

$$\int_A f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \bullet$$

$$\delta \approx \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \approx \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) \approx \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2} \bullet$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \bullet \text{ כאשר } x_i \text{ השורשים.}$$

התמרת פוריה $G(k)=\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx}$ \bullet

$$e^{2\pi iax} f(x) \Rightarrow \hat{f}(k+2\pi a) \quad f(x-a) \Rightarrow e^{-iak} \hat{f} \bullet$$

$$e^{iax} f \Rightarrow \hat{f}(k-a) \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = (ik)^n \hat{f} \bullet$$

$$e^{-a|x|} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2} \quad e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \Rightarrow e^{-\frac{k^2}{2} a^2} \bullet$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow \sqrt{2\pi} \delta(k-\alpha) \quad \delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet$$

$$f(\mathbf{ax}) \Rightarrow \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right) \quad \sin(ax) \Rightarrow i\sqrt{2\pi} \frac{\delta(k+a) - \delta(k-a)}{2} \bullet$$

$$f(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{x}) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{x}}}{2} f(\mathbf{x}) \bullet$$

1.7 חוקים של Y_{lm} ים

$$x \pm iy = -r\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,\pm 1}, z = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0} \bullet$$

$$Y_{10} Y_{lm} = AY_{l-1,m} + BY_{l+1,m} \bullet$$

1.2 מתמטיקה

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \bullet \text{ (סביב אפס)}$$

$$\cos x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \sin x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \bullet$$

לכסוף מטריצה $D = P^{-1}AP$, ו"ע בעמודות. \bullet

2 אופרטורים

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \bullet$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \bullet$$

עבור $\langle \Delta A \rangle \langle \Delta B \rangle \geq \left| \frac{\langle \Delta C \rangle}{2} \right|^2$, $[A, B] = C \neq 0$ \bullet

עבור $\{|\phi_i\rangle\}$ בסיס אורתונורמלי - $I = \sum |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$ \bullet

אם A, B מתחלפים עם הקומטטור $[A, f(B)] = [A, B] f'(B)$ \bullet

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \bullet$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \bullet$$

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]} \bullet$$

$$[x, p_x] = i\hbar \bullet$$

1.3 אינטגרלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma^2 \bullet$$

לגואסיאן $\langle x \rangle = x_0, \langle x^2 \rangle = \sigma^2 + x_0^2$ \bullet

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) \quad \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \bullet$$

$$\int x e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} \quad \int x e^{ax} = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} \bullet$$

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \bullet$$

$$\int x \sin(ax) = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \bullet$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x \bullet$$

חוק גאוס: $\iint_V (\text{div } \mathbf{F}) dV = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ \bullet

משפט גרין: $\int_C (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA$ \bullet

2.1 מצבים עצמיים

חלקיק חופשי: $\mathbf{k} = , \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, H = \frac{p^2}{2m}$ \bullet

$$\frac{p}{\hbar}, \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

1.4 נגזרות

בקוארדינות כדוריות $\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \hat{\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$ \bullet

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

בגלילות $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$ \bullet

$$z = r \cos \theta, y = r \sin \theta \sin \phi, x = r \cos \phi \sin \theta \bullet$$

1.5 זהויות טריגונומטריות

$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \mp \sin \theta \sin \varphi \quad \sin(\theta \pm \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \pm \cos \theta \sin \varphi \bullet$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \bullet$$

$$\sin \sin = \frac{1}{2} (\cos \Delta - \cos \Sigma) \quad \cos \cos = \frac{1}{2} (\cos \Delta + \cos \Sigma) \bullet$$

$$\sin + \sin = 2 \sin \frac{\Sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} \quad \sin \cos = \frac{1}{2} (\sin \Sigma + \sin \Delta) \bullet$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos + \cos = 2 \cos \frac{\Sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} \bullet$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \bullet$$

סופרפוזיציה של גל חופשי יוצר חבורת גלים. \bullet

בקוארדינטות ספריות, $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$, אזי, $\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ \bullet

חלקיק בתיבה (שמרכזת $L/2$), $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}, \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ \bullet

דו-מימדי - $H = H_x + H_y, \psi_{n_x n_y} = \varphi_{n_x}(x) \cdot \varphi_{n_y}(y)$ \bullet

בור סופי - $\psi(x) = \begin{cases} B e^{\alpha x} \\ C e^{iqx} + D e^{-iqx} \\ E e^{-\alpha x} \end{cases}$ \bullet

$q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$, $k = i\alpha, k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} < 0$ תופרים פתרונות לפי זוגיים ואיזוגיים. \bullet

פוטנציאל דלתא - $V = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} \delta(x)$, אז $\psi'|_{x=0} - \psi'|_{x=0^-} = -\frac{\lambda}{a} \psi(0)$ \bullet

3 תנע זוויתי

$[L^\alpha, L^\beta] = i\hbar L^\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, L^\alpha = \beta p_\gamma - \gamma p_\beta$

מתחלף עם שלושתם, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

$L^z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle, L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$

