תורת הקבוצות - סיכום

סמסטר אביב, 2004

1 לוגיקה

1.1 כללי שקילות

$$
\begin{aligned}
p \vee q &\iff q \vee p \quad (\star)\\
p \wedge q &\iff q \wedge p \quad (\star)\\
(p \vee q) \vee r &\iff p \vee (q \vee r) \quad (\star)\\
(p \wedge q) \wedge r &\iff p \wedge (q \wedge r) \quad (\star)\\
p \vee (q \wedge r) &\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)\\
p \wedge (q \vee r) &\iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\\
p \wedge p &\iff p \quad (\star)\\
p \vee p &\iff p \quad (\star)\\
\sim (\sim p) &\iff p \quad (\star)\\
(r \to q) &\iff (\sim p) \vee q\\
\sim (p \vee q) &\iff (\sim p) \wedge (\sim q)\\
\sim (p \wedge q) &\iff (\sim p) \vee (\sim q)
\end{aligned}
$$

1.2 כללי גרירה

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \Rightarrow p &\qquad p \Rightarrow p \vee q \quad (\star)\\
p \wedge q \Rightarrow q &\qquad q \Rightarrow p \vee q \quad (\star)\\
\sim p \Rightarrow p \to q &\qquad q \Rightarrow p \to q\\
(\sim p) \wedge (p \vee q) &\Rightarrow q\\
p \wedge (p \to q) &\Rightarrow q\\
(\sim q) \wedge (p \to q) &\Rightarrow (\sim q)\\
(p \to q) \wedge (q \to r) &\Rightarrow p \to r\\
(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) &\Rightarrow r\\
\sim (p \to q) &\Rightarrow \sim q\\
\sim (p \to q) &\Rightarrow p\\
(r \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow p) &\Rightarrow r \leftrightarrow p
\end{aligned}
$$

1.2.1 כללי שקילות וגרירה (עם כמתים)

$$
\begin{aligned}
(\exists x)\,(p(x) \vee q(x)) &\iff (\exists x)\,p(x) \vee (\exists x)\,q(x)\\
(\forall x)\,(p(x) \wedge q(x)) &\iff (\forall x)\,p(x) \wedge (\forall x)\,q(x)\\
\sim [(\exists x)\,p(x)] &\iff (\forall x)\,(\sim p(x))\\
\sim [(\forall x)\,p(x)] &\iff (\exists x)\,(\sim p(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\forall x)\,p(x) \vee (\forall x)\,q(x) &\iff (\forall x)\,(p(x) \vee q(x))\\
(\exists x)\,(p(x) \wedge q(x)) &\iff (\exists x)\,p(x) \wedge (\exists x)\,q(x)\\
(\exists x)\,(o(x) \to q(x)) &\iff (\forall x)\,p(x) \to (\exists x)\,q(x)\\
(\exists x)\,(\exists y)\,r(x,y) &\iff (\exists y)\,(\exists x)\,r(x,y)\\
(\forall x)\,(\forall y)\,p(x,y) &\iff (\forall y)\,(\forall x)\,r(x,y)
\end{aligned}
$$

2 יחסים בין קבוצות

- הגדרות

$$
\begin{aligned}
S \subseteq B &\iff (\forall x)\,(x \in A \to x \in B)\\
A \cup B &\triangleq \{x | x \in A \vee x \in B\}\\
A \cap B &\triangleq \{x | x \in A \wedge x \in B\}\\
A - B &\triangleq \{x | x \in A \wedge x \notin B\}\\
A' &\triangleq \{x | x \notin A\}
\end{aligned}
$$

- דה-מורגן

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)' &= A' \cup B'\\
(A \cup B)' &= A' \cap B'
\end{aligned}
$$

- קבוצות של קבוצות

$$
\begin{aligned}
\bigcup M &\triangleq \{x |\, (\exists X)\,(X \in M \wedge x \in X)\}\\
\bigcap M &\triangleq \{x |\, (\forall x)\,(x \in M \to x \in X)\} \quad M \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

