

נגזרות

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

בגלילות

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$z = r \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, x = r \cos \phi \sin \theta$$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \pm \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \mp \sin \theta \sin \varphi$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{1 - 2 \sin^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos \cos = \frac{1}{2} (\cos \Delta + \cos \Sigma)$$

$$\sin \sin = \frac{1}{2} (\cos \Delta - \cos \Sigma)$$

$$\sin \cos = \frac{1}{2} (\sin \Sigma + \sin \Delta)$$

$$\sin + \sin = 2 \sin \frac{\Sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2}$$

$$\cos + \cos = 2 \cos \frac{\Sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

פונקציות זלטה

$$\int_A f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

$$\delta \approx \overbrace{\frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}}^{a \rightarrow \infty} \approx \overbrace{\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)}^{a \rightarrow 0} \approx \overbrace{\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}}^{a \rightarrow 0}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2|x|}{dx^2}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

השווים x_i כאשר $\delta(f(x))$ השווים.

פוריה

$$G(k) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

$$f(x - a) \Rightarrow e^{-iak} \hat{f}$$

$$e^{2\pi i a x} f(x) \Rightarrow \hat{f}(k + 2\pi a)$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (ik)^n \hat{f}$$

$$e^{iax} f \Rightarrow \hat{f}(k - a)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \Rightarrow e^{-\frac{k^2}{2} a^2}$$

$$e^{-a|x|} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

$$\delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow \sqrt{2\pi} \delta(k - \alpha)$$

$$\sin(ax) \Rightarrow i\sqrt{2\pi} \frac{\delta(k+a) - \delta(k-a)}{2}$$

$$f(\mathbf{ax}) \Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{a}|} \hat{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}\right)$$

$$f(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{x}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{x} e^{-ikx} \frac{e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}}{2} f(\mathbf{x})$$

$$\frac{-2 \sin(ka)}{k\sqrt{2\pi}} \leftarrow c f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-a, a] \\ 0 & x \notin [-a, a] \end{cases} \text{ - פולס}$$

מתמטיקה

$$(סביב אפס) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\text{לכסוף מטריצה } D = P^{-1}AP, \text{ ו'ע' בעמודות.}$$

אינטגרלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$$\langle x \rangle = x_0, \langle x^2 \rangle = \sigma^2 + x_0^2 \text{ - לגואסיאן}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} = \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} \quad \int x e^{ax} = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int x \sin(ax) = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

היסטוריה

- כאשר ϕ_n מצבים עצמיים ו- E_n ערכים - $H = \sum_n E_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$
- דו-מימדי - $H = \psi_{n_x n_y} = \varphi_{n_x}(x) \cdot \varphi_{n_y}(y)$
 $H_x + H_y$
- בור סופי - $\psi(x) = \begin{cases} B e^{\alpha x} \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} \\ E e^{-\alpha x} \end{cases}$
- תופרים פתרונות לפי זוגיים ואיזונים.
 $k = i\alpha, k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} < 0, q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$
- פוטנציאל דלתא - $V = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} \delta(x)$ אז
 $\psi'|_{+\varepsilon} - \psi'|_{-\varepsilon} = -\frac{\lambda}{a} \psi(0)$

- סדק יחיד - $I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}\right)$
- שני סדקים - $I(\theta) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)$
- שריג עקיף - $\sin \theta = \frac{n\lambda}{a}$ נותן מקסימה,

$$I(x) = \frac{I_0}{N^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a N}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)} \right)^2 -$$

• גל דה-ברולי - $\lambda = \frac{p}{\hbar}$

- הפוטנציאלים של בוהר - $E_n = -\frac{kze^2}{2r_n}$
- $R_n = n^2 \frac{\hbar^2}{mkze^2} = \frac{n^2 a_B}{z}, -\frac{z^2 m k e^4}{2\hbar n^2}$
- אפקט פוטואלקטרי - $eV_0 = hf - \phi$ (פונקציה עבודה)

אופרטורים

- מינהור - $\tan(k_s a) = -\frac{k_s}{\sqrt{\alpha^2 - k_s^2}} \coth\left(\sqrt{\alpha^2 - k_s^2} \left(b - \frac{a}{2}\right)\right)$
- $\tan(k_a a) = -\frac{k_a}{\sqrt{\alpha^2 - k_a^2}} \tanh\left(\sqrt{\alpha^2 - k_a^2} \left(b - \frac{a}{2}\right)\right)$
- $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, T = \frac{1}{\Omega}, \Omega = \frac{E_a - E_s}{\hbar}$