$L^- = L^x - iL^y, L^+ = L^x + iL^y$

$[L^z, L^+] = \hbar L^+, [L^+, L^-] = 2\hbar L^z$

L^+, L^- אופרטורים עצמיים של L^z

$L^+ L^- = L^2 - L_z^2 + \hbar L^z -$

$L^- L^+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L^z -$

$L^+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} |l, m+1\rangle$

$L^- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle$

עבור $l = 1$ בבסיס $|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L_z = \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L^2 = 2\hbar I_{3 \times 3}$

$L_x^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_y^2 = -\frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$m = l, l-1, \dots, -(l-1), -l$

בקוארדינטות כדוריות

$\mathbf{L} = -i\hbar \left(\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$

זוגיות $\hat{P} Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$

ההמילטוניאן: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, הורדה $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$

$\hat{p} = \frac{1}{2i} \sqrt{2\hbar m \omega} \hat{x}, \hat{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$

$[N, a] = -a, [N, a^\dagger] = a, [a, a^\dagger] = 1$

$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), H = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$

$\varphi_1 = a^\dagger |\varphi_0\rangle, \varphi_0 = A e^{-\frac{1}{2}\xi}$ הרמיט מסדר n

נירמול $|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{a^\dagger |\varphi_n\rangle}{\sqrt{n+1}}$

2.2 משוואות ומשפטים

משוואות שרדינגר התלויה בזמן $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(0)}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)} e^{-i\omega_n t} |\varphi_n(0)\rangle$

הבלתי תלויה בזמן $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x)$

פתרון של משוואת שרדינגר $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, כאשר k^2 הוא המקדם של ψ .

משפט אהרנפסט $\frac{d}{dt} \langle O \rangle = \frac{1}{\hbar} \langle [O, H] \rangle + \langle \frac{\partial O}{\partial t} \rangle$

אם $[A, B] = 0$ והספקטרום לא מנוון, אז המצבים העצמיים שווים (הם ניתנים לניסוח סימולטנית)

2.3 חלקיק על טבעת

$\psi(0) = \psi(L), \langle \psi | \phi \rangle = \int_0^L \psi^* \phi$

התנע מקוונטת $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mL^2}, p_n = \frac{\hbar}{L} n$

שדה מגנטי $H = -\frac{\hbar}{2m} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(x) \right)^2$

עם שתף מגנטי $\Phi_0 = -\frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ie}{\hbar c} \left(\frac{\Phi}{L} \right) \right)$ כאשר $A = \left(\frac{\Phi}{L} \right) \hat{x}, \frac{\hbar c}{e}$

מצבים עצמיים $k_n = \left(\frac{2n}{L} \right) n, \sqrt{\frac{1}{L}} e^{ik_n x}$

אנרגיה $E_n(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$

מהירות - לפי משפט ארנפסט $\langle v \rangle = \frac{\langle p - \frac{e}{c} A \rangle}{m} = \frac{\hbar \left(k_n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{2\pi}{L} \right)}{m}$

שימור זרם $\frac{d\rho(x)}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ (דיברגנץ)

$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi), \rho(x) = |\psi(x)|^2$

4 הפרעות

$$H = H_0 + \lambda H'$$

לא מנוון -

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n^{(0)} | H' | \phi_n^{(0)} \rangle$$

$$\psi_n^{(1)} = - \sum_{m \neq n} \frac{H'_{nm}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} | \psi_m^{(0)} \rangle$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_k^{(0)} | H' | \phi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

מנוון - צריך ללכסן את תת-המרחב המנוון בהפרעה.

$$\lambda H' = e \varepsilon_z z = e \varepsilon r \cos \theta$$

- איבר ראשון מתאפס.

$$H = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_p} + \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{ze^2}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|}$$

לאחר טרנספורמציה קאנונית למרכז המסה

$$= \frac{p_{cm}^2}{2M} + \overbrace{\frac{p^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r}}^{\text{electron}}$$

לאחר הטרנספורמציה, ההמילטוניאן -

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) + \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{ze^2}{r}$$

$$\Delta_n = \frac{\hbar^2}{2\mu a_n^2} = .E_{n,l} R_{n,l}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\lambda_n = \frac{ze^2}{a_n \Delta_n} , 4 |E_n| \text{ והקבועים}$$

$$\lambda_n = n = 1, \dots, \infty$$

$$a_n = \left(\frac{\hbar^2}{2ze^2\mu} \right) n$$

$$E_n = - \left(\frac{z^2}{n^2} \right) \left(\frac{e^2}{2a_B} \right)$$

$$E_1 = 13.6eV, a_B = 2a_1 = 0.529$$

$$\mu = \frac{1}{2} IA \text{ מומנט מגנטי -}$$

$$\mu = \left(\frac{\hbar e}{2mc} \right) \frac{L}{\hbar} \text{ עבור אלקטרון באטום -}$$

$$E_B(z) = -\mu_B (B_0 + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot z) \cdot m \text{ אנרגיה -}$$

$$\mu_B B \text{ מפצל ל-}$$

5 מטריצות צפיפות

הגדרה: $\rho = \sum_i \frac{N_i}{N} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, כאשר $\{|\psi_i\rangle\}$ לא בהכרח אורתוגונליים, אבל מנורמלים.

