לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 1

<u>טיעון</u> - מבנה המכיל הנחות ומסקנות. נאמר שטיעון הוא תקף אם תמיד שכאשר ההנחות שלנו נכונות גם המסקנה נכונה. תקפות תלויה רק במבנה.

<u>דוגמא:</u>

אם סוקרטס הוא אדם	אם A הוא B
וכל אדם הוא בן תמותה	וכל B הוא C
אז סוקרטס בן תמותה	אז A הוא C

האם זה שטיעון תקף מבטיח שהמסקנה היא נכונה?
לא מבטיח, אם ההנחות נכונות המסקנה נכונה.

<u>דוגמא:</u>

אם מיצי הוא ציפור
וכל ציפור היא בעלת כנף
אז מיצי בעלת כנף

טיעון תקף מסקנה לא נכונה
הנחה אחת לא נכונה.

<u>דוגמא:</u>

אין אדם ללא חסרונות — לא תקף
ולרקסי יש חסרונות
אז רקסי הוא אדם

כדי להראות לא תקף - דוגמא להצבה של הנחות נכונות שיובילו למסקנה לא נכונה.

דוגמה:

כל עורב הוא ציפור (שחור) — יש בעיה, ושחור יש כף

וציפור (שחור) הוא בעל/ת כנף (צבע) — משמעות פחות אחת תבונה

כל עורב הוא בעל/ת כנף (צבע) — וכך אסר.

מושגי יסוד בתורת הקבוצות

* **קבוצה** - אוסף של אלמנטים הנקראים איברי הקבוצה
  - ° אין חשיבות לחזרות
  - ° אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה

$A = \{1, 4, 7, 17, 20\}$ מספרים טבעיים - 5 איברים

$B = \{\frac{1}{2}, a, b, \text{אבגד}\}$ 4 איברים

* **שייכות** - נאמר ש-x שייך ל-A ונסמן $x \in A$ אם x הוא איבר הקבוצה A.

אם b לא איבר ב-A נאמר ש-b לא שייך ל-A ונסמן $b \notin A$

דוגמה:

$C = \{1, 2, \overset{\text{קבוצה}}{A}, B\}$

$1 \in C$ ✓

$\frac{1}{2} \notin C$ ✗ למרות ש-B בתוך C ו-$\frac{1}{2}$ שייך ל-B

קבוצות עם סימונים מיוחדים

$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ שלם ו- אי שלילי}\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ מכיל את אפס

קבוצת כל המספרים השלמים האי שליליים

$\mathbb{N}^+ = \{x \mid \text{טבעיים בלי אפס}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = השלמים

$\mathbb{C}$ = המרוכבים

$\mathbb{R}$ = הממשיים

$\mathbb{Q}$ = הרציונליים

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 2

* <u>הקבוצה הריקה</u> - הקבוצה הריקה היא קבוצה ללא איברים
קבוצה שאין בה איברים. סימון $\{\}$, ϕ .
דוגמה - $\{\phi\}$ ריקה? לא, קבוצה עם איבר אחד והוא ϕ .

* <u>שוויון בין קבוצות</u> - נאמר שהקבוצות A,B שוות ונסמן
$A=B$ אם ל-A ול-B אותם איברים.
כתוב מתמטי: $A=B$ אם לכל איבר x $x\in A \Leftrightarrow x\in B$.

<u>הערת הגיון:</u>

* אם α אז β . צריך להראות שבכל מקרה שבו α נכון
גם β נכון. x מתחלק ב-10 $\Rightarrow$ x מתחלק ב-5 .
* α אם"ם β . צריך להראות שאם α נכון אז β נכון
ושאם β נכון אז α נכון. אם α לא נכון אז
β לא נכון.

* <u>גודל של קבוצה</u> - נאמר שקבוצה A היא סופית אם מספר
האיברים בה הוא n עבור n מספר טבעי כלשהו.
עבור קבוצה A סופית נסמן $|A|$ את גודל של A, מספר
האיברים של A . $|\{1,2,3\}|=|\{1,1,2,2,3\}|=3$

* <u>תתי קבוצות</u> - נאמר שקבוצה A היא תת קבוצה של קבוצה
B אם כל איבר ב-A הוא איבר ב-B .
בכתיב מתמטי - לכל איבר x , אם $x\in A$ אז $x\in B$ או
$x\in A \Rightarrow x\in B$. במילים - A תת קבוצה של A,B
חלקית ל-B , A מוכלת ב-B , B מכילה את A .
סימון $A\subseteq B$.

$B=\{1,2,4,5\}$

$\{1,2\}\subseteq B$ $\{2,3\}\nsubseteq B$

נאמר ש-A לא מוכלת ב-B ונסמן $A \not\subseteq B$ אם קיים איבר ב-A שאינו איבר ב-B.

הבדל בין שייכות להכלה: $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

דוגמה: $B = \{1, \{1\}, \{1,2\}\}$

$1 \in B$, $\{1\} \in B$ $\{1\} \subseteq B$

$\{1,2\} \in B$ $\{1,2\} \not\subseteq B$

<u>תכונות של הכלה:</u>

1) לכל קבוצה A , $\emptyset \subseteq A$.

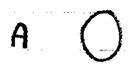
הקבוצה הריקה אין איברים ולכן אנחנו יכולים לטעון שכל איברי הקבוצה הריקה מקיימים כל אשר ובפרט מקיימים את הדרישה שהם שייכים ל-A.

2) לכל קבוצה A , $A \subseteq A$ (רפלקסיביות של ההכלה)

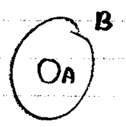
3) טרנזיטיביות של ההכלה, אם $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

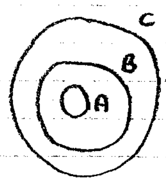
4) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$

דיאגרמת ון!! : מתארים קבוצה בתור תחום סגור במישור.



$A \subseteq B$





הוכחת 3:

צריך להראות לכל איבר x , אם $x \in A$ אז $x \in C$.

יהא $x \in A$. מהנתון $A \subseteq B$ יודעים כי לכל איבר $y \in A$ מתקיים $y \in B$ ולכן $x \in B$.

כעת $x \in B$ ומהנתון כי $B \subseteq C$ לכל איבר y אם $y \in B$ אז $y \in C$ לכן $x \in C$.

הכלה ממש:

נאמר ש-A מוכלת ממש ב-B ונסמן $A \subsetneq B$ אם $A \subseteq B$ ו- $A \neq B$.

$\{x \mid x \text{ טבעי בין 1 ל-8}\} \subsetneq \{x \mid x \text{ טבעי בין 1 ל-100}\}$

$\{x \mid x \text{ טבעי בין 1 ל-8}\} \not\subseteq \{x \mid x \text{ טבעי בין 2 ל-100}\}$

פעולות על קבוצות:

איחוד בין קבוצות: בהינתן שני קבוצות A ו-B, האיחוד של A ו-B מסומן $(A \cup B)$ והיא הקבוצה המוגדרת ע"י $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$

במשמעות של ו/או!

דוגמה: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,\{1\},\{2,3\}\}$

$A \cup B = \{1,2,3,\{1\},\{2,3\}\}$

תכונות האיחוד:

1) אם $A \subseteq B$ אז $A \cup B = B$

2) קומוטטיביות $A \cup B = B \cup A$

3) אסוציאטיביות $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $A \cup A = A$

5) $A \cup \emptyset = A$

6) $A \subseteq A \cup B$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 3

<u>פעולות על קבוצות</u>:

<u>חיתוך</u>: החיתוך של A ו-B מסומן ע"י $A \cap B$ והוא הקבוצה המוגדרת ע"י $A \cap B = \{x \mid x \in B \text{ וגם } x \in A\}$

דוגמא: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,4,5\}$

$A \cap B = \{1\}$

נאמר ש-A ו-B זרות אם $A \cap B = \phi$.

תכונות של חיתוך:

1) $A \subseteq B$ אזי $A \cap B = A$

2) קומוטטיביות $A \cap B = B \cap A$

3) אסוציאטיביות $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4) $A \cap A = A$

5) $A \cap \phi = \phi$

6) $A \cap B \subseteq A$

<u>הפרש קבוצות</u>: ההפרש בין A ל-B מסומן $A-B$ או $A \setminus B$ והוא הקבוצה המוגדרת ע"י

$A - B = \{x \mid x \notin B \text{ וגם } x \in A\}$

מורידים מ-A את כל האיברים ששייכים ל-B.

דוגמה: $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,2\}$

$A - B = \{3,4\}$

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ $A - B = \{1,2\}$

$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

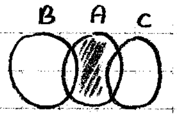
$A = \{1,2\}$ $B = \{1,2,3\}$ $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

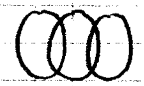
שאלה: הוכח/ הפרך

האם לכל A, B, C $\quad (A-B)-C = A-(B-C)$

נראה שהשוויון לא נכון

נביא דוגמה נגדית





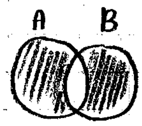
$A=\{1,2,3\} \qquad B=\{1\} \qquad C=\{2\}$

$\{\{1,2,3\}-\{1\}\}-\{2\} \stackrel{?}{=} \{1,2,3\}-\{\{1\}-\{2\}\}$

$\{2,3\}-\{2\} \stackrel{?}{=} \{1,2,3\}-\{1\}$

$\{3\} \neq \{2,3\}$

הפרש סימטרי: ההפרש הסימטרי בין A ל- B מסומן $A \oplus B$ ומוגדר ע"י $A\oplus B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.



תכונות ההפרש הסימטרי:

1) $A\oplus B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

2) $A\oplus B = B\oplus A$

3) $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$

4) $A\oplus A = \phi$

5) $A\oplus\phi = A$

חוקי דה מורגן:

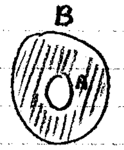
1) אם $A\subseteq B$ אז $B-(B-A)=A$

2) אם $A\subseteq B$ ו- $B\subseteq C$ אז $C\setminus B \subseteq C\setminus A$

3) $C\setminus(A\cup B) = (C\setminus A)\cap(C\setminus B)$

4) $C\setminus(A\cap B) = (C\setminus A)\cup(C\setminus B)$

הוכחת סעיף 1:



מהי הקבוצה $B-(B-A)$?

$x \in B-(B-A) \iff x \in B$ וגם $x \notin (B-A) \iff$

$x \in B$ וגם $x \notin \{y \mid y \notin A \mid y \in B\}$

$\Updownarrow$

$x \in B$ וגם $(x \notin B$ או $x \in A)$

$\Updownarrow$

$x \in B$ וגם $x \in A$

$\Updownarrow$

$x \in A \cap B$

(באופן כללי $B-(B-A) = A \cap B$)

רוצים להראות שאם $A \subseteq B$ אז $B-(B-A) = A$

ראינו $B-(B-A) = A \cap B$

ולפי תכונות החיתוך (1) מתקיים שאם $A \subseteq B$ אז

$A \cap B = A$.

קבוצת החזקה:

בהינתן קבוצה A קבוצת החזקה של A מסומנת $P(A)$ והיא קבוצת כל תתי הקבוצות של A .

$$P(A) = \{ S \mid S \subseteq A \}$$

דוגמה: $P(A) = \{ \phi , \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$ $\quad A = \{1,2\}$

$P(\phi) = \{ \phi \}$

$P(\{3\}) = \{ \phi , \{3\} \}$

באופן כללי עבור קבוצה סופית A - מספר האיברים ב $P(A)$ הוא $2^{|A|}$.

לכן מסמנים את $P(A)$ בתור 2^A .

טענה: לכל A,B $\quad P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$

נראה $S\in P(A\cap B) \Leftrightarrow S\in P(A)\cap P(B)$.

הוכחה:

$S\in P(A\cap B)$

$\Updownarrow$

$S\subseteq A\cap B$

$\Updownarrow$

לכל x מתקיים $x\in S$ אז $x\in A\cap B$

$\Updownarrow$

לכל x מתקיים $x\in S$ אז $x\in A$ וגם $x\in B$

$\Updownarrow$

לכל $x\in S$ מתקיים $x\in A$ וגם לכל $x\in S$ מתקיים $x\in B$

$\Updownarrow$

$S\subseteq A$ וגם $S\subseteq B$

$\Updownarrow$

$S\in P(A)$ וגם $S\in P(B)$

$\Updownarrow$

$S\in P(A)\cap P(B)$

(מש"ל)

שאלה: האם $P(A\cup B) = P(A)\cup P(B)$?

נראה שהטענה לא נכונה.

$A=\{1\} \quad B=\{2\}$

$P(A)=\{\phi, \{1\}\}$

$P(B)=\{\phi, \{2\}\}$

$P(A\cup B)=\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(A\cup B) \neq P(A)\cup P(B)$

נראה אם משיקולי גודל.

יהיו A ו-B קבוצות זרות בגודל 2

$|A\cup B| = 4$

$|P(A\cup B)| = 2^4 = 16$

$|P(A)| = 4$

$|P(B)| = 4$

$$|P(A) \cup P(B)| \leq |P(A)| + |P(B)| = 8$$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 4

בניה של קבוצות:

"כלי משחק":

כלל 1: קיימת קבוצה המכילה אפס איברים (לא מכילה איברים) וזו הקבוצה הריקה.

אבחנה - הקבוצה הריקה יחידה.

כלל 2: כלל הזוג - בהינתן קבוצות A ו B קיימת קבוצה C שאיבריה היחידים הם A ו B, $C=\{A,B\}$

C נקראת זוג לא סדור.

$\{\phi\} = \{\phi,\phi\}$

* האם ניתן לקבל $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$?

לא, כרגע בעזרת כללים 1 ו 2 רק קבוצות עם שני איברים לכל היותר.

כלל 3: כלל האיחוד - בהינתן קבוצות A ו B קיימת A ו B קיימת קבוצה C כך שאיבריה היחידים הם איברי A ואיברי B. C נקראת האיחוד של A ו B. $C=(A\cup B)$.

* עכשיו ניתן לקבל את הקבוצה $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$.

באופן כללי בהינתן קבוצות $A_1,\dots,A_n$ ניתן לבנות את הקבוצה $\{A_1,\dots,A_n\}$.

* איך מקבלים את הקבוצה $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$?

$\{\phi,\{\phi\}\}$

$\{\phi\} \overset{2}{\Downarrow} \{\{\phi\}\} \Downarrow \{\{\{\phi\}\}\}$

<u>כלל 4</u>: כלל ההפרדה, התכונה - תכונה Q של איברים מקבוצה A היא תכונה שהאיבר יכול לקיים או לא לקיים.

לדוגמא: A - הטבעיים Q - השלמים, הזוגיים.

הנחה: בהינתן קבוצה A ותכונה Q של איברים מ-A קיימת קבוצה B המכילה את כל איברי A המקיימים Q ורק אותם.

נגדיר תכונה $x\in C$ וגם נקבל מ-A את $A\cap C$.

נגדיר תכונה $x\notin C$ ונקבל A/C.

* בהינתן קבוצת הטבעיים ניתן לקבל את השלמים, פרטיים, אינרציונליים.

<u>כלל 5</u>: כלל החזקה - הנחה: בהינתן קבוצה A קיימת קבוצה B שהיא קבוצת כל תתי הקבוצות של A.

B מסומנת $P(A)$ $\qquad P(A)=\{S \mid S\subseteq A\}$

* <u>דוגמא</u>: בהינתן קבוצה A הוכיחו כי קיימת הקבוצה $B=\{S \mid S$ תת קבוצה של A בגודל $2\}$

בהינתן A קיימת $P(A)$ (כלל 5 - כלל החזקה) נשתמש בכלל התכונה. נגדיר תכונה של תתי קבוצות של A - מס' האיברים 2. נבחר את B מתוך $P(A)$.

* השאלה - <u>האם קיימת קבוצה אוניברסלית</u>?

האם קיימת קבוצה U כך שלכל קבוצה A מתקיים $A\in U$?

הפרדוקס של ראסל: נניח בשלילה שקיימת קבוצה אוניברסלית U.

ע"י שימוש בכלל התכונה נגדיר מ-U את הקבוצה U_0

$U_0=\{A, A\notin A\}$ (התכונה $A\notin A$)

האם $U_0\in U_0$?

אם $U_0 \in U_0$ אז לפי ההגדרה של U_0 (התכונה) $U_0 \notin U_0$

קיבלנו סתירה.

אחרת $U_0 \notin U_0$ ואז ע"פ ההגדרה $U_0 \in U_0$, קיבלנו סתירה.

לכן לא יתכן שקיימת קבוצה אוניברסלית U.

