סיכום - אלגברה לינארית ב'

6 באפריל 2009

1 מרחבי מכפלה פנימית

1.1 תכונות בסיסיות

- לינאריות במשתנה ראשון $(\alpha + c\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + c(\beta, \gamma)$
- סימטריות (עד כדי הצמדה) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$
- חיוביות - $(\alpha, \alpha) \geq 0$
- לינאריות (עד כדי הצמדה) במשתנה שני - $(\alpha, \beta + c\gamma) = (\alpha, \beta) + \bar{c}(\alpha, \gamma)$
- נורמה - $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$
- הצמדה (עבור מטריצות) - $A^\star = \bar{A}^t$

1.2 נורמות

- זהות הפולריזציה -

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4}\left[\|\alpha + \beta\| - \|\alpha - \beta\|\right] \\ (\alpha, \beta) &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n \|\alpha + i^n\beta\|\end{aligned}$$

- $\|c\alpha\| = |c| \, \|\alpha\|$
- $\|\alpha\| > 0$
- $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$ (קושי שוורץ)
- $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha + \| \, \|\beta\|$(משולש)

1.3 מכפלות סטנדרטיות

- "הסטדנרטית" - $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$
- $(A, B) = \mathrm{trace}\,(AB^\star)$
- $(f, g) = \int_0^1 f(t)\bar{g}(t)dt$
- באופן כללי- $(\alpha, \beta) = \mathrm{Re}\,(\alpha, \beta) + i\mathrm{Re}\,(\alpha, i\beta)$
- מכלפת בסיסים - אם X, Y וקטורי קוארדינטות (עמודה) של α, β לפי בסיס $\mathcal{B}$, ו-$G_{jk} = (\alpha_j, \alpha_k)$ (אברי בסיס) אז

$$(\alpha, \beta) = Y^\star G X$$

G – הרמיטית/סימטרית וחיובית בהחלט.

1.4 אורתוגונליות

- α, β אורתוגונלים $\iff (\alpha, \beta) = 0$, $\alpha, \beta \neq 0$
- כל קבוצה אורתוגונלית - בת"ל.
- גרהאם שמידט -

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2}\alpha_i$$

- לכל מרחב מכפלה פנימית יש בסיס אורתוגונלי
- הטלה אורתוגונלית על W- הקירוב הטוב ביותר ל-β ב-W הוא α
- הקירוב הטוב ביותר - יחיד.

- $\alpha-\beta$ - אורתוגונלי ל־W
- הקירוב הטוב ביותר α של β ב־W הוא:

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k$$

כאשר $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ בסיס של W.

- משלים אורתוגונלי - $S^{\perp}=\{\alpha\in V|\,(\alpha,s)=0,\forall s\in S\}$
- $S^{\perp}$ תת מרחב של V, $V^{\perp}=\{0\}$, $\{0\}^{\perp}=V$.
- הטלה אורתוגונלית היא הטלה
- אי שוויון בסל - $\sum_{k=1}^{n}\frac{|(\beta,\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|}\leq\|\beta\|^2$ כאשר $\{\alpha_1,\ldots\alpha_k\}$ קבוצה אורתגונליץ. שוויון מתקיים אם β תלוי לינארית ב־$\{\alpha_i\}$

1.5 המרחב הדואלי

1.6 צמוד הרמיטי

- $(T\alpha,\beta)=(\alpha,T^{\star}\beta)$, $T^{\star}$ העתקה לינארית.
- $(T+U)^{\star}=T^{\star}+U^{\star}$. $(cT)^{\star}=\bar{c}T^{\star}$, $(TU)^{\star}=U^{\star}T^{\star}$, $(T^{\star})^{\star}=T$
- אם B בסיס אורתורונרמלי - $[T^{\star}]_B=[T]_B^{\star}$

1.7 איזומורפיזמים

- T שומרת מכפלה פנימים אם $(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)$
- T שומרת מכפלה פנימית $\Leftarrow$ T חח"ע
- V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה. $\dim V=\dim W$. $T:V\to W$ הנ"ל שקולות:
  1. T שומרת מכפלה פנימית
  2. T איזומורפיזם
  3. T מעבירה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי של W
  4. קיים בסיס אורתונורמלי של V, אותו T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי של W
- V,W איזומורפים (כממ"פ) $\Longleftrightarrow$ $\dim V=\dim W$
- T שומרת ממ"פ $\Longleftrightarrow$ $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$

1.8 חבורות

להשלים

1.9 לכסון אורתונורמלי

- T נורמלי - $TT^{\star}=T^{\star}T$
- אם W הוא T אינורינטי, אז $W^{\perp}$ הוא $T^{\star}$ אינורינטי
- אם $T=T^{\star}$, הרכים העצמיים של T ממשיים, והוקטורים העצמיים - אורתוגונלים
- אם $T=T^{\star}$, אז ל־Tיש וקטור עצמי שונה מאפס.
- אם W הוא T־אינורינט, אז $T^{\star}$ הוא $W^{\perp}$ אינורינטי
- כל אופרטור הרמיטי (סימטרי) לכסין אותרוגונלית, עם מטריצה מלכסנת אוינטרית (אורתוגונלית)
- אם $A=[T]_B$ ו־A משלולשית עליונה - אז A אלכסונית $\Longleftrightarrow T$ נורמלית.
- כל אופרטור מעל $\mathbb{C}$ ניתן לייצוג על ידי מטריצה משולשית עליונה
- $\Leftarrow$ כל מטריצה נורמלית לכסינה אורתוגונלית.