- קבוצת חזקה:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \{X | X \subseteq A\}\\
P(A) &\neq \emptyset\\
P(\emptyset) &= \{\emptyset\}\\
A = B &\iff P(A) = P(B)\\
A \subset B &\iff P(A) \subset P(B)\\
P()A \cup P(B) &\subseteq P(A \cup B)\\
P(A) \cap P(B) &= P(A \cap B)\\
\bigcup P(A) &= A\\
\bigcap P(A) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

- מכפלה קרטזית:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{\{a\},\{a,b\}\} \\
((a,b),s) &= (a,b,s) \\
A\times B &= \{(x,y)\,|x\in A\wedge y\in B\} \\
A\times(B\cup C) &= (A\times B)\cup(A\times C) \\
A\times(B\cap C) &= (A\times B)\cap(A\times C) \\
A\times(B-C) &= (A\times B)-(A\times C) \\
A\subseteq D &\Rightarrow A\times C\subseteq A\times D \\
A\times B=\emptyset &\iff A=\emptyset\vee B=\emptyset
\end{aligned}$$

3 רלציות ופונקציות

3.1 רלציות

- הרכבה ($\circ$) והיפוך ($^{-1}$) .

$$\begin{aligned}
R^{-1} &\triangleq \{(x,y)|(y,x)\in R\} \\
S\circ R &\triangleq \{(x,z)|\,(\exists y)\,((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S)\} \\
\left(R^{-1}\right)^{-1} &= R \\
T\circ(S\circ R) &= (T\circ S)\circ R \\
(S\circ R)^{-1} &= R^{-1}\circ S^{-1}
\end{aligned}$$

- רלציות מעל קבוצה

$$I_A \triangleq \{(x,x)\,|x\in A\}$$

  - רפלקסיביות - $(\forall x)\,(x\in A\to(x,x)\in R)$
  - סימטריה - $(\forall x,y)\,((x,y)\in R\to(y,x)\in R)$
  - טרנזטיביות - $(\forall x,y)\,((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\to(x,z)\in R)$
  - אנטיסימטריה - $(\forall x,y)\,((x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\to x=y)$

- רלציית שקילות היא רלציה רפלקסיבית, סימטרית וטרנזטי-ביות
  - מחלקת שקילות של A לפי R -

$$[a]_R\triangleq\{x|\,(x,a)\in R\wedge a\in A\}$$

  - מנה של A מודולו R $A/R\triangleq\{[a]_R\,|a\in A\}$.
  - מחלקות שקילות יכולות להיות שוות או זרות, ומהוות חלוקה של הקבוצה.

3.2 פונקציות

- רלציה פונקציונאלית G -

$$(\forall A)\,(x\in A\to(\exists! y)\,(x,y)\in G)$$

- פונקציה מ-A ל-B לפי G היא $f=(A,B,G)$.
- פונקציה אופיינית של D: $\overset{h_D:u\to\{0,1\}}{x\mapsto\begin{cases}1 & x\in D\\ 0 & x\notin D\end{cases}}$.

- תכונות:

$$\begin{aligned}
L\subseteq M &\iff (\forall x)\,(h_L(x)\le h_M(x)) \\
(\forall x)\,h_{C\cap D}(x) &= h_c(x)\cdot h_D(x) \\
(\forall x)\,h_{C\cup D}(x) &= h_C(x)+h_D(x)-h_C(x)\cdot h_D(x) \\
(\forall x)\,h_C(x) &= 1-h_{C^c}(x)
\end{aligned}$$

