קומבינטוריקה וקבוצות:

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^C$

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^C$

$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (B\cap C)$

פונקצית הסתברות:

$P(A) = 1 - P(A^c)$

$A\subseteq B \rightarrow P(A) \le P(B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

<u>אי-שוויון בול:</u>

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ שוויון מתקבל כאשר הקבוצות זרות בזוגות!

<u>אי-שוויון בונופרוני:</u>

$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$

סכומים:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

<u>סדרה חשבונית:</u> $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(2a_1+d(n-1))}{2}$

<u>סדרה הנדסית:</u> $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a_1}{1-q}$

<u>קירוב סטירלינג:</u> $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

הכלה הדחה:

<u>סימטרי:</u>

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$

<u>כללי: (לתקן!)</u>

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} P(\bigcap_{j=1}^{k} A_i)$

<u>עוד נוסחא:</u> $S_k = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \dots \cap A_{i_k})$

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n$

זהויות קומבינטוריות:

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ (4) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

(5) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (6) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (7) $\binom{n}{k+1}(k+1) = \binom{n}{k}(k-1)$

(8) $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ (9) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$ (10) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

(11) $\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$ (12) $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$ (13) $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$ (סכום חשבוני)

(14) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$ (15) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (16) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

חלוקות והוצאות:

<u>חלוקת k כדורים ל-n תאים:</u> $\binom{k+n-1}{n-1}$

<u>חלוקה לפי מספר כדורים בתא:</u> $\frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!}$ כאשר: $n=r_1+r_2+\dots+r_k$

<u>הוצאה עם החזרה:</u> יש $n=(R+W)$ אזי: $P = \binom{n}{r}\left(\frac{R}{R+W}\right)^r\left(\frac{W}{R+W}\right)^{n-r}$ (r=0..n)

<u>הוצאה בלי החזרה</u> ("בבת אחת"): $P = \frac{\binom{R}{r}\binom{W}{n-r}}{\binom{R+W}{n}}$ (r=0..R) (סכימה על r:=0)

אי-תלות:

<u>מאורעות בלתי תלויים</u> אם: $(P(A|B) = P(A)$ וגם $P(B|A) = P(B))$ או $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ אז B,A ב"ת

<u>הערה:</u> מאורעות זרים בעלי הסתברות >0 הם מאורעות תלויים.

<u>הערה:</u> אי-תלות בזוגות לא גוררת בהכרח אי-תלות בשלשות.

<u>הערה:</u> B,A זרים ושונים מ-$\emptyset$ אזי בטוח תלויים. אם לפחות אחד מהם הוא $\emptyset$ אזי ב"ת. $(P(A\cap B) = \emptyset,)$

$A,B = \emptyset \rightarrow P(A)P(B) = 0, A,B \neq \emptyset \rightarrow P(A)P(B) > 0$

הסתברות מותנה:

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

<u>נוסחת בייס:</u> $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

<u>הכללה:</u> Ai חלוקה אז: $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

Bi חלוקה של Ω אזי: $P(A) = \sum_{i=n}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

<u>נוסחת הכפל:</u> $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})$ $(P(A_i)>0)$

<u>הכד של פוליה:</u> 3 לבנים, 5 שחורים, דוגמים עם חזרה ומוסיפים 2 באותו הצבע. הסיכוי לראשון לבן = השני לבן = ה-100 לבן = $\frac{3}{8}$ (כלומר הסיכוי ההתחלתי)

