

חשבון אינפיניטסימלי 3

מרצה: אורי אליאש

30 במרץ 2009

רשימות אלו הוקלדו במהלך השיעורים של הקורס "חשבון אינפיניטסימלי 3", במהלך סמסטר חורף 2008, בהרצאות מאת פרופסור אורי אליאש.

הרשימות הוקלדו ע"י רונן אברבנאל (ronen@tx.technion.ac.il) ומפורסמת ב-www.technion.ac.il/~ronen. המחברת תתעדכן מעת לעת במיקום זה.

הרשימות עלולות לכלול טעויות, חוסרים ואי דיוקים, והשימוש בהם על אחריותכם בלבד. בפרט, היא אינה מכילה כלל שרטוטים ואיורים שצוירו על הלוח. בפרט, אין הפקולטה למתמטיקה או מי מטעמה אחראים על תוכן הרשימות. הערות, הארות ותיקונים אתם מוזמנים לשלוח ל-ronen@tx.technion.ac.il

תוכן עניינים

2	מבוא - קבוצות ב- \mathbb{R}^n	1
2	1.0.1 דוגמאות לגורמות ב- \mathbb{R}^n	
5	2 דיפרנציאביליות	
6	2.1 מקרים פרטיים	
6	2.1.1 עבור $k = 1, n = 1$	
6	2.1.2 עבור $k = 1, n > 1$	
7	2.2 תכונות הדיפרנציאל	
7	2.2.1 הרכבה	
9	2.2.2 גישה נוספת ע"י רכיבים	
9	2.3 הפיכות	
13	2.4 פונקציות סתומות	
14	2.4.1 משפט הפונקציות הסתומות	
17	2.5 נגזרות φ	
17	2.5.1 כלל Cramer	
18	2.5.2 דוגמא: משוואה אחת בהרבה נעלמים	
18	2.6 שימושים גאומטריים	
19	2.7 דוגמא - קו חיתוך בין משטחים	
19	2.7.1 גישה באמצעות פונקציות סתומות	
20	2.7.2 דוגמא: הטלה	
20	2.8 פיתוח טיילור	
22	3 בעיות אקסטרימום	
23	3.1 חיפוש אקסטרימום בקבוצה	
23	3.1.1 תנאי מספיק לאקסטרימום	
25	3.1.2 תנאי מספיק לאקסטרימום ב- n משתנים	
25	3.2 אקסטרימום עם אילוצים	
28	3.2.1 אי שוויונות	
30	3.2.2 דוגמאות לשימוש בכופלי לגרנז'	
31	4 חשבון אינטגרלי	
31	4.1 חזרה - קבוצה בעלת נפח	
33	4.2 אינטגרל רימן	
33	4.2.1 הגדרת אינטגרל רימן של f על קבוצה חסומה D	
34	4.3 החלפת משתני אינטגרציה	

34 החלפת משתנים באינטגרלים כפולים	4.3.1
34 התחלה - תיבה תחת העתקה לינארית	4.3.2
36 שלב שני - קבוצה כלשהי תחת העתקה לינארית	4.3.3
38 עבור העתקה כלשהי	4.3.4
40 ההוכחה הסופית	4.3.5
42 אינטגרלים סינגולריים	4.4
44 אנליזה וקטורית	5
46 משטח חלק	5.0.1
46 הגדרת שטח של משטח	5.1
48 החלפת משתנים בתיאור הפרמטרי	5.1.1
49 אינטגרציה על פני עקום - תזכורת	5.1.2
50 אינטגרציה על משטח	5.2
50 אינטגרציה סקאלרית	5.2.1
51 אינטגרציה על פונקציה וקטורית	5.2.2
52 אופרטורים דיפרנציאליים	5.2.3
54 מוטיבציה לדיברגנץ	5.2.4
55 משפט סטוקס	5.2.5
57 השדה המשמר ב- \mathbb{R}^3	5.3
60 דירוגנץ ורוטור	5.3.1
61 משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)	5.4
63 הרחבה למשפט	5.4.1
63 עוד על דיברגנץ	5.4.2
64 דוגמה למשפט גאוס	5.4.3
65 עקרון ארכימדס	5.4.4
66 להשלים, 3.2	5.5
66 נוסחאות גרין	5.6
68 איך לצמצם מ-3 מימדים ל-2	5.6.1

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$y_x = f_k(x_1, \dots, x_n)$$

הכללה של ערך מוחלט: נורמה

1 מבוא - קבוצות ב- \mathbb{R}^n

הגדרה 1.1 נורמה במרחב \mathbb{R}^n מקיים:

- אי שוויון המשולש: $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$
 - עבור c סקאלר ממשי $\|cx\| = |c| \|x\|$
 - $\|x\| \geq 0$ ושווה לאפס אך ורק עבור $\vec{x} = \vec{0}$
- בהמשך נגדיר מרחק למשל על ידי $d(x, y) = \|x - y\|$

1.0.1 דוגמאות לנורמות ב- \mathbb{R}^n

- נורמה אוקלידית - $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- נורמה של נהגי מוניות - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- נורמת מקסימום $\max_{j=1 \dots n} |x_j|$ (תרגיל): $(\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|y_1|, |y_2|))$

הערה 1.2 ישנם $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^p|\right)^{\frac{1}{p}}$ אי שוויון המשולש כאן נקרא אי-שוויון מירקוסקי (תרגיל): $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} = \max(a, b)$

אי שוויון בין הנורמות הנ"ל:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum |x_{max}|^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

וכמסקנה:

$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_1$$

בתרגול נוכיח שעבור כל 2 נורמות, קיים קבוע כך שניתן לבצע כזה מעבר **תרגיל:** לכל מטריצה $k \times n$ קיים קבוע m כך ש- $\|A\vec{x}\| \leq M \|x\|$ (שורות, n עמודות. $x \in \mathbb{R}^n$ ו- $Ax \in \mathbb{R}^k$, לכל שתי נורמות ב- $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$. בגלל המשפטים מקודם, מספיק להוכיח עבור נורמה אחת) נוכיח עבור אחת מהנורמות, ולאחרים זה נובע מאי-השוויונות

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, k} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq n \max |a_{ij}| \cdot \max |x_j| = M \|x\|_\infty \end{aligned}$$

הגדרה 1.3 רציפות: $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ נקראת רציפה בנקודה p_0 , אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon) > 0$ כך ש- $\|F(p) - F(p_0)\| < \varepsilon$ בתנאי ש- $\|p - p_0\| < \delta$. כאשר הנורמה בתמונה היא ב- \mathbb{R}^k ובמקור הוא ב- \mathbb{R}^n . לא משנה איזה נורמה, כי הנורמות נבדלות רק בקבוע.

בנורמת ∞ , זה יראה כך:

$$\|F(p) - F(p_0)\|_\infty = \max_{i=1..k} |F_i(x_1 \dots x_n) - F_i(x_1^0 \dots, x_n^0)| < \varepsilon$$

כאשר $\max_{j=1..k} |x_j - x_j^0| < \varepsilon$ כל אחד מ- $|F_i(p) - F_i(p_0)| < \varepsilon$. וזו בדיוק הגדרת הרציפות של $f_i(x_1 \dots x_n)$ לפי אינפי 2.

מסקנה 1.4 ולכן, העתקה $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציפה \iff כל אחד מהרכיבים שלה רציפים.

הגדרה 1.5 סביבה של נקודה p_0 היא

$$\{p \mid \|p - p_0\| < r\}$$

- סביבה של $(0, 0)$ ב- \mathbb{R}^2 לפי נורמה 2: מעגל שרדיוסו r
- לפי נורמה 1 - ריבוע שאלכסונו $2r$ והאלכסונים מקבילים לצירים.
- לפי נורמה ∞ ריבוע שאורך צלעו $2r$, וצלעו מקבילה לצירים.

הגדרה 1.6 קבוצה נקראת "פתוחה" אם לכל נקודה שלה יש סביבה שגם היא מוכלת בקבוצה. (לדוגמא: "התוכן" של עיגול היא פתוחה, וקבוצה שמכילה גם את ה"שפה" אינה פתוחה, כי לנקודה שנמצאת על השפה אין סביבה בתוך הקבוצה)

הגדרה 1.7 מקור של קבוצה S על ידי העתקה F הן כל הנקודות אשר מועתקות על ידי F ל- S , אם יש כאלה. (Pre-Image)

משפט 1.8 תהי $D \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ונתונה העתקה רציפה $F: D \rightarrow \mathbb{R}^k$. אז, המקור של כל קבוצה פתוחה S ב- \mathbb{R}^k היא קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R}^n .

הוכחה: נקח קבוצה פתוחה S כלשהי ב- \mathbb{R}^k , אז המקור שלו על ידי F

$$V = \{p \in D \mid F(p) \in S\}$$

כדי להוכיח ש- V קבוצה פתוחה, יש להראות כי לכל נקודה $p_0 \in D$ יש סביבה שלמה שמוכלת ב- V . p_0 הוא מקור של נקודה ב- S . כלומר, $F(p_0) = q_0 \in S$. פתוחה, ולכן ל- q_0 יש סביבה המוכלת ב- S , שתקרא N .

$$N = \{q \mid |q - q_0| < \varepsilon\} \subset S$$

F רציף, לכן יש $\delta(\varepsilon)$ כך ש- $\|F(p) - F(p_0)\| < \varepsilon$ כאשר $\|p - p_0\| < \delta$. נמצא ב- D פתוח, ולכן ל- p_0 יש סביבה שמוכלת ב- D , ברדיוס δ_2 (קטן מ- δ). הסביבה המוקטנת מוכל ב- V והיא מקור של נקודות ב- S , לכן ל- p_0 השרירותית מצאנו סביבה המוכלת ב- V , ולפי הגדרה - V פתוחה. ■

משפט 1.9 משפט הפוך (לא נוכיח כאן) - אם מקור של כל קבוצה פתוחה ע"י F הוא פתוח, אז F רציפה.

הגדרה 1.10 קבוצה קשירה היא קבוצה שלא ניתן לכסות אותה על ידי איחוד של 2 קבוצות פתוחות זרות, שכל אחת מכילה נקודות של הקבוצה הנתונה.

משפט 1.11 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציף מעתיק קבוצה קשירה לקבוצה קשירה.

הוכחה: נקח E קשיר ונניח ש- $F(E)$ לא קשיר. לכן, $F(E) \subset U_1 \cup U_2$ כאשר U_1, U_2 פתוחות, זרות וכל אחת מהן מכילה נקודות של $F(E)$.

מקורותיהן $V_i = \{p \mid F(p) \in U_i\}$. לפי המשפט הקודם, V_i פתוחות (מקור של U_i פתוחה). V_1, V_2 זרות, כי לו היתה להן נקודה משותפת, אז גם לתמונה היתה נקודה משותפת. סתירה!

כל V_i מכיל נקודות של E , אחרת, תמונותיהן לא היו מכילות נקודות של $F(E)$. בזה, כיסינו את E ע"י קבוצות פתוחות, זרות, שמכילות נקודות ב- E - והוכחנו ש- E אינה קשירה - סתירה! ■

הגדרה 1.12 קבוצה נקראית **סגורה** אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה. קבוצה נקראית **חסומה** אם היא מוכלת בכדור כלשהו, בפרט - קבוצה חסומה \iff כל קוארדינטה של נקודה בקבוצה חסומה.

משפט 1.13 אם $E \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה וחסומה, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ רציפה אז גם התמונה $F(E) \subset \mathbb{R}^k$ סגורה וחסומה.

הוכחה: כדי להוכיח ש- $F(E)$ סגורה, נקח ב- $F(E)$ סדרה $F(p_n)$ היא מהצורה $F(p_n)$ כש- p_n סדרה ב- E . תת סדרה נצכהסת היא q_0 $\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(p_{n_k})$ כן ב- $F(E)$. סדרה ב- $F(E)$ היא מהצורה $F(p_n)$ כש- p_n סדרה ב- E . תת סדרה נצכהסת היא q_0 $\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(p_{n_k})$

למה $F(E) \ni q$? אבל $\{p_{n_k}\}$ נמצאים ב- E שהיא סגורה וחסומה, ולכן לפי בולצנר-ויירשטרס, יש לה תת סדרה מתכנסת $p_{n_k} \rightarrow p$ וגבולה $p \in E$. רציפה F , $F(p) \in F(E)$, מצד שני $f(p_{n_{k_i}}) \rightarrow q$, ולכן $q = f(p) \in f(E)$. למה $f(E)$ חסומה?

$$F(p) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n), v)$$

F רציפה \iff כל רכיב f_i רציף ולכל על E יש לו מקסימום, מינימום

$$m_i \leq f_i(x_1, \dots, x_n) \leq M_i$$

ולכן כל רכיב חסום.

תרגיל אם S קבוצה פתוחה אז $R^n \setminus S$ קבוצה סגורה **הוכחה**: נקר ב- $R^n \setminus S$ סדרה p_n בעלת נקודת הצטברות \tilde{p} . נניח בדרך השלילה כי $\tilde{p} \notin R^n \setminus S$ ולכן $\tilde{p} \in S$, פתוחה S , ולכן יש ל- \tilde{p} סביבה שכולה ב- S , בסביבה זו אין אף נקודה של $R^n \setminus S$, בפרט לא $\{p_n\}$, בסתירה להנחה ש- $p_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{p}$.

2 דיפרנציאביליות

דוגמא להעתקה

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (u, v, w)$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \\ w = x + y + 17 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \\ x + y + 17 \end{pmatrix}$$

תזכורת $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, נקראת דיפרנציאבילית אם קיימים A, B כך ש-

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = Ah + Bk + R(h, k)$$

2.1 הגדרה

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

דיפרנציאבילית בנקודה \vec{p} אם קיימת טרנסופרמציה לינארית L כך ש-

$$F(\vec{p} + \Delta\vec{p}) = L \cdot \Delta\vec{p} + R(\Delta\vec{p}) \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta\vec{p} \rightarrow 0} \frac{\|R(\Delta\vec{p})\|}{\|\Delta\vec{p}\|} = 0 \iff R\delta(\Delta\vec{p})$$

$$\begin{pmatrix} F_1(x + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ F_2(\dots) \\ \vdots \\ F_k(\dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ F_k(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ L_{21} \dots L_{2n} \\ \vdots \\ L_{k1} \dots L_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_k \end{pmatrix}$$

2.1 מקרים פרטיים

2.1.1 עבור $k = 1, n = 1$

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x_1) - F_1(x_1) &= L_{11} \Delta x_1 + R(\Delta x) \\ \frac{F_1(x_1 + \Delta x_1) - F_1(x_1)}{\Delta x_1} &= L_{11} + \frac{R(\Delta x_1)}{\Delta x_1} \\ \frac{dF_1}{dX_1} \Big|_{x_1} &= L_{11} \end{aligned}$$

כלומר, מקרה פרטי של דיפרנציאביליות (ב- $R^1 \rightarrow R^1$) היא גזרות. כלומר, F_1 פונקציה גזירה בנקודה.

2.1.2 עבור $k = 1, n > 1$

$$\begin{aligned} F_1(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - F(x_1, \dots, x_n) \\ = L_{11} \Delta x_1 + L_{12} \Delta x_2 + \dots + L_{1n} \Delta x_n + R(\dots) \end{aligned}$$

זו בדיוק דיפרנציאביליות של פונקציה אחת ב- n משתנים. ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

2.2 מסקנה $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילי \iff כל רכיב שלו דיפרנציאבילי $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} F_i(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - F_i(x_1, \dots, x_n) &= L_{i1} \Delta x_1 + R_i, i \\ \frac{|R_i|}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}} &\rightarrow 0 \text{ כאשר } (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow 0 \\ \text{בפרט, נקח } \Delta x_n &\text{ שווה לאפס לכל } n, \text{ מלבד } \Delta x_j \rightarrow 0, \text{ לכן, מתקבל} \end{aligned}$$

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - F_i(x_1, \dots, x_n) = L_{ij} \Delta x_j + R_i(\Delta x_j)$$

נחלק ב- Δx_j

$$\frac{F_i(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - F_i(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_j} = L_{ij} + \frac{R_i(\Delta x_j)}{\Delta x_j}$$

וכאשר $\Delta x_j \rightarrow 0$ הביטוי הוא

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{(x_1, \dots, x_n) = \vec{p}} \rightarrow L_{ij}$$

$$L = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{p}) \right)_{\substack{i=1 \dots k \\ j=1 \dots n}}$$

2.3 מסקנה אם F דיפרנציאבילית ב- \vec{p} אז יש לו גזרות חלקיות ב- \vec{p}

2.4 משפט אם ל- F יש גזרות חלקיות רציפות בסביבת \vec{p} , אז F דיפרנציאבילית.

באינפי 2 - הוכח עבור כל רכיב בנפרד.

הגדרה 2.5 אם F דיפרנציאבילית בנקודה \vec{p} , אז הטנספורמציה הלינארית $L = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{p}) \right)_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots n}}$ נקראת הדיפרנציאל \vec{F} ב- \vec{p} . (גם המטריצה המייצגת של L תקרא באותו שם) ומסמנים $L = DF|_{\vec{p}}$.
 אם $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ לינארית, אז $DF \equiv F$. כי $F(\Delta p) = F(p + \Delta p) - F(p) = L\Delta p + R$ ולכן $F = L$ ו- $R \equiv 0$.

2.2 תכונות הדיפרנציאל

נתונות שתי העתקות, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, וסכומם $F + G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ מוגדר:

$$(F + G)_{(p)} = F(p) + G(p)$$

טענה 2.6 אם F, G שתיך דיפרנציאביליות באותה נקודה p , אז גם סכומם דיפרנציאבילי בנקודה, ו-

$$D(F + G)|_p = DF|_p + DG|_p$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F(p + \Delta p) - F(p) &= L_1 \Delta p + R_1 \\ G(p + \Delta p) - G(p) &= L_2 \Delta p + R_2 \end{aligned}$$

$$(F + G)(p + \Delta p) - (F + G)(p) = (L_1 + L_2) \Delta p + (R_1 + R_2)$$

■

לכן $(L_1 + L_2)$ הוא הדיפרנציאל של $(F + G)$. L_1, L_2 .

אין מכפלה או מנה של $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, משום שלא ניתן לחלק ולכפול וקטורים.

2.2.1 הרכבה

$G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
 הרכבה מוגדרת על ידי $(G \circ F)(p) = G(F(p))$ והפונקציה תהיה

$$G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$$

משפט 2.7 אם G דיפרנציאבילית בנקודה q , ו- G דיפרנציאבילית בנקודה $q = F(p)$, אז ההרכבה $G \circ F$ דיפרנציאבילי בנקודה p , והדיפרנציאל שלו הוא $D(G \circ F)|_p = DG|_q \cdot DF|_p$.

