) = Var(Y | X=x)$ $\qquad$ $Var(Y|X) = g(X)$ **:**

$Var(Y|X) = E\left((Y - E(Y|X))^2 | X\right)$

$Var(Y) = E\left(Var(Y|X)\right) + Var\left(E(Y|X)\right)$

קירובים להתפלגויות:

בינומית להתפלגות פואסונית: אם $X \sim Bin(n, p)$

ומתקיים ש- n **גדול דיו ו-** p **בסדר גודל של** $1/n$ **,**

אז בקירוב X (מספר ההצלחות) מתפלג $Pois(\lambda = np)$ **. כל זאת עבור** $n \cdot p \le 5$ **.**

נורמלי להתפלגות בינומית: ע"י שימוש במשפט הגבול המרכזי נגדיר אינדיקטורים ($n \cdot p > 5$ **):**

$$X \sim Bin(n, p) \Rightarrow X = \sum I_j \Rightarrow X \sim N(np, npq)$$

קירוב בינומי להתפלגות היפר גאומטרית: כאשר $n \ll N + M$ **, תוצאת ההתפלגות הבינומית קרובה לתוצאת ההתפלגות הגיאומטרית.**

$$X \sim HG(n, N, M) \Rightarrow X \sim Bin\left(n, \frac{M}{N+M}\right)$$

קו-וואריאנס: X **ו-** Y **מ"מ,** $E(X) = \mu_x$ **ו-** $E(Y) = \mu_Y$ **:**

$Cov(X, Y) = E\left((X - \mu_x)(Y - \mu_Y)\right) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

1) אם X **ו-** Y **ב"ת אז** $Cov(X, Y) = 0$ **.**

בדרך כלל ההיפך אינו נכון $X, Y \not\Leftarrow Cov(X, Y) = 0$ **ב"ת.**

2) אם $Cov(X, Y) = 0$ **אז** X, Y **בלתי מתואמים.**

ב"ת $\Leftarrow$ **בלתי מתואמים. (לא הבכרח נכון בכיוון השני).**

3) $Cov(X, X) = Var(X)$ **.**

4) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ **- סימטריות.**

5) $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$ **.**

6) $Cov(X, Y + Z) = Cov(Y, X) + Cov(X, Z)$ **.**

7) לכל a **קבוע** $Cov(X, a) = 0$ **.**

8) $Cov\left(\sum_j a_j X_j, \sum_k b_k Y_k\right) = \sum_j \sum_k a_j b_k Cov(X_j, Y_k)$ **.**

מקדם המתאם:

$$Corr(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{SD(X) \cdot SD(Y)}$$

1) $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$ **.**

2) $Corr(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0$ **.**

3) $Corr(X, X) = 1$ **.**

4) $Corr(aX + b, cY + d) = (sign(ac)) \cdot Corr(X, Y)$ **.**

5) $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$ **.**

6) אם $|\rho(X,Y)| = 1$ **אז קיימים** λ **ו-** μ **כך ש-** $X = \lambda Y + \mu$ **(התלות בין** X **ל-** Y **לינארית).**

7) אם $Cov(A, B) > 0$ **אז בין** A **ל-** B **קיימת תלות חיובית (כלומר ידיעה ש-** A **התרחש מגדילה את הסיכויים ש-** B **יתרחש ולהיפך).**

8) אם $Cov(A, B) < 0$ **אז בין** A **ל-** B **קיימת תלות שלילית (כלומר ידיעה ש-** A **התרחש מקטינה את הסיכויים ש-** B **יתרחש ולהיפך).**

אינדיקטורים:

שונות של אינדיקטור:

$Var(I_A) = P(A) \cdot \left(1 - P(A)\right) = pq$

Cov **של אינדיקטור:**

$Cov(I_A, I_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$

שימוש בתוחלת אינדיקטורים לחישוב הסתברות:

$E(I_A \cdot I_B) = P(A \cap B)$ **.**

קורלציה מולטינטמית:

$Corr(N_i, N_j) = -\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i) \cdot (1-p_j)}}$ **כאשר** N_i, N_j **הכמות שנבחרה מסוגים** i, j **וההסתברויות הן ההסתברויות לקבל כל סוג.**

חוק השורש הריבועי:

עבור $X_1, X_2, ..., X_n$ **בלתי מתואמים,** $E(X_i) = \mu$ **,** $Var(X_i) = \sigma^2$ **אזי:** $E(S_n) = n\mu$ **,** $SD(S_n) = \sqrt{n}\sigma$ **,**

$E(\overline{X}n) = \mu$ **,** $SD(\overline{X}n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **.**

תכונות של צפיפות:

אם $f_x(x)$ **פונקצית צפיפות של** X **מ"מ רציף אז**

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ **ותמיד** $f_X(x) \ge 0$ **.**

פיצול פואסון: אם $Z \sim Pois(\mu)$ **ואז מתרחש אחד משני מאורעות בהסתברויות** $p_a + p_b = 1$ **אז נקבל מ"מים שמתפלגים** $Pois(p_a \cdot \mu), Pois(p_b \cdot \mu)$ **.**

פונקציה יוצרת מומנט: X **מ"מ כלשהו**

$M_X(t) = E(e^{tx})$

הנחה: M_X **מוגדרת (כתוחלת) עבור** $t \in (-\delta, \delta)$ **.**

תכונות פי"מ:

1) אם $M_X = M_Y$ **עבור** $t \in (-\delta, \delta)$ **אז ל-** X **ול-** Y **אותה התפלגות.**

2) אם $M_X(t)$ **מוגדרת ב-** $(-\varepsilon, \varepsilon)$ **אז**

$\frac{d^k}{dt^k} M_X \big|_{t=0} = E(X^k)$ **.**

3) אם X **ו-** Y **ב"ת אז** $M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$ **.**

X **מ"מ ו-** a, b **קבועים אז:**

$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_x(at)$ **.**

אי שיוויונות להערכת הסתברות:

אי-שיוויון בול: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

אי-שיוויון מרקוב: (X **מ"מ אי-שלילי,** a

כלשהו): $P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$ **.**

אי שיוויון צ'בשב: X **מ"מ,** $E(X) = \mu$ **,**

$SD(X) = \sigma$

$P(|X - \mu| \ge k \cdot \sigma) \le \frac{1}{k^2}$ $\qquad$ $P(|X - \mu| \ge a) \le \frac{Var(X)}{a^2}$

התפלגויות רציפות:

X **מ"מ רציף,** $f_x(x)$ **- פונקצית הצפיפות של** X **.**

$P(X \in [a,b]) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f_x(x) dx$

$P(X \in [x, x+dx]) = f_x(x) dx$

$F_X(x) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_x(x) dx$

$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

תוחלת מ"מ רציף: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$ **.**

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx$

תוחלת $E(X)$ **קיימת רק כאשר**

$\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f_x(x)| dx < \infty$ **.**

פי"מ של מ"מ רציף $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_x(x) dx$

אם $X_1, X_2, ..., X_n \sim N[0,1]$ **ב"ת,**

$S_n^2 = \sum X_i^2$ **, אז** $S_n^2 \sim Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

התפלגות נורמלית: שימוש בטבלה עבור מ"מ

נורמלי $Z \sim N(0,1)$ **;** $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-z^2/2}$

$P(a \le Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ $\qquad$ $P(Z \le a) = \Phi(a)$

$P(-a \le Z \le a) = 2 \cdot \Phi(a) - 1$ $\qquad$ $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

נירמול: אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **אזי**

$Z \equiv \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ **.**

אם $X \sim N(a, b^2)$ **ו-** $Y \sim N(c, d^2)$ **ב"ת אז**

$X + Y \sim N(a + c, b^2 + d^2)$ **.**

משפט הגבול המרכזי: $X_1, X_2, ..., X_n$ **מ"מ**

ב"ת, $E(X_i) = \mu$ **,** $Var(X_i) = \sigma^2$ **אזי:**

$SD\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\right) = \sigma \cdot \sqrt{n}$

אם $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **אז** $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N(0,1)$ **, כלומר**

$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

כלומר $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \le a\right) = \Phi(a)$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ **מתפלג** $N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ **.**

נוסחת ההחלקה וסכום מ"מ: בהינתן משתנים מקריים $X_1, X_2, ...$ **עם תוחלת זהה** μ **ומשתנה** N **המקבל ערכים טבעיים ואינו תלוי ב –** X**-ים אזי אם** $S_N \equiv X_1 + ... + X_N$ **יתקיים** $E(S_N) = \mu \cdot E(N)$ **.**