שם	סימון	ערכי X	סיפור	P(X=k)	E(X)	Var(X)
אחידה <u>(סימטרית)</u>	X~U[a..b]	a,..,b	מספר שלם נבחר באקראי בין a ל-b	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
בינומית <u>(p= ½,סימטרית)</u>	X~Bin(n,p)	0..n	מספר ההצלחות ב-n ניסויים ב"ת סיכוי הצלחה p	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	np(1-p)
גיאומטרית <u>(כולל הצלחה)</u>	X~Geo(p)	1..∞	מספר הניסויים עד להצלחה ראשונה, בניסויים ב"ת	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
בינומית-שלילית	X~NB(n,p)	n..∞	מספר הניסויים עד להצלחה ה-n בניסויים ב"ת	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפר-גיאומטרית (ללא החזרה)	X~Hg(N,D,n)	0..min(D,n)	מאוכלוסיה בגודל N בעלת D פריטים מיוחדים, דוגמים n, מספר המיוחדים שנדגם	$\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$
פואסונית	X~Pois(λ)	0..∞	גבול של תהליך בינומי, p שואף ל-0,n שואף ל-∞. המכפלה קבועה λ=np	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ
מולטינומית	X~Multinominal (n; p1,.. ,pk) $\vec{X}$=(X1,.. ,Xk)	n-יות	n ניסויים ב"ת לכל אחד k תוצאות. כך ש p_i ההסתברות ש-i קרה, X_i מספר הניסויים ש-i קרה.	$\frac{n!}{x_1!\dots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\dots p_k^{x_k}$	$E(X_i)=np_i$	$V(x_i)=np_i(1-p_i)$

הערות לטבלה:

- התפלגות בינומית שלילית היא סכום של מ"מ גיאומטרים.
- $X\sim Pois(\lambda)$ - מס' האירועים.
- Y – מס' האירועים המיוחדים (סיכוי p לאירוע מיוחד) $\Leftarrow Y\sim Pois(p\cdot\lambda)$
- פואסוני "מפוצלים" הם פואסונים ב"ת

מדדי ריכוז:

__אחוזון:__ אחוזון p הינו ערך m המקיים:
$P(X\le m)\ge p\wedge P(X\ge m)\ge 1-p$

__חציון:__ החציון של X הינו ערך m המקיים:
$P(X\le m)\ge 0.5\wedge P(X\ge m)\ge 0.5$
(חציון הוא אחוזון 50)

__שכיח:__ המאורע עם ההסתברות הכי גדולה.

קונבולוציה:

$P(X+Y=k)=\sum_{l=1}^{k}P(X=l,Y=k-l)$

מ"מ מנוון:

מ"מ המקבל ערך יחיד בהסתברות 1 נקרא מ"מ מנוון – כלומר קבוע.

תקנון מ"מ: יהי X מ"מ אזי $\bar{X}=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ ומתקיים:
$V(\bar{X})=1\quad E(\bar{X})=0$

חיבור מ"מ:

- $X\sim Bin(n,p), Y\sim Bin(m,p)$ ו-X, Y ב"ת אזי $X+Y\sim Bin(n+m,p)$
- $X,Y\sim Geo(p)$ ב"ת, אזי $X+Y\sim NB(2,p)$
- $X\sim Pois(\lambda), Y\sim Pois(\mu)$ ו-X, Y ב"ת אזי $X+Y\sim Pois(\lambda+\mu)$
- $X\sim NB(k,p), Y\sim NB(m,p)$, ו-X, Y ב"ת אזי $X+Y\sim NB(k+m,p)$

סכום של בינומיים בעלי סיכויים שונים אינו ניתן לחיבור. אך אם ניתן לקרב כל אחד פואסונית, אז אפשר לחבר לפואסוני עם סכום הפרמטרים ולקבל קירוב.

מ"מ דו-ממדי:

X\Y	Y_1	Y_2	..	Y_m	
X_1	P(1,1)	P(1,2)	..	P(1,m)	$\sum_{j=1}^{m}P(1,j)$
X_2	P(2,1)	P(2,2)	..	P(2,m)	$\sum_{j=1}^{m}P(2,j)$
..	..	..	..	..	..
X_n	P(n,1)	P(n,2)	..	P(n,m)	$\sum_{j=1}^{m}P(n,j)$
	$\sum_{i=1}^{n}P(i,1)$	$\sum_{i=1}^{n}P(i,2)$	..	$\sum_{i=1}^{n}P(i,m)$	1