למשל, עבור $n = k = l = 1$, הנגזרת $\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dg}{dy}|_{y=f(x)} \cdot \frac{df}{dx}|_x$ **הוכחה:**

$$\begin{aligned} G \circ F(p + \Delta p) &= G(F(p + \Delta p)) \\ &= G\left(\overbrace{F(p)}^q + \overbrace{D(F(p))\Delta p + R_1(\Delta p)}^{\Delta q}\right) \\ &= \frac{\|R_1(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} \xrightarrow{\Delta p \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

אבל גם G דיפרנציאבילית

$$\begin{aligned} &= G(q) + DG(q)\Delta q + R_2(\Delta q) \\ &= G(F(p)) + DG(q)(DF(p)\Delta p + R_1(\Delta p)) + R_2(\Delta p) \\ &= \underbrace{G(F(p))}_{(G \circ F)(p)} + DG(q)DF(p)\Delta p + DG(q)R_1 + R_2 \end{aligned}$$

ולסיכום,

$$(G \circ F)P + \Delta p = (G \circ F)(p) + (DG(q)DF(p))\Delta p + \underbrace{(DG(q)R_1 + R_2)}_{R_3}$$

אם נוכיח ש- $\frac{\|(DG(q)R_1 + R_2)\|}{\|\Delta p\|} \rightarrow 0$, אז ההגדרה של דיפרנציאביליות, ו- $(DG(q)DF(p))$ יהיה הדיפרנציאל.

$$\begin{aligned} \frac{\|R_3\|}{\|\Delta p\|} &= \frac{\|DG(q) \cdot R_1(\Delta p) + R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|} \\ &\leq \frac{\|DG(q) \cdot R_1(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} + \frac{\|R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|} \end{aligned}$$

עבור נורמות הראנו ש- $\|A\vec{x}\| \leq M\|\vec{x}\|$, עבור איזשהו M .

$$\left\| \underbrace{DG(q)}_{\text{matrix}} \cdot \underbrace{R_1(\Delta p)}_{\text{vector}} \right\| \leq M\|R_1(\Delta p)\| \leq M\varepsilon\|\Delta p\|$$

כי $\frac{\|R_1(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} < \varepsilon$ נעבור ל- $\frac{\|R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|}$. דיפרנציאבילית לכן G . $\frac{\|R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} \rightarrow 0$ ו- $\frac{\|R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|} < \varepsilon\|\Delta q\|$ כש- $\|\Delta q\| \rightarrow 0$. אבל $\Delta q = DF(p)\Delta p + R_1(\Delta p)$

$$\begin{aligned} \|\Delta q\| &= \|DF(p)\Delta p + R_1(\Delta p)\| \leq \|DF(p)\Delta p\| + \|R_1(\Delta p)\| \\ &\leq M_2\|\Delta p\| + \varepsilon\|\Delta p\| = (M_2 + \varepsilon)\|\Delta p\| \end{aligned}$$

לכן

$$\|R_2(\Delta q)\| \leq \varepsilon(M_2 + \varepsilon)\|\Delta p\|$$

ונקבל ש-

$$\frac{\|R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|} < \varepsilon(M_2 + \varepsilon)$$

כשכל התנאים המצטברים קיימים. סך הכל -

$$\frac{\|DG(q)R_1(\Delta p) + R_2(\Delta q)\|}{\|\Delta p\|} \leq M_1\varepsilon + (M_2 + \varepsilon)\varepsilon$$

קטן כרצוננו. ■

2.2.2 גישה נוספת ע"י רכיבים

טענה 2.8 אם F, G יש נגזרות חלקיות ראשונות רציפות ב- p וב- $q = F(p)$ בהתאמה, אז ל- $G \circ F$ יש נגזרות חלקיות רציפות (ובפרט - ההרכבה דיפרנציאבילית)

$$F : \begin{cases} y = F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_k = F_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$G : \begin{cases} z_1 = G_1(y_1, \dots, y_k) \\ \vdots \\ z_l = G_l(y_1, \dots, y_k) \end{cases}$$

$$G \circ F : \begin{cases} z_1 = G_1(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ z_l = G_l(\underbrace{F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n)}_{y_1}) \end{cases}$$

נגזר, לפי כלל השרשרת

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} &= \sum_{m=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \\ &= \sum_{m=1}^k \frac{\partial G_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

נכתוב את

$$\begin{aligned} &\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_k} \end{pmatrix}}^{DG} (q) \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}}^{DF} (q) \\ &\equiv \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

2.3 הפיכות

$f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ ו- $f \in C^1[a, b]$. תנאי מספיק לקיום פונקציה הפוכה f^{-1} הוא $f'(x) \neq 0$ בכל נקודה של $[a, b]$.
ואז

$$\frac{d(f^{-1})}{dy} \Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} \Big|_x$$

התנאי אינו הכרחי. לדוגמה, $y = x^3$ על $(-\infty, \infty)$ ו- $y'(0) = 3x^2 = 0$ אבל $x = \sqrt[3]{y}$ קיים ורציף על כל הישר.

טענה 2.9 אם $f : R^1 \rightarrow R^1$ חח"ע בסביבת כל נקודה בקטע, אז הוא חח"ע באופן גלובלי. זה אינו נכון במימד גבוה יותר.

משפט 2.10 $f : R^n \rightarrow R^n$, בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון, בקבוצה פתוחה $D \subset R^n$. נניח כי בנקודה מסוימת $p \in D$ קיים היעקוביאן (Jacobian)

$$\begin{aligned} J_f(p) &= \det(Df)(p) = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right|_{i,j=1,\dots,n} \\ &= \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \end{aligned}$$

דהיננו, $Df(p)$ היא טרנספורמציה הפיכה, אז יש סביבה (קטנה) של p שבה הטרנספורמציה f היא חח"ע.

הוכחה: צריך לבנות סביבה של p שבה f היא חח"ע. נקח כדור קטן סביב p ובו 2 נקודות, $p' \neq p''$. ונוכיח כי $f(p') \neq f(p'')$. נחבר את הנקודות בקטע $tp'' + (1-t)p' = p' + t(p'' - p')$ כאשר $0 \leq t \leq 1$. נכתוב את הנקודה נסמן

$$G_i(t) = f_i(p' + t(p'' - p')) = f_i(x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \dots, x'_n + t(x''_n - x'_n))$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} f(p'') - f(p') &= \begin{pmatrix} f_1(p'') \\ \vdots \\ f_n(p'') \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(p') \\ \vdots \\ f_n(p') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(p'') - f_1(p') \\ \vdots \\ f_n(p'') - f_n(p') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_1(1) - G_1(0) \\ \vdots \\ G_n(1) - G_n(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G'_1(t_1)(1-0) \\ \vdots \\ G'_n(t_n)(1-0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כאשר השורה האחרונה היא לפי משפט ערך הביניים. t_1, \dots, t_n נקודות ב- $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot (x''_1 - x'_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (x''_2 - x'_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (x''_n - x'_n) |_{t=t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot (x''_1 - x'_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (x''_2 - x'_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (x''_n - x'_n) |_{t=t_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t_1) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 - x'_1 \\ x''_2 - x'_2 \\ \vdots \\ x''_n - x'_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_i) \right) (p'' - p') \end{aligned}$$

■

נסתכל על דטרמיננט המטריצה.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_i) \right) = h(p_1, \dots, p_n)$$

אבל אם נקח

$$h(p, p, p, \dots, p) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_p = J_f(p) \neq 0$$

היא $h(p_1, \dots, p_n)$ היא פונקציה רציפה של משתניה כי היא מכפלות וסכומים בדטרמיננט של $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ שרציפים לפי הנתון. היא $0 \neq$ בנקודה (p, p, p, \dots) לכן שונה מאפס בסביבה קטנה. נקח סביב p עיגול קטן ובו p', p'' וגם p_1, \dots, p_n ושם $h(p_1, \dots, p_n) \neq 0$, ולכן המטריצה $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_i) \right)$ הפיכה.

קבלנו $0 \neq f(p'') - f(p') = \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_i) \right)}_{\text{Reversible}} \underbrace{(p'' - p')}_{\neq 0}$ ולכן $f(p'') \neq f(p')$ לכל p', p'' בסביבה קטנה של p .

■

משפט 2.11 אם F רציף על קבוצה סגורה וחסומה S , ו- F^{-1} היא $1:1$ שם, אז F^{-1} רציף ב- $F(S)$.

הוכחה: נקח $q \in F(S)$ כלשהו ונקח סדרה $q_n \rightarrow q$ כלשהי, $q_n \in F(S)$. כדי להוכיח רציפות של F^{-1} , צריך להראות ש- $F^{-1}(q_n) \rightarrow F^{-1}(q)$.

נסמן $p_n = F^{-1}(q_n) \in S$, $p = F^{-1}(q) \in S$ ונזכיר $p_n \rightarrow p$ ונזכיר $p_n = F^{-1}(q_n) \in S$, $p = F^{-1}(q) \in S$ נניח ש- $p_n \not\rightarrow p$. אז יש לה לפחות תת סדרה שמרוחקת מ- p . וגם תת סדרה זו נמשך לסמן p_n . כולם נמצאים ב- S^{-} שהוא סגור, חסום ויש לה תת סדרה מתכנסת $p_n \rightarrow \tilde{p} \in S$. רציף, לכן $F(\tilde{p}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(p_{n_k}) = q$.

$$F(\tilde{p}) = F(\lim p_{n_k}) = \lim F(p_{n_k}) = \lim q_{n_k} = q$$

ומצד שני, $F(p) = q$, ולכן $F(\tilde{p}) = F(p)$. ו- F^{-1} הוא $1:1$, ולכן $\tilde{p} = p$ וזו שתירה להנחה שקיימת תת סדרה p_n שאינה מתכנסת ל- p .

משפט 2.12 נתונה $F \in C^1(D)$ - בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון, בקבוצה פתוחה $D \subset R^n$. ונניח כי $J(p) \neq 0$ אז:

1. F^{-1} הוא בעל נגזרות חלקיות רציפות בסביבה מסוימת של $F(p)$.

2. הדיפרנציאל של F^{-1} הוא $(DF(p))^{-1}$.

הוכחה:

1. $F(p_0) = q_0$, $J(p_0) \neq 0$. נקח נקודה בקרבת q_0 - היא $q_0 + \Delta q$, גם הוא בתמונה של F .

$$F^{-1}(q_0) = p_0$$

$$F^{-1}(q_0 + \Delta q) = p_0 + \Delta p$$

$$(1) \quad \Delta p = F^{-1}(q_0 + \Delta q) - F^{-1}(q_0)$$

לפי המשפט הקודם, F^{-1} רציף בסביבת q_0 , ולכן ל- Δq קטן מתאים Δp קטן. לפי הנתון, F דיפרנציאבילית.

$$(2) \quad \Delta q = F(p_0 + \Delta p) - F(p_0) = DF(p_0) \Delta p + R(\Delta p)$$

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} = 0$$

2. $\det(DF)|_{p_0} = J(p_0) \neq 0$ לכן $DF(p_0)$ מטריצה הפיכה. נכפול את (2) בהופכי ב- $(DF(p_0))^{-1}$

$$\begin{aligned} (DF(p_0))^{-1} \Delta q &= (DF(p_0))^{-1} [DF(p_0) \Delta p + R(\Delta p)] \\ &= \Delta p + (DF(p_0))^{-1} R(\Delta p) \end{aligned}$$

¹לפי משפט קודם, ידוע כי f הוא $1:1$ בסביבה מסוימת של p

נחץ את Δp :

$$\Delta p = (DF(p_0))^{-1} \Delta q - (DF(p_0))^{-1} (R(\Delta p))$$

ונשווה ל-(1):

$$(DF(p_0))^{-1} \Delta q - (DF(p_0))^{-1} (R(\Delta p)) = F^{-1}(q_0 + \Delta q) - F^{-1}(q_0)$$

וקיבלנו

$$(3) \quad F^{-1}(q_0 + \Delta q) - F^{-1}(q_0) = (DF(p_0))^{-1} \Delta q - (DF(p_0))^{-1} R(\Delta p)$$

$$\cdot \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\|-(DF(p_0))^{-1} R(\Delta p)\|}{\|\Delta q\|} = 0 \text{ די להראות כי } q_0 \text{ די להראות כי } F^{-1} \text{ דיפרנציאבילית ב-} q_0$$

3. הופכים מטריצה על ידי $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$, במקרה שלנו, עבור $(DF(p_0))^{-1}$ נתון ש- $\det(DF(p_0))$ במכנה, שונה מאפס, בנקודה p_0 ובסביבתה. כל אלמנט של adj היא פונקציה רציפה. היא נוצרה על ידי כפל, חיבור וחיסור של פונקציות רציפות. לכן, כל איבר של $(DF)^{-1}$ היא פונקציה רציפה בסביבת הנקודה p_0 , ובסביבה קטנה, כל אבר חסום.

נזכור: $\|A\vec{v}\| \leq M \|\vec{v}\|$ (כאשר A מטריצה, ו- M מספר)

$$\|Av\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \leq \underbrace{n \cdot \max |a_{ij}|}_M \max |v_i|$$

בפרט, אצלנו, $\|-(DF(p_0))^{-1} R(\Delta p)\| \leq M \|R(\Delta p)\|$, נחלק ב- Δq , כ

$$\frac{\|-(DF(p_0))^{-1} R(\Delta p)\|}{\|\Delta q\|} \leq \underbrace{M}_{\text{const}} \underbrace{\frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|}}_{\rightarrow 0} \frac{\|\Delta p\|}{\|\Delta q\|}$$

נזכור כי- $\Delta \rightarrow 0$ גם $\Delta p \rightarrow 0$ (מרציפות F)

ולכן נותר להוכיח כי- $\frac{\|\Delta p\|}{\|\Delta q\|}$ חסום כש- $\Delta q \rightarrow 0$.

4.

$$\Delta = (\Delta F(p_0))^{-1} [\Delta q - R(\Delta p)]$$

כזכור, $\lim \frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} = 0$ ולכן $\frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} < \varepsilon$ כש- $\Delta p < \Delta$ וזה קורה כש- $\Delta q < \Delta p_2$ (לא הספקתי להעתיק כאן כמה שורות)

$$\|\Delta p\| (1 - \varepsilon M) \leq M \|\Delta q\|$$

נדאג לקחת $\varepsilon < \frac{1}{2M}$ ואז $\frac{\|\Delta p\|}{\|\Delta q\|} \leq \frac{M}{1 - \varepsilon M}$ שהוא חסום.

$$F^{-1}(q_0 + \Delta q) - F^{-1}(q_0) = (DF(p_0))^{-1} \Delta q - (DF(p_0))^{-1} R(\Delta p)$$

והאלמנטים שם $(D(F^{-1}))|_{q_0}$ רציפים.

■

כזכור, תמונה של קבוצה פתוחה על ידי F רציף לאו דווקא פתוחה, לדוגמא: $F : (x, y) \rightarrow (|x|, y)$ "מקפלת" עיגול פתוח לחצי עיגול.

משפט 2.13 $F : R^n \rightarrow R^n$, $F \in C^1(D)$ - נגזרות חלקיות רצופות ב- D פתוח. נתון כי- $J(p) = \det(DF)|_p \neq 0$ לכל $p \in D$. אז F מעתיק את D הפתוח ל- $F(D)$ פתוח.

הוכחה:

1. נקח $q_0 \in F(D)$ כלשהו, ונוכיח כי יש לה סביבה המוכללת ב- $F(D)$.
 בתמונה, q_0 יש $p_0 \in D$, $F(p_0) = q_0$. נזכור $J(p_0) \neq 0$. לכן, לפי המשפט הקודם, יש ל- p_0 סביבה N כזו, $\|p - p_0\| < r$, המוכללת ב- D ובה F היא 1:1, על ידי הקטנת הרדיוס נוכל להבטיח כי F הוא 1:1 גם על השפה ∂N . $\|p - p_0\| \leq r$ היא מעגל, קבוצה סגורה וחסומה, ולכן תמונתה, ∂N , גם היא סגורה וחסומה, ומוכללת ב- $F(D)$, והיא לא מכילה את q_0 כי $q_0 = F(p_0)$ ו- F היא 1:1.
 (תזכורת: יש להוכיח כי ל- q_0 יש סביבה מוכללת ב- $F(D)$)
2. (הערה: אם S קבוצה סגורה וחסומה ו- α נקודה לא ב- S , אז $d(\alpha, S) > 0$, כי הפונקציה היא פונקציה רציפה על S סגור וחסום ויש לו מינימום)
 במקרה שלנו, נגדיר $d = d(q_0, F(\partial N)) > 0$. נוכיח כי עיגול ברדיוס $\frac{1}{3}d$ סביב q_0 מוכלל בתוך $F(D)$, ולכן $F(D)$ פתוח.
3. כדי להראות ש- $\|q - q_0\| < \frac{d}{3}$ מוכלל ב- $F(D)$, עלינו לקחת q_1 כזה, $\|q_1 - q_0\| < \frac{d}{3}$, ולהראות כי הוא תמונה של נקודה $p_1 \in D$, $F(p_1) = q_1$.
 במקום זאת, נחפש $\min_{p \in \bar{N}} \|F(p) - q_1\|$ ונוכיח כי הוא 0. ובה נוכיח את קיום p_1 .
 נקח את הנורמה האוקלידית

$$\|\vec{F}(p) - \vec{q}_1\|^2 = \sum_{i=1}^n (F_i(x_1, \dots, x_n) - a_i)^2 = \min?$$

4. טענה: המינימום לא מתקבל על השפה (∂N) . אם $p_1 \in \partial N$ אז

$$\|F(p_1) - q_1\| = \|F(p_1) - q_0 + q_0 - q_1\| \geq \underbrace{\|F(p_1) - q_0\|}_{\geq d} - \underbrace{\|q_0 - q_1\|}_{\geq \frac{d}{2}} \geq \frac{2}{3}d$$

נמצא נקודה מחוץ לשפה שנותנת ערך יותר קטן: $\|F(p_0) - q_1\| = \|q_0 - q_1\| < \frac{1}{3}d$, ולכן המינימום אינו על השפה.

5. (נחשב - $\sum_{i=1}^n (F_i(x_1, \dots, x_n) - a_i)^2$ בפנים של n - ע"י נגזרות חלקיות)

משפט 2.14 תהא $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בקבוצה פתוחה $D \subset \mathbb{R}^n$, כלומר, $f \in C^1(D)$, $J_f(D) \neq 0$ לכל נקודה $p \in D$. נקח $q_0 = F(p_0)$, $p_0 \in D$ אזי ל- p_0 יש סביבה פתוחה N כך ש-

1. f מעתיק את N באופן 1:1 ל- $f(N)$ פתוח.

2. קיים f^{-1} על $f(N)$

3. f^{-1} בעל נגזרות חלקיות רציפות על $f(N)$

4. $D(f^{-1}(q_0)) = (Df(p_0))^{-1}$

2.4 פונקציות סתומות

נתונה משוואה $f(x, y, z) = 0$ וידוע פתרון אחד, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, האם קיימת פונקציה $\varphi(x_0, y_0) = z_0$, אם כן אז $z = \varphi(x_0, y_0)$ הוא החילוץ של z מתוך המשוואה הסתומה בקרבת הנקודה (x_0, y_0, z_0) .
משפט 2.15 משפט הפונקציות הסתומות

הוכחה: ננפח ל-3 מימדים

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F : \begin{matrix} u = x \\ v = y \\ w = f(x, y, z) \end{matrix}$$

$$F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0, z_0)) = (x_0, y_0, 0)$$

נפעיל את משפט הפונקציות ההפוכות: ל- f יש נגזרות חלקיות רציפות ולכן גם $F \in C^1$. נחשב את היעקוביאן

$$\begin{aligned} J_F|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{\partial(y, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0 \end{aligned}$$

לפי משפט הפונקציות ההפוכות, F הוא 1 : 1 בסביבה מסויימת של (x_0, y_0, z_0) , וקיימת פונקציה הפוכה F^{-1} בסביבת $(x_0, y_0, 0)$, וגם היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות שם. צורתו $F^{-1} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v, w) \end{pmatrix}$ (אנחנו לא יודעים שום דבר על g , חוץ מהעובדה שהוא קיים ויש לו נגזרות רציפות)

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{Identity}$$

לכן, (x_0, y_0, z_0) בסביבת u, v, w לכל $w = F(x, y, z) = F(u, v, g(u, v, w))$, בפרט, עבור $w = 0$, $0 = f(u, v, g(u, v, 0))$, $g(u, v, 0) = \varphi(u, v)$. נסמן $g(x, y, 0) \equiv \varphi(x, y)$. בנוסף, הרכיב השלישי של F^{-1} הוא: $\varphi(x_0, y_0) = g(x_0, y_0, 0) = z_0$. ל- $\varphi(x, y)$ יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבה הנ"ל, כי כך ראינו עבור $g(\dots)$ שהוא רכיב של F^{-1} .

