קומבינטוריקה ואלגברה:

חלוקת k כדורים זהים ל n תאים שונים $\binom{n+k-1}{k}$

n עצמים מ k סוגים. q_i עצמים מהסוג ה i. מספר התמורות הוא: $\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_k!}$

סכום סדרה הנדסית $\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת טורים נפוצים: $\frac{a_1}{1-q}$

$$\sum_{x=1}^{n} X=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{n} X^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

בחירת k מתוך n אלמנטים	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
בלי החזרה	$\binom{n}{k}\cdot k!$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות כללית מאורעות בדידים:

<u>כלל ההכלה וההפרדה</u>: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ובמקרה כללי:

$$P(A1\cup A2\cup\ldots An)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap A_3\ldots\cap A_n)$$

<u>הסתברות מותנית</u>: ההסתברות ש A יקרה בהנתן ש B קרה: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

עבור A,B בת"ל: $P(A|B)=P(A|B^c)=P(A)$

<u>כלל הכפל</u>: $P(A\cap B)=P(A\mid B)\cdot P(B)$

ועבור n מאורעות:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A3\mid A_1\cap A_2)\ldots\cdot P(An\mid A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1})$$

<u>כלל ההסתברות השלמה</u>: $B_1,B_2,B_3\ldots B_n$ חלוקה של המרחב Ω. כלומר זרים וסכומם הוא Ω. אזי: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)\cdot P(B_i)$

<u>כלל Bayes</u>: באותם תנאים של ההסתברות השלמה, בתוספת המגבלה ש: $P(A)>0$ מתקיים:

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(A\mid B_j)\cdot P(B_j)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_j)\cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)\cdot P(B_i)}$$

התפלגות משותפת של מ"מים בדידים:

$P(X=x,Y=y)=P(X=x\cap Y=y)$

<u>התפלגויות שוליות</u>:

$P_X(x)=\sum_{y}P_{XY}(x,y)$ $\quad P_Y(y)=\sum_{x}P_{XY}(x,y)$

<u>הסתברות מותנית משותפת</u>:

$$P_{Y|X}(y\mid x)=P(Y=y\mid X=x)=\frac{P(Y=y\cap X=x)}{P(X=x)}$$

<u>נוסחת ההסתברות השלמה</u>:

$$P_X(x)=\sum_{y}P(X=x\mid Y=y)\cdot P(Y=y)$$

תוחלת מ"מ בדיד:

<u>הגדרה</u>: $E(X)=\sum_{x}x\cdot P(X=x)$

<u>נוסחת הזנב</u>: עבור מ"מ המקבל ערכים שלמים אי שליליים:

$E(X)=\sum_{x}P(X\ge x)$

<u>תכונות של תוחלות</u>:

1) כלל הסכום: $E(X_1+X_2+\ldots X_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

2) כלל הכפל: עבור X,Y בת"ל $E(XY)=E(X)E(Y)$

3) אם מ"מ X מקבל ערכים בין a ל-b אזי $a\le E(X)\le b$

4) ליניאריות: $E(aX+b)=aE(X)+b$

5) תוחלת של פונקציה של מ"מ: $E(g(x))=\sum_{x}g(x)\cdot P(X=x)$

התפלגות היפר-גאומטרית: X~HG(N,D,n)

N כדורים מתוכם D שחורים והשאר לבנים.
מוציאים n כדורים באקראי. X מ"מ הסופר את מספר הכדורים השחורים מבין הכדורים שהוצאו.

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{\binom{D}{x}\cdot\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x=0,1,\ldots\min(D,n)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

<u>קירוב בינומי להתפלגות היפרגאומטרית</u>:

אם N,D,N-D>>n אזי בקרוב X~Bin(n,D/N)

אמינות מערכת:

a - ההסתברות שהמערכת תעבוד

P_i - ההסתברות שרכיב i יעבוד

<u>טורית</u>: $a=(P_1P_2P_3\ldots P_n)$

<u>מקבילית</u>:

$a=1-((1-P_1)\cdot(1-P_2)\cdot\ldots\cdot(1-P_n))$

אי תלות:

המאורעות A,B בת"ל אמ"מ: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

המאורעות A1,A2,...An בת"ל אמ"מ כל זוג, שלשה,... n-יה מקיימים:

$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$

$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k)$

$\vdots$

$P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$

תחרות בין מ"מים פואסונים:

$Y\sim Pois(\lambda_y)$, $X\sim Pois(\lambda_x)$ אזי:

$$P(y<x)=\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}$$

אינדיקטורים:

תוחלת של I_A: $E(I_A)=P(A)$

אם X סופר כמה מאורעות קרו $X=\sum I_A$ אזי $E(X)=E(\sum I_A)=\sum P(Ai)$

Y,X מ"מ בדידים $E(Y\mid X=x)=\sum_{y}y\cdot P(Y=y\mid X=x)$

<u>נוסחת תוחלת שלמה</u>:

$$E(Y)=\sum_{x}E(Y\mid X=x)\cdot P(X=x)$$

הערות: $E(X|X)=X$

אם X,Y ב"ת: $E(X|Y)=E(X)$ ולהיפך.