$P(i,j)=P(X=i,Y=j)=P(x=i\cap Y=j)$

ההתפלגות השולית של X: $\sum_{j=1}^{m}P(i,j)=P(X=i)$

ההתפלגות השולית של Y: $\sum_{i=1}^{n}P(i,j)=P(Y=j)$

סכום ההתפלגות המשותפת: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(i,j)=1$

__התפלגות משותפת:__ יהיו X,Y מ"מ אזי ההתפלגות המשותפת שלהם: $P(X=k,Y=l)$(חיתוך של שני המאורעות)

__התפלגות שולית:__ "ההתפלגות" הרגילה שאנחנו מכירים. $P(X=k)=\sum_{l\in Y(\Omega)}P(X=k,Y=l)$

__התפלגות מותנית:__ חוק ההתפלגות של X|Y=l מקיים ש: $P(X=k|Y=l)=\frac{P(X=k,Y=l)}{P(Y=l)}$ (הערכים בתאים, חלקי השולית)

__מ"מ בלתי תלויים:__ X,Y ב"ת אם **לכל** $k\in X(\Omega)$, $l\in Y(\Omega)$ $P(X=k,Y=l)=P(X=k)P(Y=l)$

__הגדרה שקולה:__ **לכל** $l\in Y(\Omega)$ ההתפלגות המותנה של X זהה לשולית: $P(X=k|Y=l)=P(X=k)\ \forall k\in X(\Omega).$

תוחלת:

__הגדרה:__ $E(x)=\sum_{k\in X(\Omega)}kP(X=k)$

- $E(g(x))=\sum_{k\in X(\Omega)}g(k)P(X=k)$
- $E(c)=c$, כאשר c הוא קבוע
- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

סטיית תקן: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

שונות:

__הגדרה:__ $V(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$

- $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$
- $V(X)\ge 0$
- $V(X)=0$ אמ"מ X מ"מ מנוון - כלומר X קבוע
- $E(X^2)=V(X)+\left(E(X)\right)^2$

- $V(aX+b)=a^2V(X)$ – כלומר – הזזה בקבוע לא משנה את השונות ומוצאים קבוע החוצה בריבוע
- השונות היא המינימום של המשוואה: $E((X-a)^2)$ והוא מתקבל ש $a=E(X)$.
- $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- $V(X)<\infty\Leftrightarrow E(X^2)<\infty$
- $V(X)=0\not\Leftarrow E(X)=0$

שונות משותפת Cov:

__הגדרה:__ $Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$
$=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Cov בודק האם יש השפעה של מ"מ אחד על האחר:

- אם Cov חיובי ממש אזי שמ"מ אחד גדל גם השני.
- אם Cov שלילי ממש אזי שמ"מ אחד גדל השני קטן
- אם Cov = 0 אזי אין התאמה בין המ"מ ואי אפשר להגיד כלום.

שונות משותפת תכונות:

- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
- $Cov(aX+c,bY+d)=ab\cdot Cov(X,Y)$ - חשוב! אם האוכלוסייה לא מוגדרת אי אפשר לחשב Cov! יחידות המידה של המ"מ חשובות והן משנות את התוצאה.
- $Cov(X,X)=V(X)$
- $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$
- $Cov(a,X)=0$, a הוא קבוע כלשהו.
- X,Y לא מתואמים או ב"ת <= Cov(X,Y) = 0 - אך לא להפך!!
- דרך לחשב Cov: $Cov(X,Y)=\frac{1}{2}[V(X+Y)-V(X)-V(Y)]$

מקדם מתאם:

__הגדרה:__ $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

נשים לב שמקדם מתאם לא תלוי ביחידות. ולכן ניתן (לפעמים) לחישוב גם שאי אפשר לחשב Cov

- $-1\le\rho(X,Y)\le 1$
- $\rho(X,Y)=\pm 1$ אמ"מ X=aY+b
- $\rho(X,Y)=Cov(\bar{X},\bar{Y})=E(\bar{X}\cdot\bar{Y})$ (כובע =מתוקננים)

X,Y נקראים **בלתי מתואמים** אם:
$E(XY)=E(X)E(Y)$
$\leftrightarrow Cov(X,Y)=0$
בפרט: ב"ת => בלתי מתואמים, אבל לא להיפך!