סכום מקריים – מעריכי ופואסון: בהינתן משתנים מקריים $X_1, X_2, ...$ **מעריכיים עם פרמטר** λ **ו -** N **גיאומטרי עם משתנה** p **אז** $S_N \equiv X_1 + ... + X_N \sim \exp(\lambda p)$ **.**

התפלגות מינימום ומקסימום:

יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ ב"ת:

$X_{\max} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

$X_{\min} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

$F_{X\max} = P(X_{\max} \le x) = \prod_{i=1}^{n} F_{Xi}(x)$

$F_{X\min} = P(X_{\min} \le x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-F_{Xi}(x))$

תכונת חוסר זיכרון:

תכונת חוסר זיכרון מתקיימת רק בהתפלגויות פואסון, אקספוננציאלית, גיאומטרית.

פונקצית התפלגות מצטברת:

הגדרה $F_x(x) = P(X \le x)$.

במקרה הבדיד $F_x(x) = \sum_{t \le x} P(X=t)$

במקרה הרציף $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx$

1) $0 \le F_x(x) \le 1$. 2) $F_x(x)$ **לא יורדת.**

3) $\lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} F_x(x) = 1$.

4) $F_x(x)$ **רציפה מימין.** 5) $f_x(x) = \frac{d}{dx}F_x(x)$.

נוסחת הזנב עבור מ"מ רציף אי שלילי

$E(X) = \int_0^{\infty}(1-F_x(x))dx = \int_0^{\infty} P(X>x)dx$

אם $E(X) < \infty$ **אז** $\lim_{x\to\infty} x\cdot(1-F_x(x)) = 0$.

התפלגות אחידה (יוניפורמית):

X **מ"מ המציין נקודה שנבחרה באקראי בקטע** $[a,b]$ **:**

$P(c \le x \le d) = \frac{d-c}{b-a}$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$

$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a\le x\le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$

אם $X_1, X_2, ..., X_n \sim U[0,1]$ **ב"ת:**

$f_{\max}(x) = nx^{n-1}$ $f_{\min}(x) = n(1-x)^{n-1}$

$E(X_{\max}) = \frac{n}{n+1}$ $E(X_{\min}) = \frac{1}{n+1}$

סטנדרטיזציה:

$X \sim U[a,b] \Leftrightarrow \frac{X-a}{b-a} \sim U[0,1]$

התפלגות אקספוננציאלית: $X \sim Exp(\lambda)$

$P(X > a) = e^{-\lambda a}$

מינימום של אקספוננט הוא אקספוננט

$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow Min(X,Y) \sim Exp(\lambda+\mu)$

אם X, Y **ב"ת**

$X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

תכונת חוסר זיכרון: $P(T > t + s | T>t) = P(T > s)$

משפט: נתון מ"מ T **, נגדיר** $G(t) = P(T > t)$.

אם $G(t+s) = G(t)\cdot G(s)$ **, אז קיים** λ **כך ש-** $T \sim Exp(\lambda)$.

התפלגות Gamma: $X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ ב"ת,

$X_i \sim Exp(\lambda)$ **, נגדיר** $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ **, אזי** $Y \sim Gamma(n,\lambda)$.

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}$

כאשר n **שלם מתקיים:** $\Gamma(n) = (n-1)!$

חיבור Gamma: אם $X \sim Gamma(r,\lambda)$ **,** $Y \sim Gamma(s,\lambda)$ **ב"ת אז** $X+Y \sim Gamma(r+s,\lambda)$.

מנת Gamma: עבור X, Y **כנ"ל יתקיים** $\frac{X}{X+Y} \sim Beta(r,s)$ **. באופן כללי מנת גאמות היא בטא. המנה והסכום בשני הנ"ל ב"ת.**

הקשר בין מ"מ אקספוננציאלי פואסוני ו-Gamma:

יהי N_t **מספר ההופעות בקטע** $[0,t]$ **נגדיר** Ti **זמן המופע ה-** i **;** $(T_i - T_{i-1})$ **- זמן בין מופעים. אם** $Nt \sim Poisson(\lambda t)$ **אז** $(T_i - T_{i-1}) \sim Exp(\lambda)$ **ו -** $Ti \sim Gamma(i,\lambda)$ **. אם** $(T_i - T_{i-1}) \sim Exp(\lambda)$ **וב"ת אז** $Nt \sim Poisson(\lambda t)$ **. ממקרים אלו נסיק נוסחא לגאמא:**

$P(Ti > t) = P(N_t \le i-1) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$

התפלגות Cauchy: צורה כללית $f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$.