עבור אופרטור Ω , $\overline{\langle \Omega \rangle} = \text{trace} \langle \rho \Omega \rangle$ (כאשר $\overline{\langle \Omega \rangle}$ מיצוע קוונטי) .

$$\rho^2 = \rho \text{ רק במצב טהור,}$$

$$\text{trace} \rho = 1 \text{ חיובית לחלוטין.}$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H]$$

[איך מחשבים?]

5.1 דינמיקה

$$|\psi(t)\rangle = \sum \overbrace{|H\rangle \langle H| e^{iHt/\hbar}}^{U(t)} |\psi_0\rangle$$

$$U(t) = \sum_\alpha \sum_E |E, \alpha\rangle \langle E, \alpha| e^{-iEt/\hbar}$$

אופרטור אוניטרי.

5.2 התמונה של הייזנברג

האופרטור משתנה בזמן, המצבים נשארים קבועים. $B \rightarrow B(t)$, על ידי הצמדה לפרופגטור.

$$\frac{d}{dt} B(t) = \frac{i}{\hbar} [H, B(t)]$$

עבור H תלוי בזמן, נפרק את הזמן לפרוסות, $\Delta = \frac{t}{N}, N \rightarrow \infty$

$$U(t) = \prod_{n=0}^{N-1} e^{-i\Delta H(n\Delta)/\hbar} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt}$$

מטריצות פאולי, בבסיס $s_z = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\sigma = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = i\sigma_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{ יחסי חילוף - } \sigma_\alpha^2 = 1$$

$$A + |B| \text{ עבור הע"ע הם } AI + B\sigma$$

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} |x+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x-\rangle$$

$$e^{i\theta\sigma^\alpha} = \cos \theta + i\sigma^\alpha \sin \theta . S_\alpha = \frac{1}{2} \hbar \sigma_\alpha$$

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \text{ עבור}$$

$$R = \frac{I_{out}}{I_{in}} = | \langle +n | +n' \rangle |^2 = , \hat{n}, \hat{n}' \text{ אחרי שני מקטבים -}$$

$$B = B\hat{z} \text{ עבור}$$

$$H = -\frac{g\mu_B}{\hbar} BS^z$$

$$\Omega = \frac{g\mu_B B}{\hbar} \text{ תדירות הפרציה -}$$

- הפרופגטור, $U(t)$, מתקבל על ידי סכימת הפעולה על כל המסלולים האפשריים.

$$J^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 S_2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 2 & \\ & 2 & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

- עבור חלקיק חופשי, רושמים, $U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int_{x_0}^{x_N} e^{iS[x(t)]/\hbar} \mathcal{D}[x(t)]$ ניתן לרשום כ- $\int_{x_0}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)]$ היא סכימה על כל המסלולים האפשריים.
- כאשר $S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_N} \mathcal{L}(t) dt = \int_{t_0}^{t_N} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt$

[פיתוח מלא?]

$$U = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t_N - t_0)} \right)^{1/2} e^{i\frac{m(x_N - x_0)^2}{2\hbar(t_N - t_0)}}$$

, כאשר המקדם נקבע על מנת שבגבול $t_N - t_0$, תתקבל $\delta(x_N - x_0)$.

- המצבים הם, עם ע"ע 2: $|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ ועם ע"ע

7 חיבור תנ"ז

- אופרטור הזזות אינפניטסימליות: $T(\varepsilon) = I - \frac{i\varepsilon}{\hbar} P$

- הזזות סופיות: $T(a) = e^{-\frac{ia}{\hbar} P} = e^{-a\partial_x}$

- חבורה: קבוצה עם פעולה אסוציאטיבית, קיים בה איבר יחידה, ולכל איבר קיים הופכי.

- חבורת הסיבובים בשלושה מימדים אינה אבלית.

- מכפלה בין סיבובים אינפניטסימליים: $R_x(\varepsilon) R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon) R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - R_{any}(0)$

- סיבובים אינפניטסימליים: $\mathcal{D}(\hat{n}, d\phi) = 1 - i \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} \right) d\phi$

- סיבבו סופי: $\mathcal{D}_z(\phi) = e^{-\frac{iJ_z}{\hbar} \phi}$

- דורש יחסי חילוף: $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$

- המטריצה המייצגת של J^2 היא מטריצה בלוק-אלכסונית. יחסי החילוף מתקיימים בתוך הבלוקים.

- כל מטריצת סיבוב ניתנת לפירוק למבנה בלוק-אלכסוני (עם בלוק לכל ערך של j)

- ניתן להציג סיבוב כללי בשלושה מימדים, $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}_z(\alpha) \mathcal{D}_y(\beta) \mathcal{D}_z(\gamma)$

- סיבוב ב- 2π של פרמיון מחזיר סימן מינוס!

- אם H סימטרי לסיבובים, \mathbf{J} נשמר.

- ניתן להגדיר ספינור, $\begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}$. פונקצית גל אחת עבור ספין \uparrow ופונקצית גל שניה עבור \downarrow .