אינדיקטורים:

הגדרה: מ"מ המקיים:

$$X_A = \begin{cases} 1; & P(A) \\ 0; & 1-P(A) \end{cases}$$

לכן: $X_A \sim Bin(1, P(A))$

- $E(X_A) = P(A)$
- $V(X_A) = P(A)(1-P(A))$
- $X_A \cdot X_B = X_{A\cap B}$
- $Cov(X_A, X_B) = E(X_A \cdot X_B) - E(X_A) \cdot E(X_B) = P(A\cap B) - P(A)P(B)$

- $E(X_i^k) = E(x_i)$
- עבור אינדיקטורים מתקיים: בלתי מתואמים $\leftrightarrow$ ב"ת

הערכות – אי-שוויונות:

אי-שוויון מרקוב: יהיה $X\geq 0$ מ"מ ו- $a \in \mathbb{R}^+$ אזי: $P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$

אי-שוויון צ'בישב: יהיה X מ"מ (כלשהו, לא בהכרח חיובי) אזי:

$$P(|X - E(x)| \geq a) \leq \frac{V(x)}{a^2}$$

הערה: אם אין לנו ערך מוחלט אזי:

$$P(X \geq a) = P\big(X - E(X) \geq a - E(X)\big) \leq P(|X - E(x)| \geq a - E(x))$$

במידה ויש לנו סימטריה סביב a-E(X) במ"מ אזי המעבר האחרון הוא שוויון ונחלק ב- 2 (סימטריה מתקיימת בהתפלגות בינומית (p=0.5) ואחידה):

$$P\big(X - E(X) \geq a - E(X)\big) = \frac{1}{2} P(|X - E(x)| \geq a - E(x))$$

גרסא נוספת לצ'בישב: $P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ - המרחק לפי סטית התקן

אי-שוויון צ'בישב חד-צדדי: יהיה X מ"מ ו-a>0 אזי: $P(X - E(x) \geq a) \leq \frac{V(x)}{V(X)+a^2}$

אי-שוויון צ'רנוב: $P(X \geq a) \leq \min_{t>0} e^{-ta} M_x(t)$ כאשר Mx(t) היא פונקציה יוצרת מומנטים של X. $[P(X \leq a) \leq \min_{t<0} e^{-ta} M_x(t)]$

דוגמה לצ'רנוב: $X\sim Pois(1)$, $P(X\geq 3)=?$ $\leftarrow$ $M_x(t) = e^{(e^t - 1)}$.

$$P(X \geq 3) \leq \min_{t>0} e^{-3t} e^{(e^t-1)} = \min_{t>0} e^{e^t - 3t - 1} \to t = ln3 \to e^{-3ln3} e^2 = 0.275$$

חישוב שונות של מ"מ המורכב מסכום של אינדיקטורים:

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

אם נניח שכל השונויות והמשותפות זהות אזי נקבל:

$$V(X) = nV(X_1) + 2\binom{n}{2} Cov(X_1, X_2)$$

הערות:

התפלגות אחידה: $P(X \leq k) = \frac{k-a+1}{b-a+1}$

התפלגות גיאומטרית: $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$

$P(X > k) = (1-p)^k$

פונקציה יוצרת מומנטים:

מומנט מסדר k: $E(X^k)$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = 1 + E(X)t + \frac{1}{2!}E(X^2)t^2 + \frac{1}{3!}E(X^3)t^3 + ..$$

טענה: Y,X ב"ת אזי $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

התפלגות	$M_x(t)$
בינומית	$(pe^t + 1 - p)^n$
גיאומטרית	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\ (t<0)$
בינומית שלילית	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^k\ (t<0)$
פואסונית	$e^{(\lambda(e^t-1))}$

שימוש: לחישוב מומנט מסדר k, אם יש את הפונקציה יוצרת מומנטים גוזרים k פעמים ומציבים 0.