* <u>שאלה</u>: האם קיימת קבוצה אוניברסלית של סינגלטונים?

(סינגלטון (יחידון) קבוצה עם איבר אחד $\{A\}$)

השאלה האם קיימת קבוצה V כך שלכל קבוצה A

$\{A\} \in V$?

נראה כי לא קיימת קבוצה של סינגלטונים.

נניח בשלילה שקיימת קבוצה V כזו ובעזרת φ התכונה

נגדיר מתוכה את $V_0 = \{\{x\} \mid \{x\} \notin x\}$

האם $\{V_0\} \in V_0$? (המשך)

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 5

זוג סדור:

זוג סדור הם שני איברים עם סדר ביניהם, אחד מוספר כראשון והאחר כשני. סימון: (a,b) , $<a,b>$.

ההבדל בין $\{a,b\}$ ל- $<a,b>$?

I) בקבוצה אין חשיבות לסדר ואין חזרות.

II) בזוג סדור $<a,b> \neq <b,a>$ $\quad a\neq b$

III) $<a,a>$ - זוג סדור

$\{a,a\}$ - קבוצה של איבר אחד, סינגלטון

* מה נדרוש מהגדרה?

I) $A\neq B$ $\quad <A,B> \neq <B,A>$

II) $A=A'\,,\ B=B' \Leftrightarrow <A,B> = <A',B'>$

הגדרה I:

נגדיר $<A,B>$ באופן הבא $<A,B> = \{A,\{B\}\}$.

הגדרה לא טובה. דוגמא נגדית:

$A=\{1\} \quad B=\{2\}$

$<A,B> = \{\{1\},\{\{2\}\}\}$

$A'=\{\{2\}\}\ ,\ B'=1$

* כוונה נגדיר זוג סדור: $<A,B> = \{\{A\},\{A,B\}\}$

נראה כי בהינתן A ו- B קיימת הקבוצה

$<A,B> = \{\{A\},\{A,B\}\}$?

מ- A ו- B לפי אק' הזוג נקבל את $\{A,B\}$.

מ- A ו- A נקבל $\{A\}$

ושוב לפי אק' הזוג נקבל $\{\{A\},\{A,B\}\}$

נראה שהמודל של $\langle A,B\rangle$ עונה על הדרישות.

נראה שמתקיימת דרישה 2 ודרישה 1 נובעת מכאן.

נזכיר $\langle A,B\rangle=\langle A',B'\rangle \Leftrightarrow A=A' \,,\, B=B'$

הוכ': $\{\{A\},\{A,B\}\}=\{\{A'\},\{A',B'\}\} \Leftrightarrow A=A' \,,\, B=B'$

$\Leftarrow$ אם $A=A'$ ו- $B=B'$ אזי.

$\Rightarrow$ נניח $\{\{A\},\{A,B\}\}=\{\{A'\},\{A',B'\}\}$.

(1) אם $\{A\}=\{A'\}$ ו- $\{A,B\}=\{A',B'\}$ אמנם ש $A=A'$ מ-(1)

ולכן מ-(2) נקבל או ש- $A=A'$ ו- $B=B'$ או $A=B'$ ו- $A'=B$

(יתכן ש- $A=B'$ אך עפ"י (1) נקבל $A=A'=B'$ ומכאן $\{A',B'\}$ מכיל רק איבר אחד ולכן $A=B$ ולכן $B=B'$).

יוצא ש- $A=A'$ ולכן נבחר באפשרות הראשונה.

(2) אחרת $\{A\}=\{A',B'\}$ ו- $\{A,B\}=\{A'\}$. מאחר וב- $\{A\}$

יש רק איבר אחד נקבל $A=A'=B'$.

באותו אופן נקבל $A=B=A'$ בסה"כ $A=B=A'=B'$.

<u>הערות נוספות:</u>

1) בקבוצה $\langle A,B\rangle$ יש שני איברים ואם $A=B$ אז

יש איבר אחד.

2) $A,B \notin \langle A,B\rangle$

<u>שלשה סדורה:</u>

$$\langle a,b,c\rangle=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$$

באותו אופן נגדיר סדר עבור n איברים, אפשרים n-יה

סדורה. (רביעיה - שלשה ואיבר וכך הלאה)

מכפלה קרטזית:

בהינתן קבוצות A ו-B . המכפלה הקרטזית של A ו-B מסומנת $A\times B$ ומוגדרת ע"י $A\times B=\{<a,b> \mid a\in A,\ b\in B\}$.

$A\times B$ היא קבוצת כל הזוגות הסדורים שהאיבר הראשון מ-A והשני מ-B .

דוגמא: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b\}$

$$A\times B=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>, <1,b>,<2,b>,<3,b>\}$$

$$B\times A=\{<a,1>,<a,2>,<b,1>, <b,2>,<a,3>,<b,3>\}$$

* אם $A\neq B$ וכן לא ריקות $A\times B = B\times A$
* עבור A ו-B סופיות $|A\times B|=|A|\cdot|B|$
* הערה $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

$(A\times B)\times C$ ⇓ זוגות שבהן האיבר הראשון כל סדור מ- $A\times B$

$A\times(B\times C)$ ⇓ זוגות שבהן האיבר השני כל סדור מ- $B\times C$

* מכפלה קרטזית של קבוצה עם עצמה.

ניתן להכפיל קבוצה A עם עצמה . לדוגמה: $A=\{0,1\}$

$$A\times A=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\}$$

כאשר מכפילים קבוצה עם עצמה מסמנים בחזקה

$A^0=\{\emptyset\}$

$A^1=A$

$A^2=A\times A$

$A^3=A\times A\times A$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 6

נראה שבהינתן A ו- B קיימת הקבוצה $A\times B$.

$$A\times B = \{\langle a,b\rangle \mid a\in A,\ b\in B\} = \{\{\{a\},\{a,b\}\} \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

$a\in A$ ו- $b\in B$ $\quad a,b\in A\cup B$

$$\{a\},\{a,b\}\subseteq A\cup B$$

$$\underset{x}{\{a\}},\ \underset{y}{\{a,b\}}\in \underset{C}{P(A\cup B)}$$

מדברים על $\{x,y\}$ רק ש- $x,y\in C$

אז $\{x,y\}\in P(C)$

כלומר $\{\{a\},\{a,b\}\}\in P(P(A\cup B))$

$A\times B$ היא קבוצה של קבוצות שכן איברים מתוך $P(P(A\cup B))$.

א-A ו-B נקבל ע"י איחוד את $A\cup B$

נפעיל פעמיים כלל החזקה $P(P(A\cup B))$

נזכור את המונח - הקבוצה הא זוג סדור שבו האיבר הראשון א-A והאיבר השני א-B.

<u>תכונות המכפלה הקרטזית:</u>

1) $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$

2) $A\times B=\emptyset \iff A=\emptyset$ ו/או $B=\emptyset$.

3) אם $A\subseteq B$ אז לכל קבוצה C $A\times C\subseteq B\times C$.

4) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

5) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

6) $(A\setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$

7) $\bigcup\bigcup A\times B = A\cup B$

רלציות / יחסים

הגדרה: רלציה בינארית בין A ל-B היא תת קבוצה כלשהי של $A\times B$.

רלציה טרינרית היא תת קבוצה כלשהי של $A\times B\times C$
(שמוגדרת ע"י $(A\times B)\times C$)

באופן כללי רלציה n ארית היא תת קבוצה כלשהי של
$A_1\times \dots \times A_n$.

דוגמאות:

$A=\{1,2,3,4\}$ $\quad B=\{A,B,C\}$

$R_1=\{(1,a),(2,b)\}$

$R_2=\{(3,b),(4,b)\}$

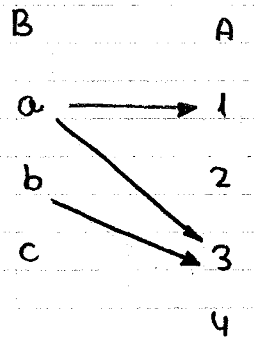
$R_3=A\times B$

$R_4=\emptyset$

בד"כ הרלציה צריכה להיות תכונה משותפת לכל הזוגות
המקיימים את היחס.
(לא ננסה לתאר יחס נתאר את הזוגות הספציפים המקיימים
את היחס)

נתאר רלציה מ-B ל-A

$R_5=\{(a,1),(b,3),(a,3)\}$



ניתן לראות שלא הכרחי מכל צומת
יוצאת קשת או לכל צומת נכנסת
קשת ויתכן שלצומת אחד נכנסת
או יוצאת יותר מקשת אחת.

שאלה: נתונות A ו-B סופיות, כמה רלציות שונות בין A ל-B קיימות?

שקול לשאלה כמה תתי קבוצות אפשריות יש ל-$A\times B$?

$2^{|A\times B|} = 2^{|A||B|}$

<u>תחום וטווח של רלציה:</u> (נתונה רלציה מ-A ל-B)

$Domain(R) = \{ x\in A \mid (x,y)\in R \,,\ \text{קיים } y\in B \}$

כל הנקודות ב-A שמהן יוצא לפחות חץ אחד.

$Range(R) = \{ y\in B \mid (x,y)\in R \,,\ \text{קיים } x\in A \}$

כל הנקודות ב-B אליהן נכנסת לפחות קשת אחת.

<u>רלציה הופכית:</u>

נתונה רלציה R בין A ל-B הרלציה ההופכית ל-R היא רלציה מ-B ל-A מסומנת ב-R^{-1} ומוגדרת ע"י $R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y)\in R \}$.

הגרף של R^{-1} מתקבל ע"י הפיכת כיוון החיצים.

<u>רלציה משלימה:</u>

נתונה רלציה R בין A ל-B אז הרלציה המשלימה ל-R מסומנת R^c $(\bar{R})$ ומוגדרת ע"י $R^c = (A\times B)\setminus R$

<u>הרכבה של רלציות:</u>

נתונה רלציה R מ-A ל-B $(R\subseteq A\times B)$

ורלציה S מ-B ל-C $(S\subseteq B\times C)$

מגדירים את ההרכבה R ו-S

$R\circ S = \{ (a,c) \mid (b,c)\in S \,,\ (a,b)\in R \text{ כך ש } b\in B \text{ קיים} \}$

$R\circ S \subseteq A\times C$

$A=\{1,2,3\}$ $\quad B=\{a,b,c\}$ $\quad C=\{T,F\}$

$$
\begin{tikzcd}
A & B & C \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & a \arrow[r] & T \\
2 \arrow[r] & b & F \\
3 \arrow[r] & c \arrow[ur] & \\
 & R & S
\end{tikzcd}
$$

מסלול מאורך 2

G הזוגות שיש מסלול

מאורך 2

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 7

הרכבת רלציות:

הגדרה - בהינתן רלציה R מ-A ל-B ורלציה S מ-B ל-C. הרלציה $R \circ S$ היא רלציה מ-A ל-C והיא מוגדרת ע"י

$$R \circ S = \left\{ \langle a,c \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in A \quad c \in C \\ \text{קיים } b \in B \text{ כך ש} \\ \langle a,b \rangle \in R \\ \langle b,c \rangle \in S \end{array} \right\}$$

דוגמא:

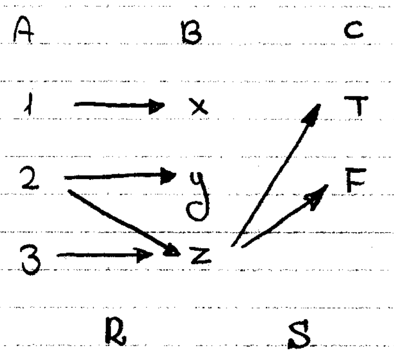
$A = \{1,2,3\}$

$B = \{x,y,z\}$

$C = \{T,F\}$

$R = \{\langle 1,x \rangle, \langle 2,y \rangle, \langle 2,z \rangle, \langle 3,z \rangle\}$

$S = \{\langle z,T \rangle, \langle z,F \rangle\}$



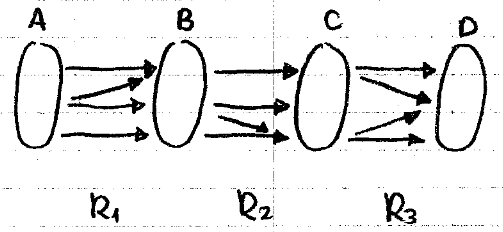
$R \circ S = \{\langle 2,T \rangle, \langle 2,S \rangle, \langle 3,T \rangle, \langle 3,F \rangle\}$

$R \circ S$ מכילה את כל הזוגות שעבורם יש מסלול מ-A ל-C בגרף של הרלציות R ו-S (ע"י מסלול שמורכב מקשת של R ואחריה קשת של S)

תכונות ההרכבה:

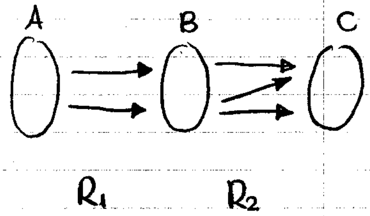
1) אסוציאטיביות - $(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$

כאשר
$$R_1\subseteq A\times B$$
$$R_2\subseteq B\times C$$
$$R_3\subseteq C\times D$$



הסבר: גם אגף ימין וגם שמאל מתאימים את הזוגות מ- A ל- D לגביהם יש מסלול באורך 3.

2) $(R_1\circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1}\circ R_1^{-1})$



הוכחה:

$(R_1\circ R_2)^{-1} =$

$$\{\langle c,a\rangle \mid \langle a,c\rangle\in R_1\circ R_2\} = \left\{\langle c,a\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{קיים } b\in B \\ \langle a,b\rangle\in R_1 \\ \langle b,c\rangle\in R_2 \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\langle c,a\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{קיים } b\in B \\ \langle b,a\rangle\in R_1^{-1} \\ \langle c,b\rangle\in R_2^{-1} \end{array}\right\} = R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$$

3) $R\circ S$ מוגדרת לא בהכרח אומר ש- $S\circ R$ מוגדרת.

רלציות מעל קבוצה

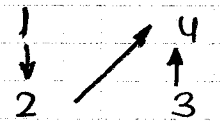
רלציה R בינארית מוגדרת מעל קבוצה A אם $R \subseteq A\times A$.

דוגמא: רלציית הזהות $I_A = \{ \langle x,x \rangle \mid x \in A \}$

דוגמא: $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle \}$

כדי לצייר את R משרטטים גרף שקבוצת הצמתים שלו A, וקבוצת הקשתות A.



חזקות של רלציה מעל קבוצה

$R \circ R = R^2$

R^2 תכיל את כל הזוגות ב-A שבינהם יש מסלול של R באורך 2.

$R^3 = R^2 \circ R = R \circ R^2$

עם האסוציאטיביות ניתן לבצע חוקי חזקות:

$R^{m+n} = R^m \circ R^n$

$R^1 = R$

$R^0 = I$

תכונות של רלציות מעל קבוצה

I) רפלקסיביות:

1) נאמר שרלציה R מעל קבוצה A היא רפלקסיבית אם
לכל $x\in A$ מתקיים $\langle x,x\rangle\in R$.

* בגרף של R יש לולאות עצמיות של כל הצמתים
* $I_A \subseteq R$
* האלכסון במטריצה שמייצגת את R הוא 1.

2) נאמר שרלציה R מעל A היא לא רפלקסיבית אם
קיים $x\in A$ כך שמתקיים $\langle x,x\rangle\notin R$.

3) רלציה R נקראת אי-רפלקסיבית אם לכל $x\in A$ מתקיים
$\langle x,x\rangle\notin R$

* בגרף אין לולאות עצמיות.
* במטריצה האלכסון הוא אפס.

II) סימטריות:

1) נאמר שרלציה R מעל A היא סימטרית אם לכל $x,y\in A$
אם $\langle x,y\rangle\in R$ אז $\langle y,x\rangle\in R$.

* בגרף לכל קשת יש קשת [illegible] מקבילה
* המטריצה היא סימטרית.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 8

3. רלציה R היא אסימטרית אם לכל $x,y \in A$ אם $\langle x,y \rangle \in R$ אז $\langle y,x \rangle \notin R$.

* אין קשתות בין מקבילות ואין לולאות עצמיות.

4. רלציה R היא אנטי סימטרית אם לכל $x,y \in A$ אם $\langle x,y \rangle \in R$ ו $\langle y,x \rangle \in R$ אז $x=y$.

* מותרות לולאות עצמיות, אין קשתות כפולות.

<u>דוגמאות:</u>

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R_1 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$$

לא רפלקסיבית, אי רפלקסיבית. לא סימטרית, אסמטרית, אנטיסימטרית.

$$R_2 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$$

לא סימטרית.

$$R_3 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$$

לא סימטרית, אנטי סימטרית.

$$R_4 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$$

סימטרית.