- $[f_1=(A_1,B_1,G_1)]\ =\ [f_2=(A_2,B_2,G_2)]\iff A_1\ =\ A_2\wedge B_1=B_2\wedge G_1=G_2$.
- קבוצת פונקציות - $B^A\triangleq\{G_f|f:A\to B\}$.
- תמונה של C לפי f - $f(C)=\{y|\,(\exists x)\,(y=f(x)\wedge x\in C)\}$.
  - תכונות התמונה:

$$\begin{aligned}
f(\emptyset) &= \emptyset \\
f(\{a\}) &= \{f(a)\} \\
C\subseteq D &\Rightarrow f(C)\subseteq f(D) \\
f(C\cup D) &= f(C)\cup f(D) \\
f(C\cap D) &\subseteq f(C)\cap f(D) \\
f(C)-f(D) &\subseteq f(C-D)
\end{aligned}$$

- מקור של E לפי f - $f^{-1}(E)=\{x|f(x)\in E\}$.
  - תכונות המקור:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
E\subseteq F &\Rightarrow f^{-1}(E)\subseteq f^{-1}(F) \\
f^{-1}(E\cup F) &= f^{-1}(E)\cup f^{-1}(F) \\
f^{-1}(E\cap F) &= f^{-1}(E)\cap f^{-1}(F) \\
f^{-1}(E-F) &= f^{-1}(E)-f^{-1}(F)
\end{aligned}$$

- בהנתן f, נגדיר, $\hat{f},\hat{\hat{f}}$

$$\begin{aligned}
\hat{f}:P(A) &\to P(B) \\
X &\mapsto f(X) \\
\hat{\hat{f}}:P(B) &\to P(A) \\
X &\mapsto f^{-1}(X)
\end{aligned}$$

- הרכבה - $f:A\to B$, $g:B\to C$

$$g\circ f=(A,C,G_{g\circ f}=G_g\circ G_f)$$

- פונקציה אינז'קטיבית / חח"ע

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall u,v\in A)\,(u\neq v\to f(u)\neq f(v)) \\
&\iff (\forall u,v\in A)\,(f(u)=f(v)\to u=v)
\end{aligned}$$

  - הרכבת אינז'קטיביות היא אינז'קטיבית, ו-$f:A\to B$ אינז'קטיבית אם ורק אם $(\exists g:B\to A)\,(g\circ f=1_A)$.

- פונקציה סורז'קטיבית / על

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall y\in B)\,(\exists x\in A)\,(f(x)=y) \\
&\iff \mathrm{Im}\ f=B
\end{aligned}$$

– הרכבת סורז'קטיביות היא סורז'קטיבית, וגם $(\exists h : B \to A)\,(f \circ h = 1_B)$.

- פונקציה ביז'קטיבית/הפיכה הוא פונקציה אינז'קטיבית וסורז'קטיבית

$$\iff (\exists h : B \to A)\,(f \circ h) = 1_B \wedge (\exists B \to A)\,(g \circ f) = 1_B$$

במצב זה, $h = g$. כמו כן, הרכבת ביז'קטיביות יהא ביז'קטיבית.

– עבור f, g ביז'קטיביות:

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= 1_B \\ f^{-1} \circ f &= 1_B \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1} \end{aligned}$$

- כל פונקציה ניתנת לפירוק לשלוש פונקציות: ביז'קטיבית, סורז'קטיבית ואינז'קטיבית.
- משפחה/קבוצה M - $(M_i)_{i \in I}$. נגדיר:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &\triangleq \{x |\, (\exists i)\,(i \in I \wedge x \in A_i)\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &\triangleq \{x |\, (\forall i)\,(i \in I \to x \in A_i)\} \\ \prod_{i \in I} A_i &\triangleq \{f : f : I \to A \wedge (f(i) \in A_i, \forall i \in I)\} \end{aligned}$$

- הקבוצה B^A היא קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-B.

– תכונות:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' &= \bigcap_{i \in I} A_i' \\ \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' &= \bigcup_{i \in I} A_i' \end{aligned}$$

4 בניית מערכת המספרים

4.1 $\mathbb{N}$ - הטבעיים

- העוקב של A - $A^+ \triangleq A \cup \{A\}$

– מתקיים, $A \in A^+$, $A \subset A^+$.