החוק החלש של המספרים הגדולים WLLN:

יהיו $X_1, X_2, ...$ מ"מ ב"ת ש"ה, כך ש $E(X_i) = \mu$ אזי: $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ (הממוצע שואף לתוחלת)

שימוש: כאשר יש כפל של מ"מ כנ"ל, ניקח log משני האגפים ונקבל סכום, נחלק אותו ב-n ונשאיף לאינסוף. (לא לשכוח להעלות בחזקת e שחוזרים למכפלה המקורית)

הוכחה (בעזרת צ'בישב): יהיו $X_1, X_2, ...$ סדרה של מ"מ כנ"ל, אזי:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

התפלגות נורמלית:

התפלגות נורמלית: $N\sim Normal(\mu,\sigma)$ אזי נוכל לבצע תקנון: $P(N \leq a) = P\left(\frac{N-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות נורמלית סטנדרטית (מתוקננת) מקיימת:

$P(Z < -a) = P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$

ובנוסף: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

מתקיימת סימטריה סביב 0 (בסטנדרטית).

קירובים:

קירוב ריבועי ע"י קבוע (תחזית קבועה): $\min_{c\in\mathbb{R}} E[(X-c)^2]$, c כזה הוא **E(X)**.

קירוב לינארי (תחזית לינארית): יהיו X,Y מ"מ אזי נגדיר את $\bar{Y}$ להיות הקירוב הלינארי הטוב ביותר של Y במונחי X ומתקיים:

$$\frac{\bar{Y}-E(Y)}{\sigma_Y} = \rho(X,Y)\frac{X-E(X)}{\sigma_X} \Longrightarrow \bar{Y} = \rho(X,Y)\sigma_Y \frac{X-E(X)}{\sigma_X} + E(Y)$$

$$\bar{Y} = \left(\frac{\rho(X,Y)\sigma_Y}{\sigma_X}\right)X + \left(E(Y) - \frac{\rho(X,Y)\sigma_Y}{\sigma_X}E(X)\right), \quad \frac{\rho(X,Y)\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

תוחלת ריבוע השגיאה MSE: $MSE(\bar{Y}) = E[(Y - \bar{Y})^2]$,

$MSE(\bar{Y}) = (1 - [\rho(X,Y)]^2) \cdot V(Y)$, כאשר $\bar{Y}$ הוא הקירוב של Y.

משפט הגבול המרכזי CLT:

יהיו $X_1, X_2, ...$ מ"מ ב"ת ש"ה (כאשר $E(X_i)=\mu$, $\sigma_{X_i}=\sigma$) אזי: $S_n = \sum X_i$

ש: $P(S_n \leq a) \cong \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$, $n\mu = E(S_n)$, $\sqrt{n}\sigma = \sigma(S_n)$

דרך לחישוב תחום: $P(a \leq X \leq b) \cong P(x \leq b) - P(X \leq a)$

תיקון רציפות: נשים לב שלקחנו משתנה בדיד והרצפנו אותו, לכן נוכל להוסיף תיקון של 0.5, לדוגמא: $\{X \geq 40\}^c = \{X < 40\} = \{X < 39.5\}$

הממוצע המדגמי ($\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$) של מ"מ ב"ת ש"ה מתפלג בגבול נורמלית: $\lim_{n\to\infty}(P(\overline{X_n} \leq a)) = \Phi\left(\frac{a-E(X_i)}{\sqrt{V(x_i)/n}}\right)$

קירוב נורמלי לבינום:

אם $X\sim Bin(n,p)$ אז נוכל להסתכל על X כסכום אינדיקטורים ב"ת ש"ה. (כאשר n>20 בערך או np(1-p)>=10)

ניתן לקרב את X ע"י ה-CLT. לדוגמא: $X\sim Bin(n,p)$, רוצים לחשב $P(X \leq a) = 1 - P(X > a)$ אזי מתקיים:

$$P(X \leq k) = P(X < k + 0.5) \cong \Phi\left(\frac{k + 0.5 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

נשים לב שגם מ"מ פואסוני הוא סכום פואסונים, לכן אפשר לקרב אותו בעזרת קירוב נורמלי: $\Phi(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$ כי $E(X) = V(X) = \lambda = np$), באותו אופן משתנה NB הוא סכום של גיאומטרים.