<u>דוגמאות נוספות:</u>

$\leq$ בין מספרים - רפלקסיבי, אנטי סימטרי, לא סימטרי.

$<$ - אי רפלקסיבי, אסימטרי.

$\subseteq$ הקבוצות - רפלקסיבי אנטיסימטרי.

$=$ - רפלקסיבי וסימטרי.

II) טרנזיטיביות:

רלציה R מעל A הנה טרנזיטיבית אם לכל $x,y,z \in A$

אם $\langle x,y \rangle \in R$ ו- $\langle y,z \rangle \in R$ אז $\langle x,z \rangle \in R$.

דוגמא: $\leq$, $=$, $<$, $\subseteq$, $\subset$

א בגרף בין 6 שני צמתים שבניהם עובר מסלול באורך 2 יש קשת.

בהינתן רלציה R, מה צריך להוסיף ל-R כדי שתהיה טרנזיטיבית?

R^2 - 6 הזוגות בינהם עובר מסלול באורך 2

באופן דומה נצטרך להוסיף גם את R^3.

ניתן להראות שלכל מספר n צריך להוסיף את R^n (6 הזוגות בינהם יש מסלול באורך n בגרף).

השאלה - האם כבר מספיק? (בתרגול)

סגור של רלציה ביחס לתכונה α:

בהינתן רלציה R מעל A ותכונה α, הסגור של R ביחס ל-α הנו הרלציה S המקיימת:

1) $R \subseteq S$

2) S מקיימת את α

3) לכל רלציה T שמקיימת את α ומכילה R מתקיים $S \subseteq T$

יחס סדר:

1) נאמר שקבוצה R מעל קבוצה A היא יחס סדר חלקי אם R רפלקסיבית, אנטיסימטרית וטרנזיטיבית. $(\subseteq, \leq)$

2) נאמר ש-R יחס סדר מלא אם R יחס סדר חלקי ולכל $x,y \in A$ או $\langle x,y\rangle \in R$ או $\langle y,x\rangle \in R$ $(\leq)$

יחסי שקילות:

הגדרה: נאמר שקבוצה E מעל קבוצה A היא קבוצת שקילות אם E רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.

דוגמאות:

1) $A_1 =$ אנשים

$E_1 = \{\langle x,y\rangle \mid$ x ו-y הם באותו מעמד $\}$

2) $A_2 =$ משולשים

$E_2 = \{\langle x,y\rangle \mid$ x ו-y משולשים דומים $\}$

3) $A_3 =$ מספרים שלמים

$E_3 = \{\langle x,y\rangle \mid x \equiv y \bmod 3\}$

4) $A_4 =$ מילים בעברית

$E_4 = \{\langle x,y\rangle \mid$ x ו-y מתחילות באותה אות $\}$

הסבר לגבי E_3: $x \equiv y \bmod 3$ ל-x ו-y אותה שארית בחלוקה ב-3.

$x = 3i + r \qquad r = \{0,1,2\}$
$y = 3j + r$

שקול לטענה $3 \mid (x-y)$.

נראה ש- E_3 רלצית שקילות:

* רפלקסיביות: לכל מספר x, $3/x-x=0$

* סימטריות: אם $3/(x-y)$ אז $3/(y-x)$

* טרנזיטיביות: אם $3/(x-y)$ ו- $3/(y-z)$ אז $3/(x-y)+(y-z)=(x-z)$

<u>הגדרה:</u> בהינתן רלצית שקילות E מעל A, מגדירים לכל איבר $x \in A$ את מחלקת השקילות של x $[x]=\{y \mid \langle x,y\rangle \in E\}$

1) $[\text{שירה}]=$ { האנשים הדתים במצב. שלו }

2) $[x]=$ { x המשולשים הדומים ל- x }

4) $[\text{מוסקה}]=$ { המילים המתחילות ב- מ }

3) $[0]=\{0,3,-3,\dots\}=\{y \mid y=3k$, עבור k שלם$\}$

$[1]=\{\dots,-2,1,4,\dots\}=\{y \mid y=3k+1$, עבור k שלם$\}$

$[2]=\{\dots,-1,2,5,\dots\}=\{y \mid y=3k+2$, עבור k שלם$\}$

$[0]=[3]=[6]$

$[0]\cap[1]=\phi \qquad [0]\cap[2]=\phi \qquad [1]\cap[2]=\phi$

$[0]\cup[1]\cup[2]=\mathbb{Z}$

<u>הגדרה:</u> קבוצת תתי קבוצות לא ריקות (זרות זו לזו) של A שאיחוד הוא A מהווה חלוקה של A.

דוגמא:

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$\pi_1=\{\{1\},\{2,3,4,5\}\}$

$\pi_2=\{\{1,2,3,4,5\}\}$

$\pi_3=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$

$\{[0],[1],[2]\}$ מהווה חלוקה של $\mathbb{Z}$.

__הגדרה__: בהינתן רלצית שקילות E מעל A קבוצת המנה של E
$$A \backslash E = \{[x] \mid x \in A\}$$

דוגמא:
$$A_3 / E_3 = \{[0],[1],[2]\}$$
$$|A_4 / E_4| = 22$$

__משפט__: תהי E רלצית שקילות מעל A כי אז קבוצת המנה $A \backslash E$ מהווה חלוקה של A.

במילים אחרות, יחס שקילות משרה חלוקה על הקבוצה.

למה 1: תהי E רלצית שקילות מעל A אזי לכל $x \in A$ אז $[x]$
הוכחה: לכל $x \in A$ מתקיים $\langle x,x\rangle \in E$ ולכן $[x] \ni x$ כלומר $x \in [x]$
ומכאן $[x] \neq \phi$.

למה 2: תהי E רלצית שקילות מעל A אזי לכל $x,y \in A$
$$\langle x,y\rangle \in E \Leftrightarrow [x]=[y]$$

הוכחה:

$\Rightarrow$ נניח $[x]=[y]$ ונראה $\langle x,y\rangle \in E$.
ע"פ הרפלקסיביות של E $\langle y,y\rangle \in E$ ולכן $y \in [y]$
מאחר ו- $[x]=[y]$ נקבל $y \in [x]$ ולכן ע"פ ההגדרה $\langle x,y\rangle \in E$

$\Leftarrow$ נניח $\langle x,y\rangle \in E$ ונראה $[x]=[y]$ כלומר לכל $a \in A$ $a \in [y] \Leftrightarrow a \in [x]$.
$$a \in [x] \Rightarrow \langle x,a\rangle \in E$$
ידוע כי $\langle x,y\rangle \in E$ ע"פ הסימטריות $\langle y,x\rangle \in E$
עפ הטרנזיטיביות $\langle y,a\rangle \in E$ כלומר $a \in [y]$.

$\Rightarrow$ אותו דבר רק בשורה הפוך ומשתמשים רק ב- $\langle y,x\rangle$
והטרנזיטיביות.

אם הפונקציות כולן מוגדרות מעל A, אז A סגורה תחת F בפעולה.

<u>טענה 8</u> תהי F משפחת פונקציות $F=\{f_1,\dots,f_m\}$ ותהיינה $A_1, A_2 \subseteq A$ קבוצות הסגורות תחת F אזי $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת F בפעולה.

פונקציות:

נאמר שרלציה $f \subseteq A \times B$ היא פונקציה אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד כך ש $\langle x,y \rangle \in f$.

סגירות תחת פונקציות:

הגדרה: קבוצה $A_0 \subseteq A$ סגורה תחת פונקציה $f: A \to A$ אם לכל $x \in A_0$ מתקיים $f(x_0) \in A_0$.

לדוגמא: זוגיים סגורים תחת $+4$
$\{1, 5\}$ לא סגורה תחת $+4$.

הגדרה: תהי $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ משפחת פונקציות כאשר $f_i: A^{k_i} \to A$ (כלומר f_i היא פונקציה k_i מקומית)
נאמר ש- $A_i \subseteq A$ סגורה תחת F אם לכל i
מתקיים A_0 סגורה תחת f_i (כלומר לכל $x_1, \dots, x_{k_i} \in A_0$ מתקיים $f(x_1, \dots, x_{k_i}) \in A_0$)

הערה: תמיד מתקיים ש- A סגורה תחת F (כי הפונקציות ב- F מוגדרות מעל A)

טענה: תהי F משפחת פונקציות $F = \{f_1, \dots, f_m\}$
המוגדרות מעל A תהיינה $A_1, A_2 \subseteq A$ סגורות תחת F
אזי $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת F.

הוכחה:

צריך להראות $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת F. לשם כך
נראה כי לכל $1 \le i \le m$ $A_1 \cap A_2$ סגורה תחת f_i.
תהי $f_i: A^{k_i} \to A$ פונקציה k_i מקומית.

צ"ל לכל $x_1,\dots,x_{k_i} \in A_1 \cap A_2$ מתקיים $f_i(x_1,\dots,x_{k_i}) \in A_1 \cap A_2$.

$x_1,\dots,x_{k_i} \in A_1 \cap A_2$

$\Downarrow$

$x_1,\dots,x_{k_i} \in A_1$ וגם $x_1,\dots,x_{k_i} \in A_2$

מאחר ו- A_1 סגורה תחת f_i (A_1 סגורה תחת F)

מתקיים $f_i(x_1,\dots,x_{k_i}) \in A_1$.

באותו אופן A_2 סגורה תחת f_i $f_i(x_1,\dots,x_{k_i}) \in A_2$.

לכן $f_i(x_1,\dots,x_{k_i}) \in A_1 \cap A_2$.

<u>טענה</u>: תהי F משפחת פונקציות $F=\{f_1,\dots,f_m\}$ ותהי B קבוצה של תתי קבוצות של A שכולן סגורות תחת F. אזי $\cap B$ סגורה תחת F.

<u>הגדרת קבוצות באינדוקציה</u>

הנחה: נניח שנתון יקום מוגדר לכל אורך.

בהינתן קבוצה מסוימת B (קבוצת הבסיס) וקבוצת פעולות F מגדירים באינדוקציה את הקבוצה $X_{B,F}$.

$X_{B,F}$ היא הקבוצה המקיימת את שלושת הדרישות הבאות:

(1) $B \subseteq X_{B,F}$ (כל איברי הבסיס נמצאים ב $X_{B,F}$)

(2) $X_{B,F}$ סגורה תחת F (אם $a_1,\dots,a_k \in X_{B,F}$ ו- y מתקבל מהם ע"י אחת הפעולות ב F אז $y \in X_{B,F}$)

(3) כל האיברים ב $X_{B,F}$ הם הכרח"ים לקיום דרישה (1) ו- (2).

דוגמא:

$B = \{0\}$ $F = \{+1\}$

$X_1 = \mathbb{Z}$ (1) (2) X

$X_2 = \mathbb{N}$ (1) (2)

$X_3 =$ הזוגיים (1) X

דוגמא: שפת ABA

$\{ab\}$

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1(\omega) = \omega aba$

$f_2(\omega) =$ מחליפה את הרצף הראשון מימין של aa אם קיים כבר ב b

$f_3(\omega) =$ מוחקת את הרצף הראשון מימין של bbb אם קיים

איברים בשפה:

ab
ababa (f_1)
ababaaba (f_1)
ababbba (f_2)
abaa (f_3)
abb (f_2)

נראה שההגדרה שהצגנו טובה. נראה כי בהינתן קבוצת בונים B (קבוצת בסיס) וקבוצת פעולות F קיימת קבוצה הקטנה של דרישות 1-3 והיא יחידה.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 11

הוכחת קיום:

נגדיר $A=\{X \mid X$ עונה על דרישות (1) ו-(2)$\}$

A לא ריקה מאחר והקבוצה שעליה מוגדרות הפונקציות ובפרט אותן הבסיס נמצאת ב-A. שקול לומר שקבוצת העולם שעליה מדברים נמצאת בתוך A.

נגדיר $X^*=\cap A$

נראה ש-X^* עונה על דרישות 1-3.

דרישה 1: צריך להראות ש-$B\subseteq X^*$. מאחר וכל קבוצה $X\in A$ X מקיימת דרישה (1) אזי $B\subseteq X$. לכן $B\subseteq \cap A=X^*$.

דרישה 2: צ"ל ש-X^* סגורה תחת F. ראינו קודם כי אם כל הקבוצות שהם איברי A סגורות תחת F אזי גם $X^*=\cap A$ סגורה תחת F.

דרישה 3: צ"ל שכל האיברים ב-X^* הכרחיים לקיום (1) + (2) (X^* הוא חיתוך של כל הקבוצות המקיימות את (1) + (2) ולכן בהכרח בכל קבוצה המקיימת את דרישות (1) + (2) נמצאים כל איברי X^*). נניח בשלילה שקיימים ב-X^* איברים שאינם הכרחיים לקיום דרישות (1) + (2) ולכן קיימת קבוצה המקיימת את דרישות (1) + (2) בלי האיברים האלה. אזי לפי ההגדרה $X_1\in A$ ולכן $X^*=\cap A\subseteq X_1$ בסתירה לכך ש-X^* מכילה איברים שאינם מופיעים ב-X_1.

הוכחת יחידות:

נניח בשלילה שקיימת $X'\neq X^*$ העונה על דרישות 1-3.

X^* הוא החיתוך של כל הקבוצות המקיימות את דרישה (1) ו-(2) ולכן מוכלת בכל אחת מהקבוצות הללו ובפרט $X^*\subseteq X'$ (כי X' מקיימת דרישות (1) ו-(2)). מכאן ש-$X^*\subsetneq X'$ והשוני הוא בכך ש-X' מכילה איברים שאינם נמצאים ב-X^*. בסתירה לכך ש-X' מקיימת דרישה 3.

משפט ההוכחה:

משפט ההוכחה באינדוקציה: בהינתן קבוצת בסיס B וקבוצת פונקציות F על מנת להוכיח שקבוצה $X_{B,F} \subseteq Y$ מספיק שנראה ש-Y מקיימת את דרישות (1) ו-(2) כלומר

(1) $B \subseteq Y$

(2) Y סגורה תחת F.

איך מראים ש-$a \in X_{B,F}$?

הגדרה: בהינתן קבוצת בסיס B וקבוצת פעולות F, סדרת יצירה עבור a מתוך $X_{B,F}$ היא סדרה סופית $a_1,\dots,a_n$ המקיימת:

(1) $a_n = a$

(2) לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש-a_i איבר בסיס או ש-a_i התקבל מאיברים קודמים בסדרה ע"י אחת הפעולות ב-F.

טענה: לכל קבוצת בסיס B ולכל קבוצת פעולות F מתקיים לכל איבר a: $a \in X_{B,F} \iff$ ∃ ל-a סדרת יצירה מתוך $X_{B,F}$.

דוגמאות:

שפת ABA

$B = \{ab\}$

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1(\omega) = \omega aba$

$f_2(\omega) =$ הופכת aa ב-b

$f_3(\omega) =$ מוחקת bbb

נכתוב סדרת יצירה עבור abb:

(1) ab בסיס

(2) ababa f_1 על 1

(3) ababaaba 2 & f_1

(4) ababbba 3 & f_2

(5) abaa 4 & f_3

(6) abb 5 & f_2

סדרת יצירה לא חייבת להיות מינימלית, לא יחידה אבל תמיד סופית.

<u>איך מראים ש- $a \notin X_{B,F}$</u> ?

כדי להוכיח שאיבר $a \notin X_{B,F}$ מוצאים תכונה T כך שמתקיים

(1) a לא מקיים את T.

(2) כל איברי $X_{B,F}$ מקיימים את T.

הוכחת (1) - בדרך כלל מיידית.

הוכחת (2) - נסמן ב- $\mathcal{Y}$ את קבוצת כל האיברים שמקיימים T.

עלינו להוכיח ש- $X_{B,F} \subseteq \mathcal{Y}$. ע"פ משפט ההגדרה באינדוקציה מספיק שנראה

(1) $B \subseteq \mathcal{Y}$ (כל איברי הבסיס מקיימים את T)

(2) $\mathcal{Y}$ סגורה תחת F (הפעולות ב- F משמרות את התכונה T - אם נצא מאיברים שמקיימים T נקבל כאלו שמקיימים T)

כך נקראת הוכחה באינדוקציה מבנה.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 12

<u>דוגמה</u>: שפת ABA

נראה שהמילה aba היא לא מילה בשפה ה- ABA.

נסמן ב- $\#a(\omega)$ את מספר ה- a-ים ב- ω.

התכונה - $\#a(\omega)$ אי זוגי.

(1) נראה ש- ABA לא מקיימת את התכונה. $\#a(\omega)=2$ זוגי.

