אלגברה א' - משפטים והגדרות

צורות קאנוניות

- ערך עצמי של טרנספורמציה לינארית T הוא סקלר c, שעבורו קיים וקטור עצמי $\alpha \neq 0$ מה-קיים $T(\alpha) = c\alpha$
- עבור אופרטור T (Vממימד סופי) הנ"ל שקולות:
  - c ערך עצמי
  - $T - cI$ אינו הפיך
  - $\det (T - cI) = 0$
- פולינום אופיני - $\det (xI - T)$, מעלתו - $\dim V$.
- הערכים העצמיים הם שורשי הפולינום
- אופרטור T לכסין אם קיים בסיס המורכב מוקטורים עצמיים
- עבור T, $c_1, \ldots, c_k$ ערכים עצמיים שונים ו-$W_i = \ker (T - c_i I)$ הנ"ל שקולים:
  1. T לכסין
  2. הפולינום האופייני הוא $\prod (x - cI)^{d_i}$
  3. $d_i = \sum W_i$
  4. $\sum_{i=1}^{k} \dim W_i = \dim V$

פולינומים

- לפולינום המינימלי ולאופייני יש אותם שורשים
- קיילי המילטון - הפולינום המינימלי מחלק את האופייני

שילוש

- W הוא T-אינורינטי אם $T(W) \subseteq W$
- אם W T-אינורינטי, אז ניתן לרשום $[T] = \begin{pmatrix} [T_W] & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$
- הפולינום האופייני (המינימלי) של $T|_W$ מחלק את הפולינום האופייני (המינימלי) של T.
- אם $\alpha \in V$ ו-$W \subset V$, T-אינורינטי, אז המוביל של α ל-W הוא $F(\alpha) \in W$.
  - המאפס - המוביל עבור $w = 0$
- המוביל סגור תחת חיבור, ותחת כפל בפולינום
- ל-T פולינום מינמלי המתפרק למכפלה ש לגורמים לינארים. W T-אינוריטנטי, אז קיים $\alpha \in V \setminus W$ כך ש- $(T - cI)(\alpha) \in W$, עבור c כלשהו.
- T ניתנת לשילוש $\iff$ הפולינום המינימלי של T מתפרק למכפלה של גורמים לינארים (לאו דווקא שונים)
- T ניתנת ללכסון $\iff$ הפולינום המינימלי של T מתפרק למכפלה של גורמים לינארים שונים.

סכומים ישרים

- W_i בלתי תלויים אם $\sum \alpha_i = 0$ (כאשר $\alpha_i \in W_i$) $\Leftarrow$ $\alpha_i = 0$ לכל i
  - לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה כצירוף של α_i
- הטענות הבאות שקולות:
  1. $W_1, \ldots, W_k$ בלתי תלויים
  2. לכל $2 \leq J \leq k$, מתקבל $W_j \cap (W_1 + \ldots + W_{j-1}) = 0$
  3. B_i בסיס סדור של W_i. $B = (B_1, \ldots, B_k)$ בסיס של $W_1 + \ldots + W_k$
- אם אחד מהתנאים הללו מתקיים - נסמן סכום ישר - $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

הטלות

- העתקה E המקיימת $E^2 = E$ היא הטלה
- נסמן $N = \ker E$ ו-$R = \mathrm{Im} E$ אזי מתקיים:
  - $E\beta = \beta \iff \beta \in R$
  - $V = R \oplus N$
  - ההטלה E עם תמונה R וגרעין N - היא יחידה
  - ההטלה היא תמיד לכסינה. ($E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר I הוא בגודל $\dim R$)
- $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ אזי קיימות העתקות $\{E_i\}_{i=1}^{k}$ המקיימות:
  1. כל E_i הטלה
  2. $E_i E_j = 0$, לכל $i \neq j$
  3. $E_1 + \ldots E_k = I$
  4. $\mathrm{Im} E_i = W_i$

ובכיוון ההפוך - $E_1, \ldots, E_k$ העתקון המקיימות תנאים $1 - 3$ אזי $V = W_1 \oplus \ldots W_k$ ו-$W_i =$ $\mathrm{Im} I$

- $T:V\to V$, W_i, E_i כמו במשפט הקודם, אז W_i הוא T אינוריאנטי $\iff$ $TE_i=E_iT$ לכל i.

- אם T לכסינה וכל הערכים העצמיים c_i שונים אז קיימים E_i כך ש-

1. $T=c_1E_1+\ldots+c_kE_k$
2. $I=E_1+\ldots+E_k$
3. $E_iE_j=0$ עבור $i\neq j$
4. $E_i^2=E_i$
5. $\mathrm{Im}E_i$ המרחב העצמי של c_i

ובכיוון ההפוך - אם קיימים k סקלרים שונים $\{c_i\}$ ו-k אופרטורים שונים $\{E_i\}$ המקיימים $1-3$, אז $\{c_i\}$ ערגים עצמיים ו-$4-5$ מתקיימים

הפירוק הפרימארי

- תהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$, מעל שדה F. יהי P הפולינום המינימלי של P, אזי $P=P_i^{r_1}\cdots P_k^{r_k}$ (כאשר P_i מתוקנים, אי פריקים ושונים, $r_i>0$ שלמים). יהיו $W_i=\ker P_i^{r_i}(T)$ אזי -

1. $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$
2. כל W_i הוא T-אינוריאנטי
3. הפולינום המינימלי של $T_{|W_i}$ הוא P_i^r

- מעל שדה סגור אלגברית - $W_i=\ker\left(T-c_iI\right)^{r_i}$, E_i הטלה המתאימה לתת המרחב אזי $D=\sum c_iE_i$, אלכסוני, ו-$N=T-D$ נילפוטנט.