תוחלת מותנת:

הגדרה: $E(X|Y)$ הינו מ"מ המקבל את הערכים $E(X|Y=l)$ ע"פ ההתפלגות $P(Y=l)$.

$E(X|Y=l)=\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k|Y=l)$

הערה: הפונקציה של Y אשר מקרבת את X הכי טוב הינה $E(X|Y)$

משפט - התוחלת השלמה: $E(X)=E\big(E(X|Y)\big)=\sum_{l\in Y(\Omega)} P(Y=l)E(X|Y=l)$

טענה: יהיו $N,X_1,X_2,\dots$ ב"ת כך ש X_i ש"ה ו-N מקבל ערכים טבעיים אזי:

$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(N)E(X_1)$

הערה: $E(X|X)=X$

טענה: אם X, Y ב"ת אז $E(X|Y)=E(X)$

טענה: $E(XY)=\sum_x\sum_y x\cdot y\cdot P(X=x,Y=y)=$

$=\sum_y P(Y=y)\cdot E(XY|Y=y)=\sum_y P(Y=y)\cdot y\cdot E(X|Y=y)$

טענה: $E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$ כלומר:

- $E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y$
- $E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y$
- $E(X\cdot Y|Y=y)=y\cdot E(X|Y=y)$
- $E(X\cdot Y|Y)=Y\cdot E(X|Y)$
- $E(X\cdot Y)=E(Y\cdot E(X|Y))$

טענה: $E(|X|)\ge |E(X)|$

טענה: $E(Y|A)=\frac{E(Y\cdot I_A)}{P(A)}=\frac{\sum_y yP(Y=y\cap A)}{P(A)}=\frac{\sum_{\omega\in A} y(\omega)P(\omega)}{P(A)}$

שימוש: $E(XY)=E(E(XY|X))=E(X\cdot E(Y|X))$– ש-X,Y תלויים, אחרת אם הם בלתי מתואמים (או ב"ת) אז $E(XY)=E(X)E(Y)$

שונות מותנת:

הגדרה: $V(X|Y=l)$ הוא מ"מ המקבל את הערכים $V(X|Y=l)$ בהסתברות $P(Y=l)$.

$V(X|Y=l)=E(X^2|Y=l)-[E(X|Y=l)^2]$

משפט: $V(X)=V(E(X|Y))+E(V(X|Y))$

מסקנה: $E(X^2|Y=y)=V(X|Y=y)+E^2(X|Y=y)$

טענה: $V(\sum_{i=1}^{N} X_i)=\big(E(X_1)\big)^2V(N)+V(X_1)E(N)$ ($N,X_1,\dots$ ב"ת, ש"ה)

אי-שוויון ינסן

יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת $E(X)<\infty$ ותהי $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית קמורה (convex). אזי $E\big(\varphi(X)\big)\ge\varphi\big(E(X)\big)$. תהי $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית קעורה (concave), זוהי פונקצית תועלת של שונא סיכון. אזי $E\big(\psi(X)\big)\le\psi\big(E(X)\big)$.

דוגמה – שונות מותנה

בכד 6 כדורים בשלושה צבעים – 1 אדום, 2 לבנים, 3 שחורים. מוציאים n כדורים עם החזרה. צ"ל ?=V(R): $R\sim Bin\left(n,\frac{1}{6}\right), B\sim Bin\left(n,\frac{3}{6}\right), R|B\sim Bin\left(n-B,\frac{1}{3}\right)$

$$\to E(R|B)=\frac{n-B}{3}, V(R|B)=\frac{2(n-B)}{9}$$

$$V(R)=E\big(V(R|B)\big)+V\big(E(R|B)\big)=E\left(\frac{2(n-B)}{9}\right)+V\left(\frac{n-B}{3}\right)$$

$$=\frac{2n}{9}-2\cdot\frac{E(B)}{9}+\frac{1}{9}V(B)=\frac{2n}{9}-\frac{n}{9}+\frac{n}{36}=\frac{5n}{36}\Rightarrow V(R)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5n}{36}$$

בעיית הפקיד הרשלן

תוחלת מספר נק' השבת הוא 1. ושונות מספר נק' השבת היא 1 (בעזרת אינדיקטורים). הסיכוי שאין נק' שבת (אף מכתב לא יגיע ליעדו) בכלל שואף ל- $\frac{1}{e}$.