(2) נראה שכל המילים בקבוצה $X_{B,F}$ מקיימות את התכונה.

בסיס - נראה ש- ab מקיים את התכונה. $\#a(\omega)=1$ אי זוגי.

צעד סגור - נראה שהפעולות ב- F משמרות את התכונה.

f_1: הנחת האינדוקציה: ω מקיימת את התכונה כלומר $\#a(\omega)$ אי זוגי. נראה ש- $f_1(\omega)$ מקיימת את התכונה.

הוכחה: $\#a(f_1(\omega))=\#a(\omega aba)=\#a(\omega)+2$ ע"פ הנחת האינדוקציה לכן יוצא אי זוגי.

f_2: הנחת האינדוקציה $\#a(\omega)$ אי זוגי

נראה ש- $\#a(f_2(\omega))$ א"ז.

אם $f_2(\omega)=\omega$ אז ע"פ הנחת האינדוקציה $\#a(f_2(\omega))$ אי זוגי

אחרת $\#a(f_2(\omega))=\#a(\omega)-2$ כי $f_2(\omega)$ התקבלה מ-ω ע"י החלפת aa ב- b ע"פ הנחת האינדוקציה אי זוגי.

f_3: הנחת האינדוקציה: $\#a(\omega)$ אי זוגי

נראה ש- $\#a(f_3(\omega))$ אי זוגי.

לפי ההגדרה $\#a(f_3(\omega))=\#a(\omega)$ ע"פ הנחת האינדוקציה אי זוגי.

הערה: אינדוקציה על הטבעיים היא מקרה פרטי של הוכחה באינדוקציית מבנה, כאשר המבנה שלנו הוא $X_{\{0\},\{+1\}}$.

דוגמא:

הבניה של הקבוצה המתבטא בשלבים

1) נבנה את קבוצת כל המילים הסופיות באותיות $\{a,b\}$ ומסמנים $\{a,b\}^*$.

$B=\{\varepsilon\}$

המילה הריקה. מילה עם 0 אותיות

$F=\{f_a, f_b\}$

$f_a(\omega)=\omega a$

$f_b(\omega)=\omega b$

2) נגדיר על $X_{B,F}$ את הפונקציה change שמחליפה a ב b ולהפך.

$change(\varepsilon)=\varepsilon$

$change(\omega a)=change(\omega)b$

$change(\omega b)=change(\omega)a$

טענה: לכל מילה ב $X_{B,F}$ מתקיים

$Change(change(\omega))=\omega$

הוכחה באינדוקציה מבנה של $X_{B,F}$

התכונה $Change(Change(\omega))=\omega$

בסיס: B ש ε מקיימת את התכונה

$change(change(\varepsilon))=\varepsilon$

צעד:

f_a: הנחת האינדוקציה $change(change(\omega))=\omega$

צ"ל $f_a(\omega)$ מקיימת את התכונה

$change(change(f_a(\omega))=f_a(\omega)$

$$change(change(f_a(\omega))) = ch(ch(\omega a)) =$$

$$\underbrace{ch(ch(\omega)b)}_{\text{הגדרת } ch} = \underbrace{ch(ch(\omega)a}_{\text{ה"א } k} = \omega a = f_a(\omega)$$

עבור f_b מוכיחים בצורה דומה.

ננסח את Change כקבוצה:

$<\varepsilon, \varepsilon> \in Change$

אם $<\omega, v> \in Change$ אז $<\omega a, vb> \in Ch$ וגם $<\omega b, va> \in Ch$.

מדוע Change מוגדרת היטב כפונקציה? והאם ניתן להגדיר תמיד פונקציה מעל המבנה האינדוקטיבי?
אפשר להוכיח (בשקפים) מתי שניתן להגדיר פונקציה על המבנה האינדוקטיבי.

דוגמה: שפת Hof:

שפה של מילים ב- $\{ab\}^*$

בסיס $B = \{a\}$

פעולות $F = \{f\}$

$f(\omega) = \omega\, Change(\omega)$

a

ab

abba

abbabab

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 13

פונקציות בונות קבוצות:

פונקציה בונה קבוצות היא פונקציה המקבלת קבוצה ומוציאה קבוצה.

$A \to \{A\}$

$A \to A \cup \{A\}$

$A \to P(A)$

$A \to \langle A,B \rangle$ (עבור B קבועה)

משפט: תהי F פונקציה בונה קבוצות חח"ע (עבור קבוצות שונות של קלט נקבל קבוצות שונות כפלט). אזי לא קיימת קבוצה אוניברסלית V כך שלכל קבוצה A, $F(A) \in V$.

רעיון בהוכחה: בדומה להוכחה שראינו שלא קיימת קבוצה אוניברסלית
אם מניחים בשלילה שקיימת קבוצה V כזו ובונים ממנה
ע"י תכונה $V_0 = \{F(x) \mid F(x) \notin x\}$
והשאלה שנשאל היא האם $F(V_0) \in V_0$?

מחלקות ועקרון ההחלפה:

עבור קבוצות שלא ידוע האם הם נתונות לבנייה ב-ZF שלנו
או לחילופין ידוע כי אין נתונות לבנייה נשתמש במונח מחלקות.

$\{A : \underbrace{\varphi(A)}_{\text{תכונה}}\}$ - ניתן לדבר עליה כמחלקה.

הנחה: אם F פונקציה בונה קבוצות ויש תכונה φ של קבוצות
כך שהקבוצה $\{A : \varphi(A)\}$ קיימת אז גם הקבוצה
$\{F(A) : \varphi(A)\}$ קיימת.

עקרון הסגירות וקיום קבוצות סגורות:

יהי C אוסף של פונקציות מעל קבוצה.

הנחה/ כלל: לכל אוסף סופי C ולכל קבוצה B קיימת קבוצה A כך שמתקיים:

(1) $B \subseteq A$

(2) לכל פונקציה $F \in G$ ו- $b \in A$ מתקיים $F(b) \in A$ כלומר A סגורה תחת G.

אבל שבהינתן קבוצת בסיס וקבוצת פונקציות קיימת קבוצה המכילה את הבסיס וסגורה לפונקציות.

(גרסה של אקסיומת האינסוף)

אידו מילים:

נתון סט Σ (קבוצת האותיות בהם נשתמש) רוצים לבנות Σ^* - אוסף כל הסדרות הסופיות של אותיות מ- Σ.

נראה איך הגדרנו את $\{a,b\}^*$:

$B = \{\varepsilon\}$

$F = \{f_a, f_b\}$ $\quad f_a = \omega a \quad f(b) = \omega a$

נגדיר לכל $\alpha \in \Sigma$ פונקציה מעל קבוצות S_α $\quad S_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$

ע"פ עקרון הסגירות קיימת קבוצה A כך ש $\phi \in A$ ולכל $\alpha \in \Sigma$ A סגורה תחת S_α. נאמר ש A Σ סגורה

(בעקרון הסגירות $B = \{\phi\}$, $C = \{S_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$)

אוסף המילים הסופיות ב- Σ: $\Sigma^* = \bigcap \{x \in A \mid x \text{ } \Sigma \text{ סגורה}, \phi \in x\}$

(בשקפים תכונות של Σ^*).

מילים מעל $\{a,b\}$:

ϕ מסמן ε. $\quad S_a(\phi) = \langle \phi, a \rangle = a \quad S_b(\phi) = \langle \phi, b \rangle = b$

$\varepsilon \neq \phi$ $\quad S_b(a) = S_b(S_a(\phi)) = ab$

$\langle a, b \rangle = \langle \langle \phi, a \rangle, b \rangle$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 14

בשקפים יש הסבר של השוואה בין מילים.

המספרים הטבעיים.

<u>מילים אונריות</u>:

נבחר א"ב $\{1\}$. המילים מעל הא"ב $\{1\}$ נקראות מילים אונריות. המילים האונריות מזוהות עם המספרים הטבעיים.

$1 \to 1$
$2 \to 11$
$3 \to 111$

<u>עוצמות</u>:

בקבוצה סופית A, העוצמה של A היא הגודל של A, $|A|$.

<u>משפט</u>: עבור A ו-B סופיות מתקיים: $|A|=|B|$ קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל.

הוכחה:

(1) נניח ש $|A|=|B|$ ונראה שקיימת פונקציה $f: A\to B$ פונקציה חח"ע ועל.

$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

נגדיר פונקציה $f: A\to B$ באופן הבא $f(a_i)=b_i$

לכל i. קל לראות שזו חח"ע ועל.

(2) נניח שקיימת פונקציה $f: A\to B$ חח"ע ועל. נראה $|A|=|B|$.

נניח $A=\{a_1, \dots, a_n\}$, $B=\{b_1, \dots, b_k\}$. צ"ל $k=n$.

מכיוון ש-f חח"ע לכל איבר ב-A יש תמונה שונה ב-B

ולכן במקרה מספר האיברים ב-B הוא לפחות כמו מספר האיברים ב-A כלומר $n \le k$. f על ולכן לכל איבר ב-B מתקבל כתמונה של איבר מ-A לכן $k \le n$ כלומר $n=k$.

הגדרה: שתי קבוצות A ו- B הם שוות עוצמה אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע ועל. נסמן $|A|=|B|$ או $A \sim B$.

דוגמאות:

(1) $B = \{ m \in \mathbb{N} \mid$ קיים n כך ש- $m=n^2 \}$

נראה ש- $\mathbb{N} \sim B$. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \to B$

$f(n) = n^2$ צ"ל שהיא חח"ע ועל.

(2) $\mathbb{R} \sim (0,1)$ $\quad (0,1) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$

נשתמש ב- $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ חח"ע ועל.

נבנה $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ חח"ע ועל.

I) נבנה $f_1: (0,1) \to (-1,1)$

$f_1(x) = 2x-1$

II) נבנה $f_2: (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f_2(x) = \frac{\pi}{2} x$

III) נבנה $f_3: (0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f_3(x) = \frac{\pi}{2}(2x-1)$

נגדיר $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{tng}\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right)$

(הרכבת הרכבות של השלבים חח"ע ועל)

טענה: היחס $R = \{ \langle a,b \rangle \mid A \sim B \}$ הוא יחס שקילות.

הוכחה:

(1) רפלקסיביות- לכל קבוצה A הכוונה $\langle A,A \rangle \in R$ כלומר צריך להראות $A \sim A$. לכל קבוצה A פונקצית הזהות על A $f: A \to A$ לכל x $f(x) = x$ היא חח"ע ועל.

(2) סימטריות- צריך להראות שאם $\langle A,B \rangle \in R$ אז $\langle B,A \rangle \in R$ כלומר אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל אז קיימת $g: B \to A$ שהיא גם חח"ע ועל.

בתרגיל בית הראינו $f^{-1}:B\to A$ היא פונקציה כאשר f חח"ע ועל.

נראה ש- f^{-1} חח"ע ועל.

f היא פונקציה ולכן לכל $x\in A$ קיים $y\in B$ יחיד כך ש-
$\langle x,y\rangle\in f$. מכאן לכל איבר $x\in A$ קיים $y\in B$ כך ש-
$\langle y,x\rangle\in f^{-1}$ כלומר f^{-1} היא על. ובנוסף לכל $x\in A$
קיים $y\in B$ יחיד כך ש- $\langle y,x\rangle\in f^{-1}$ אזי f^{-1} חח"ע.

(3) טרנזיטיביות: נראה שאם $\langle A,B\rangle\in R$ ו- $\langle B,C\rangle\in R$ אז
$\langle A,C\rangle\in R$ כלומר אם קיימת $f:A\to B$ שהיא חח"ע ועל
וקיימת $g:B\to C$ חח"ע ועל קיימת $h:A\to C$ חח"ע ועל.
h המתקבל מהרכבה $h=g(f)$ (הוכח חח"ע ועל)

* מחלקות השקילות ביחס ~ נקראות המספרים הקרדינליים.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 15

מהי קבוצה אינסופית?

<u>הגדרה 1</u>: קבוצה A היא סופית אם המספר הקרדינלי שלה הוא איזשהו $n \in \mathbb{N}$. וקבוצה A היא אינסופית אם היא לא סופית.

<u>טענה</u>: הקבוצה $\mathbb{N}$ אינה סופית.

כלומר נראה כי המספר הקרדינלי של $\mathbb{N}$ אינו מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$.

תהי $f:\{1,2,\dots,n\} \to \mathbb{N}$ נראה ש-f אינה על.

לכן $\mathbb{N}$ אינה שייכת למחלקת השקילות של $\{1,\dots,n\}$.

תהי $f:\{1,\dots,n\} \to \mathbb{N}$. נסמן ב-$y$ את המספר המקסימלי המתקבל כ-$f(x)$ עבור $x \in \{1,\dots,n\}$.

$y+1$ אינו מתקבל בתמונה של f ולכן הפונקציה f אינה על.

סימון: בהינתן $f:A \to B$ מסמנים $F(A) = \{y \in B \mid \text{קיים } x \in A,\ f(x)=y\}$

<u>הגדרה שקולה ל-1</u>: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת $f:\mathbb{N} \to A$ חח"ע (לא בהכרח על)

<u>הגדרה 2</u>: קבוצה A נקראת אינסופית אם קיימת $f: A \to A$ חח"ע ולא על (כלומר $F(A) \subsetneq A$)

<u>טענה</u>: הגדרות (1) ו-(2) שקולות.

<u>טענה</u>: $\mathbb{N}$ קבוצה אינסופית לפי 2.

נגדיר $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n)=2n$, f חח"ע ולא על.

הערה (מסקנה):

I) עבור קבוצות סופיות, אם $|B|=|A|$ אז כל פונקציה חח"ע $f:A\to B$ היא גם על, פונקציה על היא גם חח"ע.

II) עבור A ו- B אינסופיות $|A|=|B|$ קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע ולא על.

III) קיים פונקציות חח"ע ולא על $f:A\to B$ אמ"מ כש $A\sim B$.

תכונות של קבוצות סופיות:

1) אף קבוצה היא לא סופית ואינסופית.

2) אם A סופית ו- B סופית אז גם $A\cup B$ סופית וגם $A\times B$ סופית.

3) איחוד סופי של קבוצות סופיות הוא סופי וגם מכפלה קרטזית של קבוצות סופיות הוא סופית.

תכונות של קבוצות אינסופיות:

תהי A קבוצה אינסופית.

1) כל קבוצה B כך ש- $A\subseteq B$ היא אינסופית.
לפי ההגדרה שעבור א-1 קיימת $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע
בהכרח אותה פונקציה $f:\mathbb{N}\to B$ חח"ע.

2) כל קבוצה B עבורה קיימת $f:A\to B$ חח"ע היא אינסופית.

3) כל קבוצה B שעבורה קיימת פונקציה $g:B\to A$ על היא קבוצה אינסופית.

4) הקבוצה $P(A)$ היא אינסופית.
נגדיר פונקציה חח"ע $f:A\to P(A)$ לכל $x\in A$ $f(x)=\{x\}$
f חח"ע ולכן לפי 2 $P(A)$ אינסופית.

5) הקבוצה $A\cup B$ אינסופית לכל קבוצה B.
לפי 1 מאחר ו- $A\subseteq A\cup B$ אזי $A\cup B$ אינסופית.

6) לכל קבוצה B לא ריקה הקבוצה $A\times B$ אינסופית.

יהי $b\in B$ כלשהו.

נגדיר $f: A \to A\times B$ לכל איבר $x\in A$ $f(x)=\langle x,b\rangle$

הפונקציה חח"ע לפי 2, $A\times B$ אינסופית.

7) לכל קבוצה B לא ריקה הקבוצה A^B (קבוצת כל הפונקציות מ-B ל-A) היא אינסופית.

<u>משפט:</u> אם $\Sigma \neq \phi$ אז Σ^* הינו אינסופית.

הוכחה:

נראה פונקציה $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$ חח"ע ולפי ההגדרה שנבחר א-1, Σ^* אינסופית. יהי $a\in\Sigma$ נגדיר

$$f(0)=\varepsilon$$
$$f(n+1)=f(n)a$$

הפונקציה f חח"ע.

<u>קבוצות בנות מניה:</u>

נסמן $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

<u>הגדרה:</u> קבוצה A היא בת מניה אם קיימת $f:A\to\mathbb{N}$ חח"ע.

<u>הגדרה שקולה:</u> קבוצה A היא בת מניה אם A סופית או שעוצמתה היא $\aleph_0$.

נאמר שקבוצה היא בת מניה אינסופית אם היא בת מניה ולא סופית.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 16

קבוצות בנות מנייה:

$|\mathbb{N}| = \aleph$

קבוצה A היא בת מנ"ה אם קיימת $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

הגדרה שקולה - A בת מנ"ה אם A סופית או שA מעוצמה $\aleph_0$.