• $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

• $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$

- עבור $[A, B] = C \neq 0$ $\langle \Delta A \rangle \langle \Delta B \rangle \geq \left| \frac{\langle \Delta C \rangle}{2} \right|^2$
- עבור $\{|\phi\rangle\}$ בסיס אורתונורמלי - $I = \sum |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$
- $[A, f(B)] = [A, B] f'(B)$ (אם A, B מתחלפים עם הקומטטור)

• $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

• $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$

• $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$

• $[x, p_x] = i\hbar$

• הזזות - $T_a = e^{-ia \frac{p}{\hbar}}$

• סיבובים - $R(\phi) = e^{-iL^z \frac{d\phi}{\hbar}}$

אוסצילטור הרמוני

- ההמילטוניאן: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$
- $\xi = \frac{x}{\lambda}, \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger$ - הורדה. $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$
- $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$
- $[N, a] = -a$ ו- $[N, a^\dagger] = a, [a, a^\dagger] = 1$
- $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), H = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$

- (המקדם במקרה הכללי הוא פולינום הרמיט מסדר n)
 $\varphi_1 = a^\dagger |\varphi_0\rangle, \varphi_0 = A e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$

• נירמול - $|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{a^\dagger |\varphi_n\rangle}{\sqrt{n+1}}$

משוואות ומשפטים

- משוואות שרדינגר התלויה בזמן - $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$

• $|\varphi_n(t)\rangle = e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\varphi_n(0)\rangle -$

• $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) |\varphi_n(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-i\omega_n t} |\varphi_n(0)\rangle -$

- חלקיק בתיבה (שמרזזה $\frac{L}{2}$) - $\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$

- שאורכה $2L$ ומרכזה 0 - $\phi_n =$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} & \text{odd} \\ \sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} & \text{even} \end{cases}$$

- כאשר משנים את הפוטנציאל, $V_1 \rightarrow V_2$, כדי למצוא את המצב מיד אחרי השינוי, מבטאים את המצב הישן $\psi^{(1)}$ בבסיס של המצבים החדשים $f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n^{(2)}, \{\varphi_i^{(2)}\}$ כאשר $\psi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^{(2)}$
 $\langle \varphi_n^{(2)} | \psi^{(1)} \rangle$

תנע זוויתי

$[L^\alpha, L^\beta] = i\hbar L^\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, L^\alpha = \beta p_\gamma - \gamma p_\beta$
 מתחלף עם שלושתם, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$
 $L^z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle, L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$
 $L^- = L^x - iL^y, L^+ = L^x + iL^y$
 $[L^z, L^+] = \hbar L^+, [L^+, L^-] = 2\hbar L^z$
 L^+, L^- אופרטורים עצמיים של L^z
 $L^+ L^- = L^2 - L_z^2 + \hbar L^z$
 $L^- L^+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L^z$

$L^+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} |l, m+1\rangle$
 $L^- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle$

עבור $l = 1$ (בבסיס) $|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle =$
 $\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right)$

$L_z = \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L^2 = 2\hbar I_{3 \times 3}$

$L_x^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_y^2 = -\frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$m = l, l-1, \dots, -(l-1), -l$

בוקארדינטות כדוריות -

$\vec{L} = -i\hbar \left(\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$

$\hat{P}Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$ זוגיות

תלויה בזמן
 $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$

פתרון של משוואת שרדינגר - $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, כאשר k^2 הוא המקדם של ψ .

משפט אהרנפסט - $\frac{d}{dt} \langle O \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [O, H] \rangle + \langle \frac{\partial O}{\partial t} \rangle$

כל אופרטור מדיד המתחלף עם ההמילטוניאן הוא גודל נשמר

עקרון הוואריאציה - $\langle \psi | H | \psi \rangle = E_0$
 $\psi = \varphi_0 \iff E_0 | \psi \rangle$

למשוואת שרדינגר במימד אחד אין פתרונות מנוונים

במימד אחד, מצב היסוד חסר צמתים (לא חוצה את האפס)

כל המצבים הקשורים במימד אחד, יכולים להבחר כפונקציות חיוביות

אם $[A, B] = 0$, והספקטרום לא מנוון, אז המצבים העצמיים שווים (הם ניתנים לליכסון סימולטנית)

חלקיק על טבעת

$\psi(0) = \psi(L), \langle \psi | \phi \rangle = \int_0^L \psi^* \phi$

התנע מקוונטת - $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mL^2}, p_n = \frac{\hbar}{L} n$

שדה מגנטי - $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A}(x) \right)^2$

עם שתף מגנטי - $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ie}{\hbar c} \langle \frac{\Phi}{L} \rangle \right)$