<u>נוסחת ההחלקה</u>: נגדיר פונק' מיקרית $E(Y|X)=g(X)$

אז $E(Y)=E(E(Y|X))=E(g(X))$

<u>נוסחאות נוספות</u>:

$E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y$

$E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y$

$E(XY|Y=y)=yE(X|Y=y)$

$E(XY|Y)=YE(X|Y)$

משפט Wald:

יהי X_i סידרת מ"מ ב"ת ש"ה עם $E(X_i)=\mu$

יהי N מ"מ המקבל ערכים טבעיים. N ו-X בלתי תלויים.

נגדיר $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ אזי: $E(S_N)=\mu E(N)$

שונות משותפת מצביעה על תיאום בין מ"מ:

1) $Cov(X,Y)>0$: בהינתן ערך X הגבוה מ$E(X)$ נצפה שגם $E(Y)$ יהיה גבוה.

2) $Cov(X,Y)<0$: בהינתן ערך X הנמוך מ$E(X)$ נצפה ש $E(Y)$ יהיה גבוה.

3) $Cov(X,Y)=0$: X, Y בלתי מתואמים.

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y)=E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right]$$

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$Corr(X,Y)=\rho_{(x,y)}=\frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\cdot SD(Y)}$$

בלתי תלויים <= בלתי מתואמים (לא בהכרח לכיוון שני)

<u>תכונות של השונות המשותפת</u>:

1. $Cov(X,Y)=Var(X)$
2. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
3. $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)$
4. $Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$
5. $Cov(X,const)=0$

שונות (מדד פיזור):

הגדרת שונות של מ"מ X: $Var(X)=E[(X-E(X))^2]$

הנוסחה השימושית לחישוב שונות: $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)]$

סטיית תקן של מ"מ X: $SD(X)=\sqrt{Var(X)}$

היחידות של סטיית התקן הן היחידות של X.

<u>תכונות של שונות</u>:

1. לכל X $Var(X)>0$
2. $Var(X)=0$ אם ורק אם X הוא מ"מ קבוע.
3. יהי X מ"מ המקיים: $Var(X)$ סופי, אזי לכל a ו-b: $Var(aX+b)=a^2Var(X)$
4. $SD(aX+b)=|a|SD(X)$
5. $Var(X,Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$
6. עבור $X_1\ldots X_n$ ב"ת: $Var(aX_i.)=aVar(X_i)$

מומנטים ופונקציה יוצרת מומנטים:

<u>הגדרה</u>: יהיה X מ"מ. פי"מ של X מוגדרת: $M_x(t)=E(e^{tx})$

ולכן: $M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_{x}e^{tx}P(X=x)$

<u>עבור מ"מ רציף</u>: $M_x(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx$

ל- $E(X^n)$ קוראים המומנט הn' של מ"מ X.

<u>פי"מ של סכום מ"מ ב"ת</u>:

יהיו Y,X מ"מ ב"ת אזי $M_{X+Y}(t)=M_x(t)\cdot M_Y(t)$

<u>נוסחה נוספת</u>: יהי X מ"מ. a ו-b קבועים, אזי

$$M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_x(at)$$

<u>משפט</u>: קיימת התאמה חח"ע בין מ"מ לפי"מ שלו. ז"א פי"מ מגדירה את ההתפלגות באופן חד משמעי. ז"א למ"מ שווי התפלגות יש אותה פי"מ.

תוחלת משותפת:

נתונים מ"מ X,Y והתפלגותם המשותפת $P_{XY}=(x,y)$

לכל פונקציה $f(X,Y)$ מתקיים

$$E(f(X,Y))=\sum_{x,y}f(x,y)P_{XY}(x,y)$$

בפרט מתקיים

$$E(XY)=\sum_{x,y}xy\cdot P_{XY}(x,y)$$

X, Y ב"ת <= $E(XY)=E(X)E(Y)$ אך לא להיפך.