2.4.1 משפט הפונקציות הסתומות

נתונות k משוואות ב- $k+n$ נעלמים. דרוש לחץ k נעלמים בעזרת n האחרים.

משפט 2.16 (משפט הפונקציות הסתומות)

$$f_i : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^1, f_1, \dots, f_k$$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 0$$

⋮

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 0$$

ונתנה נקודה $(a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k)$ המקיימת את כל המשוואות.

נתון כי כל f_i בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בסביבה מסויימת של הנקודה. לבסוף, נתון כי היעקוביאן

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)} \Big|_{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)} \neq 0$$

אז קיימות k פונקציות

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_k &= \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

המוגדרות בסביבת (a_1, \dots, a_n) , בעלות נגזרות חלקיות רציפות, ומקיימות

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n)) &= 0 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n)) &= 0 \end{aligned}$$

בסביבת (a_1, \dots, a_n)

הוכחה: נבנה העתקה $F: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$

$$F: \begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ \vdots \\ u_n = x_n \\ u_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_{n+k} = f_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J_F|_{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)} = - \begin{vmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^k \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 & 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 & 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial y_k} \\ \vdots & \ddots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial f_k}{\partial x_n} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} \ \dots \ \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{vmatrix} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_k)}{\partial (y_n, \dots, y_k)} \Big|_{(a_1, \dots, b_n, b_1, \dots, b_k)} \neq 0$$

הפונקציה F היא פונקציה חח"ע ויש לה הפיך בסביבה $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)$, ויש לו הפיך F^{-1} בסביבת $(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$ וגם ל- F^{-1} יש נגזרות חלקיות רציפות.

$$F^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ g_1(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) \\ \vdots \\ g_k(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) \end{pmatrix}$$

כלל (u_n, \dots, u_{n+k}) בסביבת $(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$.

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F \equiv I$$

לכן נציג F^{-1} לתוך f ונקבל:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \\ &= f_1(u_1, \dots, u_n, g_1(u_1, \dots, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}), \dots, g_k(u_1, \dots, u_{n+1}, \dots, u_{n+k})) \\ u_{n+k} &= f_k(u_1, \dots, u_n, g_1(u_1, \dots, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}), \dots, g_k(u_1, \dots, u_{n+1}, \dots, u_{n+k})) \end{aligned}$$

וזה נכון זהותית בסביבת $(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$, בפרט, נקח את $u_{n+1}, \dots, u_{n+k} \equiv 0$ ואת u_1, \dots, u_n בסביבת a_1, \dots, a_n .

$$0 = f_1(u_1, \dots, u_n, g_1(u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0), \dots, g_k(u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0))$$

וכנ"ל עבור f_2, \dots, f_k , הכל סביב (a_1, \dots, a_n) נסמן

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= g_1(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) &= g_k(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

ואז

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

הם החילוץ הדרוש בסביבת a_1, \dots, a_n .

2.5 נגזרות φ

$$f_i \left(x_1, \dots, x_n, \underbrace{\varphi_1(x_1, \dots, x_n)}_{y_1}, \dots, \underbrace{\varphi_k(x_1, \dots, x_n)}_{y_k} \right)$$

עבור $i = 1, \dots, k$
נגזר משוואה מס' i לפי x_i

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_1}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}} \equiv 0$$

$$\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

זה בעצם כפל של מטריצה

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_l} \right)_{\substack{l=1 \dots k \\ i=1 \dots k}} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right)_{\substack{l=1 \dots k \\ j=1 \dots n}} = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots k \\ j=1 \dots n}}$$

כאזר, היעקוביאן של $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)} \Big|_{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k)} \neq 0$. בנקודה ובסביבתה.

$$\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

זה בדיוק הדיפרנציאל של ההעתקה φ .

$$D\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

2.5.1 כלל Cramer

m משוואות ב- n נעלמים - $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$$

שווה ל-

$$x_l = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

נרשום את משוואה הקודמת באמצעות כלל קרמר

$$\sum_{k=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

נחזיק את j קבוע.

אלו K משוואות $i = 1, \dots, k$ ב- k נעלמים, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_{l-1}, x_j, \dots, y_k)}}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}}$$

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, x_j, \dots, y_k)}}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_l, \dots, y_k)}}$$

די איבדתי אותו כאן...

2.5.2 דוגמא: משוואה אחת בהרבה נעלמים

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

נתונה נקודה ליד (a_1, \dots, a_n, b) , כאשר $k = 1$.

גורר $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a_1, \dots, a_n, b)}$ ו- $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ בסביבת (a_1, \dots, a_n) .

ידוע $f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$. נגזור לפי x_j בעזרת כלל השרשרת.

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{f_{x_i}}{f_y} = - \frac{f_{x_i}(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}{f_y(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}$$

הערה 2.17 המשפט הוא תנאי מספיק לחילוף, לא הכרח!

2.6 שימושים גאומטריים

אם נתון משטח $Z = f(x, y)$ ו- f דיפרנציאבילי,

$$\Delta z = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}^A \Delta x + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}^B \Delta y + \varepsilon$$

מישור משיק ב- (x_0, y_0, z_0) היא

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$

אם משטח נתון כפונקציה סתומה - $F(x, y, z) = 0$ ועליו נקודה $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

נניח, לפחות אחד מ- $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$ אינו אפס, למשל - אז $z = g(x, y)$ בסביבה.

$$F = (x, y, g(x, y)) \equiv 0$$

בסביבה,

$$\frac{\partial}{\partial x} F = F_x + F_z g_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F = F_y + F_z \cdot g_y = 0$$

ונקבל $-\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ ולפי הנגזרת לפי y : $-\frac{F_y}{F_z} = \frac{\partial g}{\partial y}$ מישור משיק:

$$z - z_0 = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{-F_x/F_z}(x_0, y_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{-F_y/F_z}(\dots)(y - y_0)$$

ולכן

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

הוא משוואת מישור משיק ל- $F(x, y, z) = 0$ ב- (x_0, y_0, z_0) .
הוקטור $(F_x, F_y, F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)}$ נקרא **נורמל** למישור המשיק בנקודה ונורמל למשטח בנקודה.
וקטור הנגזרות $\text{grad}(F) = \vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ נקרא גרדיאנט.
המישור המשיק שמוצג כאן הוא בהנחה שלפחות אחד מה- F_x, F_y, F_z שונה מ-0 בנקודה.
אם כולם 0, לדוגמא, החרוט $z^2 = x^2 + y^2$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, בנקודת המוקד:

$$(F_x, F_y, F_z)|_{(0,0,0)} = 0$$

ולחרוט אין משיק בנקודה.

דוגמא אחרת: $z^2 + y^2 + x^2 = 0$ - המשיק לו הוא הוא עצמו.

$0 = (x + y + z)^7$ הוא אותו מישור. $0 = 7(x + y + z)^6 = \vec{\nabla}F$ יש מישור משיק, למרות שהגרדיאנט הוא אפס, היא תנאי מספיק, לא הכרחי.

2.7 דוגמא - קו חיתוך בין משטחים

שני משטחים, $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ בעלי נקודה משותפת (a, b, c) לשני המשטחים יש קו חיתוך. מה כיוון עקום החיתוך?

2.7.1 גישה באמצעות פונקציות סתומות

תנאי מספיק לחלוץ (x, y) מתוך $\begin{cases} f_1 = c \\ f_2 = c \end{cases}$ בעזרת z הוא $\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \right|_{(a, b, c)} \neq 0$. בתנאי זה קיים חלוץ -

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \\ z = z \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

התיאור הוא תיאור פרמטרי של קו החיתוך בעזרת הפרמטר z .

המשיק לעקום $\vec{T} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ הוא במקרה שלנו, המשיק הוא $\vec{T} = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right)$.
הנוסחא לנגזרות החלקיות:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z, y)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}}, \frac{dy}{dz} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}}, \frac{dz}{dz} = 1$$

כיוון הוקטור המשיק לעקום החיתוך - נכפול את וקטור הנגזרות הכיווניות ב- $0 \neq \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$. המכפלה שומרת על כיוון הוקטור, ונקבל את וקטור הכיוון.

$$\left(+\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \right)$$

נפתרנו מה-"-" על ידי החלפת סדר הגזירה. הוקטור הזה כל לאכירה כי הצירים במכנה מסודרים בצורה ציקלית $y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow y$.

נשנה את הכיתוב ל-

$$\vec{v} = \hat{i} \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)} + \hat{j} \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (z, x)} = \hat{k} \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)}$$

זהו שווה בדיוק ל-

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{\nabla} f_1 \times \nabla f_2$$

משפט 2.18 $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, A פתוח.

$$DF = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ונניח כי דרגת הדיפרנציאל היא מלאה (m) בכל נקודה.

(באופן שקול, קיים לפחות מינור אחד מסדר $m \times m$ ששונו מ-0), אז $F(A)$ קבוצה פתוחה ב- \mathbb{R}^m .

רעיון ההוכחה: (לא תינתן) - מנפחים את $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ל- $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ על ידי הוספת $n - m$ רכיבים.

2.7.2 דוגמא: הטלה

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ע"י הטלה: $(w, y, z) \rightarrow (u, v)$ ע"י $y = v, x = u$.

2.8 פיתוח טיילור

$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, בעל נגזרות חלקיות רציפות עד סדר $k + 1$, בקרבת נקודה $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$

נסמן: $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \vec{u} = \vec{x} - \vec{a}$

על כל נקודה על הקו בין \vec{a} ל- \vec{x} ניתן להסתכל כ- $\vec{a} + t\vec{u}$ ($0 \leq t \leq 1$).

$$h(t) = f(\vec{a} + t\vec{u}) = f(a_1 + tu_1, \dots, a_n + tu_n)$$

ל- $h(t)$ יש $k + 1$ נגזרות רציפות לפי t . לכן (פיתוח טיילור במימד אחד)

$$h(t) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!}t^1 + \dots + \frac{h^{(k)}(0)}{k!}t^k = R_k$$

$$R_k = \frac{h^{(k+1)}(\tilde{c})}{(k+1)!}t^{k+1}, \quad 0 < \tilde{c} < t$$

$$h(0) = f(\vec{a})$$

$$h'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n f_{x_i} u_i |_{\vec{a} + t\vec{u}}$$

$$h'(0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{a}) u_i$$

$$\begin{aligned}
 h''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\bar{a} + t\bar{u}) \cdot u_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\bar{a} + t\bar{u}) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t} \right] \cdot u_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{\bar{a}+t\bar{u}} u_j u_i \\
 h''(0) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\bar{a}) u_i u_j
 \end{aligned}$$

בגלל רציפות הנגזרות החלקיות מסדר 2, ברור ש- $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ והמטריצה שלהם סימטרית. מאלגברה, $\sum_{i,j=1}^n c_{ij} u_i u_j$, תבנית ריבועים המתאימה למטריצה $C = (i, j)$.

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} u_i u_j = (\bar{u}) (C) \begin{pmatrix} \bar{u} \end{pmatrix} = \langle \bar{u}, C\bar{u} \rangle = \langle C\bar{u}, \bar{u} \rangle$$

(כאשר \bar{u} רושמים פעם אחת בשורה ופעם אחת בעמודה, C -סימטרית, ולכן $C = C^T$)
לאחר r גזרות,

$$h^{(r)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n \frac{\partial^r f(\bar{a} + t\bar{u})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} u_{i_1} \cdot u_{i_2} \dots u_{i_r}$$

סך הכל גזרנו r פעמים, נניח ש- r_1 פעמים לפי x_1 ו- r_2 פעמים לפי x_2 ו- r_n פעמים לפי x_n , ו-

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

$$\sum_{\substack{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_n \leq r \\ r_1 + r_2 + \dots + r_n = r}} \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \frac{\partial^r f(\bar{a} + t\bar{u})}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} u_1^{r_1} u_2^{r_2} \dots u_n^{r_n}$$

ובפרט, עבור $t = 0$

זוה דומה לנוסחת ניוטון (לחישוב מולטינום. כמו בינום - אבל יותר)

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^r = \sum_{r_i} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n}$$

הערה 2.19 נסתכל על הביטוי האחרון

$$\sum_{\substack{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_n \leq r \\ r_1 + r_2 + \dots + r_n = r}} \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \frac{\partial^r f(\bar{a} + t\bar{u})}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} u_1^{r_1} u_2^{r_2} \dots u_n^{r_n}$$

נחשוב עליו כאופרטור המופעל על הפונקציה f

$$= \left(\sum_{\substack{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_n \leq r \\ r_1 + r_2 + \dots = r}} \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} u_1^{r_1} \frac{\partial^{r_1}}{\partial x_1^{r_1}} u_2^{r_2} \frac{\partial^{r_2}}{\partial x_2^{r_2}} \dots u_n^{r_n} \frac{\partial^{r_n}}{\partial x_n^{r_n}} \right) f$$

$$= \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r f$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$$

ואם u היה וקטור יחידה - אז היתה נגזרת מכוונת לפי כיוון \vec{u} .

ה־פֶּקטו, נשתמש רק בפיתוח טיילור מסדר שני (נזכור: $h(t) = f(\bar{a} + t\vec{u})$ כאשר $u = x - a$):

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2!}t^2 + \dots + R_k =$$

אצלנו,

$$h(t) = f(\bar{a} + t\vec{u}) = f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a}))$$

$$h(1) = f(\bar{x})$$

$$f(x) = h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{h''(0)}{2!}1^2 + \dots$$

$$= f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j + \dots$$

$$f(x_1 \dots x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{1!} \left[\sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \right]$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{2x_i x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_i) \right]$$

$$+ \dots + R_k$$

אם $R_2 = R_k$, יחושב בנקודה $C = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_r)$ בין (a_1, \dots, a_n) ל־ (x_1, \dots, x_n)

3 בעיות אקסטרימום

הגדרה 3.1 $f : A \subset R^m \rightarrow R$, \tilde{x} נקודה פנימית של A . נאמר כי ל־ f יש מקסימום לוקאלי ב־ \tilde{x} אם קיימת סביבה U של \tilde{x} כך ש־ $f(\tilde{x}) \geq f(x)$ לכל $x \in U$.

אם \tilde{x} לא פנימי ל־ A , אז נאמר כי הוא מקסימום לוקאלי אם $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ לכל $x \in U \cap A$.

טענה 3.2 אם $f \in C^1(A)$, ויש ל־ f אקסטרימום (מקסימום או מינימום) לוקאלי ב־ \tilde{x} פנימי של A , אז $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) = 0$ לכל $i = 1, \dots, n$, או,

$$\nabla f|_x = \text{grad} f|_{\tilde{x}} = \vec{0}$$

הוכחה: נקח $g(x_1) = f(x_1, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$. אם ל־ f יש מקסימום ב־ \tilde{x} , אז ל־ g יש מקסימום ב־ \tilde{x}_1 . כי

$$g(\tilde{x}_1) = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \geq f(x_1, \dots, x_n)$$

לכל x_1, \dots, x_n בסביבה, בפרט

$$\geq f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = g(x)$$

ל- $g(x)$ יש מקסימום ב- \tilde{x}_1 , יחסית לאינטרוול סביבות, לכן, לפי משפט שנלמד באינפ' 1, $g'(\tilde{x}_1) = 0$. זוהי בדיוק $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{x}) = 0$ וכך לכל $\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)} = 0$

הגדרה 3.3 נקודה בה $\vec{\nabla} f(\tilde{x}) = \vec{0}$ נקראת נקודה סטציונארית.

זה אינו תנאי מספיק לאקסטרימום. לא למקסימום ולא למינימום. למשל $f(x, y, z) = xyz$

$$f_x = yz$$

$$f_y = xz$$

$$f_z = xy$$

ו- $f_y = f_z = f_x|_{(0,0,0)} = 0$. אבל בקרבת הנקודה $(0,0,0)$ יש ל- f גם ערכים חיוביים וגם שליליים - ולכן זו אינה נקודת אקסטרימום.

3.1 חיפוש אקסטרימום בקבוצה

1. נקודות פנימיות, בהם $\nabla f = \vec{0}$.

2. נקודות אי-גזירות.

3. נקודות שפה.

3.1.1 תנאי מספיק לאקסטרימום

משפט 3.4 $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) \in C^2(A)$, בעל נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2, ונתון $\nabla f(x, y) = \vec{0}$, עבור (x, y) פנימי של A ,

$$A = f_{xx}(x, y)$$

$$B = f_{xy}(x, y)$$

$$C = f_{yy}(x, y)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

• אז: אם $\Delta > 0$, יש אקסטרימום מקומי.

- אם $A > 0$ - מינימום מקומי

- אם $A < 0$ - מקסימום מקומי

הערה 3.5 $AC - B^2 > 0$, מבטיח ש- $B > 0 \iff A > 0$

• אם $\Delta < 0$, אז (x, y) איננה אקסטרימום מקומי.

• אם $\Delta = 0$, אי אפשר לקבוע רק לפי נתונים אלו.