A בת מנ"ה אינסופית אם A בת מנ"ה והיא לא סופית.

כיצד נוכיח שקבוצה A בת מנ"ה אינסופית?

דרך א- הצגת התאמה חח"ע $f: A \to \mathbb{N}$ (חח"ע ועל)

$A = A_{odd}$ אי זוגיים

$f(n) = \frac{n-1}{2}$

דרך ב- הצגת סדר ספירה:

נניח שאנחנו יודעים שהקבוצה אינסופית ועלינו להוכיח שהיא בת מנ"ה.

נציג סדר ספירה של איברי A, כך שכל איבר $x \in A$ מופיע בספירה ולפניו מספר סופי של איברים.

דוגמא: נראה $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

הצגה 1: $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3$

לא נגיע

הצגה שניה: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$

בכל שלב (מהשלב ה-0) סופרים שני איברים.

בשלב ה-k סופרים את k ו- -k. k נספרת לפני -k. כל שלב סופי. האיבר ה-z יספר במקום

$z>0$ $2|z|-1$, $z \le 0$ $2|z|$.

למה טוב סדר הספירה:

יש לבנות פונקציה חח"ע מ-A ל-$\mathbb{N}$ נותנים לכל איבר ב-A את המקום הסידורי שלו.

בדרך ההוכחה, סדר הספירה יכול להכיל חזרות כלומר איבר מסוים יכול להופיע יותר מפעם אחת ולמעשה כל איבר יופיע באנ"ס ולפניו מס' סופי של איברים.

<u>דוגמאות:</u>

הערה: ע"פ עקרון של ספירת השלמים ניתן להוכיח שכל איחוד של שני קבוצות בנות מנ"ה הוא בן מנ"ה.

<u>משפט:</u> תהיינה $A_1,\dots,A_k$ קבוצות מנ"ה אזי $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ בן מנ"ה כלומר איחוד סופי של בנות מנ"ה הוא בן מנ"ה.

ראינו שאם כולם סופיות אז האיחוד סופי ולכן בן מנ"ה.

אם לפחות אחת מהקבוצות אינסופית, האיחוד אינסופי נראה שהוא בן מנ"ה.

$$A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots\}$$
$$A_2 = \{a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots\}$$
$$\vdots$$
$$A_k = \{a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \dots\}$$

סדר הספירה:

בשלב ה-i נספור את כל האיברים מהצורה a_{ji} עבור $1 \le j \le k$ (אם קיימים איברים כאלה).

האיבר a_{ji} נספר בשלב ה-i, כל שלב מכיל לכל היותר k איברים ולכן סופי. אכן כל איבר נספר אחרי מס' סופי של צעדים.

משפט: $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$

מסקנה- העוצמה של הרציונלים $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}| = \aleph_0$

הוכחה:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

בשלב ה-k נספור את כל האיברים $\frac{i}{j}$ כך ש $i+j=k+1$

כל שלב הוא סופי ומכיל k איברים.

האיבר $\frac{i}{j}$ יספר בשלב $i+j-1$ ולכן כל איבר מופיע בספירה שלפניו מספר סופי של איברים

משפט: תהי B קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ שאיבריה הם קבוצות מעוצמה $\aleph_0$, אז $B=\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$.

אזי $|\bigcup B| = |\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i| = \aleph_0$. (לפי הוכחה של הרציונלים)

משפט: איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בן מנייה.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 17

<u>משפט:</u> תהיינה A ו-B בנות מניה אינסופיות אזי $A\times B$ בת מניה אינסופית.

ראינו ש- $A\times B$ אינסופית. נבנה סדר ספירה.

$$A=\{a_0,a_1,\dots\}$$
$$B=\{b_0,b_1,\dots\}$$
$$A\times B=\{(a_i,b_j)\mid i,j\in\mathbb{N}\}=$$
$$\{(a_0,b_j)\mid j\in\mathbb{N}\}\cup\{(a_1,b_j)\mid j\in\mathbb{N}\}\cup\dots=$$
$$\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i \qquad X_i=\{(a_i,b_j)\mid j\in\mathbb{N}\}$$
$$|X_i|=|B|=\aleph_0$$

$A\times B$ הוא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה ולכן בת מניה.

<u>משפט:</u> אם A ו-B בנות מניה אזי $A\times B$ בת מניה.

<u>הגדרה:</u> תהי A קבוצה לא ריקה

$$A^*=A^0\cup A^1\cup A^2\dots=A^0\cup A\cup(A\times A)\cup\dots=\bigcup_{k\geq0}A^k$$

קבוצת הוקטורים הסופיים (המילים הסופיות) מא"ב.

<u>משפט:</u> אם A בת מניה אזי $|A^*|=\aleph_0$.

ראינו ש- A^* אינסופית.

<u>דרך א'-</u> נוכיח באינדוקציה שלכל k הקבוצה A^k בת מניה ולכן איחוד בן מניה של בנות מניה הוא בן מניה.

<u>דרך ב'-</u> נבנה דרך ספירה.

בשלב ה-k נספור מילים עד אורך k עם אות מקסימלית a_k.

$$A=\{a_0,a_1,a_2,a_3,\dots$$

שלב 0 - ε

שלב 1 - ε, a_0, a_1

שלב 2 - $\varepsilon, a_0, a_1, a_2$ $(a_0a_1, a_0a_2, a_1a_2, a_1a_0, \ldots)$

אורך השלב ה- k - $1 + (k+1) + (k+1)^2 + \ldots + (k+1)^k$ כלומר סופי

מילה ω באורך l עם אינדקס מקסימלי m - תופיע בשלב $\max(l,m)$ כלומר כל מילה נספרת ולפני כן מס' סופי של מילים.

בשלב ה- k נספרות רק מילים שבכן או באורך k ומאותיות אותיות עד a_k או באורך קטן מ- k שמאותיות a_k.

(כדי שלא יהיו חזרות בספירה)

<u>דוגמאות מהשקפה:</u>

<u>$Cart(A)$:</u>

בהינתן קבוצה A מגדירים באינדוקציה את הקבוצה $Cart(A)$.

בסיס $B = A$.

פעולות - $F = \{f\}$

$f(x,y) = \langle x,y \rangle$

(לוקחים את A וסוגרים יותר תחת לקיחת סוגריים)

טענה: אם A בת מניה אז $Cart(A)$ בת מניה.

<u>קבוצות של תורשה סופית:</u>

בהינתן קבוצה A שיברה בה קבוצות, מגדירים באינדוקציה את $HF(A)$.

בסיס: $B = A$

פעולות: $F = \{f\}$

$f(x,y) = x \cup \{y\}$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 18

<u>משפט קנטור</u>:

לכל קבוצה A , $A \propto P(A)$.

הוכחה:

לצורך ההוכחה יש להראות:

(I) $A \lesssim P(A)$ ראינו.

(II) $A \not\sim P(A)$

נראה ש- $A \not\sim P(A)$. תהי $f: A \to P(A)$ נראה ש-f לא על.

לכן לא קיימת פונקציה $f: A \to P(A)$ על ולכן $A \not\sim P(A)$.

תהי $f: A \to P(A)$ נראה שקיימת $B_f \in P(A)$ שאינה מתקבלת ב-f לכן f אינה על.

דוגמא עבור A סופית. $A = \{1,2,3\}$

נבחר $f: A \to P(A)$

$f(1) = \{1,2\}$

$f(2) = \{1,2,3\}$

$f(3) = \phi$

	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
1	~~1~~ 0	1	0
2	1	~~1~~ 0	0
3	0	1	~~0~~ 1

רושמים 1 אם נמצא בקבוצה ואפס אם איבר לא נמצא.

כדי למצוא את B_f מחפשים סדרה שלא מופיעה בטבלה. הסדרה שבנה היא המספר ההפוך באלכסון. הטכניקה נקראת לכסון.

עבור שהיא בת מנייה. רושמים טבלה אינסופית השורות הם האיברים והעמודות אפשריות תתי קבוצות של A.

	$f(a_0)$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$\dots$
a_0				
a_1				
a_2				
$\vdots$				

הפונקציה $f: A \to P(A)$ רושמים במקום ה-i,j 1 אם $a_i \in f(a_j)$ ואפס אחרת.

נבנה קבוצה $B_f \subseteq A$ שאינה מתקבלת ע"י f, כלומר B_f אינה לאורך האלכסון, באופן הבא:

עבור a_i: $a_i \in B_f$ אמ"מ $a_i \notin f(a_i)$ (כלומר B_f הבאר ההפוך באלכסון) כלומר אם $a_i \in f(a_i)$ אזי $a \notin B_f$ ואם $a_i \notin f(a_i)$ אזי $a_i \in B_f$.

הוכחה פורמלית: (עבור A כלשהי)

תהי $f: A \to P(A)$ כלשהי. נגדיר קבוצה $B_f \subseteq A$ באופן הבא: לכל איבר $x \in A$ $x \in B_f \Leftrightarrow x \notin f(x)$.

נראה כי לכל $y \in A$ $f(y) \neq B_f$ ולכן B_f לא מתקבלת ע"י f ומכאן ש-f איננה על.

יהי $y \in A$ כלשהו. אם $y \in f(y)$ אז לפי ההגדרה $y \notin B_f$ ולכן $f(y) \neq B_f$. אחרת $y \notin f(y)$ אז לפי ההגדרה $y \in B_f$ ולכן $f(y) \neq B_f$.

מכאן ש-B_f לא מתקבלת ע"י f.

<u>מסקנה</u> משפט קנטור: $P(\mathbb{N})$ לא בת מנייה.

בפרט נראה ש-$2^{\mathbb{N}}$ לא בת מנייה.

<u>שאלה פתוחה:</u>

האם קיימת B $\quad \mathbb{N} \prec B \prec P(\mathbb{N})$ (שאלת הרצף)

שאלה יותר כללית - האם בהינתן קבוצה A (אינסופית) קיימת קבוצה B כך ש- $A \prec B \prec P(A)$.

נרצה להראות שהיחס $\preceq$ הוא יחס סדר חלקי (בדקנו רפלקסיביות וטרנזיטיביות)

משפט קנטור ברנשטיין: (אנטיסימטריות)

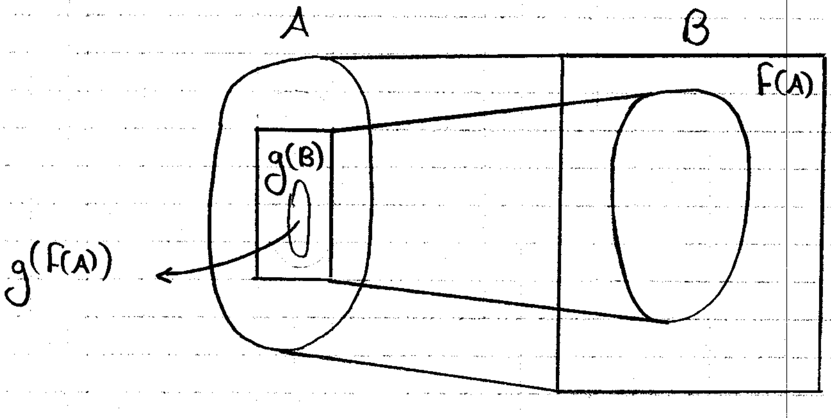
אם $A \preceq B$ ו- $B \preceq A$ אז $A \sim B$.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 19

נראה ש- $\preceq$ אנטי-סימטרי.

משפט קנטור ברנשטיין: בהינתן קבוצות A ו-B אם $A \preceq B$ ו- $B \preceq A$ אז $A \sim B$.

כלומר אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ו- $g: B \to A$ חח"ע אז קיימת $h: A \to B$ חח"ע ועל.



$g(B) \subseteq A$

$g(B) \sim B$ g פונקציה חח"ע ועל מ-B ל-g(B)

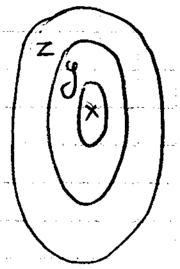
$f(A) \subseteq B$

$f(A) \sim A$

$$f(A) \subseteq B$$
$$\Downarrow$$
$$g(f(A)) \subseteq g(B)$$

$g(f(A)) \sim f(A)$ g פונקציה חח"ע ועל מ-f(A) ל-g(f(A)).

$g(f(A)) \sim A$ $g(B) \sim B$



$X \subseteq Y \subseteq Z$

$X \sim Z$

צ"ל $Y \sim Z$

מנסחים אמן משפט סנדוויץ':

אם $X \subseteq Y \subseteq Z$ ו- $X \sim Z$ אז $Y \sim Z$.

(אם נוכיח את משפט הסנדוויץ' נראה ש- $A \sim g(B)$ ומכאן $A \sim B$)

נתונה $f_0: Z \to X$ חח"ע ועל.

נבנה $h: Z \to Y$ חח"ע ועל

$D_0 = Z \setminus Y$

$D_1 = f_0(Z \setminus Y)$

$D_2 = f_0(D_1)$

$\vdots$

$D_{n+1} = f_0(D_n)$

$\vdots$

נגדיר $h: Z \to Y$ באופן הבא

$$h(a) = \begin{cases} a & a \notin \bigcup_n D_n \\ f_0(a) & a \in \bigcup_n D_n \end{cases}$$

(1) <u>נראה ש- $h: Z \to Y$</u> כלומר h פונקציה מהקבוצה Z לקבוצה Y. כל האיברים א- $Z \setminus Y$ מאופים בעזרת f_0 לתוך $X \subseteq Y$. כל יתר האיברים (איברים מתוך Y) מאופים או בעזרת פונקצית הזהות לתוך Y או ע"י f_0 לתוך X.

(2) <u>נראה ש- h חח"ע</u>. כלומר נראה שאם $a_1 \neq a_2 \in Z$ אזי $h(a_1) \neq h(a_2)$. נפריד למקרים:

(1) $a_1, a_2 \notin \bigcup_n D_n$ $\quad h(a_1) = a_1, \quad h(a_2) = a_2$

ונתון $a_1 \neq a_2$.

(2) $a_1, a_2 \in \bigcup_n D_n$

$h(a_1) = f_0(a_1)$

$h(a_2) = f_0(a_2)$

f_0 חח"ע ולכן אם $a_1 \neq a_2$ אז $f_0(a_1) \neq f_0(a_2)$

(3) $a_1 \in \bigcup_n D_n$ ו- $a_2 \notin \bigcup_n D_n$

$a_1 \in \bigcup_n D_n \Rightarrow h(a_1) = f_0(a_1)$

קיים k כך ש- $a_1 \in D_k$

ולכן $D_{k+1} = f_0(D_k)$ $\quad f_0(a_1) \in D_{k+1}$ כלומר $\overset{h(a_1)}{\overset{\parallel}{f_0(a_1)}} \in \bigcup_n D_n$

$a_2 \notin \bigcup_n D_n \Rightarrow h(a_2) = a_2$

כלומר $h(a_2) \notin \bigcup_n D_n$

לכן $h(a_1) \neq h(a_2)$

(3) נראה ש-h היא על.

יהי $b \in Y$ כלשהו, נראה שקיים $a \in Z$ כך ש- $h(a)=b$.

(1) $b \notin \bigcup_n D_n$ ⇐ לפי הגדרת h עבור $a=b$ $h(a)=b$

ולכן b הוא המקור של עצמו.

(2) $b \in \bigcup_n D_n$. קיים $k \geq 1$ כך ש- $b \in D_k$ (כי $b \in Y$

ולכן $b \notin D_0$).

$D_k = f_0(D_{k-1})$ ולכן קיים $a \in D_{k-1}$ כך ש- $f_0(a)=b$

ומכאן ש- $h(a)=f_0(a)=b$ ולכן ל-b יש מקור.

<u>טענה</u>: אם A היא מניה אינסופית אז $A \sim \mathbb{N}$.

הוכחה:

אם A אינסופית קיימת $f: \mathbb{N} \to A$ חח"ע.

אם A היא מניה $g: A \to \mathbb{N}$ חח"ע.

לפי משפט קנטור ברנשטיין $A \sim \mathbb{N}$.

נראה בהמשך $R \sim 2^{\mathbb{N}}$.

נאמר שפות באופן כללי - יש לה אבחנה בין סינטקס לסמנטיקה.

הסינטקס של השפה - התחביר, כל הכללים המגדירים צורת השפה,
שפה "אותיות" בשפה, איך מתחברות האותיות למילים", איך
"מילים" מתחברות למשפטים.

הסמנטיקה של השפה - המשמעות.

שתי שפות:

(1) תחשיב הפסוקים.

(2) תחשיב היחסים.