7.3 עוד אטום מימן

1. $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

2. יחסותי: $H_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{m_e c^2}$

3. ספיין-מסילה: $H_2 = \frac{1}{2} \frac{zr^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e^2 c^2} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{r^3}$

4. $\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n,\ell} = \frac{z^3}{a_0^3} \frac{2}{n^3 \ell(\ell+1)(2\ell+1)}$

5. $\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle = \left(\frac{a_0}{2z} \right) [3n^2 - \ell(\ell+1)]$

$\langle \frac{1}{r^2} \rangle = \langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{z}{na_0}, \left(\frac{a_0^2 n^2}{2z^2} \right) [5n^2 + 1 - 3\ell(\ell+1)]$

6. $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}, \Delta E_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{m_e c^2 \alpha^4}{n^3} \left[\frac{2}{2\ell+1} - \frac{3}{4n} \right]$

7. $\Delta E_{LS} = \frac{1}{4} \frac{m_e c^2 \alpha^4}{n^3} \frac{\begin{cases} j = \ell + \frac{1}{2} \\ \ell \\ j = \ell - \frac{1}{2} \\ -\ell - 1 \end{cases}}{\ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)}$

8. $\Delta E_{tot} = -\frac{1}{2} \frac{m_e c^2 \alpha^4}{n^3} \left[\underbrace{\frac{1}{\ell} - \frac{3}{4n}}_{j + \frac{1}{2}} \right]$

8 חלקיק בשדה מגנטי

- פוטנציאל וקטורי: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, פוטנציאל סקלארי, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

- חופש כיוול: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla g(\mathbf{r}, t)$, $\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial g(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

4. המילטוניאן: $H = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 - e\phi(\mathbf{r}, t)$

7.1 קלבש!

- בוחרים את $j = j_1 + j_2$, ומשתמשים באופרטור ההורדה עד ל- $j_1 - j_2$

- המקדם של $j - j_1$ נבחר כחיובי

8.1 כל מני זימנים

• ללא התייחסות לספיין: $\underbrace{\gamma B_0 \hat{L}_z}_{\omega_L}$

• האנומלי, בשדה חזק: $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \mathbf{A}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + Bp^4$

• Bp^4 תיקון יחסותי.

$$H_{int} = \gamma \mathbf{B} \cdot \left(\mathbf{L} + \underbrace{2}_{g_e} \mathbf{S} \right) -$$

• מזניחים את LS ואת p^4 , ומקבלים

$$\langle n, \ell, s, m_\ell, m_s | L_z + 2S_z | n, \ell, s, m_\ell, m_s \rangle = \hbar m_\ell + 2\hbar m_s$$

• בשדה חלש, $g = 2$, $L_z + 2S_z = J_z + S_z$

$$\langle n, \ell, s, j, m_j | J_z + S_z | n, \ell, s, j, m_j \rangle = m_j \hbar + \langle j, m_j | S_z | j, m_j \rangle$$

בעיות תלויות בזמן

9.1 פתרון מדויק

• פתרנו באופן מדויק תהודה פרמגנטית.

• המילטוניאן של שדה מגנטי: $H = -\mu \mathbf{B} = \frac{ge}{2mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{ge\hbar}{4mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$

• הפרופגטור, $U(t) = e^{-i\theta \cdot \mathbf{S} / \hbar}$, כאשר $\theta = \frac{eg}{2mc} Bt$

• עבור $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, $\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \omega_0 t$, $\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin(\omega_0 t)$
 $|\omega_0| = \gamma |\mathbf{B}|$

• נסתכל על מצב בו במערכת הצירים מסתובבת בתדירות ω במקביל ל- \mathbf{B}_0 ($\omega \neq \omega_0$). התדירות שבה נראה את המערכת מסתובבת היא $\omega_r = \omega_0 - \omega = -\gamma (\mathbf{B}_0 + \omega/\gamma)$. לכן, במערכת מסתובבת יש שדה אפקטיבי, $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_0 + \omega/\gamma$

• עבור $\mu(t=0) = \mu \hat{z}$, נרצה לחשב את $\mu(t)$. נסתכל על $\mu_z(t)$. נחשב במערכת צירים מסתובבת, עם השדה, $\omega = -\omega \hat{z}$. במערכת זו, $\mathbf{B}_r = B \hat{x}_r + \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{z}$. כאשר \hat{x}_r המערכת המסתובבת. כאן, אין ל- \mathbf{B} תלות בזמן.

• נקבל: $\omega_r = -\gamma \mathbf{B}_r$

$$|\omega_r| = \omega_r = \gamma \sqrt{B^2 + \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right)^2}$$

• הזווית α בין \mathbf{B}_r לציר \hat{z} היא:

$$\sin^2 \alpha = \frac{B^2}{B^2 + \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right)^2} = \frac{\gamma^2 B^2}{\gamma^2 B^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

• לגרנזיאן: $L = \frac{1}{2} m_e \dot{\mathbf{x}}^2 + e\phi - e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$

• שרדינגר: $i\hbar \partial_t \psi = \left[\frac{1}{2m_e} (-i\hbar \nabla + e\mathbf{A})^2 - e\phi \right] \psi$

• חופש הכיול משנה את הפאזה: $\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar} g(\mathbf{r}, t)} \psi$