- נכנה $0 = \emptyset$.
- S קבוצה אינדוקטיבית

$$\iff \quad (\emptyset \in S) \wedge (\forall X)\left(X \in S \to X^+ \in S\right)$$

- חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הוא אינדוקטיבי.
- $\mathbb{N}$ הוא הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר (או חיתוך של כל הקבוצות האינדוקטיביות)
- פעולות:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto m + n = \begin{cases} m + 0 = m & n = 0 \\ m + n^+ = (m + n)^+ & n \Rightarrow n^+ \end{cases} \\ \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto m \cdot n = \begin{cases} m \cdot 0 = 0 & n = 0 \\ m \cdot n^+ = m \cdot n + m & n \Rightarrow n^+ \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 $\mathbb{Z}$ - השלמים

$\mathbf{A} \triangleq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. מגדירים על $\mathbf{A}$ את הרלציה S:

$$(a, b)\, S\, (c, d) \iff a +_{\mathbb{N}} d = b +_{\mathbb{N}} c$$

S . היא רלצית שקילות. נגדיר את $\mathbb{Z} = \mathbf{A}/S$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(1_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}})] \\ -3_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(0_{\mathbb{N}}, 3_{\mathbb{N}})] \\ 3_{\mathbb{Z}} &\triangleq [(3_{\mathbb{N}}, 3_{\mathbb{N}})] \end{aligned}$$

פונקציית שיכון:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n_{\mathbb{N}} &\mapsto [(n_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}})] = n_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(a + c, b + d)] \\ \cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(ac + bd, ad + bc)] \end{aligned}$$

4.3 $\mathbb{Q}$ - הרציונאלים

$\mathbf{B} \triangleq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, כאשר $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
מגדירים על $\mathbf{B}$ את הרלציה T:

$$(a, b)\, T\, (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

T היא רלצית שקילות. ו-$\mathbb{Q} = \mathbf{B}/T$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} &= [(1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})] \\ 0_{\mathbb{Q}} &= [(0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})] \\ -\frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} &= [(-1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}})] \end{aligned}$$

ופונקצית השיכון:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ u_{\mathbb{Z}} &\mapsto [(u_{\mathbb{Z}}, 0)] = u_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(ad + bc, bd)] \\ \cdot_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ ([(a, b)], [(c, d)]) &\mapsto [(ac.bd)] \end{aligned}$$

4.4 $\mathbb{R}$ - הממשיים. באמצעות סדרות Couchy.

$$\mathbf{D} \triangleq \left\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, (\text{סדרת קושי } a_n) \wedge a_n \in \mathbb{Q}\right\}$$

מגדירים לע D את הרלציה V:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\, V\, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0_{\mathbb{Q}}$$

V היא רלצית שקילות. ו-$\mathbb{R} = D/V$.

$$e_{\mathbb{R}} \triangleq \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} - 0}\right]$$

פונקצית שיכון:

$$\begin{aligned} h:\mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ u_{\mathbb{Q}} &\mapsto \left[(a_n=u_{\mathbb{Q}})_{n\in\mathbb{N}}\right]=\mu_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ ([(a_n)],[(b_n)]) &\mapsto [(a_n+b_n)] \\ \cdot_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ ([(a_n)],[(b_n)]) &\mapsto [(a_n\cdot b_n)] \end{aligned}$$

5 תכונות שקילות ושליטה בין קבוצות

- פונקציות הן שקולות אם קיימת פונקציה ביז'קטיבית בינהן. השקילות היא רלצית שקילות.
- A נשלטת על ידי B ($A \preceq B$) אם קיימת פונקציה אינז'קטיבית מ-A ל-B. זהו יחס סדר חלקי.