<u>תאור לא פורמלי של השפה:</u>

אותיות $p_0, p_1, p_2, \ldots$ משמשות לציון טענות.

הקשרים $\to$ (אם אז), $\wedge$ (וגם), $\vee$ (או), $\neg$ (לא)

מחברים בעזרתם לטענות מורכבות יותר.

המילים בשפה נקראות פסוקים.

<u>דוגמא:</u>

p_0 - יום שמשי

p_1 - יש מוסיקה

אם יום שמשי אז יש מוסיקה $(p_0 \to p_1)$

אם לא יום שמשי אז אין מוסיקה $((\neg p_0) \to (\neg p_1))$

<u>דוגמא:</u>

אם המכונית התקלקלה או יצאתם מאוחר אז תאחרו למסיבה.

p_0 - המכונית התקלקלה.

p_1 - יצאתם מאוחר.

p_2 - איחור למסיבה

$((p_0 \vee p_1) \to p_2)$

דוגמא:

אם סוקרטס הוא אדם (P_0)

וכל אדם הוא בן תמותה (P_1)

אז סוקרטס בן תמותה. (P_2)

$(P_0 \vee P_1) \to P_2$

הגדרה של הסינטקס של תחשיב הפסוקים:

אותיות השפה $\{ p_i \mid i \in \mathbb{N} \} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \to, (,), T, F \}$

בשם ביטוי או מילה נכנה כל סדרה סופית של אותיות בשפה.

קבוצת הפסוקים מוגדרת באינדוקציה ע"י הבסיס והפעולות הבאות:

הבסיס: $\{ p_i \mid i \in \mathbb{N} \} \cup \{ T, F \}$ נקראים פסוקים אטומים

הפעולות: $P = \{ f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to \}$

כאשר בהינתן α ו-β

$f_\neg(\alpha) = (\neg \alpha)$

$f_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$

$f_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$

$f_\to(\alpha, \beta) = (\alpha \to \beta)$

קבוצת הפסוקים היא $X_{B,F}$ עבור B ו-F האלו.

האם $((p_1 \to p_2) \vee (\neg p_3))$ פסוק?

כן נראה סדרת יצירה:

(1) p_1 אטום

(2) p_2 אטום

(3) $(p_1 \to p_2)$ $f_\to$ של 1,2

(4) p_3 אטום

(5) $(\neg p_3)$ $f_\neg$ של 4

(6) $((p_1 \to p_2) \vee (\neg p_3))$ $f_\vee$ של 3,5

נגדיר את הקבוצה $WFF\{F,\to\}$ מוגדרת באינדוקציה:

בסיס: $False \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

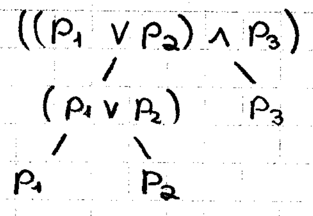
פעולות: $P = \{F \to\}$

<u>משמעות תחשיב הפסוקים:</u>

לצורך הגדרת הסימנטיקה נגדיר קבוצת ערך $\{0,1\}$ - 0 מסמן לא נכון ו- 1 מסמן נכון.

מטרה - למצוא קשר או התאמה בין קבוצת הפסוקים לקבוצת ערכי האמת.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 24



<u>עץ יצירה</u> - עץ המתאר כיצד נוצר פסוק. עץ יצירה הוא עץ שבו בכל צומת מופיע פסוק

- אם הצומת הוא עלה אז הפסוק הוא פסוק אטומי.
- אחרת אם בצומת מופיע פסוק מהצורה $(\alpha \circ \beta)$ עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, לצומת שני בנים השמאלי α והימני β.
- אם בצומת מופיע $(\neg\alpha)$ אז לצומת בן אחד α.

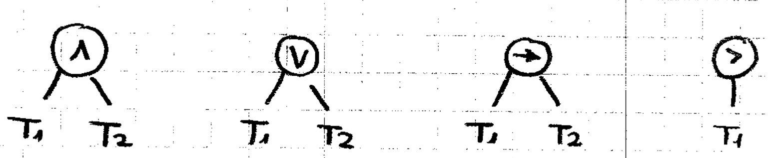
עצי היצירה המתארים פסוקים נקראים WFTF. וניתן להגדיר את קבוצת הפסוקים ע"י בנייה של עצי היצירה.

<u>בסיס</u>:

$\dot{p}_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$

$\dot{F}$ $\dot{T}$

<u>צעד</u>: אם T_1 ו T_2 עצים אז



הם עצים.

<u>רעיון חשוב ערך האמת לפסוק</u>

משרטטים עבור הפסוק את עץ היצירה ומחשבים את ערך האמת במעלה העץ (מהעלים לשורש)

<u>שלב ראשון</u>: ערכים בסיסיים.

נגדיר השמה- התאמה של ערך אמת לפסוקים האטומים

$$Z : \{ p_i \mid i \in \mathbb{N} \} \to \{0,1\}$$

פונקציה מהפסוקים האטומים לקבוצת ערכי האמת.

מתאימים ל- F ערך אמת אפס ול- T ערך אמת 1.

<u>שלב שני</u>: טיפוס באופן כללי, פעולות.

המטרה שלנו היא הרחבת ההשמה כך שתתן ערך לכל הפסוקים ולא רק לפסוקים האטומיים.

בהינתן השמה Z עבור פסוק α נסמן ב- $\bar{Z}(\alpha)$ את ערך האמת שהשמה Z נותנת ל- α (בניגוד לסימון $Z(p_i)$).

$$Z(p_5) = ?$$

$$\bar{Z}(p_5 \vee p_3) = ?$$

החבר של Z

(בשקפים $M_{PL}(Z,\alpha)$ במקום $\bar{Z}(\alpha)$)

יהי δ המקום הראשון באופן שעבורו לא חשבנו את הערך.

$$\delta = (\alpha \circ \beta) \qquad \circ \in \{ \vee, \wedge, \to \}$$

או

$$\delta = (\neg\alpha)$$

לצורך הגדרת הפעולות מגדירים טבלאות אמת עבור הפעולות המפורטות עבור כל אפשרות לערכים של α ו- β מה יהיה ערך האמת של $(\alpha \circ \beta)$ ושל $(\neg\alpha)$

$TT_\vee$

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$TT_\wedge$

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$TT_\rightarrow$

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$TT_\neg$

α	$(\neg\alpha)$
0	1
1	0

מחשבים את ערך האמת של α וערך האמת של β ובוחרים בשורה המתאימה בטבלת האמת.

דוגמא:

$0 \; ((p_0 \vee p_1) \rightarrow p_2)$

$1 \; (p_0 \vee p_1)$ $\quad p_2$ 0

p_0 0 $\quad p_1$ 1

ולכל $i \geq 3$ $z(p_i)=0$

<u>הגדרת חישוב ערך האמת של פסוק:</u>

תהי Z השמה, ערך האמת של קבוצת הפסוקים תחת ההשמה Z מוגדר באופן הבא:

בסיס: $\bar{Z}(p_i) = z(p_i)$

$\bar{Z}(T) = 1$

$\bar{Z}(F) = 0$

פעולות / סגור:

עבור $(\neg\alpha)$:

$$\bar{Z}((\neg\alpha)) = TT_\neg(\bar{Z}(\alpha))$$

עבור $(\alpha \circ \beta)$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

$$\bar{Z}((\alpha \circ \beta)) = TT_\circ(\bar{Z}(\alpha), \bar{Z}(\beta))$$

$$\overline{z}((p_0 \vee p_1) \to p_2) =$$ 8 KNC17

$$\mathrm{TT}_{\to}\left(\overline{z}(p_0 \vee p_1),\ \overline{z}(p_2)\right) =$$

$$\mathrm{TT}_{\to}\left(\mathrm{TT}_{\vee}(\overline{z}(p_0), \overline{z}(p_1)),\ \overline{z}(p_2)\right) =$$

$$\mathrm{TT}_{\to}\left(\mathrm{TT}_{\vee}(z(p_0), z(p_1)),\ z(p_2)\right) =$$

$$\mathrm{TT}_{\to}\left(\mathrm{TT}_{\vee}(0, 1),\ 0\right)$$

$$\mathrm{TT}_{\to}(1, 0) = 0$$

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 22

נאמר שהשמה Z מספקת פסוק α ונסמן $Z \models \alpha$ אם $\bar{Z}(\alpha)=1$.

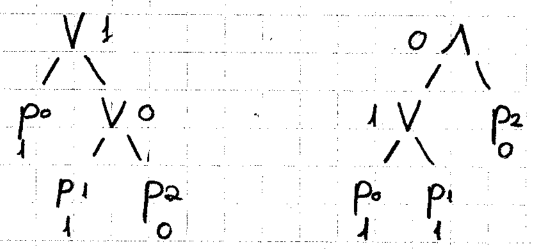
<u>נרצה להוכיח שהגדרת חישוב ערך האמת טובה.</u>

באופן כללי יש להוכיח קיום ויחידות - בהינתן פסוק α והשמה Z, קיים ערך המתקבל מחישוב $\bar{Z}(\alpha)$ והוא יחיד.

קיום מתקבל מהעובדה שערך האמת מחושב במעלה עץ הגזירה או לאורך סדרת הגזירה. מאחר וקבוצת הפסוקים הוגדרה באינדוקציה לכל פסוק יש סדרת יצירה.

מה שיכול להיות בעיה הוא היחידות.

דוגמא: פסוק לא חוקי. $\underset{1}{p_0} \vee \underset{1}{p_1} \wedge \underset{0}{p_2}$



המשפט הבא מבטיח לנו שלכל פסוק יש עץ יצירה יחיד.

משפט הקריאה היחידה:

(1) לכל פסוק α אם קיימים פסוקים β_1,γ_1 וקשר דו מקומי a כך ש- $\alpha=(\beta_1 a \gamma_1)$ וכן קיימים פסוקים β_2,γ_2 וקשר דו מקומי b כך ש- $\alpha=(\beta_2 b \gamma_2)$ אזי $\beta_1=\beta_2$, $a=b$, $\gamma_1=\gamma_2$.

(2) לכל פסוק α, אם קיים פסוק β כך ש- $\alpha=(\neg\beta)$ אזי לא קיימים פסוקים δ,γ וקשר דו מקומי a כך ש $\alpha=(\delta a \gamma)$ וכן לכל פסוק β' כך ש- $\alpha=(\neg\beta')$ מתקיים $\beta=\beta'$.

משפט הקריאה היחידה הוא משפט סינטקטי.

משפט הגדרת ערך האמת:

בהינתן השמה z, לכל פסוק α מוגדר ערך האמת $\bar{Z}(\alpha)$ המתקבל מחישוב לאורך סדרת היצירה של α והוא יחיד.

הוכחה:

תהי z השמה, נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק α ש ערך האמת $\bar{Z}(\alpha)$ מוגדר והוא יחיד.

בסיס: פסוקים אטומיים

עבור $\alpha = T$ $\quad \bar{Z}(\alpha) = \bar{Z}(T) = 1$

עבור $\alpha = F$ $\quad \bar{Z}(\alpha) = \bar{Z}(F) = 0$

עבור $\alpha = p_i$ $\quad \bar{Z}(\alpha) = z(p_i)$

צעד: נניח נכונות עבור פסוקים γ, β כלומר $\bar{Z}(\gamma)$ ו- $\bar{Z}(\beta)$ מוגדרים באופן יחיד.

$\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ $\quad \bar{Z}(\beta \circ \gamma) = TT_\circ(\bar{Z}(\beta), \bar{Z}(\gamma))$

לפי הנחת האינדוקציה $\bar{Z}(\gamma)$ ו- $\bar{Z}(\beta)$ מוגדרים באופן יחיד, וטבלת האמת מוגדרת באופן יחיד לכל ערך של הכניסות ולכן $\bar{Z}(\beta \circ \gamma)$ מוגדר באופן יחיד.

לפי משפט הקריאה היחידה לא קיימת דרך אחרת לקרוא את הפסוק ולחשב ערך אמת ולכן ערך האמת יחיד.

עבור $\neg$ לעשות בבית.

סדר קדימויות הקשרים:

נגדיר סדר קדימויות ונשמיט סוגריים בכל מקום שבו לא הכרחיים

(הכרחיים - אם נרצה להפעיל קשרים בסדר אחר או שיש

מספר קשרים עם אותה קדימות)

(1) $\neg$

(2) $\vee$, $\wedge$

(3) $\rightarrow$

דוגמא:

$$(\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_3))$$

$$\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow \neg p_3$$

דרגה של פסוק:

רעיון שלכל פסוק יש ערך יחיד שיגדיר אותו. דרגה של

פסוק כמספר השלבים בהגדרה או עומק עץ.

נגדיר פונקציה $rank: WFF \rightarrow \mathbb{N}$.

הגדרת הפונקציה היא באינדוקציה על המבנה.

בסיס: עבור α פסוק אטומי $rank(\alpha) = 0$

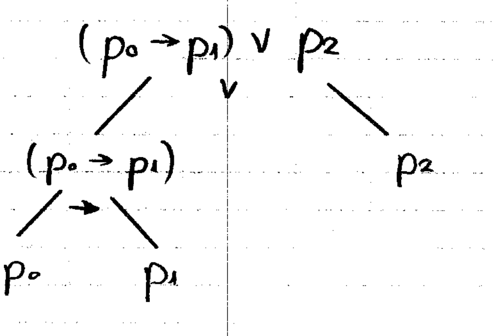
סגור:

עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ $rank((\alpha \circ \beta)) = \max\{rank(\alpha), rank(\beta)\} + 1$

עבור $\neg$: $rank(\neg\alpha) = rank(\alpha) + 1$

דוגמא: נחשב דרגה לפסוק $(p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2$

p_0	0
p_1	0
p_2	0
$p_0 \rightarrow p_1$	1
$(p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2$	2



לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 23

נבחין בין שני מישורי התייחסות בשפה:

(1) המישור הסינטקטי - הגדרת פסוקים, תכונות הפסוקים, משפט הקריאה היחידה.

(2) המישור הסימנטי - הגדרת ערך האמת.

כח ההבעה של תחשיב הפסוקים:

ראינו שהרבה קשרים בין טענות ניתן לבטא באמצעות טבלת אמת.

<u>לדוגמא:</u> רוב של 3 טענות $\#(p_0,p_1,p_2)$

p_1	p_2	p_3	$\#(p_1,p_2,p_3)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\alpha_4 = (\neg p_1) \wedge p_2 \wedge p_3$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\alpha_6 = p_1 \wedge (\neg p_2) \wedge p_3$
1	1	0	1	$\alpha_7 = p_1 \wedge p_2 \wedge (\neg p_3)$
1	1	1	1	$\alpha_8 = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$

$$\alpha_{\#} = \alpha_4 \vee \alpha_6 \vee \alpha_7 \vee \alpha_8$$

השאלה שנשאלת האם כל קשר בין טענות שניתן לביטוי בטבלת האמת ניתן לבטא בתחשיב הפסוקים.

בהינתן פסוק α נאמר ש-α מממש טבלת אמת TT אם טבלה TT היא טבלת האמת של α.

פסוקים ב-n אטומים

טבלאות אמת עם 2^n שורות

נראה לדוגמה הבא לכל טבלת אמת יש פסוק שמממש אותה.
התשובה - תלוי במערכת הקשרים.

<u>הגדרה</u>: מערכת קשרים תקרא שלמה אם לכל טבלת אמת יש פסוק מהקשרים שמממש אותה.

<u>משפט</u>: מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים היא שלמה.

<u>הוכחה</u>:

תהי TT טבלת אמת כלשהי. נבנה פסוק α_T שמממש את הטבלה TT.

נבנה את הפסוק α_T בשני שלבים:

I) נבנה לכל שורה i שבה יש 1 בעמודת התוצאה "פסוק α_i שאומר "אני בשורה ה-i"".

II) נחבר את כל הפסוקים ע"י V (או).

I) הפסוק α_i יהיה ה-$\wedge$ של אטומים ושלילות של אטומים. כל אטום שקיבל 1 בשורה יופיע כמו שהוא וכל אטום שקיבל 0 בשורה תופיע השלילה שלו.

נראה שהבנייה נכונה כלומר α_T מקבל 1 בדיוק באותן השמות בהן בטבלה TT מופיע 1.

α_T מקבל 1 אם לפחות אחד מה-α_i קיבל 1,
ונניח α_j $\Leftarrow$ כל הרכיבים של α_j קיבלו 1
(α_j הוא $\wedge$ של אטומים ושלילות של אטומים) $\Leftarrow$
ההשמה מתאימה לאחת משורות ה-1 בטבלה שהיא השורה ה-j (אחרת לא היה מקיים α_j) $\Leftarrow$ יש 1 בטבלה TT

ראינו ש-$\{\neg, V, \wedge\}$ שלמה ומכאן נסיק שגם מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים שלמה.