• בשדה מגנטי קבוע: $\mathbf{B} = B \hat{z}$

• כיול לנדאו: $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

• המהירות: $v_i = \frac{1}{m_e} [p_i + eA_i]$, $p \neq mv$

• ההמילטוניאן: $H = \frac{1}{2m_e} (p_x - eBy)^2 + \frac{1}{2m_e} P_y^2 + \frac{1}{2m_e} P_z^2$

• פתרון: נבחר פונקציית גל $\psi = e^{i\frac{1}{\hbar}(p_x x + p_z z)} \chi(y)$, ונקבל,

$$p_x, p_z \left(\frac{1}{2m_e} \left[(p_x - eB\hat{y}) + p_z^2 - \hbar \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \chi(y) = E \chi(y) \right.$$

• מספרים). נרשום בצורה, $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \chi + \frac{e^2 B^2}{2m_e} \left(y - \frac{p_x}{eB} \right) \chi = \left(E - \frac{p_z^2}{2m_e} \right) \chi$

• זו משוואה לאוסצילטור הרמוני עם $\omega_c = \frac{|e|B}{m_e}$. $y_0 = \frac{p_x}{eB}$

• ו- $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}$ יהיה הספקטרום

• ו- $\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} a_H^{1/2} \sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2a_H^2}} H_n \left(\frac{y-y_0}{a_H} \right) \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ כאשר $a_H = \frac{\hbar}{m\omega_c}$

• בחירת הכיול משפיעה על התוצאה הסופית: על הצירים בהם יש (אי)ודאות בתשובה.

• הניווט הוא $\frac{L_x L_y}{2\pi \ell_B^2}$, ליחידת שטח הוא $\frac{1}{2\pi \ell_B^2}$, מספר המצבים ברמת לנדאו אחת, כאשר $\ell_B^2 = \frac{\hbar}{eB}$

• ספקטרום: $\omega_c = \frac{eB}{m_e}$, $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}$

• אפקט בוהם אהרונוב:

$$E_m = \left[\hbar \left(m - \frac{q\Phi}{hc} \right) \right]^2 \frac{1}{2I} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(m - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

כאשר $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$

• באמצעות אינטגרלי מסלול, התאבכות בשני סדקים כאשר איפשהו מעבר לסדק יש מרחב עם פוטנציאל מגנטי. התרומות של כל הקטעים מעל השדה המגנטי זהות, וגם מתחתיו (כי כל שני מסלולים יוצרים ביחד עקום סגור, ואז $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_s \nabla \times \mathbf{A} dA$ עם משוויים עקום מעל כאשר אין פוטנציאל, הביטוי מתאפס...). אם משוויים עקום מעל ומתחת, מקבלים פאזה, $\Delta\phi = \frac{e}{\hbar} \oint_{\text{above and below}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$, השתף בתוך הסליל. משפט סטוקס, $= \frac{e}{\hbar} \Phi_B$

• בנוכחות שדה מגנטי: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}$ ולכן

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{mec} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{A}$$

$$L_z = \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z}_{-\frac{i\hbar}{\partial\theta}} - \underbrace{\frac{q}{c} r \hat{r} \times \frac{\Phi}{2\pi}}_{\frac{q\Phi}{2\pi c}} \cdot \hat{\theta}$$

• לבסוף, $\mu_z(t) = \mu_z \cos^2 \alpha + \mu_z \sin^2 \alpha \cos(\omega_\tau t)$

• הפתרון הכללי,

$$\mu_z(t) = \mu_z(0) \left[\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{(\omega_0 \omega)^2 + \gamma^2 B^2} + \frac{\omega^2 B^2 \cos(\omega_\tau t)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 B^2} \right]$$

• אין שיטות כלליות לפתרונות תלויים בזמן.

9.2 קירובים

• **הפרעה פתאומית:** מטילים את המצב לפני ההפרעה על בסיס המצבים העצמיים של ההמילטוניאן אחרי ההפרעה. $|\psi_b\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \psi_b\rangle$ כאשר $|\psi\rangle$ הוא בסיס המצבים העצמיים של ההמילטוניאן לאחר השינוי.

• **קירוב אדיאבטי:** ההמילטוניאן $H(\lambda)$, כאשר λ פרמטר ניתן לשליטה. נגדיר $H_0 = H(\lambda=0)$. רמות האנרגיה תלויות ב- λ , ולא חוצות זו א תזו.

• הבסיס $|n(\lambda)\rangle$ מלכסן את $H(\lambda)$ עם ע"ע $E_n(\lambda)$. בבסיס זה, $|\psi\rangle = \sum_n a_n(t) |n(\lambda)\rangle$

• משנים את λ לאט, $\lambda(t) = \delta t$. נציב במשוואות שרדינגר,

$$i\hbar \left[\sum_n (\partial_t a_n(t)) |n(\lambda)\rangle + \sum_n \delta a_n(t) \frac{\partial}{\partial \lambda} |n(\lambda)\rangle \right] = H \sum_n a_n(t) |n(\lambda)\rangle$$

• נכפיל ב- $\langle m(\lambda) |$, ונקבל, מאורתוגונליות,

$$i\hbar \partial_t a_m(t) + i\hbar \delta \sum_n a_n(t) \left\langle m(\lambda) \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \right| n(\lambda) \right\rangle = E_m(\lambda) a_m(t)$$

• כאשר $\delta \rightarrow 0$, $i\hbar \partial_t a_m(t) = E_m(\lambda) a_m(t)$. האיבר המעורב נעלם, ולכן הרמות אינן חוצות.