להתפלגות זו אין תוחלת.
מנת נורמלים מתפלגת קושי.

התפלגות חי בריבוע: $X \sim \chi^2$ למעשה אומר כי

$X \sim Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = (N(0,1))^2$ **. סכום של** n **משתנים כאלו יתפלג** $Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$.

התפלגות משותפת רציפה של שני מ"מ

לוקטור (x,y) **פונקצית צפיפות** f **אם לכל תת קבוצה של** R^2 **:** $P((x,y)\in A) = \iint_A f_{xy}(t,s)dtds$

$P(x\le X\le x+dx, y\le Y\le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$

1) $f \ge 0$. 2) $\iint_{R^2} f_{xy}(x,y)dxdy = 1$.

3) **פונקצית הצפיפות השולית של** X **:**

$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$.

4) X, Y **ב"ת אמ"מ** $f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y)$ **או**

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

5) **פונקצית הצטברות שולית של** X:

$F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$

6) **תוחלת פונקציה דו-ערכית:**

$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$

שיטות למציאת צפיפות משותפת:

א. ע"י $P(x\le X\le x+dx, y\le Y\le y+dy) = f_{xy}(x,y)dxdy$.

ב. ע"י מציאת $F_{X,Y}(x,y) = P(X<x, Y<y)$ **וגזירתה:**

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[F_{X,Y}(x,y)]$.

ג. $f_{xy}(x,y) = f_{Y|X}(y|X=x)f_X(x)$

אם ניתן להפריד את $f_{X,Y}(x,y)$ **למכפלת שתי פונקציות באופן הבא:** $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ **ותחומיהם השוליים של** X, Y **אינם תלויים אחד בשני, כלומר התחום המשותף של** (X,Y) **הינו מלבן המקביל לצירים, אזי המשתנים המקריים** X, Y **הם ב"ת ו-** $g(x), h(y)$ **הן פונקציות הצפיפות של** X, Y **עד כדי קבוע.**

וקטורים נורמליים:

הגדרה: וקטור X, Y **נורמלי אם ל-** $aX + bY$ **התפלגות נורמלית לכל** a, b **. (לא מספיק שההתפלגויות השוליות של** X **ו-** Y **יהיו נורמליות).**

תכונה אופיינית: $aX + bY \sim N(0, a^2 + b^2)$

כאשר $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$ **,**

נגדיר $A = \begin{bmatrix} Var(x) & Cov(x,y) \\ Cov(x,y) & Var(y) \end{bmatrix}$

$Var(aX+bY) = (a,b)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$aX + bY \sim N\left(a\mu_x+b\mu_y, (a,b)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$

תוחלת וקטור: כאשר (U,V) **וקטור נורמלי מתוקן,** $\rho = Corr(U,V)$ **,**

$E(U|a\le v\le b) = \int_a^b E(U|V=v)f_V(v|a\le v\le b)dV =$

$= \frac{\rho}{\varphi(b)-\varphi(a)}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\left(e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}\right)$

$E(U|V=v) = \rho\cdot v$

פונקצית צפיפות מותנית:

$f_V(V|a\le v\le b) = \begin{cases} \frac{f_V(v)}{P(a\le v\le b)} & v\in[a,b] \\ 0 & v\notin[a,b] \end{cases}$

משפט: אם כאשר $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$ **אז**

$X | Y \sim N\left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_y), \sigma_X^2(1-\rho^2)\right)$ **כאשר**

$\rho = Corr(X,Y)$

פונקצית התפלגות הפוכה:

במקרה הבדיד $F^{-1}(p) \equiv \inf\{x : F(x) \ge p\}$

במקרה הרציף $F^{-1}(p) = x : F(x) = p$

בהינתן משתנה $U \sim U[0,1]$ **נסמלץ משתנה רציף** X **על ידי הגדרת** $X = F^{-1}(U)$ **ונסמלץ משתנה בדיד על ידי חלוקת** $[0,1]$ **לקטעים לפי הסתברויות הערכים היחסיות.**

דוגמא: נרצה ליצור משתנה $X \sim \exp(\lambda)$ **. יתקיים**

$F_X(X) = 1 - e^{-\lambda x} \to F^{-1}(p) = \log(1-p)/\lambda$

ומכאן $X = -\log(1-U)/\lambda$.