מושגי יסוד סמנטיים:

<u>הגדרה</u>: פסוק α נקרא <u>טאוטולוגיה</u> אם לכל השמה Z,
$\bar{Z}(\alpha)=1$ (כלומר כל השמה מספקת את α).

<u>דוגמא</u>: $(p_1 \to p_1)$ תהי Z השמה, אם $Z(p_1)=0$ אז
$\bar{Z}(p_1 \to p_1) = TT_{\to}(0,0) = 1$. אחרת אם $Z(p_1)=1$ אז
$\bar{Z}(p_1 \to p_1) = TT_{\to}(1,1) = 1$.

סימון מקובל לטאוטולוגיה: $\models \alpha$.

<u>כיצד נבדוק עבור פסוק α ש-α טאוטולוגיה?</u>

I) טבלת אמת - נבנה טבלת אמת שבה נעבור על כל ההשמות האפשריות ונבדוק שבכל אחת מהן הפסוק מקבל 1.
לכאורה נראה שהטבלה אינסופית. אולם ניתן להוכיח כי ערך האמת של α תלוי רק בערכי האמת שההשמה נותנת לאטומים שמופיעים ב-α. אבל כל פסוק α הוא סופי ומופיעים בו רק מספר סופי של אטומים ולכן הטבלה סופית. אם ב-α n אטומים תהיינה 2^n שורות בטבלה.

<u>דוגמא</u>: $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_2 \to (p_1 \to p_3))$

p_1	p_2	p_3	$p_2 \to p_3$	$p_1 \to (p_2 \to p_3)$	$p_1 \to p_3$	$p_2 \to (p_1 \to p_3)$	הפסוק α
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

II) הוכחה אילולית - נבדוק מה צריכה השמה לקיים אם ש- $\bar{z}(\alpha)=0$ ונראה כי לא קיימת השמה Z כזו.

<u>דוגמה</u>: נראה כי: $((p_0 \vee p_1)\to p_2)\to((p_0\to p_2)\to(p_1\to p_2))$ הוא טאוטולוגיה.

לפי $TT_{\to}$ כדי ש- $\bar{z}(\alpha)=0$ צריך שיתקיים:

(1) $\bar{z}(p_0 \vee p_1 \to p_2) = 1$

(2) $\bar{z}((p_0\to p_2) \to (p_1\to p_2)) = 0$

מ- (2) ומ- $TT_{\to}$ נקבל:

(3) $\bar{z}(p_0\to p_2) = 1$

(4) $\bar{z}(p_1\to p_2) = 0$

מ- (4) ו- $TT_{\to}$ נקבל:

(5) $\bar{z}(p_1) = 1$

(6) $\bar{z}(p_2) = 0$

מ- (5) ו- $TT_{\vee}$ נקבל

(7) $\bar{z}(p_0 \vee p_1) = 1$

מ- $TT_{\to}$ ו-(6), (7) נקבל

(8) $\bar{z}(p_0 \vee p_1 \to p_2) = 0$

בסתירה ל-(1).

לכן לא תתכן השמה Z המקיימת $\bar{z}(\alpha)=0$.

<u>דוגמה לטאוטולוגיה</u>:

הגדרה - מסמנים $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ את הפסוק $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

(1) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

(2) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

דה מורגן

(3) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

(4) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

דיסטריבוטיביות

(5) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$ דרך השלילה

בבית לכל שלושה פסוקים $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ הוכיחו כי הפסוקים הבאים טאוטולוגיות:

(1) $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1))$

(2) $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3))$

(3) $((\varphi_1 \to F) \to F) \to \varphi_1$

<u>הגדרה</u>: נאמר שפסוק β נובע לוגית מפסוק α או ש- α גורר לוגית את β ונסמן $\alpha \models \beta$ אם לכל השמה z מתקיים $\bar{z}(\alpha) = 1$ אז $\bar{z}(\beta) = 1$.

<u>דוגמה</u>: $p_0 \wedge p_1 \models p_1$

תהי z השמה נניח ש- $\bar{z}(p_0 \wedge p_1) = 1$ אז $\bar{z}(p_1) = 1$.

תהי z השמה ונניח $\bar{z}(p_0 \wedge p_1) = 1$ לפי TTA נקבל $\bar{z}(p_0) = 1$, $\bar{z}(p_1) = 1$ ובפרט קיבלנו $\bar{z}(p_1) = 1$.

<u>טענה</u>: לכל שני פסוקים α, β מתקיים

$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \models \alpha \to \beta$ ($\alpha \to \beta$ טאוטולוגיה)

הוכחה:

(1) נניח ש- $\alpha \models \beta$ ונראה $\models \alpha \to \beta$ טאוטולוגיה.

תהי Z השמה כלשהי נראה ש- $\bar{Z}(\alpha \to \beta) = 1$.

נניח בשלילה שלא, כלומר $\bar{Z}(\alpha \to \beta) = 0$ לפי $TT_{\to}$ נקבל $\bar{Z}(\alpha) = 1, \bar{Z}(\beta) = 0$ בסתירה לכך ש- $\alpha \models \beta$.

(2) נניח ש- $\models \alpha \to \beta$ ונראה $\alpha \models \beta$.

תהי Z השמה כלשהי, נראה כי אם $\bar{Z}(\alpha) = 1$ אז $\bar{Z}(\beta) = 1$. תהי Z השמה ונניח ש- $\bar{Z}(\alpha) = 1$ ונניח בשלילה ש- $\bar{Z}(\beta) = 0$ אז לפי $TT_{\to}$ $\bar{Z}(\alpha - \beta) = 0$ בסתירה לכך ש- $(\alpha \to \beta)$ טאוטולוגיה.

<u>הגדרה</u>: פסוק α יקרא סתירה אם לכל השמה Z מתקיים $\bar{Z}(\alpha) = 0$.

<u>דוגמא</u>: F , $(p_1 \wedge \neg p_1)$

<u>טענה</u>: α טאוטולוגיה $\Leftarrow$ $\neg\alpha$ סתירה.

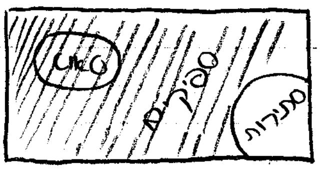
α סתירה $\Leftarrow$ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה.

<u>הגדרה</u>: פסוק α יקרא ספיק אם קיימת השמה Z שמספקת אותו כלומר $Z \models \alpha$.

<u>דוגמאות</u>: p_1

$p_1 \vee p_2$

$(p_1 \vee \neg p_1)$



איך מראים על פסוק מהו

	טאוטולוגיה	סתירה	ספיק
איך מראים כן	טבלת אמת או הוכחה אילולית	טבלת אמת או הוכחה אילולית	מראים השמה Z כך ש- $\bar{Z}(\alpha)=1$
איך מראים לא	מראים השמה $\bar{Z}(\alpha)=0$		

הרחבת המונחים לקבוצות פסוקים:

<u>הגדרה</u>: נאמר שהשמה Z מספקת קבוצת פסוקים X ונסמן $Z \models X$ אם לכל $\alpha \in X$ מתקיים $\bar{Z}(\alpha)=1$.

<u>הגדרה</u>: נאמר שפסוק α נובע לוגית מקבוצת פסוקים X ונסמן $X \models \alpha$ אם לכל השמה Z מתקיים אם $Z \models X$ אז $Z \models \alpha$.

<u>דוגמא</u>: $\{\neg p_0 \to \neg p_1 ,\ p_1\} \models p_0$

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \to \neg p_1$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

	$\Downarrow$			$\Downarrow$
	1			1

רק בשורה ששניהם מקבלים 1 צריך לבדוק אם p_0 גם שווה 1.

__הגדרה__: נאמר שקבוצת פסוקים X היא ספיקה אם קיימת השמה שמספקת את X. כלומר, קיימת השמה Z שמקיימת לכל $\alpha \in X$ $\bar{Z}(\alpha) = 1$.

__הגדרה__: נאמר שפסוקים α ו- β שקולים לוגית ונסמן $\alpha \equiv \beta$ אם לכל השמה Z מתקיים $\bar{Z}(\alpha) = \bar{Z}(\beta)$

דוגמה: $\neg(p_0 \vee p_1) \equiv (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$

$\alpha \equiv \beta$ שקול לומר $\alpha \models \beta$ ו- $\beta \models \alpha$.

__טענה__: $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \models(\alpha \leftrightarrow \beta)$

<u>מערכות קשרים שלמות:</u>

בהינתן מערכת קשרים, איך נוכיח שהיא שלמה?

<u>דרך א'</u> - באמצעות טבלה - מראים עבור כל טבלת אמת כיצד לבנות פסוק בקשרים האלו.

<u>דרך ב'</u> - נתבסס על מערכת קשרים קודמת שידועה כשלמה ונראה כיצד לבטא את הקשרים של המערכת הישנה במערכת החדשה.

בהינתן טבלת אמת נבנה עבורה פסוק במערכת הישנה ואז נתרגם אותו לפסוק במערכת החדשה (באמצעות השקילות שהצגנו)

<u>דוגמה:</u> נראה שהמערכת $\{\neg, \wedge\}$ שלמה.

ראינו כבר ש $\{\neg, \wedge, \vee\}$ שלמה.

$$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

בהינתן טבלת אמת TT בונים פסוק ב $\{\neg, \vee, \wedge\}$ ובאמצעות השקילות שהצגנו נבנה פסוק שקול ל- α_{TT} בקשרים $\{\neg, \wedge\}$.

<u>דוגמה:</u> $\{\neg, \vee\}$ מערכת שלמה.

$$(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

בתרגול נראה $\{\rightarrow, F\}$ מערכת שלמה.

תכונות שימושיות הנביעה לוגית:

(I) תהי X קבוצת פסוקים ויהיו α ו-β פסוקים. אם $X\cup\{\alpha\}\models\beta$ ו- $X\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אז $X\models\beta$.

הוכחה:

נניח ש- $X\cup\{\alpha\}\models\beta$ ו- $X\cup(\neg\alpha)\models\beta$.

תהי Z השמה, נראה שאם $Z\models X$ אז $Z\models\beta$.

תהי Z השמה כך ש- $Z\models X$. נבחין בין שני מקרים:

(1) $Z\models\alpha$, אז $Z\models X\cup\{\alpha\}$ ואז מאחר ו- $X\cup\{\alpha\}\models\beta$ אז $Z\models\beta$.

(2) $Z\not\models\alpha$, אז לפי ההגדרה $Z\models\neg\alpha$ ואז $Z\models X\cup\{\neg\alpha\}$ ומאחר $X\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אז $Z\models\beta$.

(II) אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\beta$ ו- $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\neg\beta$ אזי $\gamma\models\alpha$.

(III) אם $\{\gamma,\neg\alpha\}\models\alpha$ אז $\gamma\models\alpha$. (מקרה פרטי של II)

(IV) תהיינה Σ_1,Σ_2 קבוצות פסוקים כך ש $\Sigma_1\subseteq\Sigma_2$ אז לכל פסוק α אם $\Sigma_1\models\alpha$ אז $\Sigma_2\models\alpha$.

הצבות:

$((p_1 \vee p_2) \to p_1)$

הצבה במקום $p_2 \Rightarrow p_8$, $p_1 \Rightarrow (p_5 \vee p_6)$

נקבל $((p_5 \vee p_6) \vee p_8) \to (p_5 \vee p_6)$

הצבה כו פעולה סינטקטית.

הגדרה: תהי S פונקצית הצבה $S: \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to WFF$

נגדיר באינדוקציה את הפסוק המתקבל מ- φ ע"י החלפת כל מופע של אטום p_i ב- φ בפסוק $S(p_i)$.

נסמן את הפסוק המתקבל $sub(\varphi, S)$

בסיס:

עבור פסוק אטומי $sub(p_i, S) = S(p_i)$

$sub(T, S) = T$

$sub(F, S) = F$

צעד:

$\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$:

$sub((\alpha \circ \beta), S) = (sub(\alpha, S) \circ sub(\beta, S))$

עבור $\neg$: $sub(\neg\alpha, S) = (\neg sub(\alpha, S))$

טענה: יהי φ פסוק שבו מופיעים האטומים $\{p_0, \dots, p_n\}$ ויהיינה S_1, S_2 פונקציות הצבה המסכימות על האטומים $p_0, \dots, p_n$.

(כלומר לכל $0 \le i \le n$ $S_1(p_i) = S_2(p_i)$)

אז $sub(\varphi, S_1) = sub(\varphi, S_2)$

טענה: תהי S פונקצית הצבה ותהי Z השמה. נגדיר פונקצית השמה חדשה Z' באופן הבא: $Z'(p_i) = \bar{Z}(S(p_i))$

לכל פסוק α $\bar{Z}(sub(\alpha, S)) = \bar{Z}'(\alpha)$

__טענה__: תהי φ סתירה, אזי לכל פונקציית הצבה s מתקיים $sub(\varphi, s)$ סתירה. כנ"ל עם טאוטולוגיה.

נובע מסקנה מהטענה הקודמת.

צורות נורמליות:

הרעיון: לצמצם את אוסף הפסוקים לפסוקים בעלי צורה מסוימת מבלי לפגוע בכושר ההבעה.

* NNF: נגדיר באינדוקציה

בסיס: $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$

סגור: $\{F_\vee, F_\wedge\}$

דוגמאות:

$\neg(\neg p_5 \vee \neg p_6) \vee p_7 \notin NNF$

$((\neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge p_7) \vee \neg p_8 \in NNF$

משפט ה- NNF:

לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת NNF כך ש-

(1) $\alpha' \equiv \alpha$

(2) α ו- α' מכילים אותם אטומים.

הרעיון - ניתן באמצעות שקילויות לוגיות "לדחוף" את ה $\neg$ במורד העץ עד לעלים.

* CNF: ההגדרה מתבצעת בשני שלבים:

(I) נגדיר קבוצה באינדוקציה בשם Disj

הבסיס: $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$

סגור: $\{F_\vee\}$

(II) מגדירים את אוסף הפסוקים מצורת CNF

בסיס: Disj

סגור: $\{F_\wedge\}$

דוגמאות:

$(p_5 \vee \neg p_6) \wedge (p_7 \vee p_8 \vee p_5) \in CNF$

$((\neg p_5 \vee p_6) \wedge p_7) \vee \neg p_8 \notin CNF$

משפט ה- CNF:

לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת CNF כך ש $\alpha \equiv \alpha'$.

* DNF:

קבוצת הפסוקים מצורת DNF מוגדרת בשני שלבים:

(1) נגדיר אינדוקטיבית קבוצת פסוקים Conj

בסיס: $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{T, F\}$

סגור: $\{F_\wedge\}$

(2) קבוצת הפסוקים מצורת DNF מוגדרת אינדוקטיבית

בסיס: Conj

סגור: $\{F_\vee\}$

משפט ה- DNF:

לכל פסוק α קיים פסוק α' מצורת DNF כך ש $\alpha \equiv \alpha'$.

רעיון ההוכחה: בהוכחת השלמות של מערכת הקשרים של תחשיב הפסוקים ראינו כי לכל טבלת אמת ניתן לממש ע"י פסוק מצורת DNF. לכן בהינתן פסוק α נבנה ל-α טבלת אמת ואז נממש אותה באמצעות DNF.

מערכת הוכחה פורמלית:

כל הנושא של הוכחות הוא סינטקטי - מתייחסים לנוסחאות ולהוכחות כאל סדרת סימנים.

מרכיבים במערכת הוכחה:

(I) שלב ראשון - מגדירים קבוצת אקסיומות. דרישה מקבוצת האקסיומות - קל לבדוק האם הנוסחה היא אקסיומה.

(II) מגדירים כללי היסק - כללים שבאמצעותם נקבל שורות חדשות בהוכחה משורות קיימות.

$$\frac{\text{אם א אז ב} \qquad \text{א}}{\text{ב}}$$

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$ הכלל נקרא MP (Modus Pones)

(III) קבוצת המשפטים הפורמליים מוגדרת באינדוקציה:

בסיס - אקסיומות

סגור - כללי היסק

(IV) הוכחה פורמלית היא סדרת יצירה במבנה.

__הגדרה__: סדרת הוכחה עבור פסוק α היא סדרה סופית $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש- $\alpha_n = \alpha$ ולכל $1 \le i \le n$ מתקיים או ש- α_i הוא אקסיומה או ש- α_i התקבל מפסוקים קודמים בסדרה ע"י אחד מכללי ההיסק.