הוכחה: במקרה שבו $\Delta > 0$
 נסמן, $\tilde{x} = (a, b)$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[\overbrace{f_x(a, b)(x-a)}^0 + \overbrace{f_y(a, b)(y-b)}^0 \right] + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(\hat{a}, \hat{b})(x-a)^2 + 2f_{xy}(\hat{a}, \hat{b})(x-a)(y-b) + f_{yy}(\hat{a}, \hat{b})(y-b)^2 \right]$$

קיימת סביבה u של (a, b) כך שלכל נקודה בה, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ חיובי, כמו בנקודה (a, b) . ברור ש- $A \neq 0$
 $\text{sgn} f_{xx}(x, y) = \text{sgn} f_{xx}(a, b)$ לכן, בסביבה קטנה

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\hat{A}}_{f_{xx}(\hat{a}, \hat{b})} u^2 - 2\hat{B}uv + \hat{C}v^2 \right]$$

ונותר לחקור מתי $\hat{A}u^2 + 2\hat{B}uv + \hat{C}v^2$ חיובי ומתתי שלילי.
 מינימום לוקאלי $f(x, y) > f(a, b) \iff$ בקרבת a, b לכל x, y
 $\hat{A}u^2 + 2\hat{B}uv + \hat{C}v^2 > 0 \iff$ לכל $(u, v) \neq (0, 0)$
 נבצע השלמה לריבוע -

$$\begin{aligned} \hat{A}u^2 + 2\hat{B}uv + \hat{C}v^2 &= \hat{A} \left(u^2 + 2\frac{\hat{B}}{\hat{A}}uv + \frac{\hat{B}^2}{\hat{A}^2} \right) - \hat{A} \left(\frac{\hat{B}^2}{\hat{A}^2} \right) v^2 + \hat{C}v^2 \\ &= \hat{A} \left(u + \frac{\hat{B}}{\hat{A}}v \right)^2 + \frac{1}{\hat{A}} (\hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2) v^2 \end{aligned}$$

אם $\hat{A} > 0, \hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2 > 0 \iff AC - B^2 > 0$ ואז $\text{sgn}(\hat{A}) = \text{sgn}(A)$ ו- $\text{sgn}(AC - B^2) = \text{sgn}(\hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2)$
 אם $\hat{A} < 0, \hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2 > 0 \iff AC - B^2 < 0$ ו- $\text{sgn}(\hat{A}) = -\text{sgn}(A)$
 נקודת מינימום. (a, b)
 אם $\hat{A} > 0, \hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2 < 0 \iff AC - B^2 < 0$ ו- $\text{sgn}(\hat{A}) = \text{sgn}(A)$
 נקודת מקסימום. (a, b)
 אם $\hat{A} < 0, \hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2 < 0 \iff AC - B^2 < 0$ ו- $\text{sgn}(\hat{A}) = -\text{sgn}(A)$
 נקודת מקסימום. (a, b)

$$f(x, y) - f(a, b) = \hat{A} \left(u + \frac{\hat{B}}{\hat{A}}v \right)^2$$

נקח $u = -\frac{\hat{B}}{\hat{A}}v$ אז

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{\hat{A}} \left(\underbrace{\hat{A}\hat{C} - \hat{B}^2}_{<0} \right) v^2$$

כלומר, מכיוונים שונים, $f(x, y) - f(a, b)$ מקבל סימונים שונים - ולכן הנקודה (a, b) לא יכולה להיות נקודת מינימום. ■

דוגמאות נגד $f(x, y) = x^k y^l$ שלמים, גדולים מ-2

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}|_{(0,0)} &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, $A = B = C = 0$ אם k, l זוגיים, $f(x, y) \geq 0$ ו- $(0, 0)$ מינימום.

3.1.2 תנאי מספיק לאקסטרימום ב- n משתנים

הוכחה: נתון: $\nabla f|_{\tilde{x}} = 0$

$$f(x) = f(\tilde{x}) + 0 + \frac{1}{2!} \langle H\bar{w}, \bar{w} \rangle$$

כאשר $\bar{w} = x - \hat{x}$ ו- H תבנית ריבועית:

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\hat{x}) \right)$$

כאשר \hat{x} היא נקודת ביניים בין \tilde{x} ל- x .
 תנאי מספיק למינימום לוקאלי ב- \tilde{x} :
 $f(x) > f(\tilde{x})$ לכל $x \neq \tilde{x}$ בסביבתו,
 $\langle Hw, w \rangle > 0$ לכל $w \neq \vec{0}$ \iff
 \iff (מאלגברה לינארית) המטריצה הסימטרית מוגדרת חיובית
 תנאי הכרחי ומספיק למטריצה מוגדרת חיובית:

• כל הערכים העצמיים חיוביים

• אם כלל סילווסטר (סדרת המינוריים הראשיים חיובית - $h_{11} > 0, \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$)

- f יש מקסימום \iff ל- f יש מינימום, \iff $(-H)$ מוגדרת חיובית.

$$-H = \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} & \dots \\ -h_{21} & -h_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$-h_{11} > 0, \begin{vmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{vmatrix} > 0 \equiv \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0 \iff$$

■

שאלנו עד כה רק מתי $f(x, y) > f(a, b)$ לכל $(x, y) \neq (a, b)$ ולא שאלנו $f(x, y) \geq f(a, b)$. אנחנו לא מסוגלים לתת לזה תשובה טובה, כי התבנית הריבועית לא מוחשבת בנקודה - אלא בסביבתה.

3.2 אקסטרימום עם אילוצים

מצא מרחק מינימלי מהמשווא $x + 2y + 3z = 4$ אל הנקודה $(5, 6, 7)$.

הפתרון הגיאומטרי - ברור.

פתרון אנליטי - המרחק הוא

$$f(x, y, z) \equiv \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-7)^2} = \min$$

$$g(x, y, z) \equiv x + 2y + 3z - 4 = 0$$

- מצא אקסטרימום של $f(x, y, z)$ בכפוף לאילוץ $g(x, y, z) = 0$.

דוגמא מצא $\text{extr} f(x, y)$ על שפת התחום. משוואת השפה $g(x, y) = 0$.

שיטת כופלי לגרנז'

משפט 3.6 נתונות $f, g \in C^1$ ב- R^n פתוח. $A \subseteq R^n$.

אם לבעיה $f(x_1, \dots, x_n)$ אקסטרימום ו- $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ יש אקסטרימום בנקודה $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ ואם בנקודה הנ"ל \tilde{x} ו- $\vec{0} \neq \text{grad}g|_{\tilde{x}}$, אז קיים קבוע λ (שנקרא כופל לגרנז') כך שמתקיים

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} [f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)] \right|_{\tilde{x}} = 0$$

או

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [f - \lambda g](\tilde{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

וגם

$$g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = 0$$

אלה $n + 1$ משוואות ב- $(n + 1)$ נעלמים λ, x_1, \dots, x_n , אז הנקודה הזו עשויה להיות נקודת אקסטרים.

מוטיבציה - ציור ב- $n = 2$. גרדיאנט של g הוא נורמל ל- $g(x, y) = 0$

$$\text{נתון } g(x_1, y_1) = 0 \text{ אם } \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \neq 0 \text{ אז קיים } y = y(x) \text{ ו-} \frac{d}{dy}|_{x_1} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}|_{(x_0, y_0)}$$

משוואות המשיק: $y - y_0 = \left(-\frac{g_x}{g_y}\right)|_{(x_0, y_0)}(x - x_0)$ או $g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

או $0 = (g_x, g_y)|_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)$ כלומר - הגרדיאנט הוא אנך לעקום.

(ציור יפה) סביר להניח כי f מקבלת ערך קיצוני על $g = 0$, בנקודה האחרונה בה $f = c, g = 0$ נפגשים. בנקודה

זו הן משיקות, והנורמלים מקבילים, $(f_x, f_y) \parallel (g_x, g_y)$ לכן $\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}|_{\tilde{x}}$ ולכן

$$f_x - \lambda g_x = 0$$

$$f_y - \lambda g_y = 0$$

וזו היתה הטענה.

דוגמאות נגד - $g(x, y) = x^2 - y^3 = 0$. נקודה $(0, 0)$, $g_x(0, 0) = 0, g_y(0, 0) = 0$ - אין לו משיק

בנקודה. **הוכחה:** נתון ש- \tilde{x} הוא נקודת אקסטרים מקומית, ונתון ש- $\nabla g|_{\tilde{x}} \neq 0$, $(g_{x_1}, \dots, g_{x_n})(\tilde{x})$, לכן יש

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}|_{\tilde{x}} \neq 0 \text{ נניח למשל ש-} \frac{\partial g}{\partial x_n}|_{\tilde{x}} \neq 0$$

לפי משפט פונקציות סתומות, אפשר לחלץ מתוך $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ ולכתוב ש-

$$x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$$

בסביבת הנקודה.

$$(*) \quad g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv 0$$

(זוהי זהות. הביטוי הוא תמיד אפס)

נציב לתוך פונקצית המטרה - f

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

כלומר, יש לנו פונקציה של $n - 1$ משתנים, ובלי אילוץ, ו- $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$ היא נקודת אקסטרים מקומית של u .

$$\text{לכן, } \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}|_{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})} = 0 \quad i = 1, \dots, n - 1$$

נסתכל על $*$, ונגזור אותה לפי x_i . נשים לב שזוהי זהות, אז הנגזרת שלה היא אפס בכל נקודה!

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}|_{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})} = 0 \quad i = 1, \dots, n - 1$$

נחלץ מהאחרון את $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ ונציבל קודם:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}\right)|_{(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})} = 0 \quad i = 1, \dots, n - 1$$

נשים לב שלפי ההנחה, המכנה תמיד שונה מאפס. הביטוי הוא זהות עבור $i = n$.

$$\text{נסמן } \lambda = \left. \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}} \right|_{\bar{x}} \text{ וקיבלנו:}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} [f - \lambda g] \right|_{\bar{x}} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1, n$$

■

דוגמא: מצא אקסטרמום של

$$\text{extr} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

כאשר $a_{ij} = a_{ji}$, תחת האילוץ $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ סגור וחוסם, ו- $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j$ פונקציה רציפה ולכן ל- Q יש מקסימום ומינימום.

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \left[Q - \lambda \sum (x_i^2 - 1) \right] \right|_{\bar{x}} = 0$$

נגזור:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=j} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j \right) \\ &= a_{kk} \cdot 2x_k + \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i a_{ik} x_i \\ &= 2a_{kk} x_k + \sum_{l \neq k} (a_{kl} + a_{lk}) x_l \\ &= 2a_{kk} x_k + 2 \sum_{k \neq l} a_{kl} x_l \\ &= 2 \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[Q - \sum (x_i^2 - 1) \right] = 0$$

הופך ל-

$$2 \sum (a_{kl} x_l - \lambda \cdot 2x_k) = 0$$

ונקבל

$$\sum_{k=l}^n a_{kl} x_l = \lambda x_k$$

או

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כלומר, λ ערך עצמי. בנוסף, A סימטרי, $\min = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \max$.

(x_1, \dots, x_n) וקטור עצמי. פונקצית המטרה Q היא

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right] x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda x_i \cdot x_i = \lambda \cdot 1$$

אז $\min Q = \lambda_{\min}$ ו $\max \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle = \max Q = \lambda_{\max}$
 תרגיל בית: מצא $\text{extr} \sum x_i^2$ כאשר $\sum a_{ij} x_i x_j = 1$

3.2.1 אי שוויונות

אי שוויון יאנג נתונים $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ מצא $\max \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right)$ על ענף ההיפרבולה $xy = k$, $xy > 0$.
 בקצוות הענף הפונקציה שואפת ל- $+\infty$, לכן בתווד, חייב להיות מינימום. שם יש כופל-לגרנז'.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - \lambda(xy - k) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\dots - \lambda(xy - k)] = 0$$

או

$$\begin{cases} x^{p-1} - \lambda y = 0 \\ y^{q-1} - \lambda x = 0 \\ xy = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^p = \lambda xy = \lambda k \\ y^q = \lambda xy = \lambda k \\ x^q = x^p = \lambda k \end{cases}$$

$$\underbrace{(\lambda k)^{\frac{1}{p}}}_x \underbrace{(\lambda k)^{\frac{1}{q}}}_y = k$$

$$\underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_1 (\lambda k)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = k$$

$$\lambda = 1$$

ולכן

$$x = k^{\frac{1}{p}}$$

$$y = k^{\frac{1}{q}}$$

היא נקודת המינימום היחידה. אז בכל מקום

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq \min \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) = \frac{k}{p} + \frac{k}{q} = k \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = k = xy$$

סך הכל קיבלנו

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

על גבי הקו $xy = k$, לכל k . על כל קו $xy = k$ ו $x, y \geq 0$, כלומר, כל רבע המישור.

מקרה ידוע כאשר $p = q = 2$ אז $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

אי שוויון הולדר נקח $0 \leq u_1, u_2, \dots, u_n$ ו- $0 \leq v_1, \dots, v_n$, לא כולם אפס.

$$x = \frac{u_i}{\left(\sum_{j=1}^n u_j^p\right)^{1/p}}, \quad y = \frac{v_i}{\left(\sum_{j=1}^n v_j^q\right)^{1/q}}$$

נפתח לפי אי שוויון יאנג, עבור i אחד:

$$\frac{1}{p} \frac{u_i^p}{\sum_{j=1}^n u_j^p} + \frac{1}{q} \frac{v_i^q}{\sum_{j=1}^n v_j^q} \geq \frac{u_i v_i}{\left(\sum u_j^p\right)^{1/p} \left(\sum v_j^q\right)^{1/q}}$$

את הפיתוח הנ"ל לכל i , נסכס:

$$\frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 \geq \frac{\sum u_i v_i}{\left(\sum u_j^p\right)^{1/p} \left(\sum v_j^q\right)^{1/q}}$$

נעביר אגפים, נשצמש ב- $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ונקבל

$$\left(\sum u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum v_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum u_i v_i$$

כאשר $p = q = 2$ אז זה $\bar{u} \circ \bar{v} \geq \|u\|_2 \|v\|_2$.

אי-שוויון מירקווסקי

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p &\leq \sum |a_i + b_i|^{p-1} (|a_i| + |b_i|) \\ &= \sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum \underbrace{|b_i|}_{u_i} \underbrace{|a_i + b_i|^{p-1}}_{v_i} \end{aligned}$$

ולפי אי שוויון הולדר (1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ולכן $q = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum \left(|a_i + b_i|^{p-1}\right)^{q=\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)^{1/q=\left(\frac{p-1}{p}\right)} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |a_i + b_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

אפשר לצמצם ב- $\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$, נעביר את הביטוי לצד שמאל ונקבל

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{1/p}$$

כלומר,

$$\|\vec{v}\|_p = \left(\sum |v_i|^p\right)^{1/p}$$

אזי

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_p \leq \|\vec{u}\|_p + \|\vec{v}\|_p$$

כלומר, כל $\|\cdot\|_p$, עבור כל $p > 1$, הוא נורמה

ואי שוויון הולדר אומר, למעשה, לכל $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

3.2.2 דוגמאות לשימוש בכופלי לגרנז'

דוגמה extra $\{x^2y - y^2x\}$ על רבע עיגול - $x^2 + y^2 \leq 1$, כאשר $x \geq 0$ ו- $y \geq 0$
נחפש בנקודות פנימיות:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - y^2 = 0 \\ f_y &= x^2 - 2xy = 0 \end{aligned}$$

אנחנו רואים ש- $x^2 = 2xy$ ו- $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 2xy$, מתאים רק ל- $x = y = 0$, שאינה נקודה פנימית.
נחפש אקסטרימום בשפה:

$$\begin{aligned} \text{עבור על } x = 0, f &= 0 \\ \text{על } y = 0, f &= 0 \\ \text{על } x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$f - \lambda g = x^2y - y^2x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

נגזור:

$$\begin{aligned} (f - \lambda g)_x &= 2xy - y^2 - 2\lambda x = 0 \\ (f - \lambda g)_y &= x^2 - 2xy - 2\lambda y = 0 \end{aligned}$$

נחבר את המשוואות:

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{(x+y)(x-y)} - 2\lambda(x+y) = 0$$

אפשרות אחת - $x + y = 0$, סותר את $x > 0, y > 0$. נחלק בו ונקבל

$$x - y = 2\lambda$$

נחסר את המשוואות המקוריות:

$$\underbrace{x^2 + y^2}_1 - 4xy - \underbrace{2\lambda}_{y-x}(y-x) = 0$$

ואז

$$\begin{aligned} 1 - 4xy + (y-x)^2 &= 0 \\ (y^2 + x^2) - 2xy &= 0 \\ 2 &= 6xy \\ xy &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

וגם $x^2 + y^2 = 1$. אלו שתי נקודות סימטריות - אם סימנים הפוכים. את נקודות המעבר בין אילוצים - $(1, 0), (0, 0)$, יש לבדוק בנפרד בדיוק מה קורה.

עוד דוגמה: הפונקציה $f(x_1, \dots, x_n)$ והאילוצים $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$, כולן C^1 בקבוצה פתוחה $A \subset \mathbb{R}^n$.
 אם בנקודה מסויימת מתקבל אקסטרימום עבור

$$\begin{cases} \text{extr} f(x_1, \dots, x_n) \\ g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

כך ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ קיימים $\frac{\partial}{\partial x_i}(f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_m g_m) = 0$ (עבור $j = 1, \dots, n$) וכמובן, $g_i = 0$ (עבור $j = 1, \dots, m$).
 סך הכל, $m+n$ משוואות ובהם $n+m$ משתנים, $\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n$.

דוגמה מצא מרחק מינימלי בין $x^2 + 2y^2 = 1$ לבין $x + y = 4$. ניסוח בעזרת כופלי לגרנז'הנקודה (x_2, y_2) על המעגל, (x_1, y_1) על הישר.

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \min \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right]$$

בכפוף לאילוצים:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + 2y_1^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x_2 + y_2 - 4) = 0$$

$$f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$$

ולכתוב את ארבעת הנגזרות שלו (לפי ארבעת המשתנים)

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ויש מינור ששונה מאפס, כי לא יתכן ש- x_1, y_2 הם אפס בו־זמנית.

4 חשבון אינטגרלי

4.1 חזרה - קבוצה בעלת נפח

(תיבה - Box)

$$B = \left\{ (x_1, \dots, x_n), \begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ \vdots \\ a_n \leq x_n \leq b_n \end{cases} \right\}$$

נפח התיבה -

$$V(B) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

D - קבוצה כלשהי ב- \mathbb{R}^n , נחתוך על ידי מישורים מקבילים, ונקבל תיבות.

1. תיבות שמכילות רק נקודות פנימיות של D
2. תיבות שמכילות רק נקודות פנימיות של $D \setminus \mathbb{R}^n$.
3. כל האחרים - שמכילות נקודות שאינן פנימיות ל- D וגם נקודות שאינן פנימיות ל- $D \setminus \mathbb{R}^n$

הגדרה 4.1 עבור חלוקה P זו, נגדיר:

- $\underline{S}(P, D)$ - סכום תחתון - סכום הנפחים של תיבות ב-(1) (אלא תיבות שמוכלות ב- D)
- $\bar{S}(P, D)$ - סכום עליון - סכום הנפחים של תיבות ב-(3) + (1) (אלו תיבות שמכסות את D)

הגדרה 4.2 ונגדיר:

- נפח פנימי - $\underline{V}(D) = \sup_p \underline{S}(P, D)$
- נפתח חיצוני - $\bar{V}(D) = \inf_p \bar{S}(P, D)$

תכונה: שתי חלוקות p_1, p_2 ועידון משותף $P_1 \cap P_2$ אזי

$$\begin{aligned}\bar{S}(P_1, D) &\geq \bar{S}(P_1 \cup P_2, D) \\ \underline{S}(P_2, D) &\leq \underline{S}(P_1 \cup P_2, D)\end{aligned}$$

אזי

$$\bar{V}(D) = \inf_{P_1} \bar{S}(P_1, D) \geq \sup_{P_2} \underline{S}(P_2, D) = \underline{V}(D)$$

הגדרה 4.3 נקראת "**בעלת נפח**" אם $\bar{V}(D) = \underline{V}(D)$.

דוגמה לקבוצה שאינה בעלת נפח - $D = \{0 \leq x, y, z \leq 1 \mid x, y, z \notin \mathbb{Q}, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (הכללה של פונקציה דריכלה). במקרה כזה, הסכום התחתון הוא 0, והעליון הוא $1 \times 1 \times 1 = 1$ ו- $0 \neq 1$.