- אם T מתפרק לגורמים לינארים- אז קיים אופרטור לכסין D ונילפוטנט N כך ש-

1. $T=D+N$
2. $DN=ND$
3. D, N נקבעים באופן יחיד והם פולינומים ב-T

מרחבים ציקליים

- תת המרחב ה-T-ציקלית הנוצר על ידי α הוא

$$\mathrm{span}\left\{\alpha,T\alpha,T^2\alpha,\ldots\right\}$$

והוא תת המרחב ה-T אינורינטי הקטן ביותר של v המכיל את α

  - אם המרחב הוא V, אז α וקטור ציקלי של T

- T-מאפס של α היא הקבוצה $\{\, g\in F[x]\mid g(T)\alpha=0\,\}$. P_α הוא האי-בר בעל הדרגה הקטנה בקבוצה

- P_α מחלק את הפולינום המינימלי של T

- α, T ו-P_α הוא ה-T-מאפס

1. הדרגה של P_α שווה למימד $Z\left(\alpha,T\right)$, המרחב הציקלי של α
2. $\deg P_\alpha=k$ אז $\left\{\alpha,T\alpha,\ldots,T^{k-1}\alpha\right\}$ בסיס של $Z\left(\alpha,T\right)$
3. הפולינום המינימלי של $T|_{Z(\alpha,T)}$ הוא P_α

- אם α ציקלי ב-T, אז הפולינום האופייני של T שווה למינימלי.

- אם α וקטור ציקלי, המטריצה המיצגת של T לפי הבסיס הציקלי היא מטריצת חבר -

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -c_0\\ 1 & 0 & 0 & -c_1\\ 0 & 1 & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & & \\ & \vdots & 0 & \\ & & 1 & -c_{k-1}\end{pmatrix}$$

- $U:W\to W$, יש ל-U וקטור ציקלי $\iff$ יש בסיס שבו U מיוצג על ידי מטריצת חבר

צורת ג'ורדן

- למה: $T:V\to V$ היא r נילפוטנטית אז קים ל-V תת מרחב T-ציקלי ממימד r.

- למה: $T:V\to V$, r נילפוטנטית ו-$U\subseteq V$ תת מרחב T ציקלי r מימדי. אזי קיים ל-U תת מרחב משלים T אינוריאנטי W כך ש-$V=U\oplus W$.

- משפט ג'ורדן עבור מטריצה T r נילפוטנטית -

  - קיימים מספרים טבעיים $r=r_1\le\ldots\le r_k$ כך ש- $\dim V=\sum r_i$ ווקטורים $\alpha_1,\ldots\alpha_k$ כך ש-

$$T^{r_1}\alpha_1=\ldots=T^{r_k}\alpha_k=0$$

וסדרת הוקטורים

$$\alpha_1,T_{\alpha_1}\ldots,T^{r_1-1}\alpha,\alpha_2,T\alpha_2\ldots T^{r_2-1}\alpha_2,$$
$$\ldots\alpha_k,T\alpha_k\ldots T^{r_k-1}\alpha_k$$

מהווה בסיס ל-V

– המטריצה המיימגת אצ T ביחס לבסיס הזה הוא:

$$J=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}, B_i=\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר B_i היא מסדר $r_i \times r_i$

- עובר אופרטור כללי - תהא $T : V \to V$, $\dim_F V < \infty$ כך שהפולינום האופייני של T מתפרק מעל F למכפלה של גורמים לינארים -

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

כאשר $c_1,\ldots,c_k$ הם הערכים העצמיים השונים של T ב-F, $d_i \leq 1$.

– קיים ל-V בסיס, לפיו המטריצה המייצגת את T היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר כל מטריצה A_i מסדר $d_i \times d_i$ היא מטריצת בלוקים

$$A_i=\begin{pmatrix} J_1^{(i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

כאשר כל J_i היא מטריצת ג'ורדן אל-מנטרית עם ערך עצמי c_i מהצורה: $J_j^{(i)}=$

$$\begin{pmatrix} c_i & & & & 0 \\ 1 & c_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & c_i \end{pmatrix}$$

- משפט ג'ורדן - יחידות - כל אופרטור ניתן לי-יצוג על ידי מטריצה יחידה בצורת ג'ורדן

- $n_k(J)=r\left(A^k\right)-2r\left(A^{k+1}\right)+r\left(A^{k+2}\right)$ - כאשר $n_k(J)$ היא מספר השרשראות ב-J בע-לות אורך k בדיוק, r היא דרגת המטריצה.

ronen@tx.tehchnion.ac.il