התפלגות דו נורמלית:

$\rho = Corr(X,Y)$ $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\Pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}*$

$*Exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right)$

בניה של משתנה מקרי בעל התפלגות דו נורמלית סטנדרטית:

$Z, X \sim N(0,1)$ **ב"ת:** $Y = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z$ **כאשר**

$\rho = Corr(X,Y)$ **ומקבלים:** $E(X) = E(Y) = 0$

$E(Y|X) = \rho X$ $(Y|X=x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$

$(X|Y=y) \sim N(\rho y, 1-\rho^2)$ $Var(Y|X) = 1-\rho^2$

$Var(X|Y) = 1-\rho^2$ $E(X|Y) = \rho Y$

בדו-נורמלי ההתפלגויות השוליות תמיד נורמליות.

אם X, Y **מתפלגים דו-נורמלית אזי הם ב"ת אם ורק אם** $\rho = Corr(X,Y) = 0$ **. עבור דו-נורמלי סטנדרטי (תוחלות 0 שונות אחד)** $\rho = E(X\cdot Y)$.

חישוב $P(X>0,Y>0)$ **אם נתון** $X, Y \sim N(0,1)$ **ו-**

$\rho = Corr(X,Y)$ **:** $P(X>0,Y>0) = \frac{90^\circ - \arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{360^\circ}$

התפלגות דו נורמלית סטנדרטית של מ"מ ב"ת בקואורדינטות פולאריות (התפלגות ריילי):

$f_{R\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Pi}re^{\frac{-r^2}{2}} & r>0, \theta\in[0,2\Pi] \\ 0 & otherwise \end{cases}$

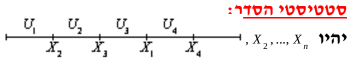
$f_R(r) = re^{\frac{-r^2}{2}}$

$F_R(r) = \begin{cases} 1-e^{\frac{-r^2}{2}} & r\ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$R^2 \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$ $f_\theta(\theta) \sim U[0,2\Pi]$

סטטיסטי הסדר:

יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$



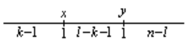
מתפלגים לפי $f_X(x)$ **נגדיר:**

$U_1 = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

$U_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ $U_2 = \min\{X_i > U_1; i = 1, ..., n\}$

אז: $f_{U_k}(x) = nf_X(x)\binom{n-1}{k-1}[F_X(x)]^{k-1}[1-F_X(x)]^{n-k}$

התפלגות משותפת של U_k, U_l **,** $k < l$ **:**

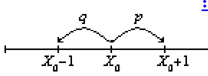


$P(U_k \in dx, U_l \in dy) = \binom{n}{1,1,k-1,n-l}\cdot[F(x)]^{k-1}\cdot ...$

$..\cdot f(x)dx\cdot[F(y)-F(x)]^{l-k-1}\cdot f(y)dy\cdot[1-F(y)]^{n-l}$

מהלך מקרי על הישר:

חלקיק מתחיל ב- X_0 **, נע ימינה בהסתברות** p **, שמאלה בהסתברות** $q = 1-p$ **, הקפיצות ב"ת, תחום הישר** $[0, X_0+c]$ **. נגדיר אינדיקטור** $Y_k = \begin{cases} 1 & right \\ -1 & left \end{cases}$.



מיקום החלקיק אחרי n **צעדים:** $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

הסיכוי שהחלקיק יגיע ל- $X_0 + c$ **לפני שיגיע ל-** 0 **:**

.1 אם $p = q$ **אזי:** $U_x = \frac{x}{c}$ **. תוחלת זמן משחק:**

$V_x = X(c-X)$.

.2 אם $p \ne q$ **:** $U_x = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$.

תוחלת: $V_x = -\frac{X}{p-q} + \frac{c}{p-q}\cdot\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^c}$.

נגדיר N **- מספר החזרות של חלקיק (המתחיל בראשית) לראשית;** α **- ההסתברות שהחלקיק יחזור לראשית:**

.1 $p = q \Leftarrow \alpha = 1$.

.2 $p > q \Leftarrow \alpha = 2q$.

.3 $p < q \Leftarrow \alpha = 2p$

.4 $p \ne q \Leftarrow \alpha < 1 \Leftarrow (1+N) \sim Geo(1-\alpha)$.