הפונקציה $p(1-p)$ ב-[0,1]

הפונקציה $p(1-p)$ מקבלת ערך מקסימום ¼ בנקודה ½ בין 0 ל-1

דוגמה לחישוב תוחלת מותנה:

מבצעים סדרה של n הטלות מטבע הוגן. יהיה X מספר ה-H שהתקבלו. לאחר מכן מבצעים סדרה של X הטלות מטבע עם הסתברות $\frac{1}{n}$ ל-H. יהי Y מספר ה-H בסדרת ההטלות השנייה. צ"ל ?=E(Y): $X\sim Bin\left(n,\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow E(X)=\frac{n}{2}, Y|X\sim Bin\left(X,\frac{1}{n}\right)\Rightarrow E(Y|X)=\frac{X}{n}$$

$$E(Y)=E\big(E(Y|X)\big)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{2}$$

דוגמה- כורה הפחם

שלושה פתחים. בוחר באחד באותה הסתברות. הראשון מוביל חזרה אחרי 3 שעות. השני חזרה אחרי 5 שעות והשלישי החוצה אחרי 7 שעות. יהי X הזמן עד שהכורה יצא מהמכרה. התוחלת של X?

$$E(X)=E(X|A)\cdot P(A)+E(X|B)\cdot P(B)+(E|C)\cdot P(C)$$

$$E(X)=\big(3+E(X)\big)\cdot\frac{1}{3}+\big(5+E(X)\big)\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{1}{3}=15$$

דוגמה לשימוש בהערכות לחישוב רמת ביטחון בהסתברות:

כדי לקבוע את ההסתברות שמטבע יפול על "ע" נטיל אותו מספר גדול של פעמים. יש לקבוע כמה הטלות צריך אם רוצים שבבטחון של 1-a הקירוב יהיה לפחות ε. P- הסתברות של "ע". n- מספר ההטלות, X-מספר ה"ע" ב-n ההטלות. מתקיים: $E\left(\frac{X}{n}\right)=p\Leftarrow X\sim Bin(n,p)$

$V\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n}$, לפי צ'ביש: $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\leftarrow p(1-p)\le\frac{1}{4}\leftarrow P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}$. לכן בשביל שרמת הביטחון תושג: $1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}\ge 1-a\leftarrow n\ge\frac{1}{4a\varepsilon^2}$

$$E(XY)=\sum_{k\in X(\Omega),l\in Y(\Omega)} k\cdot l\cdot P(X=k,Y=l)$$

X,Y לא בלתי מתואמים

התפלגות של תוחלת מותנת $l_i\in Y(\Omega)$:

$$E(X|Y)=\begin{cases}E(X|Y=l_1)\ ;P(Y=l_1)\\ E(X|Y=l_2)\ ;P(Y=l_2)\\ \dots\\ E(X|Y=l_n)\ ;P(Y=l_n)\end{cases}$$

התפלגות של שונות מותנת $l_i\in Y(\Omega)$:

$$V(X|Y)=\begin{cases}V(X|Y=l_1)\ ;P(Y=l_1)\\ V(X|Y=l_2)\ ;P(Y=l_2)\\ \dots\\ V(X|Y=l_n)\ ;P(Y=l_n)\end{cases}$$

טריק: אם חישבנו תוחלת בסעיף כלשהו, ואנחנו צריכים לחשב תוחלת מותנה בסעיף אחר, צריך לחשוב על ההסתברות השלמה וחלוקה למאורעות זרים כדרך למצוא את התוחלת המותנה. $E[X] = P(A)\cdot E[X|A] + P(A^c)\cdot E[X|A^c]$.