• התנאי לקירוב: $\delta \ll \frac{\Delta E_{min}}{\hbar}$

9.3 תורת הפרעות

• נפתח תורת הפרעות למצב $H(t) = H^0 + H'(t)$

• לסדר ראשון, $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n^0\rangle$. רוצים למצוא את $c_n(t)$ בהנתן $c_n(0)$. מסדר אפס, $c_n(t) = c_n(0) e^{-iE_n^0 t/\hbar}$.

• נכתוב, $c_n(t) = d_n(t) e^{-iE_n t/\hbar}$, ואז השינוי של $d_n(t)$ יהיה רק מ- $H'(t)$.

• $i\hbar \dot{d}_f(t) = \sum_n \langle f^0 | H'(t) | n^0 \rangle e^{i\omega_{fn} t} d_n(t)$. כאשר $\omega_{fn} = \frac{E_f^0 - E_n^0}{\hbar}$. עד כה, זוהי משוואה מדויקת.

• עבור $d_n(0) = \delta_{ni}$, נחפש את $d_f(t)$: **מסדר ראשון**,

$$d_f(t) = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f^0 | H'(t') | i^0 \rangle e^{i\omega_{fi} t'} dt'$$

• לאוסצילטור הרמוני מוסיפים את ההפרעה, $H'(t) = -e\mathcal{E}x e^{-t^2/\tau^2}$. מה ההסתרות שהאוסצילטור במצב $|n\rangle$ בזמן

$$d_n(\infty) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} (-e\mathcal{E}) \langle n|x|0\rangle e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{in\omega t} dt \quad ? \quad t \rightarrow \infty$$

כאשר ω תדירות האוסצילטור, ו- $\omega = \frac{E_n^0 - E_0^0}{\hbar}$. בסדר ראשון, ההפרעה יכולה להעלות אותנו רק לרמה 1, כי $\langle 1|x|0\rangle$ הוא האיבר היחיד שלא מתאפס, ולכן, $d_1(\infty) = \frac{ie\mathcal{E}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\pi\tau^2} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$

• כל פוטנציאל מחזורי ניתן לפתח בפוריה. נסתכל על רכיב: $H'(t) = H' e^{i\omega t} + H'^\dagger e^{-i\omega t}$. בזמן $t=0$, המערכת במצב $|i^0\rangle$. האמפליטודה למצב f^0 נתון על ידי

$$d_f(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[H'_{fi} e^{i(\omega_{fi} + \omega)t'} + H'^\dagger_{fi} e^{i(\omega_{fi} - \omega)t'} \right] dt'$$

• והפתרון, $\frac{1}{\hbar} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} \right]$. העבר עם סכום

במכנה הוא איבר של פליטה מאולצת, והאיבר עם ההפרש במכנה הוא איבר של עליה ברמת האנרגיה.

• ליד $\omega = \omega_{fi}$,

$$|d_f|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |H'_{fi}|^2 \left[\frac{\sin((\omega_{fi} - \omega)t/2)}{(\omega_{fi} - \omega)t/2} \right]^2$$

• יש לנו סיכוי טוב למעבר כאשר $1 \pm \frac{2\pi}{\omega t}$. $E_f^0 - E_i^0 = \hbar\omega$

• כדי לטפל ב- δ^2 (כאשר $T \rightarrow \infty$) נסתכל על

$$\delta(\omega_{fi} - \omega) \delta(\omega_{fi} - \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\delta(\omega_{fi} - \omega)}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega_{fi} - \omega)t} dt$$

$$= \delta(\omega_{fi} - \omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}$$

• ב- T גדול, קצב המעבר הוא $R_{i \rightarrow f} = \frac{|a_f|^2}{P_{i \rightarrow f}} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f^0 - E_i^0 - \hbar\omega)$. **כלל הזהב של פרמי**

• מסדר שני: הצגת האינטראקציה - $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle$. $|\psi_I(t)\rangle = \left(U_s(t, t_0) \right)^\dagger |\psi_s(t)\rangle$, ו- $H'_I(t) = U_s^{0\dagger} H'_s U_s^0$

• מסדר שני: $U_I^{(2)}(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H'_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} H'_I(t') H'_I(t'') dt' dt''$

• אינטראקציה של אטום עם קרינה: משוואת הגלים עבור אורך גל: $\omega^2 = k^2 c^2$ כאשר $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$

• נניח אטום מימן ברמת היסוד. $H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - q\phi$. נפתח את ההמילטוניאן, נזניח את הביטוי $\frac{q^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$, וכן, בכיול קולות, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$. קיבלנו $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$. כאשר $q\phi$ הוא פוטנציאל הפרוטון. נגדיר $\mathbf{A} \mathbf{P} = \frac{e}{2mc} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$. המצב

ההתחלתי הוא $\psi_{1,0,0} = \left(\frac{1}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-r/a_0}$, והמצב הסופי הוא חלקיק חופשי: $\psi_f = \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$. חישוב זה עובד רק עבור יינון מרמת היסוד