$$\begin{aligned} A\cup B &\sim B\cup A \\ (A\cup B)\cup C &\sim A\cup(B\cup A) \\ A\times B &\sim B\times A \\ (A\times B)\times C &\sim A\times(B\times C) \\ A\times(B\cup C) &\sim (A\times B)\cup(A\times C) \\ \left(A^B\right)^C &\sim A^{B\times C} \\ A^{B\cup C} &\sim A^B\times A^C \\ (A\times B)^C &= A^C\times B^C \\ P(A) &\sim \{0,1\}^A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\sim B &\Rightarrow P(A)\sim P(B) \\ (A\sim C)\wedge(B\sim D) &\Rightarrow A^B\sim C^D \\ (A\sim C)\wedge(B\sim D) &\wedge (A\cap B=C\cap D=\emptyset) \\ &\Rightarrow (A\cup B)\sim(C\cup D) \\ (A\sim C)\wedge(B\sim D) &\Rightarrow (A\times B)\sim(C\times D) \\ A\preceq C &\Rightarrow (A\cup B)\preceq(C\cup B) \\ A\preceq C &\Rightarrow (A\times B)\preceq(C\times B) \\ A\preceq C &\Rightarrow A^B\preceq C^B \\ A\preceq C &\Rightarrow B^A\preceq B^C \\ A\preceq C &\Rightarrow P(A)\preceq P(C) \\ A &\preceq P(A) \end{aligned}$$

- קבוצה A בת מניה אם ורק אם $A\preceq\mathbb{N}$.
- קבוצה A בעלת עוצמת הרצף אם ורק אם $A\sim\mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}\prec\mathbb{R}$. $P(\mathbb{N})\sim\mathbb{R}$.

5.1 קבוצות סופיות ואין-סופיות

- B קבוצה סופית, $(\forall E)\left((E\subsetneq B)\to(E\nsim B)\right)\iff$
- A קבוצה אינסופית $(\exists C)\left(C\subseteq A\wedge C\sim\mathbb{N}\right)\iff$
  - A אינסופית - $A\sim A\cup\{S\}\,,s\notin A$
  - B סופית - $\exists k:B\sim\mathbb{N}_k$ (כל הטבעיים עד האיבר ה-k)

5.2 קרדינלים

-

$$\begin{aligned} \aleph_0+1 &= \aleph_0 \\ \alpha+\beta &= \beta+\alpha \\ \mathrm{card}\,(A\dot\cup B) &\triangleq \alpha+\beta \\ \mathrm{card}\,(A\times B) &\triangleq \alpha\beta \\ \mathrm{card}\ B^A &\triangleq \beta^\alpha \\ \alpha\le\beta &\Rightarrow (\exists\gamma)\,(\alpha+\gamma=\beta) \\ \alpha+\alpha &= 2\alpha \\ \alpha\cdot\alpha &= \alpha^2 \\ \mathrm{card}\ P(A) &= 2^\alpha \end{aligned}$$

- עבור קרדינל על סופי -

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\alpha=\alpha^2 \\ 1\le\beta\le\alpha &\Rightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha \\ \alpha\le\beta &\Rightarrow \alpha+\beta=\alpha \\ 2\le\beta\le\alpha &\Rightarrow \beta^\alpha=2^\alpha \\ \delta\le\mu &\Rightarrow \delta^\alpha\le\mu^\alpha \\ c^c &= 2^c=\mathcal{F} \end{aligned}$$

- הקרדינל של כל הפונקציות הרציפות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ הוא c, ושל כולן - $\mathcal{F}$.
-

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n &\triangleq \mathrm{card}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\aleph_0 \\ \prod_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n &\triangleq \mathrm{card}\ \times_{n\in\mathbb{N}}A_n=c \end{aligned}$$