תוחלת מותנית:

X מ"מ בדיד

$$E(X)=\sum_{X}xP(X=x)$$

<u>הגדרה</u>: יהי A מאורע עם הסתברות חיובית אזי:

$$E(X|A)=\sum_{X}xP(X=x|A)$$

אי שוויון מרקוב:

לכל מ"מ X אי שלילי, לכל a<0 מתקיים $P(X\ge a)\le\frac{E(X)}{a}$

אי שוויון צ'בישב:

לכל מ"מ X ולכל k<0: $P(|X-E(X)|\ge SD(X)\cdot k)\le\frac{1}{K^2}$

או בצורה אחרת: $P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{VAR(X)}{c^2}$

כך ניתן לקבל חסם להסתברות ללא ידע מלא על ההתפלגות.

תכונות של מקדם מתאם:

1. $-1\le Corr(X,Y)\le 1$
2. $Corr(X,Y)=0$ <=> $Cov(X,Y)=0$
3. $Corr(aX+b,cY+d)=(sign(ac))*Corr(X,Y)$
4. $Corr(X,X)=1$
5. $Corr(X,Y)=1$ <=> $Y=aX+b$, $a>0$
6. $Corr(X,Y)=-1$ <=> $Y=aX+b$, $a<0$

התפלגות נורמלית:

סימון: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

שזה: $X\sim N(E(x),Var(x))$

פונקציית צפיפות:

$$f_x(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

<u>נרמול משתנה נורמלי</u>:

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Z\equiv\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$P(a\le x\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(x\le b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

$P(a\le Z\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)$

$P(-a\le Z\le a)=2\Phi(a)-1$

מ"מ רציפים:

הגדרות הסתברויות:

$$P(X\in[a,a+dx])=f_x(x)\cdot dx$$

<u>אילוצים</u>: $\forall x: f_x\ge 0$

$$P(-\infty\le X\le\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx=1$$

$$P(X\in[a,b])=P(a\le X\le b)=\int_a^b f_x(x)dx$$

$$P(X\le a)=\int_{-\infty}^{a}f_x dx$$

$$P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

<u>הערות</u>:

א. f_x לא נותנת הסתברות - לכן יתכן כי $f_X(x)>1$

ב. אין משמעות לחוזק אי השוויון כי ההסתברות בכל נקודה ספציפית היא 0.

<u>פונקציית התפלגות מצטברת</u>:

<u>עבור מ"מ רציף</u>:

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x}f_x(t)dt\qquad f_X(x)=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$

$$P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$$

התפלגות אחידה: X~U([a,b])

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

X מ"מ המציין נקודה שנבחרה באקראי בקטע [a,b]

$E(X)=\frac{a+b}{2}$

$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}$

התפלגות מעריכית: X~Exp(λ)

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $\quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$$P(X>a)=e^{-\lambda a}$$

<u>תכונת חוסר הזיכרון</u>:

$P(X>t+s\mid X>t)=P(X>s)=e^{-\lambda s}$

<u>מינימום של סדרת מ"מ מעריכיים</u>:

$X_1,X_2,\ldots X_k\sim Exp(\lambda)$

$Z=\min(X_1,X_2,\ldots X_k)$

$Z\sim Exp(k\cdot\lambda)$

תוחלת של מ"מ רציף:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx$

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f_X(x)dx$

נוסחת הזנב למ"מ רציף אי שלילי:

$E(X)=\int_{0}^{\infty}(1-F_X(x))dx$

תוחלת קיימת <u>רק כאשר</u>:

$\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f_X(x)|dx<\infty$

כל תכונות התוחלת של מ"מ בדיד מתקיימות למ"מ רציף.

<u>שונות</u>:

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_X(x)dx$

תוחלת מותנית במקרה הרציף:

$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}X\cdot f_{X|Y}(x\mid y)dx$

הערה: $E(X\mid Y=y)=g(y)\Rightarrow E(X\mid Y)=g(Y)$

<u>משפט ההחלקה</u>: $E(X)=E(E(X\mid Y))=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\mid Y=y)\cdot f_Y(y)dy$

משפט הגבול המרכזי:

יהיו X1,X2,...Xn משתנים מקריים בת"ל ש"ה עם תוחלת μ ושונות σ^2

נגדיר $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ אזי בקירוב $\bar{X}n\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

נגדיר $Sn=\sum_{i=1}^{n}X_i$ אזי בקירוב $Sn\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

קירוב פואסוני להתפלגות בינומית:

אם $X\sim Bin(n,p)$ ו $np<5$ אזי בקירוב $X\sim Pois(np)$

קירוב נורמלי להתפלגות בינומית:

אם $X\sim Bin(n,p)$ ו $np>5$ ו $nq>5$ אזי בקירוב $X\sim N(np,npq)$

Alfonso & Bonepachio © 2002
Toilets Silicone & Mops

התפלגות משותפת רציפה של זוג מ"מים:

הגדרה: $P\big((X,Y)\in B\big)=\int_B f_{x,y}(t,s)dtds$

ומתקיים: $P\big(x\le X\le x+dx,\, y\le Y\le dy\big)=f_{XY}(x,y)dxdy$

התפלגות מצטברת משותפת:

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

ומתקיים: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[F_{X,Y}(x,y)\right]$

פונקציות צפיפות שוליות: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

קונבולוציה

יהי X,Y מ"מ ויהי Z=X+Y.