מולטינומי מותנה: **אם** X_1, X_2, X_3 **סופרים מאורעות**

עם הסתברות $p_1, p_2, p_3, p_1 + p_2 + p_3 = 1$ **אז עבור**

$X \sim Multi(n, p_1, p_2, p_3)$ **נוכל לומר כי**

$X_1 | X_2 = k \sim Bin\left(n-k, \frac{p_1}{1-p_2}\right)$

קונבולוציה: **אם** X, Y **מ"מ ב"ת,** $Z = X + Y$.

מקרה רציף: $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(z-x)dx$.

מקרה בדיד: $P(Z=z) = \sum_x P(Y=z-x)P(X=x)$

רציף, X, Y **תלויים:** $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,z-x)dx$.

בדיד, X, Y **תלויים:** $P(Z=z) = \sum_x P(Y=z-x, X=x)$

בהפעלת קונבולוציה חלק למקרים לפי הטווחים!!!

טרנספורמציה חד-חד-ערכית של מ"מ

רציף: יהי X **מ"מ רציף (דיפרנציאבילי) המקבל ערכים בקטע** $[a,b]$ **. תהיה** $g : R \to R$ **פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב-** $[a,b]$ **. אזי למ"מ** Y **המוגדר להיות** $Y = g(X)$ **יש את פונקצית הצפיפות הבאה:**

$f_Y(y) = \begin{cases} f_x(g^{-1}(y))\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right| & g(a) \overset{(\ge)}{\le} y \overset{(\ge)}{\le} g(b) \\ 0 & otherwise \end{cases}$

כאשר $\frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}$

טרנספורמציה לא חח"ע של מ"מ רציף: כמו במקרה בחח"ע, אך נסכום את התרומות השונות ל - Y **. עבור** $X \sim f_X(x)$ **ו -** $Y = X^2$ **נקבל** $g(x) = x^2, g'(x) = 2x$ **,** $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ **ויתקיים** $Y = y \to X = \pm\sqrt{y}$ **ואז**

$f_Y(y) = \sum_{x:x=\pm\sqrt{y}} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right| =$

$[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]/(2\sqrt{y})$ **כאשר**

החלוקה תמיד ב - $2\sqrt{y}$ **בשל הערך המוחלט.**

טרנספורמציה דו-מימדית:

יהי (X,Y) **מ"מ דו מימדי רציף בעל פונקצית צפיפות משותפת** $f_{xy}(x,y)$ **. תהיינה** $v = g_2(x,y)$ **ו-** $u = g_1(x,y)$ **פונקציות ממשיות על המישור שהן חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות** $x = h_1(u,v)$ **ו-** $y = h_2(u,v)$ **. נגדיר יעקוביאן:**

$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$

פונקצית הצפיפות המשותפת של $V = g_2(X,Y)$ **,** $U = g_1(X,Y)$ **היא:**

$f_{UV}(u,v) = f_{xy}(h_1(u,v), h_2(u,v))|J(u,v)|$

עבור מ"מ $U = g_1(X,Y)$ **ניתן לכתוב מ"מ נוסף** $V = X$ **או** $V = Y$ **לבצע טרנספורמציה דו מימדית עבור** U, V **ולמצוא צפיפות שולית של** U **ע"י אינטגרציה.**

מעבר לקואורדינטות פולאריות:

$f_{R\theta}(r,t) = r\cdot f_{xy}(r\sin t, r\cos t)$

התניות במקרה הרציף:

צפיפות מותנית:

$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 0 & f_x(x)=0 \\ \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} & f_x(x)\ne 0 \end{cases}$

כלל הכפל: $f_{xy}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

פונקצית ההתפלגות המצטברת המותנית

$F_{xy}(x|y) = P(X \le x | Y=y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx$

חישוב הסתברות מותנית:

$P(a \le X \le b | Y=y) = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$

נוסחת בייס: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$

הקבלה לחוק ההסתברות השלמה:

$P(A) = \int_x P(A|X=x)f_X(x)dx$

מסקנה מהתפלגות בטא:

$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{r-1}dx = \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!} =$

$\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$

כדורים בכד: **אם בכד יש** a **כדורים שחורים ו** b **– לבנים וכל בחירה מוסיפים** c **מהצבע שנבחר, הסיכוי לשחור בכל שלב יישאר** $\frac{a}{a+b}$