6 סדר

- a האלמנט הקטן ביותר ב-A - $(\forall x\in A)\,(a\le x)$
- b הגדול ביותר ב-A - $(\forall x\in a)\,(b\ge x)$
- c מינימלי ב-A -$(\forall x\in A)\,(x\le c\to x=c)$
- d מקסימלי - $(\forall x\in A)\,(x\ge d\to x=c)$
- s חסם מלרע של B ב-A $(s\in A)\,(\forall x\in B)\,(s\le x)$.
- t חסם מלעיל של B ב-A $(t\in A)\,(\forall x\in B)\,(s\le x)$.
- גדול החסמים מלרע נקרה אינפימום.
- קטן החסמים מלעיל נקרא סופרימום.
- בין קבוצות - סדר החלה.
  - $M\subseteq P(A)$, $\inf_{P(A)}M=\bigcap M$, $\sup_{P(A)}M=\bigcup M$.
- קבוצה סדורה כליל אם ניתן להשוות כל 2 איברים בקבוצה.
- אם לכל תת קבוצה לא ריקה של A יש איבר קטן ביותר, הקבוצה סדורה היטב.
- שריג היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל קבוצה של 2 אל-מנטים, יש לה אינפימום וסופרימום.
- f שומרת סדר - $(\forall x_1,x_2\in A)\,(x_1\le_A x_2\leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2))$
- פונקציה ביז'קטיבית שומרת סדר היא איזומורפיזם סדר.
- אם בין A ל-B ניתן לבנות איזומורפיזם סדר, $A\simeq B$.

6.1 משפטים על קבוצות סדורות חלקית דומות

6.1.1 משפט 1:

תהיינה $(A,\le_1)$ ו-$(B,\le_2)$ קבוצות סגורות חלקית דומות, $(D,\le_1)$ תת קבוצה סדורה חלקית (סדר מושרה) של $(A,\le_1)$, f פונקצית דמיון (איזומופריזם סדר) $\underset{x\mapsto f(x)}{f:A\to B}$ אז:

1. $a\in A$ הינו האלמנט הקטן ביותר ב-$(A,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(a)$ הינו האלמנט הקטן ביותר ב-$(B,\le_2)$.
2. $c\in A$ הינואלמנט הגדול ביותר ב-$(A,\le_1)$, $\Longleftrightarrow$ $f(c)$ הינו האלמנט הגדול ביותר ב-$(B,\le_2)$.
3. $\alpha\in A$ הינו אלמנט מקסימלי ב-$(A,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(\alpha)$ הינו אלמנט מינימלי ב-$(B,\le_2)$.
4. $\ell\in A$ הינו אלמנט מינלמלי של ב-$(A,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(\ell)$ הינו אלמנט מינמלי ב-$(B,\le_2)$.
5. $s\in A$ הינו חסם מלרע של $(D,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(s)$ הינו חסם מלרע של $(f(D),\le_2)$.
6. $t\in A$ הינו חסם מלעיל של $(D,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(t)$ הינו חסם מלעיל של $(f(D),\le_2)$.
7. $u\in A$ הינו סופרימים של $(D,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(u)$ הינו סופרימום של $(f(D),\le_2)$.
8. $v\in A$ הינו אינפימום של $(D,\le_1)$ $\Longleftrightarrow$ $f(v)$ היו אנפימום של $(f(D),\le_2)$.

6.1.2 משפט 2

תהיינה $(A,\le_1)$ו-$(B,\le_2)$ קבוצות סדורות חלקית דומות. אזי:

1. $(A,\le_1)$ קבוצה סדורה כליל $\Longleftrightarrow$ $(B,\le_2)$ קבוצה סדורה כליל.
2. $(A,\le_1)$ קבוצה סדורה היטב $\Longleftrightarrow$ $(B,\le_2)$ קבוצה סדורה היטב.

7 פעולות בין אורדינלים

7.1 הגדרות

- רישא של A לפי a : $I_A(a)=\{x|x\in A\wedge x<a\}$
- $I(A)$ - קבוצת הרישות של A.
- לכל A,B מתקיים $A\simeq I_B(\beta)\vee B\simeq I_A(\alpha)\vee A\simeq B$
- כל קבוצה ניתנת לסידור היטב.
-