1.10 פירוק ספקטרלי

- יהא T אופרטור נורמלי מעל מרחב וקטורי מרוכב V, ממימד סופי. יהיו $c_1,\ldots,c_n$ ערכים עצמיים יחודדים של T, ו־E_j ההטלה האורתוגונלית על מרחב הוקטורים העצמיים עם הערך העצמי c_i, אז:
  1. $T=c_1E_1+\ldots+c_kE_k$
  2. $I=E_1=\ldots+E_k$
  3. $E_1E_j=0$, אם $i\neq j$.

  יתר על כן, הפירוק הוא יחיד.

2 תבניות בילינארית

- פונקציה לי לינארית בשני משתנים -

$$\begin{aligned} f:V\times V &\to F\\ f(c\alpha_1+\alpha_2,\beta) &= cf(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)\\ f(\alpha,c\beta_1+\beta_2) &= cf(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)\end{aligned}$$

2.1 דוגמאות

- L_1, L_2 פונקציונאלים לינארים - $f(\alpha,\beta) = L_1(\alpha) L_2(\beta)$
- עבור מטריצה A, $f_A(X,Y) = \mathrm{tr}(X^t A Y)$ (X, A, Y עם אותם מימדים)
- ניתן לייצג כל תבנית בילינארית על ידי וקטורי קוארדינטת $X,Y \in M_{1\times n}$ ומטריצה $n\times n$ -

$$f(\alpha,\beta) = X^tAY$$
$$A_{ij} = f(\alpha_i,\alpha_j)$$

2.2 תכונות

- $\dim L(V,V,F) = (\dim V)^2$
- $f_{ij}(\alpha,\beta)=L_i(\alpha)L_j(\beta)$ הוא בסיס ל-$L(V,V,F)$. ($L_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$)
- שינוי בסיסים - על ידי מטריצה P -$[f]_{B'} = P^t [f]_B P$.
- דרגה -
  - תהא $A=[f]_B$, אז $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A$ (לא תלוי ב-B)
  - $f(\alpha,\beta) = R_f(\alpha) L_f(\beta)$ כאשר $R_f(x) = (x,\beta)$ ו-$L_f(x)=(\alpha,x)$, פונקציונאלים לינארים.
  - $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} L_f = \mathrm{rank} R_f$
- תבנית לא מנוונת - $\mathrm{rankf = n}$,
  - לכל $\alpha\neq 0$ קיים β כך ש-$f(\alpha,\beta)\neq 0$
  - לכל $\beta \neq 0$ קיים α כך ש- $f(\alpha,\beta)\neq 0$
  - f לא מנוונת $\iff$ $[f]_B$ הפיכה.

2.3 תבניות סימטריות

- $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$
- $[f]_B$ מטריצה סימטרית, לכל B.
- תבנית ריבועית - $q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$. נקבעת על ידי התבנית באמצעות זהות הפולריזציה (עם מציין השדה אינו 2)
- לכל תבנית סימטרית יש בסיס לפיו היצוג שלה אלכסוני
- מעל $\mathbb{C}$ - לכל תבנית סימטריית יש מטריצה מייצגת שבאלכסונה r 1-ים ו-$n-1$ 0-ים (n מימד המרחב, r דרגת התבנית)
- מעל $\mathbb{R}$ - לכל תבנית סימטרית יש ייצוג שאלכסונה d 1-ים, s -1-ים ו-$n-(s+d)$ אפסים (s,d לא תלויים בבסיס)
  - הסיגנטורה של f - $s-d$. הדרגה - $s+d$

2.4 תבניות אנטיסימטריות

- $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$
- $[f]_B$ מטריצה אנטיסימטרית, לכל B.
- דרגת $[f]_B$ זוגית, $r=2k$
  - קיים בסיס בו המטריצה המייצגת מהצורה - בלוק אלכסונים עם מטריצת אפסים מגודל $(n-r)\times(n-r)$ ו-k מטריצות $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ (מטריצת פאולי - $i\sigma_y$)

2.5 חבורות של תבניות

- T שומרת את f - אם $f(T\alpha,T\beta)=f(\alpha,\beta)$.
- G חבורה -

$$G=\{T:V\to V | f(T\alpha,T\beta)=f(\alpha,\beta)\}$$

- T שומרת גם את התבנית הריבועית (עבור תבנית סימטרית ולא מנוונת)
- החבורה G השומרת על f איזומורפית ל--$O(n,p,\mathbb{R})$
- חבורת לורנץ - $q(x,y,z,t)=t^2-x^2-y^2-z^2$
  - $\Phi:\mathbb{R}^4\to H\in M_2(\mathbb{R})$ -

$$(x,y,z,t)\mapsto \begin{pmatrix} t+x & y+iz\\ y-iz & t-x\end{pmatrix}$$

  איזומורפיזם. אזי $q\to\det$, והאופרטורים השומרים על T איזומורפמים לאופרטורים השומרים על הדטרמיננטה.
  - כל האופטורים המקיימים - $|\det M|=1$

ronen@tx.technion.ac.il