הגדרה 4.4 נקודות שפה של D , ∂D , הן נקודות שאינן פנימיות ל- D ואינן פנימיות ל- $D^c \subset \mathbb{R}^n$.

הגדרה 4.5 קבוצה E נקראת **בעלת נפח אפס**, אם לכל $\varepsilon > 0$ אפשר לכסות את E על ידי מספר סופי של תיבות בעלות נפח כולל קטן מ- ε .

משפט 4.6 D הוא בעל נפח \iff השפה שלו, ∂D בעלת נפח אפס.

הוכחה: נסתכל על ההפרש $\bar{S}(P, D) - \underline{S}(P, D)$, שווה לסכום נפחי תיבות שמכסות את השפה ∂D .

$$\begin{aligned}\bar{V}(\partial D) &= \inf_p \bar{S}(P, \partial D) = \inf_p [\bar{S}(P, D) - \underline{S}(P, D)] \\ &\geq \inf_p \bar{S}(P, D) - \sup_p \underline{S}(P, D) \\ &= \bar{V}(D) - \underline{V}(D) \geq 0\end{aligned}$$

לכן, אם $\bar{V}(\partial D) = 0$ אז בהכרח $\bar{V}(D) - \underline{V}(D) = 0$, ואז, לפי ההגדרה, D בעל נפח. בכיוון השני - נניח כי D בעל נפח, כלומר $\bar{V}(D) = \underline{V}(D) = V(D)$. $\inf \bar{S} = V(D)$ ולכן, לכל $\varepsilon > 0$, קיימת חלוקה P_1 כך ש- $V(D) \leq \bar{S}(P_1, D) \leq V(D) + \varepsilon$. $\sup \underline{S} = V(D)$ ולכן, לכל $\varepsilon > 0$, קיימת חלוקה P_2 כך ש- $V(D) - \varepsilon \leq \underline{S}(P_2, D) \leq V(D)$.

$$V(D) = \underline{V}(D) \geq \underline{S}(P_1 \cup P_2, D) \geq \underline{S}(P_2, D) > V(D) - \varepsilon$$

בצד השני - אותו הדבר:

$$V(D) = \bar{V}(D) \leq \bar{S}(P_1 \cup P_2, D) \leq \bar{S}(P_1, D) < V(D) + \varepsilon$$

מאי השוויון, נסתכל על

$$2\varepsilon > \bar{S}(P_1 \cup P_2, D) - \underline{S}(P_1 \cup P_2, D) \geq 0$$

אבל זהו $\bar{S}(P_1 \cup P_2, \partial D) \geq 0$, $2\varepsilon > \bar{S}(P_1 \cup P_2, \partial D) \geq 0$ כרצוננו, ולכן, לפי ההגדרה, ∂D בעלת נפח אפס. ■

תרגיל: הוכיח כי $\inf_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \geq \inf a_n - \sup b_n$. לדוגמה, עבור $a_n = (-1)^n$ ו- $b_n = (-1)^{n-1}$

$$a_n - b_n \equiv 0$$

$$0 \geq (-1) - (1) = -2$$

4.2 אינטגרל רימן

אינטגרל רימן של $f(x_1, \dots, x_n)$ על תיבה B . נתונה f חסומה על תיבה B . נחלק על ידי מישורים מקבילים (חלוקה P) לתיבות $B_{i,j,k}, \dots$.

הקבוצה חסומה, ולכן קיים n indices $m_{ijk} = \inf_{B_{ijk}} f$, $M_{ijk} = \sup_{B_{ijk}} f$.

הגדרה 4.7 נגדיר

$$\bar{S}(P, f) = \sum_{i,j,k} M_{ijk} V(B_{ijk})$$

$$\underline{S}(P, f) = \sum_{ijk} m_{ijk} V(B_{ijk})$$

טענה 4.8 לכל P_1, P_2 , $\bar{S}(P_1, f) \geq \underline{S}(P_2, f)$.

$$\bar{S}(P_1, f) \geq \bar{S}(P_1 \cup P_2, f) \geq \underline{S}(P_1 \cup P_2, f) \geq \underline{S}(P_2, f)$$

הגדרה 4.9 נגדיר

$$\bar{S}(f) = \inf_P \bar{S}(P, f)$$

$$\underline{S}(f) = \sup_P \underline{S}(P, f)$$

ברור כי $\bar{S}(f) \geq \underline{S}(f)$.

אם מתקיים $\bar{S}(f) = \underline{S}(f)$, נאמר כי f אינטגרבילית לפי רימן על התיבה B והערך המשותף מסומן ב- $\int_B f$.

משפט 4.10 רציף על תיבה B אינטגרבילי שם.

משפט 4.11 אם f רציף על תיבה B למעט קבוצה E בעלת נפח אפס, אז צכ אינטגרבילית ב- B .

ההוכחות זהות להוכחות באינפי 2, ולכן לא יובאו כאן.

4.2.1 הגדרת אינטגרל רימן של f על קבוצה חסומה D .

נקח תיבה B המכילה את D .
נגדיר

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D \\ 0 & , x \in B \setminus D \end{cases}$$

משפט 4.12 אם D חסום, ובעל נפח ר- f רציף על D , אז \tilde{f} אינטגרבילי על B , ונגדיר

$$\int_D f = \int_B \tilde{f}$$

וההגדרה לא תלויה בבחירת התיבה B .

הוכחה: D בעל נפח $\partial D \leftarrow$ בעלת נפח אפס $\leftarrow f$ אולי לא רציף על ∂D בעל נפח אפס $\leftarrow f$ אינטגרבילי על D . ■

4.3 החלפת משתני אינטגרציה

במשתנה יחיד: $\int_a^b f(t) dt$, החלפת משתנים - $t = \varphi(x)$, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ אז

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

כאן, φ לא חייב להיות ח"ע.

4.3.1 החלפת משתנים באינטגרלים כפולים

משפט 4.13 נתונה קבוצה פתוחה G ב- \mathbb{R}^n , ו- $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\varphi: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \text{ . ובאופן מפורש: } \begin{cases} t_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ t_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

נניח:

• $\varphi \in C^1(G)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון -

• φ היא חד חד ערכים ב- G .

• היעקוביאן של φ שונה מאפס - $J_\varphi \neq 0$, בכל נקודה של G .

תהי D תת קבוצה סגורה, חסומה ב- G , ובעלת נפח.

ולבסוף - $f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$ היא פונקציה רציפה ב- $\varphi(G)$.

אז

$$\int_{\varphi(D)} f(t) dt_1 \cdots dt_n = \int f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \cdot \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

במקרה הפרטי בו $f(t) \equiv 1$,

$$V(\varphi(D)) = \int_{\varphi(D)} dt_1 \cdots dt_n \rightarrow \int_D |J_\varphi| dx_1 \cdots dx_n$$

4.3.2 התחלה - תיבה תחת העתקה לינארית

נקח העתקה לינארית $t = \varphi(x)$, $\vec{t} = L\vec{x}$, כאשר L מטריצה $n \times n$. ואז $J_\varphi = \det L$.

ונקח קבוצה פשוטה - תיבה.

נקח $f(t) \equiv 1$, אז צריך להוכיח

$$V(L(B)) = \int_{\varphi(B)} dt_1 \cdots dt_n = \det L \int_B dx_1 \cdots dx_n = \det(L) V(B)$$

כלומר,

$$B(L(B)) = \det L \cdot V(B)$$

(תיבה היא אוסף נקודות.. $L(B)$ הוא בעצם L כפול כל אחת מהנקודות של B)

• ב- R^2 אם B מלבן, אז $L(B)$ - מקבילית שטח המקבילית כלשהי B .

$$S(B) =$$

$$\|u_2\| \cdot \|u_1\| \sin \alpha = \|u_1 \times u_2\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\| = 1 \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$$

– נפעיל על B טרנספורמציה לינארית L :

$$\vec{u}_1 \rightarrow L\vec{u}_1, \quad \vec{u}_2 \rightarrow L\vec{u}_2$$

אז (נחליף שורות ועמודות...)

$$\begin{aligned} S(L(B)) &= \left| \det \left(L \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \det L \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| \\ &= |\det L| S(B) \end{aligned}$$

- ב- \mathbb{R}^3 , B תיבה הופכת ל- $L(B)$ מקבילון. (אבל בעצם, B יכול להיות מקבילון כלשהו...)
המקבילון נפרש על ידי שלושה וקטורים, u_1, u_2, u_3 . הזווית בין $u_1, u_2 = \varphi$ ו- $u_3 = \psi$.
נפח המקבילון הוא בסיס כפול גובה -

$$\begin{aligned} V(B) &= (\|u_3\| \cos \psi) \underbrace{(\|u_1\| \cdot \|u_2\| \sin \varphi)}_{\|u_1 \times u_2\|} \\ &= u_3 \cdot (u_1 \times u_2) \\ &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (x_3 \hat{i} + y_3 \hat{j} + z_3 \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

אבל בגלל שהנפח הוא חיובי - אזי (מוותר להחליף סדר, לשחלק וכו' כי אנחנו מסתכלים על ערך מוחלט)

$$V(B) = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

ונפח התמונה -

$$\begin{aligned} V(L(B)) &= \det \left(L \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left| \det \left(L \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \det L \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= |\det L| \cdot V(B) \end{aligned}$$

טענה 4.14 לכל תיבה B ב- \mathbb{R}^n ולכל טרנספורמציה לינארית $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V(L(B)) = |\det L| \cdot V(B)$.

הוכחה: נזכור: נפח B הוא מכפלת הצלעות.

נשתמש בטענה מאלגברה לינארית: כל מטריצה אפשר לכתוב כמכפלה של מטריצות אלמנטריות מהצורה

• כפל קוארדינטה בקבוע - $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$ - המטריצה

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

כופל את הנפח ב- $|\lambda|$. $|\det| = |\lambda|$

• חיבור 2 קוארדינטות - עיוות: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$ - המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(לא משנה את הנפח: $|\det| = 1$)

• החלפת 2 קוארדינטות - $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_2, x_1, \dots, x_n)$ - המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

ללא משנה את הנפח! $|\det| = 1$

$$V(L(B)) = V(L_1 L_2 \dots L_m(B)) = V(L_1(L_2(\dots(L_m(B))))))$$

כאשר L_1, \dots, L_m אלמנטריות. ראינו שהנפח של מטריצה אלמנטרית שפועלת על גוף הוא נפח הגוף כפול דטרמיננט המטריצות האלמנטריות

$$\begin{aligned} &= |\det(L_1)| V(L_2(\dots(L_m(B)))) \\ &= |\det L_1| \dots |\det L_m| V(B) \\ &= |\det(L_1 \cdot L_2 \dots L_m)| V(B) \\ &= |\det L| V(B) \end{aligned}$$

■

4.3.3 שלב שני - קבוצה כלשהי תחת העתקה לינארית

נעבור מתיבה לקבוצה כלשהי (סגורה, חסומה ובעלת נפח), ההעתקה עודנה לינארית ו- f פונקצית הזהות 1.

$$V(L(D)) = |\det L| V(D)$$

כאשר D בעלת נפח.

למה 4.15 G פתוח ב- \mathbb{R}^n , $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(G)$.
 E קבוצה סגורה, חסומה בעלת נפח אפס שמוכלת ב- G .
 אז גם $\varphi(E)$ בעל נפח אפס.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ קיימות קוביות $B_1, \dots, B_m \subseteq G$ שאיחודן מכיל את E וסכום נפיהם $\sum_1^m V(B_i) < \varepsilon$.
 בקוביה B_k , נקח 2 נקודות x, y ,
 נעריך את

$$\varphi_i(x) - \varphi_i(y)$$

נסתכל על

$$\begin{aligned} h(t) &= \varphi_i(ty + (1-t)x) \\ &= \varphi_i(t(y-x) + x) \\ &= \varphi_i(t(y_1 - x_1) + \dots + t(y_j - x_j) \dots) \end{aligned}$$

, כאשר $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \varphi_i(y) - \varphi_i(x) &= h(1) - h(0) \\ &= \frac{dh}{dt}(c^*)(1-0) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t=c^*)(y_j - x_j) \end{aligned}$$

נסתכל על

$$\begin{aligned} \|\varphi(y) - \varphi(x)\|_\infty &= \max_i \left| \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(c^*)(y_j - x_j) \right| \\ &\leq \underbrace{\max_j |y_j - x_j|}_{\|y-x\|_\infty} \cdot \underbrace{n \cdot \max_{\bigcup B_k} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|}_{\text{const-M}} \\ &\leq M \|y - x\|_\infty \end{aligned}$$

ניקח x בתור מרכז B_k , y נקודה אחרת ב- B_k , ו- d_k תסמן צלע של B_k .

$$\begin{aligned} \|\varphi(y) - \varphi(x)\| &\leq M \|y - x\| \leq M \left(d_k \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \right) \\ &= C \cdot d_k \end{aligned}$$

(כלומר, קובייה שצלעה d_k מועתקת לצלע של קובייה שחסומה על ידי קובייה שצלעה $C \cdot d_k$)
 $\varphi(E)$ מוכלת באיחוד של m קוביות, בעלות צלעות Cd_k בהתאמה, ונפח הקוביות

$$\sum_m (Cd_k)^n = C^n \underbrace{d_k^n}_{< \varepsilon} < C^n \varepsilon$$

לכן, התמונה מכוסה על ידי מספר סופי של קוביות שסכום נפחיהם קטן כרצוננו, כלומר, בעלת נפח אפס. ■

משפט 4.16 $G \subset \mathbb{R}^n$, פתוח. $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(G)$, ו- $J_\varphi(x) \neq 0$ בכל נקודה של G .

$D \subset G$ קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח. אז גם $\varphi(D)$ בעלת נפח.

הוכחה: D בעל נפח, $\partial D \Leftarrow$ בעלת נפח אפס $\Leftarrow \varphi(\partial D)$ בעלת נפח אפס. לפי ההנחות - φ הוא 1:1 ו- $J_\varphi \neq 0$, ולכן משפט העתקות הפתוחות בתוקף, \Leftarrow קבוצה פתוחה עוברת לקבוצה פתוחה, ובפרט - הפנים של D עובר לפנים של $\varphi(D)$, ולכן, השפה של D עוברת לשפה של $\varphi(D)$.

$$\varphi(\partial D) = \partial(\varphi(D))$$

אבל כבר הראנו ש- $\varphi(\partial D)$ בעלת נפח אפס, ולכן גם $\partial(\varphi(D))$ היא בעלת נפח, ולכן $\varphi(D)$ בעלת נפח. ■

זכור, הוכחנו עבור תיבות, תחת ההעתקה לנארית ש- $V(L(B)) = |\det(L)| V(B)$.

משפט 4.17 בהנחות של המשפט הקודם ו- D בעלת נפח, ו- L העתקה לינארית, קיים

$$V(L(D)) = |\det(L)| V(D)$$

הוכחה: קודם הוכחנו את זה עבור תיבות. B .

נקח כיסוי של D על ידי תיבות. יהי $D \subset \bar{B}$ (כאשר $\underline{B} \subset D \subset \bar{B}$ - איחוד התיבות הפנימיות ו- \bar{B} איחוד התיבות המכסות). כך שלכל ε נתון, $0 < V(\bar{B}) - V(\underline{B}) < \varepsilon$.

נפעיל את L : $L(\underline{B}) \subseteq L(D) \subseteq L(\bar{B})$.

אזי, $V(L(\underline{B})) \leq V(L(D)) \leq V(L(\bar{B}))$ (וכבר הוכחנו שהנפח קיים) אבל לפי מה שהוכנו על נפח תיבות -

$$|\det(L)| V(\underline{B}) \leq V(L(D)) \leq |\det(L)| V(L(\bar{B}))$$

ההפרש בין הקצוות קטן מ- $\varepsilon |\det(L)|$, ולכן קטן כרצוננו. ו- $V(\underline{B})$, $V(\bar{B})$ קרוב כרצוננו ל- $V(D)$. לכן - האמצעי, $V(L(D))$ קרוב כרצוננו ל- $|\det(L)| V(D)$. אבל אלה שני מספרים קבועים, לא קשורים לחלוקה ול- ε , ולכן הם זהים. ■

4.3.4 עבור העתקה כלשהי

עד כה, הוכחנו שעבור העתקה לינארית L וקבוצה בעלת נפח D -

$$\frac{V(L(D))}{V(D)} = |\det(L)| = |J_L|$$

משפט 4.18 $G \subset \mathbb{R}^n$ פתוח. $\varphi \in C^1(G)$, $J_\varphi \neq 0$ בכל נקודה של G (לא מניחים חד חד ערכיות). $D \subset G$ קבוצה סגורה וחסומה.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים δ , כך שאם K היא קוביה עם מרכז $x_0 \in D$ וצלעה קטנה מ- 2δ אז לכל קוביה -

$$\frac{V(\varphi(K))}{V(K)} \leq |J_\varphi(x_0)| (1 + \varepsilon)^n$$

הוכחה: φ דיפרנציאבילית (כי היא ב- C^1), $D\varphi(x_0)$ - דיפרנציאל.

$\det(D\varphi(x_0)) = J_\varphi(x_0) \neq 0$, ולכן $D\varphi(x_0)$ מטריצה הפיכה, וההפיך הוא $(D\varphi(x_0))^{-1}$.

$$\| (D\varphi(x_0))^{-1} \vec{v} \|_\infty \leq M \|v\|_\infty, \text{ בפרט,}$$

דיפרנציאביליות -

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)\|_\infty}{\|x - x_0\|_\infty} = 0$$

לכן, המנה קטנה מ- ε/M , כאשר $\|x - x_0\|_\infty < \delta$, וזו קוביה שמרכזה x_0 וחצי צלע הוא δ .

$$\frac{\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)\|_\infty}{\|x - x_0\|_\infty} < \varepsilon/M$$

ו-

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)\|_\infty < \varepsilon/M \|x - x_0\|_\infty$$

כאשר $\|x - x_0\|_\infty < \delta$

נשנה קצת את הביטוי -

$$\begin{aligned} & \left\| \underbrace{(D\varphi(x_0))^{-1}}_{\text{Matrix}} \underbrace{(\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0))}_{\text{Vector}} \right\|_{\infty} \\ & \leq M \|\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)\|_{\infty} \\ & \leq M \frac{\varepsilon}{M} \|x - x_0\|_{\infty} = \varepsilon \|x - x_0\|_{\infty} \end{aligned}$$

ואם נחסום את הביטוי מצד שני -

$$\begin{aligned} & \left\| (D\varphi(x_0))^{-1} (\varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)) \right\|_{\infty} \\ & = \left\| (D\varphi(x_0))^{-1} (\varphi(x) - \varphi(x_0)) - (x - x_0) \right\|_{\infty} \\ & \geq \|D\varphi(x_0)(\varphi(x) - \varphi(x_0))\|_{\infty} - \|x - x_0\|_{\infty} \end{aligned}$$

נסתכל על שני הקצוות של אי השוויון (ולאחר העברת אנגפים)

$$\|D\varphi(x_0)(\varphi(x) - \varphi(x_0))\|_{\infty} \leq (1 + \varepsilon) \|x - x_0\|_{\infty} \quad (\dagger)$$

נסמן -

$$\psi(x) = (D\varphi(x_0))^{-1} \circ \varphi(x)$$

כאשר $(D\varphi(x_0))^{-1}$ היא טרנספורמציה לינארית אחת מסויימת, ו- $\varphi(x)$ לא לינארי. נסתכל על אי השוויון (\dagger) אז -

$$\|\psi(x) - \psi(x_0)\| \leq (1 + \varepsilon) \|x - x_0\|$$

אבל בקרבת x_0 , $\psi(x)$ היא כמעט מטריצת היחידה -

$$D\psi|_{x_0} = (D\varphi(x_0))^{-1} \cdot D\varphi|_{x_0} = I$$

אז, ψ יעתיק קוביה קטנה לקבוצה שאינה קוביה, אך התמונה שלה חסומה על ידי קוביה שמרכזת $\psi(x_0)$ וגדולה - פי $(1 + \varepsilon)$ גדולה מהקוביה המקורית.