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &\triangleq \operatorname{ord}\ (A\oplus B)\\
A\oplus B &\triangleq (A\dot\cup B,\le_\oplus)\\
x\le_\oplus y &\iff \begin{cases} x\le_A y & x,y\in A\\ x\le_B y & x,y\in B\\ \text{true} & x\in A, y\in B\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\alpha+\beta \triangleq \begin{cases}\alpha & \beta=0\\ (\alpha+\gamma)^+ & \beta=\gamma^+\\ \sup\{\alpha+\xi|\xi<\lambda\} & \beta=\lambda(\text{גבולי})\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot\beta &\triangleq \operatorname{ord}(A\otimes B)\\
A\otimes B &\triangleq (A\times B,\le_\otimes)\\
(x,y)\le_\otimes(u,v) &\iff (y<v)\wedge((y<v)\vee((y=v)\wedge(x<u)))
\end{aligned}$$

$$\alpha\cdot\beta \triangleq \begin{cases}0 & \beta=0\\ \alpha\gamma+\alpha & \beta=\gamma^+\\ \sup\{\alpha\xi|\xi<\lambda\} & \beta=\lambda(\text{גבולי})\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^\beta &\triangleq \operatorname{ord}\left(A^B,\le_a\right)\\
A^B &= \left\{f\in A^B|\sup f\ \text{is finit}\right\}\\
f<_a g &\iff f(m)<g(m)\wedge m=\max\{x|f(x)\ne g(x)\}
\end{aligned}$$

$$\alpha^\beta \triangleq \begin{cases}1 & \beta=0\\ \alpha^\gamma\cdot\alpha & \beta=\gamma^+\\ \sup\left\{\alpha^\xi|\xi<\lambda\right\} & \beta=\lambda(\text{גבולי})\end{cases}$$

$$\sum_{\xi<\beta}\alpha_\xi \triangleq \begin{cases}0 & \beta=0\\ \sum_{\xi<\gamma}\alpha_\xi+\alpha_\gamma & \beta=\gamma^+\\ \sup\left\{\sum_{\xi<\delta}a_\xi|\delta<\lambda\right\} & \beta=\lambda(\text{גבולי})\end{cases}$$

$$\prod_{\xi<\beta}\alpha_\xi = \begin{cases}1 & \beta=0\\ \left(\prod_{\xi<\gamma}\alpha_\xi\right)\alpha_\gamma & \beta=\gamma^+\\ \sup\left\{\prod_{\xi<\delta}\alpha_\xi|\delta<\lambda\right\} & \beta=\lambda(\text{גבולי})\end{cases}$$

7.2 תכונות

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)+\gamma &= \alpha+(\beta+\gamma)\\
\alpha+0 &= 0+\alpha=\alpha\\
\gamma+\alpha=\gamma+\beta &\Rightarrow \alpha=\beta\\
\alpha<\beta &\iff \gamma+\alpha<\gamma+\beta\\
\alpha\le\beta &\iff \alpha+\gamma\le\beta+\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma &= \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\\
\alpha\cdot 1 &= 1\cdot\alpha=\alpha\\
\gamma\cdot\alpha=\gamma\cdot\beta\wedge\gamma>0 &\Rightarrow \alpha=\beta\\
\alpha<\beta\wedge\gamma>0 &\iff \gamma\alpha<\gamma\beta\\
\alpha\le\beta &\iff \alpha\gamma\le\beta\gamma\\
\alpha(\beta+\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\alpha^\beta\right)^\gamma &= \alpha^{\beta\cdot\gamma}\\
\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma &= \alpha^{\beta+\gamma}\\
\alpha^\beta=\alpha^\gamma\wedge\alpha>1 &\Rightarrow \beta=\gamma\\
\alpha<\beta\wedge\alpha>1 &\iff \alpha^\beta<\alpha^\gamma\\
\alpha\le\beta &\iff \alpha^\gamma\le\beta^\gamma
\end{aligned}$$

הערות, תיקונים וכו' - נא לשלוח ל-ronen@tx.technion.ac.il. עדכונים, במידה ויהיו, ניתן יהיה למצוא ב-tx.technion.ac.il/~ronen.