- התיקון ללא התלות בזמן,

$$H'_{fi} = \langle f^0 | H' | i^0 \rangle = \overbrace{\frac{1}{2m_e c} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(\pi a_0^3)^{1/2}}}^N \int e^{i\mathbf{p}_f \mathbf{r} / \hbar} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{P} e^{-r/a_0} d^3 r$$

היחס בין התנע של הקרינה הא"מ, $p \sim \frac{\hbar}{a_0}$, לתנע של האלקטרון הוא $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$. לכן, אורך הגל קטן מסדר גודל של אטום, וניתן לבצע קירוב דיפול. נחליף $\frac{i\omega e}{2m_e c} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{P} e^{i\omega t} \rightarrow \frac{i\omega e}{2c} \mathbf{A}_0 r e^{-\omega t}$ ומקבלים את האינטגרל

$$H'_{fi} = N e^{-i\mathbf{p}_f \mathbf{r} / \hbar} \mathbf{A}_0 \cdot (-i\hbar \nabla) e^{-r/a_0} d^3 r = N \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{p}_f \int e^{-i\mathbf{p}_f \mathbf{r} / \hbar} e^{-r/a_0} d^3 r$$

ל, לאחר אינטגרציה בחלקים.

- בסוף, מתקבל

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e}{2m_e c} \right) \frac{1}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{1}{\pi a_0^3} \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \cdot \frac{|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{p}_f|^2 \cdot 64 \cdot \pi^2 a_0^6}{\left[1 + \left(\frac{p_f a_0}{\hbar} \right)^2 \right]^4}$$

הכיוון המועדף לפליטת האלקטרון הוא בניצב לשדה החשמלי. אין תלות בכיוון הקרינה הפוגעת. הקצב הכללי הוא $R_{i \rightarrow all} = \frac{16 a_0^3 e^3 p_f^2 |\mathbf{A}_0|^2}{3 m \hbar^4 c^2 \left[1 + \left(\frac{p_f a_0}{\hbar} \right)^2 \right]^4}$

- כללי ברירה: המעבר בין שני מצבים הוא אפשרי רק עם אלמנט המטריצה

$$\left\langle f^0 \left| \frac{e}{m_e c} \mathbf{A}_0 \mathbf{p} \right| i^0 \right\rangle \propto \langle f^0 | \mathbf{r} | i^0 \rangle$$

אינו מתאפס. ניתן לעשות את זה על ידי רישום \mathbf{r} , והן את המצבים, על ידי Y_{lm} .

- האופרטורים $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ ו- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ שקולים עד כדי טרנספורמציה כיוול. האופרטור $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ לא אינורינטי לכיוול ואילו $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ כן. לכן, משתמשים ב- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$.

10 פיזור

- משוואת ליפמן-שווינגר עבור פיזור, $|\psi^\pm\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi^\pm\rangle$, כאשר H_0 הוא ההמילטוניאן ללא המפזר, ו- $|\phi\rangle$ הוא הפתרון של חלקיק חופשי ו- V הוא המפזר. מכניסים את אופרטור היחידה בבסיס $|x'\rangle$ באמצע המשוואה, ומקבלים,

$$\langle x | \psi^\pm \rangle = \langle x | \phi \rangle = \int d^3 x' \left\langle x \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} \right| x' \right\rangle \langle x' | V | \psi^\pm \rangle$$

- נסתכל על פונקציית גרין של הבעיה:

$$G_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\hbar}{2m} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} \right| \mathbf{x}' \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

- זוהי פונקציית גרין עבור המשוואה $(\nabla^2 + k^2) G_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, כאשר \pm בוחר את הפונקציה הפוגעת או המוחזרת.

- כדי לחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iqr} q dq}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}$, משתמשים במשפט הרזידיו של קושי, $\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_j R(z_j)$, כאשר $R(z_j)$ הם הקטבים במישור המרוכב. הקטבים הם הנקודות המקיימות $k^2 - (k + q \pm i\eta)(k - q \pm i\eta) = 0$, נרשום א המשוואה כ- $q^2 \pm i\epsilon = 0$. ויש כאלו ב- $q_1 = -k \mp i\eta$, $q_2 = k \pm i\eta$. בונים מסלול שהוא חצי-מעגל על הציר שמגיע עד ממש רחוק, ואז חוזר חזרה (ובגלל שהפוטנציאל דועך במרחק, רק החלק על הישר תורם).

$$R(k + i\eta) = \lim_{q \rightarrow k + i\eta} (q - k - i\eta) \frac{e^{iqr}}{k^2 - i\epsilon - q^2} \left(\frac{-i}{4\pi^2 r} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{i}{8\pi^2 r} e^{-ikr}$$

$$R(-k + i\eta) = \lim_{q \rightarrow -k + i\eta} (q + k + i\eta) \frac{e^{iqr}}{k^2 - i\epsilon - q^2} \left(\frac{-i}{4\pi^2 r} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{i}{8\pi^2 r} e^{-ikr}$$

- עבור גל פוגע ψ^+ (בכיוון \mathbf{k}) ומוחרז בכיוון \mathbf{k}' , המפליטודת הפיזור היא $f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \frac{2m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | V | \psi^+ \rangle$

- קירוב בורן: עבור מפזר חלש, פונקציית הגל הפוגעת לא תשתנה הרבה, וניתן לכתוב $\langle \mathbf{x}' | \psi^+ \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x}' | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}}{(2\pi)^{3/2}}$. לכן,

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 \mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}' \right|^2$$

, כאשר $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, מעבר התנע.