אם הצלע המקורית היתה 2δ , אז הקבוצה החדשה חסומה על ידי קוביה שצלעה $2\delta(1 + \varepsilon)$. המרחק ב- $\|\cdot\|_{\infty}$ של $\psi(x)$ מ- $\psi(x_0)$ הוא לכל היותר $2\delta(1 + \varepsilon)$ לכן הוא מוכל בקוביה בעלת צלע קטנה מ- $2\delta(1 + \varepsilon)$. לכן, -

$$V(\psi(K)) \leq V(K) \cdot (1 + \varepsilon)^n$$

$$V(\psi(K)) = V\left(\underbrace{(D\varphi(x_0))^{-1}}_L \varphi(K)\right)$$

אבל ראינו שתנספורמציה לינארית מכפילה את הנפח בדטרמיננט, ולכן

$$\begin{aligned} & = \left| \det\left((D\varphi(x_0))^{-1}\right) \right| V(\varphi(K)) \\ & = \frac{1}{|\det(D\varphi(x_0))|} V(\varphi(K)) \\ & = \frac{1}{J_{\varphi}(x_0)} V(\varphi(K)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\varphi(K)) &= |J_\varphi(x_0)| V(\psi(K)) \\ &\leq |J_\varphi(x_0)| V(k) \cdot (1 + \varepsilon)^k \end{aligned}$$

וזה טענת המשפט

4.3.5 ההוכחה הסופית

כזכור, אנחנו רוצים להוכיח ש-

$$\int_{\varphi(D)} \cdots \int f(\underbrace{t_1, \dots, t_n}_t) dt_1 \cdots dt_n = \int_D \cdots \int f\left(\varphi\left(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_x\right)\right) \cdot \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \cdots dx_n$$

עבור D בעל נפח. **הוכחה:** נתון ש- D בעל נפח, והוכחנו כי גם $\varphi(D)$ בעל נפח. ללא הגבלת הכלליות, נניח כי $f(t_1, \dots, t_n) \geq 0$ כי אם f מחליף סימס, אז נכתוב $f = f^+ - f^-$ כאשר

$$f^+ = \begin{cases} f & , f \geq 0 \\ 0 & , f < 0 \end{cases}$$

$$f^- = \begin{cases} f & f \geq 0 \\ f & f < 0 \end{cases}$$

ונוכיח את המשפט לכל אחד לחוד - ונחבר בסוף. נעשה חלוקה של \mathbb{R}^n לקוביות, ונכסה את D עד ידי מספר סופי של קוביות K_j שמרכזיהן הנקודות x_j , די קטנות, שלהן רק דפנות משותפות. מכיוון שהאינטגרנד הוא אינטגרלילי, ידוע שאפשר לקרב את האינטגרל באגד ימין על ידי סכומי רימן, בנתנאי שנבחר חלוקה לקוביות די קטנות.

$$\left| \int f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_n - \sum_j f(\varphi(x_j)) |J_\varphi(x_j)| \cdot V(K_j) \right| < \varepsilon$$

נקח את הקוביות מספיק קטנות כדי שגם

$$\frac{V(\varphi(K_j))}{V(K_j)} \leq (1 + \varepsilon) |J_\varphi(x_j)|$$

- ולכן $D \subset \bigcup K_j$ ו $\varphi(D) \subset \bigcup \varphi(K_j)$, ובאגד שמאל של הטענה -

$$\int_{\varphi(D)} f(t) dt_1 \cdots dt_n \leq \sum_j \int_{\varphi(K_j)} f(t) dx_1 \cdots dx_n$$

הגדלנו את הקבוצה, הפונקציות הן אי שליליות, ולכן הגדרנו את הביטוי. ולפי משפט ערך ממוצע אינטגרלי² - מתקיים השוויון

$$= \sum f(P_j) V(\varphi(K_j))$$

²הוכחה של משפט הערך הממוצע האינטגרלי - $\min(f) \cdot V(S) \leq \int_S f dt_1 \cdots dt_n \leq \max(f) V(S)$ אי

$$\min(f) \leq \frac{\int f}{V(S)} \leq \max(f)$$

ולכן הוא שווה לערך של f בנקודה $f(p_i)$

כאשר P_j היא נקודה מסויימת בתוך $\varphi(K_j)$, $p_j \in \varphi(K_j)$ ולכן הוא תמונה - $P_j = \varphi(q_j)$ ו- $q_j \in K_j$.

$$\begin{aligned} &= \sum_j F(\varphi(q_j)) V(\varphi(K_j)) \\ &\leq \sum_J f(\varphi(q_j)) |J_\varphi(x_j)| \cdot V(K_j) (1 + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

אילו היה $q_j = x_j$, אז אגף ימין היה סכום רימן של

$$(1 + \varepsilon)^n \int_D f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_n$$

והסכום היה קרוב כרצוננו אל האינטגרל, ובגבול היינו מקבלים

$$\int_{\varphi(D)} f dt_1 \cdots dt_n \leq \int_D f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_n$$

שהוא מחצית מהטענה.

אבל אי אפשר להניח $q_j = x_j$, ונראה שזה בכלל לא משנה.
כי

$$\begin{aligned} &\left| \sum f(\varphi(q_j)) |J_\varphi(x_j)| V(K_j) - \sum f(\varphi(x_j)) |J_\varphi(x_j)| V(K_j) \right| \\ &= \sum |f(\varphi(q_j)) - f(\varphi(x_j))| |J_\varphi(K_j)| V(K_j) \end{aligned}$$

אבל הביטוי $|f(\varphi(q_j)) - f(\varphi(x_j))| < \varepsilon$ כי x_j, q_j באותה קוביה קטנה, ו- φ , f רציפות.

$$= \varepsilon \sum_J |J_\varphi(K_j)| V(K_j)$$

הביטי $|J_\varphi(K_j)|$ חסום על ידי M , כי J רציף על D סגור וחסום, ו- $\sum_j V(K_j) \rightarrow V(D)$, ולכן הפרש הוא

$$\leq \varepsilon MV(D)$$

קטן כרצוננו.

לכן, הביטוי שמכיל x_j, q_j הוא אומנם לא סכום רימן, אבל הוא קרוב כרצוננו לסכום רימן. לכן נובע גם עכשיו ש-

$$\boxed{\int_{\varphi(D)} f dt_1 \cdots dt_n \leq \int_D f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_n}$$

עד כאן יצאנו מ- D , והפעלנו עליו את φ והגענו ל- $\varphi(D)$.

עכשיו, נצא מ- $\varphi(D)$, ונפעיל עליה את φ^{-1} , ונקבל את D . כאן משתמשים בזה ש- φ חד-חד-ערכית.

$$\int_D f(\varphi(x)) dx |J_\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_n$$

נפעיל את φ^{-1} ונפעיל אותו על האינטגרנד $|J_\varphi| f(\varphi)$, ולפי אותו פיתוח בדיוק, נקבל

$$\begin{aligned} \int_D f(\varphi) |J_\varphi| &\leq \int_{\varphi(D)} (f(\varphi(\varphi^{-1})) |J_\varphi|) |J_{\varphi^{-1}}| \\ &= \int_{\varphi(D)} f \end{aligned}$$

אם נקח את שני אי השוויונות שהוכנו - נקבל שהן בעצם שוויון, ובהה הושלמה ההוכחה. ■

4.4 אינטגרלים סינגולריים

נזכר - אינטגרל מוכלל במימד אחד

$$\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$$

בעצם, מבטאים את הקבוצה האינסופית הלא חסומה, על ידי סדרה של קבוצות חסומות.

נתון D לא חסום, ב- \mathbb{R}^2 , למשל - חצי מישור.

הבעיה היא, שכאשר מכסים קו ישר על ידי קטעים - ניתן לעשות את זה בצורה, פחות או יותר יחידה. הבעיה היא, שאם נגדיר סדרה של קבוצות רב-מימדיות שיכסו - ניתן לבחור את הסדרה הזו בכל צורה (לדוגמה, עיגולים מתרחבים, או ריבועים מתרחבים).

הגדרה 4.19 נאמר שסדרה של קבוצות D_n , סגורות, חסומות ובעלות נפח מתכנסות לקבוצה D באופן מונוטוני אם

$$D_n \subset D_{n+1} \subset D^0$$

(כאשר D^0 , הפנים של D) ו- $D^0 = \bigcup_{n=1}^\infty D_n^0$ (כל נקודה שנמצאת בפנים, נמצאת באחת מהקבוצות)

הגדרה 4.20 תהא f פונקציה רציפה, ו- $f \geq 0$. נאמר כי $\int_D f$ קיים, אם קיימת סדרה של קבוצות D_n כנזכר למעלה, ערך גבול זה יוגדר כ- $\int_D f$.

טענה 4.21 הגדרה זו בלתי תלויה בבחירת סדרת הקבוצות D_n .

הוכחה: נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f = I$, ועבור סדרה אחרת, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D'_n} f = I'$

$$\cdot \bigcup_{n=1}^\infty D_n^0 \supset D'_k, k$$

לכל k , D'_k סגור וחסום, לכן קומפקטי ובעל כיסוי אינסופי, לכן אפשר להוצא כיסוי סופי.

$$\cdot D_l^0 = \bigcup_{n=1}^l D_n^0 \supset D'_k$$

לכן, $f \geq 0$, $\int_{D_l} f \geq \int_{D'_k} f$ (בעלות נפח, שפותיהן בעלות נפח אפס, ולכן ניתן להשמיט אותן מהאינטגרל)

$$\cdot I \geq I'$$

לכן, תפיקד D_n, D'_n ונקבל להיפך - $I' \geq I$, ומכאן השוויון.

דוגמאת נגד - אם f לא בעל סימן קבוע, זה לא נכון.

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$D_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq n \\ y \end{array} \right\}$$

$$\iint_{D_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^n \int_0^n [\sin(x^2) \cos(y^2) + \cos(x^2) \sin(y^2)] dx dy$$

אבל שני המחבורים סימטריים, וניתן להחליף בהם את x, y ולכן

$$= 2 \int_0^n \int_0^n \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy$$

$$= 2 \int_0^n \sin(x^2) dx \cdot \int_0^n \cos(y^2) dy$$

$$\int_0^n \sin(x^2) dx$$

$$x = \sqrt{t}, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad \text{ו-} \quad dt = 2x dx, t = x^2$$

$$= \int_0^{n^2} \frac{\sin(t) dt}{\sqrt{t}}$$

לפי קריטריון דריכלה להתכנסות אינטגרלים, מתכנס בתנאי לכל $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$D'_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x, y \\ x^2 + y^2 \leq n^2 \end{array} \right\} \quad \text{- נבחר סדרה אחרת}$$

$$\iint_{D'_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^n \sin(r^2) r dr d\theta$$

$$s=r^2, ds=2r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{n^2} \sin(s) \frac{1}{2} ds$$

$$= \frac{\pi}{4} [-\cos(n^2) + \cos(0)] \rightarrow \text{No limit}$$

משפט 4.22 נתון f רציף ב- D , ונתון שקיים-

$$\int_D |f| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} |f| = B$$

אז גם $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f$ קיים ולא תלוי בבחירת D_n . זו תקרא **התכנסות בהחלט**.

$$\text{הוכחה: } 0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

$$0 \leq \int_{D_n} (f + |f|) \leq 2 \int_{D_n} |f| \rightarrow 2 \int_D |f| = B$$

סדרת המספרים $\int_{D_n} (f + |f|)$ עולה, עם n וחסומה, ולכן מתכנסת לגבול, A . נחסיר זה מזה את 2 סדרות המספרים ונקבל

$$\int_{D_n} f \rightarrow A - B$$

■

מה קורה אם אין התכנסות בהחלט? עבור סדרה D_n מסויימת, קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f$ אך לא קיים $\int_{D_n} |f|$. ברור שבמקרה זה, $\int_{D_n} |f| \rightarrow +\infty$.

$$\int_{D_n} (f + |f|) \rightarrow +\infty$$

$$\int_{D_n} (f - |f|) \rightarrow -\infty$$

נסכל על $D^+ = \{(x, y) \in D : f \geq 0\}$ ו- $D^- = \{(x, y) \in D : f < 0\}$.

$$\begin{aligned} \int_{D_n} f &= \int_{D_n} \left(\underbrace{\frac{f + |f|}{2}}_{\text{positive}} + \underbrace{\frac{f - |f|}{2}}_{\text{negative}} \right) \\ &= \underbrace{\int_{D_n \cap D^+} \frac{f + |f|}{2}}_{n \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty} + \underbrace{\int_{D_n \cap D^-} \frac{f - |f|}{2}}_{n \rightarrow \infty, f \rightarrow -\infty} \end{aligned}$$

אזי, נוכל לסדר את ה- D_n כך שהסכום יתכנס לכל גבול. אם פונקציה אינה מתכנסת בהחלט, אין סיכוי בכלל להגדיר אינטגרל על גבולות כאלו.

5 אנליזה וקטורית

משוואת עקום ב- \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t) \\a &\leq t \leq b\end{aligned}$$

הוא התיאור הפרמטרי של עקום.

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi : t &\rightarrow (x, y, z)\end{aligned}$$

עקום הוא פונקציה מקטע ב- \mathbb{R}^1 לתוך \mathbb{R}^3 .משטח ב- \mathbb{R}^3 הוא יצור דו־ממדי ב- \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}F : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z)\end{aligned}$$

במשוואות -

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\y &= y(u, v) \\z &= z(u, v)\end{aligned}$$

כאשר $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. זהו תיאור פרמטרי של משטח.

דוגמה

$$z = f(x, y)$$

זהו מקרה פרטי של משטחים - שבהם מעל כל נקודה במישור יש בדיוק נקודה אחת של המשטח. התיאור הפרמטרי של המשטח הזה הוא

$$\begin{cases}x = u \\y = v \\z = f(u, v)\end{cases}$$

עבור משטח $F(u, v) \rightarrow (x, y, z)$, נסתכל על הישר $u = u_0$ ב- (u, v) . אזי, התמונה שלו תהיה עקום ב- \mathbb{R}^3 - $F(u_0, v)$. משוואת העקום - $F(u_0, v)$

$$\begin{aligned}x &= x(u_0, v) \\y &= y(u_0, v) \\z &= z(v_0, v)\end{aligned}$$

כאשר $\alpha \leq v \leq \beta$. זוהי הצגה פרמטרי של העקום ב- \mathbb{R}^3 .

הישר המשיק לעקום הוא

$$\begin{aligned} \vec{T}_v &= \left(\frac{\partial x(u_0, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u_0, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u_0, v)}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k} \end{aligned}$$

ועבור $v = v_0$, המשיק לתמונה שלוב ב- R^3 תהיה

$$\vec{T}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Big|_{(u, v_0)}$$

טענה 5.1 אם עקום מוכל במשטח, אז הוקטור המשיק לעקום מוכל במישור המשיק למשטח.

הוכחה: יהי המשטח $G(x, y, z) = 0$, והעקום $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ אז, גלל שהוא מוכל -

$$G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$$

לכל t נגזור -

$$\begin{aligned} G_x x'(t) + G_y y'(t) + G_z z'(t) &= 0 \\ \underbrace{(G_x, G_y, G_z)}_{\nabla G = \vec{N}} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t), z'(t))}_{\vec{T}} &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, הנורמל מאונך למשיק - $\vec{N} \perp \vec{T}$.
הנורמל למשטח מאונך ל- T_u וגם ל- T_v , ולכן הכיוון שלו הוא ככיוון המכפלה הוקטורית -

$$\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$$

■

דוגמה אם $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

אזי

$$\begin{aligned} N &= T_u \times T_v = (1, 0, f_u) \times (0, 1, f_v) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = \hat{i}(-f_u) + \hat{j}(-f_v) + \hat{k}(1) \end{aligned}$$

ולכן הנורמל הוא

$$\vec{N} = -f_u \hat{i} - f_v \hat{j} + \hat{k}$$

לחילופין, $T_v \times T_u = (f_u, f_v, -1)$, הוא הנורמל ההפוך. זה מתאים לכתיבה

$$G(x, y, z) \equiv f(x, y) - z = 0$$

והנורמל שלו הוא הגרדיאנט - הנגזרת לפי x, y, z .

5.0.1 משטח חלק

הגדרה 5.2 נתונים $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ בעלי נגזרות חלקיות רציפות.
 $z = z(u, v)$

המשטח המתאים נקרא **משטח חלק** בנקודה מסויימת, אם הנורמל המתאים לו $T_u \times T_v = \vec{N} \neq \vec{0}$ במקרה זה, לנורמל יש כיוון מוגדר.

הגדרה זו תלויה בתיאור הפרמטרי. למשל -
 (מישור x, y) $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$

$$\vec{N} = T_u \times T_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = i \times j = k$$

לעומת זאת, $\begin{cases} x = u^3 \\ y = v^3 \\ z = 0 \end{cases}$ הוא אותו מישור xy , אבל הנורמל של הוא

$$T_u \times T_v = (3u^2, 0, 0) \times (0, 3v^2, 0) = 9u^2v^2\hat{k}$$

ולפי התיאור הפרמטרי הזה, הנורמל הוא $\vec{0}$ בהרבה נקודות, ובנקודות אלו המשטח בעל התיאור הפרמטרי הזה, איננו משטח חלק.

משטח שאינו חלק

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

הנורמל (כפונקציה סתומה)

$$\vec{N} = \nabla G = (2x, 2y, -2z)$$

ובנקודה $(0, 0, 0)$ - $\vec{N} = \vec{0}$.