כאשר $A = \langle \frac{\Phi}{L} \rangle \hat{x}, \Phi_0 = \frac{\hbar c}{e}$

מצבים עצמיים - $k_n = \left(\frac{2\pi}{L} \right) n, \sqrt{\frac{1}{L}} e^{ik_n x}$

אנרגיה - $E_n(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$

מהירות - לפי משפט ארנפסט - $\langle v \rangle = \frac{\langle p - \frac{e}{c} A \rangle}{m} = \frac{\hbar \left(k_n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{2\pi}{L} \right)}{m}$

שימור זרם - $\vec{J} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{d\rho(x)}{dt}$ (דיברגנץ)

$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi \right), \rho(x) = |\psi(x)|^2$

אטום המימן

$$H = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_p} + \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{ze^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|}$$

לאחר טרנספורמציה קאנונית למרכז המסה

$$= \frac{p_{cm}^2}{2M} + \overbrace{\frac{p^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r}}^{\text{electron}}$$

$$p_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - i\hbar \frac{1}{r} = -i\hbar \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right)$$

$$\mathbf{p}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) + \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2$$

לאחר הטרנספורמציה, ההמילטוניאן -

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) + \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{ze^2}{r}$$

הפרדת משתים, הפתרונות הם $E_{n,l} R_{n,l}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$\lambda_n = \frac{ze^2}{a_n \Delta_n}, \Delta_n = \frac{\hbar^2}{2\mu a_n^2} = 4|E_n|$$

$$(H - E_n) R_{nl} = \Delta_n \left[-\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi + \frac{l(l+1)}{\xi^2} - \frac{\lambda_n}{\xi} - \frac{1}{4} \right] R_n(\xi)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi R_n(\xi)) = \text{נקבל } R_n(\xi) = \frac{u_n(\xi)}{\xi} \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U(\xi)$$

$$-\frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{l(k+1)}{\xi^2} + \frac{\lambda_n}{\xi} - \frac{1}{4} \right] u_{n,l}(\xi) = 0$$

$$Ae^{-\xi/2} \xi^{l+1} F(\xi) = u_n$$

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi^i$$

והקבועים

$$\lambda_n = n = 1, \dots, \infty$$

$$a_n = \left(\frac{\hbar^2}{2ze^2\mu} \right) n$$

$$E_n = - \left(\frac{z^2}{n^2} \right) \left(\frac{e^2}{2a_B} \right)$$

$$E_1 = 13.6eV, a_B = 2a_1 = 0.529 \text{ \AA}$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} IA \text{ - מומנט מגנטי}$$

$$\vec{\mu} = \underbrace{\left(\frac{\hbar e}{2mc} \right)}_{\mu_B} \frac{\mathbf{L}}{\hbar} \text{ - עבור אלקטרון באטום}$$

$$E_B(z) = -\mu_B \left(B_0 + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot z \right) \cdot m \text{ - אנרגיה}$$

פיצול זימן - מפצל ל- $\mu_B B$.

ספין

$$s_z = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} = \text{בבסיס } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sigma = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = i\sigma_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{ - יחסי חילוף, } \sigma_\alpha^2 = 1$$

• עבור $A + \mathbf{B} \cdot \sigma$, הע"ע הם $A + |\mathbf{B}|$

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} |x+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x-\rangle$$

$$e^{i\theta\sigma^\alpha} = \cos\theta + i\sigma^\alpha \sin\theta \quad S_\alpha = \frac{1}{2}\hbar\sigma_\alpha$$

• עבור $\hat{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$

$$R = \frac{I_{out}}{I_{in}} = |\langle \hat{n} | \hat{n}' \rangle|^2 \text{ - אחרי שני מקטבים}$$

$$|\langle +n | +n' \rangle|^2 = \left(\frac{1 + \hat{n} \cdot \hat{n}'}{2} \right)$$

• פרצסיה - עבור $\vec{B} = B\hat{z}$

$$H = -\frac{g\mu_B}{\hbar} B S^z$$

$$\Omega = \frac{g\mu_B B}{\hbar} \text{ - תדירות הפרצסיה}$$

הפרעות

$$H = H_0 + \lambda H' \text{ •}$$

• לא מנוון -

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n^{(0)} | H' | \phi_n^{(0)} \rangle \text{ •}$$

$$\psi_n^{(1)} = - \sum_{m \neq n} \frac{H'_{nm}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \left| \psi_m^{(0)} \right\rangle \text{ •}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_k^{(0)} | H' | \phi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \text{ •}$$

• מנוון - צריך ללכסן את תת-המרחב המנוון בהפרעה.

$$\lambda H' = e\varepsilon_z z = e\varepsilon r \cos\theta \text{ - אפקט סטארק}$$

- איבר ראשון מתאפס.