- עבור מקרים בהם $V(\mathbf{r}) = V(r)$,

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-iqr' \cos\theta} V(r') d(\cos\theta) d\phi' r'^2 dr'$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{\sin(qr')}{q} V(r') r' dr' = f_{\mathbf{k}}(\theta)$$

- קירוב בורן תקף כאשר $\langle \mathbf{x} | \psi^+ \rangle \approx \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle$. כלומר,

$$\langle \mathbf{x} | \psi^+ \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k}' \rangle - \frac{2m^2}{\hbar^2} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \langle \mathbf{x} | \psi^+ \rangle$$

. נבדוק את האינטגרל כאשר $\mathbf{x} = 0$, נקרב קצת.... ונדרוש:

$$\left| \frac{2m}{\hbar} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} V(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right| \ll 1$$

- או בדרישה חלשה יותר עבור פוטנציאל ספריי-סימטרי, $4\pi \left| \frac{2m}{\hbar^2} \int dr' r' V(r') \right| \ll 1$

- **סדרים גבוהים:** נגדיר אופרטור $T: V|\psi^+\rangle = T|\phi\rangle$. נקבל את הזהות, $T = V + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T$. כאשר את T פותרים בצורה איטרטיבית על ידי הצבה שלו שוב ושוב, לסדרים גבוהים, $T = V + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V + \dots$

11 חלקיקים זהים

- ניוון החלפה: לא ניתן להפריד בין $|a\rangle \otimes |b\rangle$ לבין $|b\rangle \otimes |a\rangle$ או כל צירוף לינארי שלהם.

- אופרטור תמורות: $P_{12} |a\rangle |b\rangle = |b\rangle |a\rangle$. $P_{12}^{-1} = P_{21} = P_{12}$. $P_{12}^2 = 1$ ו- $P_{12}^2 = 1$

- עבור מצב $|a''\rangle$ או $|a'\rangle$ פועל על A_1 אז $A_2 = P_{12}A_1P_{12}^{-1}$, שפועל על $|a''\rangle$.

- אם פונקציית הגל היא אנטיסימטרית, לא ניתן למקם 2 חלקיקים זהים באותו מצב קוונטי

- הדטרמיננטה של סלייטר:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{1}{3!}} (\psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_2}(x_2) \psi_{n_3}(x_3) - \psi_{n_1}(x_1) \psi_{n_3}(x_2) \psi_{n_2}(x_3) + \dots)$$

$$\sqrt{\frac{1}{3!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(x_1) & \psi_{n_2}(x_1) & \psi_{n_3}(x_1) \\ \psi_{n_1}(x_2) & \psi_{n_2}(x_2) & \psi_{n_3}(x_2) \\ \psi_{n_1}(x_3) & \psi_{n_2}(x_3) & \psi_{n_3}(x_3) \end{vmatrix}$$

- למערכת של שני אלקטרונים יש שני ע"ע: טריפלט, עם שלושה ו"ע ו-ע"ע של 0, וסינגלט, עם ו"ע אחד. הטרפלט הוא סימטרי, הסינגלט הוא אנטיסימטרי.

12 קירוב סמי-קלאסי

- כאשר הפוטנציאל משתנה לאט כפונקציה של המקום, נצפה שעל פני מרחקים קטנים ביחס לגודל האופייני של $V(x)$, הפתרון יראה אותו הדבר, $\lambda(x) = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-V(x))}}$. מוגדר היטב רק אם $|\frac{\delta\lambda}{\lambda}| \ll 1$.

- במשוואת שרדינגר, נציב $\psi = e^{i\phi(x)/\hbar}$ כאשר ϕ לא בהכרח ממשי. ונפתח את המקדם לטור ב- \hbar , ונשמיט איברים מסדר \hbar^2 . לבסוף,

$$\psi(x) = \psi(x_0) \sqrt{\frac{p(x_0)}{p(x)}} e^{\pm i\hbar \int_{x_0}^x p(x') dx'}$$

- הקירוב תקף כאשר $\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1$.

31. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

$d_{\ell,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

Notation:

J	M	\dots
m_1	m_2	\dots
M	M	\dots

Coefficients

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{-m,-m'}^j = d_{-m,-m'}^j$

$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1+\cos\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1-\cos\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^2$

$d_{2,1}^2 = -\frac{1+\cos\theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$

$d_{2,-1}^2 = -\frac{1-\cos\theta}{2} \sin \theta$

$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1-\cos\theta}{2} \right)^2$

$d_{1,1}^2 = \frac{1+\cos\theta}{2} (2\cos\theta - 1)$

$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$

$d_{1,-1}^2 = \frac{1-\cos\theta}{2} (2\cos\theta + 1)$

$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

Figure 31.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.