5.1 הגדרת שטח של משטח

ב- \mathbb{R}^2 , נסתכל על המלבן שבתוך D שמוגבל על ידי $[u, u + \Delta u]$ ו- $[v, v + \Delta v]$ אזי שטחו יהיה שטח מלבן - $\Delta u \cdot \Delta v$. המיפוי שלו למשטח ב- \mathbb{R}^3 יהיה "בערך מקבילית".

$$(u, v) \rightarrow \vec{F}(u, v)$$

$$(u + \Delta u, v + \Delta v) \rightarrow \vec{F}(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

בהנחת דיפרנציאביליות על F , מתקבל

$$= F(u, v) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \Delta v + o(\Delta u, \Delta v)$$

נסתכל על ההעתקה של הנקודה $(u + \Delta u)$ -

$$(u + \Delta u, v) \rightarrow F(u + \Delta u, v)$$

$$= F(u, v) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \Delta u + o$$

כדי לחשב את השטח לאחר ההעתקה, נחשב את ההפרשים בין הנקודות ב- \mathbb{R}^3 . אז הצלע בין (u, v) ל- $(u + \Delta v, v)$ עובר ל-

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \Delta u = \vec{T}_u \Delta u$$

הצלע בין (u, v) ל- $(u, v + \Delta v)$ עוברת ל- $\vec{T}_v \Delta v$. שטח המקבילית לאחר ההעתקה - צלע \times צלע \times סינוס הזווית ביניהן -

$$\begin{aligned} \|T_u \Delta u \times T_v \Delta v\| &= \|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v \\ &= \|\vec{N}\| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

הגדרה 5.3 שטח המשטח S מוגדר -

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \\ (u, v) &\in D \end{aligned}$$

$$\iint_{(u,v) \in D} \|T_x \times T_v\| du dv$$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = i \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + j \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + k \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

אז

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv \\ &= \underbrace{(x_u y_v - x_v y_u)^2}_{E} + \underbrace{(y_u z_v - y_v z_u)^2}_{F} + \underbrace{(z_u x_v - z_v x_u)^2}_{G} \\ &= \underbrace{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)}_E \cdot \underbrace{(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)}_F - \underbrace{(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2}_G \end{aligned}$$

לפי הסימונים של גאוס -

$$\begin{aligned} E &= \|T_u\|^2 \\ F &= \|T_v\|^2 \\ G &= (T_u \cdot T_v)^2 \end{aligned}$$

דרשנו ש- $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq 0$ לחות אחד הרכיבים/המינורים $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ אינו אפס.

אם למשל $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \neq 0$ לכן $\begin{cases} y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ (מההיתאור הפרמטרי של המשטח) נין לחלץ את u, v על ידי y, z

כלומר- $\begin{cases} u = u(y, z) \\ v = v(y, z) \end{cases}$ ונציב בשלישי - ונקבל $x = x(u, v) = x(u(y, z), v(y, z)) = H(y, z)$

לכן, בכל משטח חלק - ניתן, בכל סביבה, לחלץ משתנה אחד כפונקציה של השניים האחרים.

דוגמה $z = f(x, y)$, $\vec{T}_u \times \vec{T}_v = (-f_u, -f_v, -1)$ ו- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$

$$A(s) = \iint_{(u,v) \in D} \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} du \cdot dv$$

נסתכל על ההיטל של יחידת שטח על מישור xy . השטח של ההיטל הוא השטח המקורי, עד כדי הזווית בין המשיק למישור xy

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\vec{N}, \hat{k}) = \frac{\vec{N} \cdot \hat{k}}{\|\vec{N}\| \|\hat{k}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} \cdot 1} \end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned} A(s) &= \iint \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1} dudv \\ &= \iint \frac{dudv}{\cos(k, N)} \end{aligned}$$

5.1.1 החלפת משתנים בתיאור הפרמטרי

$D \leftrightarrow \tilde{D}$ ונחליך $(u, v) \leftrightarrow (r, s)$ באופן חד-חד ערכי. $(u, v) \in D \in \mathbb{R}^3$

ולחפך - $\begin{cases} r = r(u, v) \\ s = s(u, v) \end{cases}$ $\begin{cases} u = u(r, s) \\ v = v(r, s) \end{cases}$ - נסתכל על השטח -

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + (\dots) + (\dots)} du dv$$

זהו אינטגרל משטחי רגיל, וניתן לבצע בו החלפת משתנים -

$$x = x(u, v) = x(u(r, s), v(r, s)) = \tilde{x}(r, s)$$

אחרי החלפת המשתנים, נקבל-

$$\begin{aligned} &= \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \dots \overbrace{\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}\right|}^{|J|}} dr \cdot ds \\ &= \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}\right)^2 + (\)^2 + (\)^2} dr \cdot ds \\ &=^* \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}\right)^2 + (\)^2 + (\)^2} dr \cdot ds \end{aligned}$$

והוכחנו, שהגדרת השטח של משטח לא תלויה בבחירת התיאור הפרמטרי (אם החלפת המשתנים ביניהם היא חח"ע (נשים לב, שבמעבר * לא "חילקנו" $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}$ אלא השתמשנו בכלל השרשרת. שזה כמו לחלק, אבל מתמטיקאים חושבים שזה יותר מנומס).

דוגמה המשטח הוא מישור שחותך את הצירים: את x בנקודה a , את y בנקודה b ואת z ב- c .
 משוואת המישור - $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
 נחשב את שטחו -

$$\vec{N} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

נשתמש בנוסחה לפי ההיטל -

$$A = \iint \frac{1}{\cos(\hat{N}, \hat{k})} dx dy$$

$$\begin{aligned} \cos(m, k) &= \frac{N \cdot k}{\|N\| \|k\|} = \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} \\ A &= \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}{\frac{1}{c}} dx dy \\ &= \sqrt{c^2 \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right]} \frac{ab}{2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

כלומר, שטח המשולש הנתון הוא השורש של סכום ריבועי השטחים של שלושת ההיטלים. סוגשל משפט פיתגורס תלת מימדי.

5.1.2 אינטגרציה על פני עקום - תזכורת

$$\gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

כאשר $a \leq t \leq b$ אלמנט קשת

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \\ &= \|T\| dt \end{aligned}$$

נתונה

$$f : \gamma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

אז

הגדרה 5.4 אינטגרל לאורך עקום עבור שדה סקאלרי

$$f_{\gamma} ds \equiv \int_{t=1}^b f(x(x), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

ועבור שדה וקטורי

$$F : \gamma \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F = \begin{cases} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{cases}$$

$$d\vec{s} = \vec{T} dt = (x', y', z') dt$$

הגדרה 5.5 אינטגרל לאורך עקום עבור שדה וקטורי

$$\begin{aligned} \int \vec{F} \cdot d\vec{s} &\equiv \int \vec{F} \cdot \vec{T} dt \\ &= \int (F_1, F_2, F_3) \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t=a}^b \left[F_1(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + \dots \right] dt \\ &\equiv \text{Symbolic} \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \end{aligned}$$

5.2 אינטגרציה על משטח

5.2.1 אינטגרציה סקאלרית.

נתון משטח S ותיאורו הפרמטרי - $(u, v) \in D$ ו- $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

$f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ מוגדר על המשטח.

הגדרנו אלמנט שטח על המשטח S על ידי - $dS \equiv \|T_u \times T_v\| du dv$

אלמנט שטח וקטורי על S - $d\vec{S} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v du dv$

הגדרה 5.6 אינטגרל של פונקציה סקאלרית על משטח

$$\iint_S f dS \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(u,v) \in f} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|T_u \times T_v\| du dv$$

דוגמה $\rho(x, y, z)$ - צפיפות מטען חשמלי על משטח.

$$Q_{tot} = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

5.2.2 אינטגרציה על פונקציה וקטורית

שדה וקטורי, $\vec{F} : S \subset R^3 \rightarrow R^3$
 משטח, $(u, v) \in D$, $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

5.7 הגדרה אינטגרל של פונקציה וקטורית על משטח -

$$\begin{aligned} \iint \vec{F} \circ d\vec{S} &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{(u,v) \in D} (F_1, F_2, F_3) \circ (T_u \times T_v) du dv \\ &= \iint \vec{F} \cdot \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \|T_u \times T_v\| du dv \\ &= \iint \vec{F} \cdot \hat{N} d\vec{S} \end{aligned}$$

והאינטגרל נותן שטף.

$$\begin{aligned} &= \iint (F_1, F_2, F_3) \circ \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \\ &= \iint_{(u,v) \in D} \left[F_1(x(u, v), \dots) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + F_2(\dots) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \dots \right] dudv \end{aligned}$$

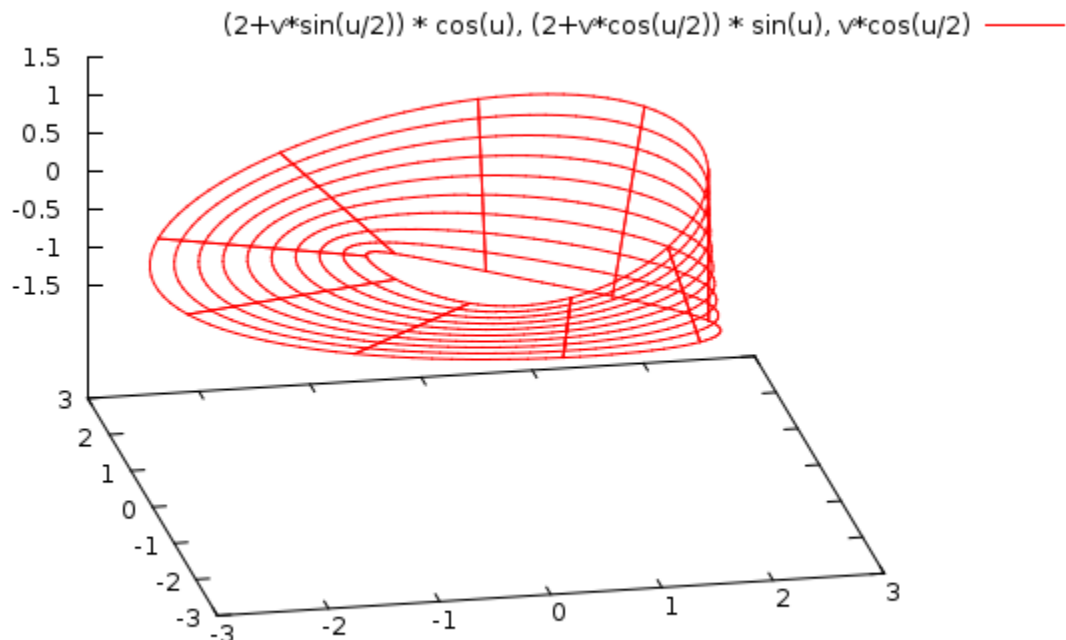
יש ספרים שמסמנים אינטגרל כזה - $\iint (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy)$.

משטח בעל אוריינטציה

5.8 הגדרה משטח S עם תאור פרמטרי נתון נקרא "**בעל אוריינטציה**" אם בתיאור פרמטרי זה יש בכל נקודה נורמל רציף ו- $\vec{N} \neq \vec{0}$.

תנאי זה נועד להבטיח כי למשטח יש שני צדדים. דוגמאת נגד - משטח מוביוס.

התיאור הפרמטרי שלו - $\begin{cases} x = (2 + v \sin(\frac{u}{2})) \cos(u) \\ y = (2 + v \cos(\frac{u}{2})) \sin(u) \\ z = v \cos(\frac{u}{2}) \end{cases}$ כאשר $0 \leq u \leq 2\pi$ ו- $-1 \leq v \leq 1$.



תרגיל - לחשב $\vec{N}(0,0), \vec{N}(2\pi,0)$

הגדרה 5.9 נתון משטח בעל אוריינטציה בעל נורמל יחידה \hat{n} . תאור פרמטרי נקרא שומר מגמה אם $\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \hat{n}$ ונקרא הופך מגמה אם $\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = -\hat{n}$.
 נניח כי למשטח S יש שפה שהוא עקום סגור ופשוט (שאינו חוץ את עצמו) γ . נאמר כי γ מכוון לפי הנורמל \hat{n} של S , אם אדם שהולך על γ וראשו בכיוון \hat{n} , המשטח S משמאלו (כלומר - לפי כלל יד ימין).

5.2.3 אופרטורים דיפרנציאליים

גראדיאנט $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$. הגרדיאנט יהיה -

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) \\ &= i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \underbrace{\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla}} f \end{aligned}$$

רוטור $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

הרוטור של F יהיה

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F) &= \operatorname{curl}(F) \\ &= i \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &\stackrel{\text{symbolic}}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \end{aligned}$$

• דירגנץ תהא $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ (F_1, F_2, F_3) \\ &\stackrel{\text{symbolic}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

• דוגמאות

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot f) = \vec{0}$$

למעשה,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

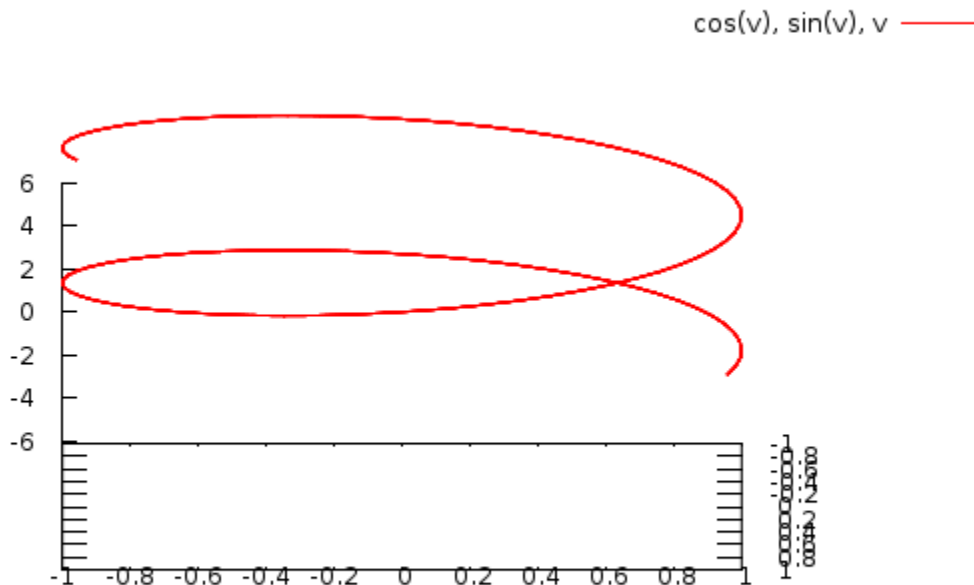
בהנחה של- z יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני.

$$= i \left((f_z)_y - (f_y)_z \right) + \dots = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

• דוגמה ל- rot

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, ht)$$



$$\vec{V}(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t, h)$$

$$= (-\omega y, \omega x, \omega h)$$

זהו שדה וקטורי -

$$V(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, h)$$

הרוטור שלו -

$$\text{rot}(\vec{V}(x, y, z)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & h \end{vmatrix}$$

$$= 0i + 0j + 2\omega k$$

כיוון הרוטור $\nabla \times V$ הוא ציר הסיבוב. הגודל הוא פופרציוני למהירות הסיבוב.

5.2.4 מוטיבציה לדיברגנץ

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

היא מהירות זרימה של נוזל.

נקח תיבה, שקודקודה הימני התחתון - (x, y, z) ומימדיה - $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. הנורמלים של הקוביה הם כלפי חוץ. נסתכל על הדופן השמאלית (שמימדיה - $\Delta y, \Delta z$) - אזי F_1 הוא הרכיב שמאונך לדופן, ו- F_2, F_3 מקבילים לדופן. כמה נוזל יוצא מהקוביה ליחידת זמן? צריך לסכם

$$\vec{F} \cdot \hat{n} \cdot \Delta S$$

בדופן שמאל -

$$F \cdot \hat{n} = F \cdot (-i) = -F_1$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n} \cdot \Delta S = -F_1(x, y, z) \Delta y \Delta z$$

בדופן ימין -

$$\vec{F} \cdot n = F \cdot i = +F_1$$

והשטף -

$$+F_1(x + \Delta x, y, z) \Delta x \Delta z$$

ובשניהם ביחד --

$$\frac{[F_1(x + \Delta x, y, z) - F_1(x, y, z)]}{(\Delta x)} \Delta y \Delta z (\Delta x) \rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} \Delta V$$

סך הכל הזרימה החוצה על שש הדפנות היא

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \Delta v$$

כלומר, הדיברנגנץ הוא כמויות הנוזל (נטו) שיצאה מתוך הקובייה - ליחידת זמן וליחידת נפח.

5.2.5 משפט סטוקס

משפט 5.10 (סטוקס)
נתון משטח

$$S : \Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \\ (u, v) \in D \end{cases}$$

D בקבוצה סגורה ב- \mathbb{R}^2 , בעלת שפה γ שהוא עקום פשוט וסגור. נניח כי ל- (u, v) , $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2, ונניח כי ל- S יש אוריינטציה שנקבעת על ידי $\hat{n} = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$. נניח כי כאשר (u, v) עובר על ∂D , שפת D פעם אחת, אז תמונתו עוברת על שפת S פעם אחת. נניח כי המגמה על שפת S שמתאימה לנורמל \hat{n} , זה מתאים למעבר על שפת D , בכיוון נגד השעון. נתון שדה וקטורי $\vec{F}(x, y, z)$ המוגדר בקבוצה פתוחה שמכילה את המשטח S . נניח כי ל- \vec{F} נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון. אז,

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

הוכחה: נסמן -

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

באגף ימין -

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial S = \phi(\partial D)} P dx + Q dy + R dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u(t), v(t)) \\ z = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \\ a \leq t \leq b \end{array} \right. \quad \gamma, \text{ ותמונתו } \partial S - \left\{ \begin{array}{l} u = u(t) \\ v = v(t) \\ a \leq t \leq b \end{array} \right. \quad \text{נניח של-} \partial D \text{ יש תיאור פרמטרי -}$$

$$\int_{\partial S} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz \\ = \int_{t=a}^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt$$

כאן - $P = P(x, y, z) = P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), \dots)$ נחשב את המחובר הראשון - $\int_{\partial S} P dx$

$$\int_{t=a}^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{(u,v) \in \partial D} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + P(x(u, v), y, z) \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

∂D : תאור פרמטרי של שפת D , וזהו עקום מישורי סגור במישור u, v , ונחשב אותו לפי נוסחאות גרין -

$$= \iint_D \left[\left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right)_u - \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right)_v \right] dudv \\ = \iint_D \left[(P_x x_u + P_y y_u + P_z z_y) x_v + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - (P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v) x_u - P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] du dv$$

הנגזרות השניות מבטלות זו את זו. נסדר את החוברים ונקבל -

$$= \iint_D [-P_y (x_u y_v - x_v y_u) + P_z (z_u x_v - z_v x_u)] du dv \\ = \iint_D -P_y \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + P_z \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv$$

עבור $\int Q dy$ -

$$\int_{\partial S} Q dy = \iint_D -Q_z \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q_x \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv \\ \int_{\partial S} R dz = \iint_D -R_x \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R_y \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

(המשתנים מוחלפים באופן ציקלי - $Q \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow Q$ ו- $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) אזי,

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_D (R_y - Q_z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (P_z - R_x) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (Q_x - P_y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

וקיבלנו מכפלה של שלושת רכיבי הרוטור בשלושת רכיבי הנורמל -

$$= \iint_S \text{rot}(F) \cdot d\vec{S}$$

הערה 5.11 נוסחאת גרין היא, כמובן, מקרה פרטי, מישורי.

$$\vec{F} = (P, Q, 0)$$

$$S = D, \phi = \text{id}$$

והתיאור הפרמטרי יהיה

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\int F \cdot ds = \int Pdy + Qdy + 0dz$$

מכיוון ש- $z = 0$, אז $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & 0 \\ x_v & 0 \end{vmatrix} = 0$, ונשאר רק המינור השלישי

$$= \iint (Q_x - P_y) 1 dx dy$$

וזה נוסחאת גרין

הערה 5.12 1. אם ל- S אין שפה, אז $\iint_R \text{rot}(F) dS = 0$

2. (עושים את אותו טריק כמו בהכללה של משטח גרין - אם המשטח מוגבל על ידי 2 עקומים חותכים את המשטח בעקום שהולך וחוזר בין העקומים ומקבלים)

5.3 השדה המשמר ב- \mathbb{R}^3

הגדרה 5.13 תחום נקרא פשוט קשר אם כל שני עקוצים בתחום בעלי קצוות משותפים ניתנים לעיוות רציף מזה לזה.