<u>עבור מ"מ רציפים</u> :

אם X,Y ב"ת אזי $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

אם X,Y תלויים $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,z-x)dx$

<u>עבור מ"מ בדידים</u> :

אם Y,X ב"ת אזי $P(Z=z)=\sum_X P_X(x)\cdot P_Y(z-x)$

אם Y,X תלויים אזי $P(Z=z)=\sum_X P_{XY}(x,z-x)$

טרנספורמציה חח"ע של מ"מ רציף:

תהיה $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב [a,b]. אזי למ"מ Y המוגדר Y=g(X) יש את פונ' הצפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases} fx\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{1}{g`\left(g^{-1}(y)\right)}\right| & : g(a)\le y\le g(b) \\ 0 & : \text{Otherwise}\end{cases}$$

הערה: ניתן במקום: $\left|\frac{1}{g`\left(g^{-1}(y)\right)}\right|$

לרשום: $\left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right|$

טרנספורמציה לא חח"ע:

יהיה X מ"מ לא רציף המקבל ערכים בקטע [a,b]. תהיה $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ב [a,b] (לא בהכרח חח"ע) המקיימת שלכל y קיים מספר בדיד או בן מניה של x-ים ב [a,b] שעבורם g(x)=y.

אזי למ"מ Y המוגדר להיות Y=g(x) יש פונ' צפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \sum_{\substack{x:a\le x\le b\\ g(x)=y}} f_X(x)\cdot\left|\frac{1}{g'(x)}\right| & : \min_{[a,b]}\big(g(x)\big)\le y\le \max_{[a,b]}\big(g(x)\big) \\ 0 & : \text{otherwise}\end{cases}$$

התפלגות אחידה דו מימדית:

אם: (X,Y)~Unif(B) $f_{X,Y}(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{Area(B)} & :(t,s)\in B\\ 0 & : \text{otherwise}\end{cases}$

עבור A⊆B מתקיים: $P\{(X,Y)\in A\}=\frac{Area(A)}{Area(B)}$

הערה: אם X~U[a,b] ו- Y~U[c,d]

וגם X,Y בת"ל אז (X,Y) מתפלגים במשותף

אחיד על המלבן a≤X≤b, c≤Y≤d

אי תלות בין שני מ"מ רציפים:

X,Y בת"ל אמ"מ $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ לכל $x,y\in\mathbf{R}$

כלל: $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

אם ניתן להפריד את $f_{X,Y}(x,y)$ למכפלת 2 פונקציות $f_{X,Y}(x,y)=g(x)\cdot h(y)$ ותחומיהם השוליים של X ו Y אינם תלויים אחד בשני אזי X ו-Y בת"ל ו g(x) ו- h(y) הן פונ' הצפיפות של X,Y **<u>עד כדי קבוע</u>**.

פונקציית צפיפות מותנית:

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

<u>כלל הכפל</u>: $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$

<u>התפלגות מצטברת מותנית</u>: $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt$

<u>חישוב הסתברות מותנית</u>: $P(a\le X\le b|Y=y)=\int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$

<u>צפיפות שולית דרך מותנית</u>: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)dy$

<u>נוסחת בייס</u>: $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$

טרנספורמציה דו מימדית

יהי (x,y) מ"מ דו-מימדי רציף בעל צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$.
תהיינה $v=g_2(x,y)$, $u=g_1(x,y)$ פונקציות על המישור, חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות $x=h_1(u,v)$, $y=h_2(u,v)$ גזירות.

נגדיר $D(u,v)=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v}\\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v}\end{bmatrix}$

אזי פונקצית הצפיפות המשותפת של $u=g_1(x,y)$ $v=g_2(x,y)$ נתונה ע"י

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(h_1(u,v),h_2(u,v))\cdot|D(u,v)|$$

<u>הערות</u> :

1. עבור מ"מ $u=g_1(X,Y)$ ניתן לכתוב V=X או V=Y ולבצע טרנספורמציה דו-מימדית עבור U,V ולמצוא צפיפות שולית של U ע"י אינטגרציה.
2. קונבולוציה היא מקרה פרטי של טרנספורמציה דו-מימדית :

U=X+Y V=X (or V=Y)