טריק: אם צריך לחשב את E[XY] או COV(X,Y) כאשר X ו Y-תלויים. אבל בהינתן מאורע A כלשהו או המשלים שלו, הם בלתי-תלויים, כדאי לחשב: $E[XY] = P(A)\cdot E[XY|A] + P(A^c)\cdot E[XY|A^c] = P(A)\cdot E[X|A]\, E[Y|A] + P(A^c)\cdot E[X|A^c]\, E[Y|A^c]$

טריק: לפעמים כשיש מספר סופי של הוצאות\ניסויים שאפשר לעשות כדאי לעשות אותם "עד הסוף", לדוגמא אפשר להוציא מספרים מכד עד שנגמר וסכום התוצאות יהיה מספר קבוע כלשהו. כלומר השונות של סכום התוצאות תהיה 0. טוב בשביל לחשב Cov.

שיפור אי-שיוון מרקוב: אם קיים X מ"מ אי-שלילי וידוע שגם X-k (k מספר קבוע) אי-שלילי, עדיף לעשות הזזה של המשתנה למשתנה X-k ואז להשתמש במרקוב.

קירוב: אם $X\sim Hg(N,D,n)$ וגם $N<D+n$ אזי מתקיים: $X\sim Bin(N,\frac{n}{D+n})$

הערה: לגיאומטרית מתקיים: $P(X = a + k|X > a) = P(X = k)$ (להסתברות אין זיכרון)

עצה: שיש לחשב COV של שני סכומי אינדיקטורים ולא עולה דרך פשוטה, נציג את הסכומים בצורה מפורשת כלומר $Sk=X1+..Xk$ (או סכום חלקי והשאר), ואז נשתמש בלינאריות הCov

Y,X ב"ת אז $E(XY)=E(X)E(Y)$ ואז נובע: אם $E(X)=E(Y)=0$ וגם Y,X ב"ת אז $V(XY)=V(X)V(Y)$

טיפ: ששואלים על משפחות התפלגות – אפשר לשלול אפשרויות שלא מסתדרות עם הערכים שיכולים להתקבל, למשל אם יכולים להתקבל אינסוף ערכים וכו'.

טיפ: שיש לחשב שונות אבל אין לנו עדין תוחלת. אפשר לנסות להשתמש בשונות מותנה.

- מפזרים באופן מקרי n כדורים ל-n כדים, אזי ההסתברות של מספר כדורים בכד היא ש"ה לכל כד, אך המ"מ המייצגים את מספר הכדורים בכל כד תלוים.
- דוגמים בלי החזרה כדורים צבעוניים מכד, אם הדגימה נעשית באופן סדור – כלומר דוגמים ומסתכלים מה יצא, אזי ההסתברות לצבע אדום זהה בכל דגימה (אבל ההסתברות המותנה – כלומר אדום בשני בהינתן אדום בראשון שונה). אם דוגמים בבת אחת את כל המדגם, אזי הסיכוי לצבע אדום בכדור ה-i-י הוא זהה לכל i.
- דוגמים עם החזרה כדורים מתוך כד. כמות האדומים קבועה. נגדיר אינדיקטור לכל דגימה - האם נדגם אדום. אזי האינדיקטורים הם ש"ה וב"ת.
  אם לעומת זאת כמות האדומים לא קבועה (אבל יודעים את ההתפלגות) אזי בהכרח שהאינדיקטורים הם ש"ה אך לא ב"ת.

שאלה:
בקופסא X כדורים אדומים ו 100-X כדורים שחורים. כל שידוע הוא ש-E(X)=25.
דוגמים עם החזרה 2 כדורים מהקופסא.
מה הסיכוי שהשני אדום?

$$P(second\ red) = P(first\ red) = \sum_{k=0}^{100} P(first\ red|k\ reds\ in\ jar)P(k\ reds\ in\ jar)$$
$$= \sum_{k=0}^{100} \frac{k}{100}\cdot P(k\ reds\ in\ jar) = \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{100} k\cdot P(k\ reds\ in\ jar) = \frac{E(X)}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$