מסמנים $\vdash \alpha$ ואומרים α יכיח אם יש ל-α סדרת הוכחה.

מערכת הוכחה בתחשיב הפסוקים:

קבוצת האקסיומות: φ הוא אקסיומה אם קיימים פסוקים α,β,γ אם φ הוא אחד משלושת הפסוקים הבאים:

$$A_1 \quad (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \qquad (1)$$

$$A_2 \quad ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))) \qquad (2)$$

$$A_3 \quad (((\alpha \to F) \to F) \to \alpha) \qquad (3)$$

דוגמאות:

$$(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \qquad A_1$$

$$p_1 \to ((p_1 \to F) \to F) \qquad X$$

כלל הסק: MP $\qquad \dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

קבוצת המשפטים הפורמליים (MP, אקסיומות)X

כאשר מדברים על מערכת ההוכחה נשתמש רק ב- $\{\to, F\}$ אבל מאחר וזו מערכת שלמה כך לא יפגע את כושר ההבעה.

נסמן $\vdash \alpha$ את העובדה של α סדרת הוכחה

דוגמא :

נראה כי לכל פסוק α מתקיים $\vdash(\alpha\to\alpha)$.

נסמן ב- β את $(\alpha\to\alpha)$

(1) $(\alpha\to(\beta\to\alpha))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\alpha))$ A_2

(2) $(\alpha\to(\beta\to\alpha))$ A_1

(3) $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\alpha)$ MP 1,2

נציב חזרה את $(\alpha\to\alpha)$ במקום β

$(\alpha\to(\alpha\to\alpha))\to(\alpha\to\alpha)$

(4) $\alpha\to(\alpha\to\alpha)$ A_1

(5) $(\alpha\to\alpha)$ MP 3,4

הוכחה מתוך הנחות :

בסיס : הנחות ואקסיומות .

בהינתן קבוצת הנחות (פסוקים) X , אוסף המסקנות של X

מסומן $Ded(X)$ וזו הקבוצה המוגדרת באינדוקציה ע"י

בסיס : אקסיומות $\cup X$

סגור : לכל הפסק

נסמן $X\vdash\alpha$ את הטענה כי $\alpha\in Ded(X)$ (α יכיח מתוך X) .

סדרת הוכחה להוכחת α מתוך X היא סדרה סופית שבה

כל פסוק הוא או אקסיומה או הנחה מ- X או התקבל ע"י

MP מפסוקים קודמים בסדרה .

דוגמאות 8

$\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$ (1)

(1)	$(\beta \overset{x}{\to} \gamma) \to (\overset{y}{\alpha} \to (\beta \overset{x}{\to} \gamma))$	A_1
(2)	$\beta - \gamma$	הנחה
(3)	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	MP 1,2
(4)	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	A_2
(5)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	MP 3,4
(6)	$\alpha \to \beta$	הנחה
(7)	$\alpha \to \gamma$	MP 5,6

$\{(\alpha \to F) \to F,\ \alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \gamma$ (2)

(1)	$(\alpha \to F) \to F$	הנחה
(2)	$((\alpha \to F) \to F) \to \alpha$	A_3
(3)	α	MP 1,2
(4)	$\alpha \to \beta$	הנחה
(5)	β	MP 3,4
(6)	$\beta \to \gamma$	הנחה
(7)	γ	MP 5,6

(3) נראה כי לכל פסוק β , $\{\alpha, \alpha \to F\} \vdash \beta$

(1)	α	הנחה
(2)	$\alpha \to F$	הנחה
(3)	F	MP 1,2
(4)	$F \to ((\beta \to F) \to F)$	A_1
(5)	$(\beta \to F) \to F$	MP 3,4
(6)	$((\beta \to F) \to F) \to \beta$	A_3
(7)	β	MP 5,6

<u>תכונות של הוכחה מתוך הנחות</u>:

<u>טענה 1</u>: אם $\alpha \in X$ אז $X \vdash \alpha$.

<u>טענה 2</u>: אם $X \subseteq Y$ אם לכל פסוק α אם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$. אם $X \subseteq Y$ אז $Ded(X) \subseteq Ded(Y)$

הסבר: כל סדרת הוכחה מתוך X היא גם סדרת הוכחה מתוך Y. התכונה הזו נקראת מונוטוניות של מערכת ההוכחה לומר אם מוסיפים הנחות מוסיפים מסקנות.

<u>מסקנה</u>: לכל פסוק α, אם $\vdash \alpha$ אז לכל קבוצה X, $X \vdash \alpha$.

<u>טענה 3</u>: תהיינה X ו-Y קבוצות פסוקים, אם לכל פסוק $\alpha \in X$ מתקיים $Y \vdash \alpha$ אז לכל פסוק β אם $X \vdash \beta$ אז $Y \vdash \beta$.

<u>משפט הדדוקציה</u>:

לכל קבוצה X ולכל פסוקים α ו-β מתקיים

$$X \vdash \alpha \to \beta \iff X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$

(אם א' אז ב', נניח א' ונראה ב')

$\Rightarrow$ אם $X \vdash \alpha \to \beta$ אז $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ א״פ

⇐ אם $X\cup\{\alpha\}\vdash\beta$ אז $X\vdash\alpha\to\beta$.

ההוכחה באינדוקציה על קבוצת המסקנות $Ded(X\cup\{\alpha\})$

והתכונה $X\vdash\alpha\to\beta$.

הוכחה בתרגול.

שימוש במשפט הדדוקציה:

(1) $\vdash\alpha\to\alpha$.

לפי משפט הדדוקציה מספיק שנראה $\{\alpha\}\to\alpha$ וזה

לפי כלל (1).

(2) לכל פסוק α $\{\alpha\}\vdash(\alpha\to F)\to F$.

לפי משפט הדדוקציה מספיק שנוכיח $\{\alpha,\alpha\to F\}\vdash F$.

(1) α הנחה

(2) $\alpha\to F$ הנחה

(3) F MP 1,2

(3) $\{\alpha\to F\}\vdash(\beta\to F)\to(\alpha\to F)$

לפי משפט הדדוקציה מספיק שנוכיח:

$\{\alpha\to\beta,\ \beta\to F\}\vdash\alpha\to F$

ולפי משפט הדדוקציה מספיק להוכיח

$\{\alpha\to\beta,\ \beta\to F,\ \alpha\}\vdash F$

(1) $\alpha\to\beta$ הנחה

(2) α הנחה

(3) β MP 1,2

(4) $\beta\to F$ הנחה

(5) F MP 3,4

<u>משפט הדיכוטומיה</u>:

לכל קבוצה Σ ופסוקים β,α אם $\Sigma\cup\{\alpha\}\vdash\beta$

ו- $\Sigma\cup\{\alpha\to F\}\vdash\beta$ אז $\Sigma\vdash\beta$.

<u>משפט ההצבה:</u>

תהי s פונקציית הצבה, אזי לכל קבוצה Σ ולכל פסוק φ

אם $\Sigma \vdash \varphi$ אז $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$ כאשר

$sub(\Sigma, s) = \{ sub(\alpha, s) \mid \alpha \in \Sigma \}$

הוכחה:

תהי s פונקציית הצבה ו- Σ קבוצה, צ"ל לכל פסוק φ כך ש- $\Sigma \vdash \varphi$ מתקיים $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$.

נוכיח באינדוקציה על קבוצת הפסוקים היכיחים מ- Σ (אינדוקציה על אורך ההוכחה)

את התכונה: $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$

<u>בסיס:</u>

- אם φ אקסיומה, לכן גם $sub(\varphi, s)$ אקסיומה ולכן $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$
- φ הנחה, כלומר $\varphi \in \Sigma$, אז $sub(\varphi, s) \in sub(\Sigma, s)$ ולכן סדרת הוכחה באורך 1 $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$.

<u>סגור:</u> MP

נניח סגור β ו- $\beta \to \varphi$:

$sub(\Sigma, s) \vdash sub(\beta, s)$

$sub(\Sigma, s) \vdash sub(\beta \to \varphi, s)$

לפי ה.א. $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\beta, s)$ ו- $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\beta \to \varphi, s)$

לפי הגדרה של sub $sub(\beta \to \varphi, s) = sub(\beta, s) \to sub(\varphi, s)$

ע"י MP נקבל $sub(\Sigma, s) \vdash sub(\varphi, s)$

עקביות של קבוצת נוסחות:

הגדרה: קבוצת פסוקים X היא עקבית אם $X \nvdash F$.

למה: X קבוצה עקבית $\Leftrightarrow$ כל תת קבוצה סופית של X עקבית.

הוכחה:

נראה ש- X לא עקבית $\Leftrightarrow$ קיימת תת קבוצה סופית של X לא עקבית.

$\Rightarrow$: נניח שקיימת $D \subseteq X$ סופית כך ש- D לא עקבית ונראה ש X לא עקבית.

מאחר ו- D לא עקבית, $D \vdash F$, לפי המונוטוניות $X \vdash F$ ולכן X לא עקבית.

$\Leftarrow$: נניח ש- X לא עקבית ונראה שקיימת תת קבוצה סופית $D \subseteq X$ לא עקבית.

X לא עקבית ולכן $X \vdash F$.

קיימת סדרת הוכחה סופית ל F מתוך X.

נסמן ב- D את קבוצת כל ההנחות המופיעות בסדרת ההוכחה של F מתוך X.

D סופית מאחר והסדרה סופית. $D \subseteq X$ מאחר ו- D כולה מכילה הנחות מ- X.

$D \vdash F$ ע"י אותה סדרת הוכחה שבה $X \vdash F$ (אותם נימוקים)

לכן D לא עקבית ולכן קיימת ל- X תת קבוצה סופית לא עקבית.

עקביות של מערכת ההוכחה בתחשיב הפסוקים:

האם קיימת קבוצה עקבית?

שקול לשאול האם הקבוצה הריקה עקבית או האם קבוצת האקסיומות עקבית?

רוצים להראות $\nvdash F$.

נחפש תכונה שמפרידה את F מהפסוקים היכיחים.

נציג תכונה סמנטית לפסוקים היכיחים: כל פסוק יכיח הוא טאוטולוגיה.

נקבל באופן מיידי את העקביות של הקבוצה הריקה.

משפט הנאותות הצר:

לכל פסוק α, אם α יכיח אז α הוא טאוטולוגיה, כלומר

$\vdash\alpha$ אז $\models\alpha$.

משפט הנאותות הרחב:

לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α, אם $\Sigma\vdash\alpha$ אז $\Sigma\models\alpha$.

אם נציב $\Sigma=\phi$ נקבל את המשפט הצר

מסקנה: קיימת קבוצה עקבית.

הוכחת משפט הנאותות:

צ"ל שלכל פסוק α כך ש $\Sigma\vdash\alpha$ מתקיים $\Sigma\models\alpha$.

נוכיח באינדוקציה על מבנה ההוכחה את התכונה $\Sigma\models\alpha$.

בסיס:

- אם α אקסיומה, ראינו כי α טאוטולוגיה ולכן לכל קבוצה Σ , $\Sigma\models\alpha$.
- α הנחה, $\alpha\in\Sigma$.

כל השמה שמספקת את Σ מספקת את כל הפסוקים ב- Σ ובפרט את α ולכן $\Sigma\models\alpha$.

סגור [8]

MP - נניח סגור $\beta, \beta\to\alpha$: $\Sigma \models \beta\to\alpha$, $\Sigma\models\beta$

ונוכיח $\Sigma\models\alpha$.

תהי z השמה כך ש- z מספקת את Σ , $z\models\Sigma$.

לפי ה.א $z\models\beta$ וגם $z\models\beta\to\alpha$.

לפי $TT_{\to}$ נקבל $z\models\alpha$ ולכן $\Sigma\models\alpha$.

לוגיקה ותורת הקבוצות - הרצאה 29

צ"ל להוכיח עקביות או אי-יכיחות נשתמש במשפט השלמות.

<u>משפט</u> שקול למשפט השלמות:

אם X קבוצת פסוקים ספיקה אז X עקבית.

הוכחה:

נניח ש- X לא עקבית ונראה ש- X לא ספיקה.

X לא עקבית $\Leftarrow$ $X\vdash F$ $\Leftarrow$ לפי משפט השלמות $X\vDash F$ $\Leftarrow$

X לא ספיקה.

סינטקס		סמנטיקה	
$\vdash\alpha$	$\xrightarrow{\text{נאותות רחב}}$	$\vDash\alpha$	(α טאוטולוגיה)
$X\vdash\alpha$	$\xrightarrow{\text{נאותות צר}}$	$X\vDash\alpha$	(X גוררת לוגית את α)
X עקבית	$\longleftarrow$	X ספיקה	

<u>קבוצות עקביות מקסימליות:</u>

<u>הגדרה:</u> קבוצת פסוקים X עקבית מקסימלית אם X עקבית ולכל פסוק α, $X\vdash\alpha$ או $X+\alpha\rightarrow F$.

<u>משפט:</u> לכל קבוצת פסוקים עקבית X קיימת קבוצת פסוקים עקבית מקסימלית Y כך ש- $X\subseteq Y$.

<u>הרעיון:</u> נוסיף ל- X פסוקים כך שעל כל דבר יש ל- X "דעה", אבל יש להיזהר שלא נפגע בעקביות של X.

<u>הוכחה:</u>

נבנה סדרת הרחבות ל- X.

נכין רשימה של קבוצת הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

נגדיר סדרת הרחבות $X = X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots$.

נגדיר את X_{n+1} על סמך X_n, כאשר בשלב ה-n

(הגדרת X_{n+1}) נדאג ל α_n.

אם $X_n \cup \{\alpha_n\}$ עקבית אז $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n\}$

אחרת $X_{n+1} = X_n \cup \{\alpha_n \to F\}$.

$Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$, נראה ש Y עונה על הדרישות.

(1) $X \subseteq Y$

(2) Y עקבית

(3) Y עקבית מקסימלית.

<u>טענה 1</u>: $X \subseteq Y$ מאחר ו- $X_1 = X$ ו- $Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ אז

$X = X_1 \subseteq Y$

<u>טענה 2</u>: לכל n, הקבוצה X_n עקבית.

נוכיח באינדוקציה על n אינדקס הקבוצה.

<u>בסיס</u>: $n=1$ אז $X_1 = X$ וע"פ הנתון X עקבית.

<u>צעד</u>: נניח ש X_n עקבית ונוכיח X_{n+1} עקבית.

נניח בשלילה ש X_{n+1} לא עקבית. אז $X_n \cup \{\alpha_n\}$

לא עקבית ולכן $X_n \cup \{\alpha_n\} \vdash F$.

ידוע ש X_{n+1} לא עקבית ולכן $X_n \cup \{\alpha_n \to F\}$

לא עקבית, מכאן $X_n \cup \{\alpha_n \to F\} \vdash F$.

לפי משפט הדדוקציה: $X_n \to F$ בסתירה לעקביות

של X_n.

<u>טענה 3</u>: Y עקבית. על סמך הסופיות של תכונת העקביות

מספיק שנוכיח שכל תת קבוצה סופית של Y עקבית.

תהי $D \subseteq Y$ תת קבוצה סופית.

לכל פסוק $\alpha \in D$ קיים אינדקס n_α כך ש- $\alpha \in X_{n_\alpha}$.

יהי m האינדקס המקסימלי מבין ה- n_α-ים $\max_{\alpha \in D} \{n_\alpha \mid \alpha \in X_{n_\alpha}\}$

מאחר ו- X_i הוגדרו כסדרה של הכלות. אז X_m

מכילה את כל הפסוקים שהכלו קודמותיה בסדרה ולכן $D \subseteq X_m$.

לפי טענה 2 X_m עקבית ולכן כל תת קבוצה סופית של X_m
עקבית מכאן ש-D עקבית.
ראינו שכל תת קבוצה סופית של Y עקבית ולכן Y עקבית.

<u>טענה 4</u>: Y עקבית מקסימלית.

ראינו ש-Y עקבית, צ"ל לכל פסוק α $Y\vdash\alpha$ או $Y\vdash\alpha\to F$.
יהי α פסוק. קיים אינדקס n כך ש $\alpha=\alpha_n$.
אם $X_{n+1}=X_n\cup\{\alpha_n\}$, $\alpha_n\in X_{n+1}$ ולכן $X_{n+1}\vdash\alpha_n$
אז לפי המונוטוניות $Y\vdash\alpha_n$.
אחרת $X_{n+1}=X_n\cup\{\alpha_n\to F\}$ ו- $\alpha_n\to F\in X_{n+1}$ ולכן
$X_{n+1}\vdash\alpha_n\to F$ ולפי המונוטוניות $Y\vdash\alpha_n\to F$.