דהינו - נניח ויש לנו עקום אחד $c_0 : \vec{g}_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ ועקום שני $c_1 : \vec{g}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, כאשר $a \leq t \leq b$ ו- $\vec{g}_0(a) = \vec{g}_1(a)$ ו- $\vec{g}_0(b) = \vec{g}_1(b)$, וקיימת $\vec{H}(t, s)$, $a \leq t \leq b$ ו- $0 \leq s \leq 1$ רציף כך ש-

$$\vec{H}(t, 0) = \vec{g}_0(t)$$

$$\vec{H}(t, 1) = \vec{g}_1(t)$$

והקצוות תמיד זהים - לכל s מתקיים:

$$\vec{H}(a, s) = \vec{g}_0(a)$$

$$\vec{H}(b, s) = \vec{g}_0(b)$$

הערה 5.14 וערכי $\vec{H}(t, s)$ בתחום שלנו.

דוגמאות

- טבעת לא פשוטת קשר ב- \mathbb{R}^2 - לא ניתן לבנות העתקה כזו כי יש חור באמצע.
- קליפה כדורית ב- \mathbb{R}^3
- זהו תחום פשוט קשר, למרות שלכאורה יש שם "חור".

• חרוז ב- \mathbb{R}^3 - כדור עם חור. זה אינו תחום פשוט קשר משום שעבור שני עקומים בקצוות שונים את החור, לא ניתן למצוא העתקה כזו.

- \mathbb{R}^3 פחות ציר z - אינו פשוט קשר, מאותה הסיבה.

משפט 5.15 נתון שדה וקטורי $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ב- C^1 . אז הטכנות הבאות שקולות:

1. לכל עקום סגור C בקבוצה D , $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$
2. לכל שני עקומים c_1, c_2 בקבוצה D , בעלי קבצוות משותפים, $\int_{c_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{c_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
3. קיימת פונקציה פוטנציאל סלארית - $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $\vec{F} = \text{grad}(f)$
כל אחד מאלה גורר את:
4. $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$

אם בנוסף, D הוא גם פשוט קשר, אז (4) גורר את (1), (2), (3).

הוכחה: (1) \Leftrightarrow (2) - כמו בשני ממדים, אחרי נוסחאת גרין. נקח את $c = c_1 \cup (-c_2)$, אזי הוא עקום סגור ואינטגרל עליו מתאפס.

ולחיפך, אם נתון שהאינטגרל על מסלול סגור הוא אפס, אז נחתוך אותו ולכן האינטגרל על ענף אחד שווה לאינטגרל על ענף שני.

(2) \Rightarrow (3) - נגדיר

$$f(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

לפי (2), האינטגרל הזה אינו תלוי בבחירת המסלול, בתוך D . כצעד ראשון, ננניח שאפשר לקשר בין (a, b, c) ל- (x, y, z) על ידי קטעים מקבילים לצירים. למשל, קודם לאורך ציר x , אחר כך לאורך ציר y , ולבסוף לאורך ציר z .

$$f(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$$II : \begin{cases} x = x \\ y = t \\ z = c \end{cases} \quad I : \begin{cases} x = t \\ y = a \\ z = c \end{cases} \quad \text{עבור הקטע השני:}$$

$$= \int_{t=a}^x F_1(t, b, c) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_1 dt + \int_{t=b}^y F_2(x, t, c) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_1 dt + \int_{t=c}^z F_3(x, y, t) \underbrace{\frac{dz}{dt}}_1 dt$$

נגזור -

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 0 + F_3(x, y, z)$$

כדי לחשב את $\frac{\partial f}{\partial y}$, נבצע את האינטגרציה מ- $\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ על מסלול אחר - שמורכב משלושה ישרים שהאחרון שבהם מקביל ל- y . ונקבל $\frac{df}{dy} = F_2$ ועבור הנגזרת השלישית - $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$. צעד שני - אם המסלולים הנ"ל חורגים מהתחום D , מפרקים את המסלול ל-2: נסביב (x, y, z) נקח כדור ובו נבחר נקודה קבועה (x_z, y_1, z_1) ונרשום -

$$f = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{(a,b,c)}^{(x_1, y_1, z_1)} F \cdot d\vec{s}}_{\text{Constant}} + \underbrace{\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x,y,z)} F \cdot d\vec{s}}_{\text{as before}}$$

לכן, גם כן, $\nabla f = \vec{F}$.

הערה 5.16 $f(x, y, z)$ נקבע עד כדי קבוע. כי אם יש שניים - $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)$ אזי $\Delta f_1 = \vec{F} = \Delta f_2$

←

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_1 - \frac{\partial}{\partial y} f_2 &= 0 \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (3) - נתונה פונקציה פוטנציאל f המקיימת $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_A^B \vec{\nabla} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \int_{t=a}^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (x(b) - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y} (y(b) - y(a)) + \frac{\partial f}{\partial z} (z(b) - z(a)) \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (4) : נתון, $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, אז $\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

(4) \Rightarrow (2) בתחום פשוט קשר.

נתון $\nabla \times F = 0$, אי אפשר להשתמש בסטוקס משום שלא כל עקום ניתן לסגור על ידי משטח. נתונים שני עקומים בעלי קצוות משותפים. נתון שאנו בתחום פשוט קשר, ולכן ניתן למצוא עיוות רציף ביניהם -

$$H(t, s) = (h_1(t, s), h_2(t, s), h_3(t, s))$$

כך שעבור $s = 0$, $H(t, 0)$ מתאר את c_0 ו- $H(t, 1)$ מתאר את c_1 .

נחשב את $I(s) = \int_{c_s} \vec{F} \cdot ds$, אשר מתאים לתיאור הפרמטרי - כאשר $a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1$

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_{c_s} \vec{F} ds = \int_a^b \left[F_1(h_1(t, s), \dots) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=\frac{\partial h_1}{\partial t}} + F_2(\dots) \frac{dy}{dt} + F_4(\dots) \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^3 \left[F_j(h_1(t, s), \dots) \frac{\partial h_j(t, s)}{\partial t} \right] dt \end{aligned}$$

כדי להראות שהביטוי לא תלוי ב- s , נגזור לפי s :

$$\frac{\partial I(s)}{\partial s} = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial s} \right] \frac{\partial^2 h_j}{\partial s \partial t} + F_j(\dots) \frac{\partial^2 h_j}{\partial s \partial t} \right] dt$$

תחת ההנחה ש- $H(t, s)$ בעל נגזרות רציפות מסדר שני:

$$\begin{aligned} &= \int_{t=a}^b \sum_{j=1}^3 F_j(h_1(t, s), \dots) \frac{\partial^2 h_j}{\partial s \partial t} dt = \int_{t=a}^b \sum F_j(\dots) \frac{\partial^2 h_j}{\partial t \partial s} dt \\ &= \sum_{j=1}^3 F_j(\dots) \frac{\partial h_j}{\partial s} \Big|_{t=a}^b - \int_{t=a}^b \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \frac{\partial h_j(t, s)}{\partial s} dt \end{aligned}$$

■

דוגמאת נגד בתחום פשוט קשר, $\text{rot}(F) = \vec{0}$, מבטיח שהשדה משמר. בלי הנחה על פשוטות קשר, זה לא נכון.

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

בתחום $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$, כל המרחב למעט ציר z .

$$\begin{aligned} \text{rot}(F) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0i + 0j + \left[\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)_y \right] \hat{k} \end{aligned}$$

על מעגל היחידה - $z = 0, x^2 + y^2 = 1$

$$\int \vec{F} d\vec{s} = \int \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi \neq 0$$

5.3.1 דיורגנץ ורוטור

בהוכחה ראיתי כי בתחום פשוט קשר, $\text{rot}F = 0$, גורר שדה משמר ולכן $\vec{F} = \text{grad}(f)$ זה מקביל לזהות -

$$\text{rot}(\text{grad}f) \equiv 0$$

ראינו גם כי $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = \text{div}(\text{rot}(G)) = 0$ (כי זו מכפלה מעורבת).

נשאלת השאלה ההפוכה. נכון כי $\text{div}(\vec{F}) = 0$ האם קיים \vec{G} כך ש- $\vec{F} = \text{rot}\vec{G}$. התשובה היא כן. **הוכחה:** נתון $F = (F_1, F_2, F_3)$ כך ש- $\nabla \cdot F = 0$. נבנה G מתאים:

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt$$

$$G_3(x, y, z) = 0$$

$$(\nabla \times G = \begin{vmatrix} i & j & l \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} - \text{נזכיר})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 0 - (-F_1(x, y, z)) = F_1(x, y, z) \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= F_2(x, y, z) - 0 = F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= - \int_0^z \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, t) dt - \left(\int_0^z \frac{\partial F_2(x, y, t)}{\partial y} dt - F_3(x, y, 0) \right) \\ &= - \int_0^z \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)}_{=\nabla \times F = 0} dt + \int_0^z \frac{\partial F_3(x, y, t)}{\partial z} dt + F_3(x, y, 0) \\ &= F_3(x, y, t) \Big|_0^z + F_3(x, y, 0) = F_3(x, y, z) \end{aligned}$$

לסיכום - מצאנו ש- $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$
נניח שיש עוד פתרונות G לבעיה.

$$\begin{aligned} \text{rot}(G_1) &= \vec{F} \\ \text{rot}(G_2) &= \vec{F} \end{aligned}$$

נחסיר ביניהם ונקבל -

$$\text{rot}(G_1 - G_2) = 0$$

■ ולכן $G_1 - G_2 = \text{grad}(f)$, כלומר, הפתרון הוא הפתרון שנתנו עד כדי גרדיאנט של פונקציה כלשהי.

5.4 משפט גאוס (משפט הדיברגנץ)

משפט 5.17 יהא $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, כך שכל קו מקביל לאחד הצירים חותך אותו לכל היותר פעמיים:

$$\begin{aligned} g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z) \\ h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z) \\ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \end{aligned}$$

(למשל, קבוצה קמורה)
נבחר את האוריינטציה של השפה $\partial\Omega$, אוריינטציה המתאימה לוקטור הפונה החוצה.
נתון שדה וקטורי $\vec{F}(x, y, z) \in C^1$, אז

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(F) dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

הוכחה:

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$$

ולכן,

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

והאינטגרל שלנו -

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot \hat{n} dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} [P(\hat{i} \cdot \hat{n}) + Q(\hat{j} \cdot \hat{n}) + R(\hat{k} \cdot \hat{n})] dS \end{aligned}$$

נוכיח ש- $\iint_{\partial\Omega} R(\hat{k} \cdot \hat{n}) dS = \iiint_{\Omega} R_z dV$, וכנ"ל עבור P, Q
 לפי ההנחה, אפשר לכתוב -

$$\Omega : \{(x, y, z) \mid f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

כלומר, Ω חסום על ידי שני משטחים (ואולי גם מישורים מאונכים ביניהם).
 נחשב תחילה את אגף שמאל -

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} R_z dV &= \iint_{D = \text{Projection on XY-Plane}} \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))] dx dy \end{aligned}$$

כאשר D הוא ההיטל על מישור xy .
 באגף ימין

$$\iint_{\partial\Omega} R(\hat{k} \cdot \hat{n}) dS$$

כאשר \hat{n} הוא נורמל יחידה כלפי חוץ. אם יש משטח אנכי בשפה של Ω , אז שם $\hat{k} \cdot \hat{n} = 0$, והוא לא מוסיף דבר לאינטגרל, אז צריך להסתכל רק על המשטחה העליונה והמשטח התחתון.
 נרשום את משוואת המשטח העליון כך שהנורמל יהיה כלפי מעלה.

$$z - f_2(x, y) = 0 \iff \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f_2(u, v) \end{cases}$$

$$\hat{n} = \frac{-\frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{j} + 1\hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \hat{n} \cdot \hat{k} > 0$$

נמצא את הנורמל בתיאור הפרמטרי -

$$\begin{aligned} N = T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{j} + 1\hat{k} \end{aligned}$$

אלמנט נפח הוא

$$dS = \|T_u \times T_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

במשול התחתון, כנ"ל עם f_1 -

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \hat{j} - 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \hat{n} \cdot k < 0$$

נמשך בפיתוח של אגף ימין -

$$\iint_{\partial\Omega} R(k \cdot \hat{n}) dS =$$

$$= \iint_{\substack{\text{Up} \\ (x,y) \in D}} \left[R(x,y, f_2(x,y)) \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}_{k \cdot \hat{n}}} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}_{dS} \right] dxdy$$

$$+ \iint_{\substack{\text{Down} \\ (x,y) \in D}} \left[R(x,y, f_1(x,y)) \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1} \right] dxdy$$

$$= \iint_{(x,y) \in D} [R(x,y, f_2(x,y)) - R(x,y, f_1(x,y))] dxdy$$

וזהו בדיוק הביטוי שהיה לנו באגף שמאל.
מבצעים תהליך זה עבור P, Q , ונחבר.

5.4.1 הרחבה למשפט

אותה טענה בתוקף לכל גוף שאפשר לפרקו למספר סופי של תת-גופים בעלי ייצוג כמו למעלה.
(מחלקים את הגוף למספר סופי של גופים כנ"ל. על כל משטח המפריד בין גופים סוכמים פעמיים - פעם אחת עם סימון פלוס, ופעם שני עם מינוס, ולכן הם מתבטלים. קיבלנו מספר סופי של גופים שעל כל אחת מהם ניתן להכיל את המשפט בנפרד - ולסכום)
לא ברור עם המשפט נכון עבור גוף שניתן לחלקו לאינסוף חלקים.
לדוגמה - טורוס ניתן לחלק לארבע רבעים שכל אחד מהם עונה לתנאי המשפט.

5.4.2 עוד על דיברגנץ

$$\min \operatorname{div}(F) \cdot V(\Omega) \leq \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dV \leq \max \operatorname{div}(F) \cdot V(\Omega)$$

ולפי משפט גאוס- זה שווה ל- $\iint_{\partial\Omega} F dS$. נחלק בנפח ונקבל

$$\min \operatorname{div}(F) \leq \frac{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)} \leq \max(\operatorname{div}(F))$$

כל הפונקציות רציפות לכן $\frac{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)}$ מתקבל על ידי דיברגנץ של F . כלומר, קיימת $p \in \Omega$ כך-

$$\operatorname{div}(F)|_p = \frac{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V(\Omega)}$$

נבחר נקודה p קבועה, ונקח מסביבה ותחומים Ω הולכים ומתכווצים אל הנקודה. אזי, בגבול מתבל

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{S}}{V(\Omega)} = \operatorname{div} F(p) \quad (2)$$

כלומר, דיברגנץ של F הוא שטף (דרך השפה) ליחידת נפח. הגדרנו -

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

כלומר, הפירוק של הדיברגנץ הוא מאוד שרירותי. אם נקבע מערכת צירים אחרת - אז ההגדרה של הדיברגנץ תשתנה. זו הגדרה התלויה במערכת הצירים. אפשר להסתכל על נוסחא 2 כעל הגדרה בלתי-תלויה במערכת-צירים של הדיברגנץ.

כשהגדרנו דיברגנץ, לקחנו תיבה שמימדיה $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, חישבנו את השטף דרך שפת הקוביה ומצאנו שהוא שווה ל-

$$\begin{aligned} \phi &\simeq \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \operatorname{div}(F) \cdot \Delta V \end{aligned}$$

נקח תחום Ω כלשהו, בעל נפח, נחלק ונכסה על ידי קוביות קטנות. השטף דרך קוביה

$$\phi_{\text{cube}} = \operatorname{div}(F) \Delta V$$

ועם נסכום עליהם נקבל

$$\sum \phi_{\text{cube}} = \sum \operatorname{div}(F) \Delta V$$

כאשר כל כל משטח חיתוך, השטף מבטל זה את זה, וקיבלנו שהשטף דרך השפה הפנימית שווה לסכימ על הדיברגנצים. ולכאורה, הוכחנו את משפט גאוס לכל תחום בעל נפח שהוא. אז

$$\sum \operatorname{div}(F) \Delta V \rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dV$$

אבל עבור אגף שמאל - זה לא ממש קרוב. אבל בכל קוביה, אין שום קשר בין הנורמל לקוביה לנורמל למשטח, ולכן אי אפשר לנמק למה השטף זהה. וגם אין שום קשר בין אלמנט השטח על גבי המשטח לאלמנט השטח על גבי הקוביה.

5.4.3 דוגמה למשפט גאוס

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ההשדה הוקטורי -

$$F = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

וגודלו -

$$\|F\| = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2}$$

נחשף שטף על פני שפת תחום של

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{s} = \iint \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & \vec{0} \in \Omega, \vec{0} \notin \partial\Omega \\ 0 & \vec{0} \notin \Omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F &= \operatorname{div} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right)_x + \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right)_y + \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right)_z \\
&= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + ()_y + ()_z \\
&= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{4/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{4/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{4/2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

\vec{F} בעל נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. לכן, אם 0 מוחץ ל- Ω ,

$$\iint F dS = \iiint \underbrace{\operatorname{div} F}_{=0} dV = 0$$

אם 0 פנימי ל- Ω , נוציא כדור ברדיוס ε מהקבוצה ונקבל -

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon$$

עבור הכדור הפנימי הנורמל "החוצה" מכיוון כלפי פנים.

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F dS = \iint_{\partial\Omega} F dS - \iint_{\partial B_\varepsilon} F dS$$

החלק הראשון, לפי גאוס

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F dS = \iiint_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} F dV = 0$$

אז

$$\iint_{\partial\Omega} f dS = \iint_{\partial B_\varepsilon} F dS$$

וזה גוף פשוט, אז נחשב אותו מפורשות -

$$\iint_{\partial B_\varepsilon} F dS = \iint \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \hat{n} dS$$

נורמל היחידה על פני כדור, כיוונו r ומטעמי נירמול - $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

$$\begin{aligned}
&= \iint \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^4} dS = \iint \frac{\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|^4} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} \iint_{B_\varepsilon} dS = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} 4\pi\varepsilon^2 \\
&\equiv 4\pi
\end{aligned}$$

נשים לב שניתן להוציא כל כדור שמכסה את הנקודה $(0, 0, 0)$ והוא מספיק קטן כדי לא לחרוג משפת התחום.

5.4.4 עקרון ארכימדס

כאשר טובלים גוף בנוזל, סכום הכוחות שהנוזל מפעיל על הגוף, שווה למשקל הנוזל שהוא תופס.

גוף Ω טובל במים. לחץ האוויר החיצוני הוא $p_0(-\hat{k})$. צפיפות הנוזל היא ρ .

נמצא את הלחץ כלפי מטה בכל נקודה על שפת הגוף, $\partial\Omega$, ביחידת שטח A

$$p = p_0 + g \cdot \overbrace{\frac{\rho A(-z)}{A}}^{\text{Volume}}$$

$$\vec{F} = -(p_0 - \rho g z) \hat{k} + 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

החלפנו סימן כי אנחנו רוצים את הלחץ כלפי מעלה.

$$\begin{aligned} \sum F_{up} &= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}(F) dV \\ &= \iiint_{\Omega} (0 + 0 + \rho g) dV \\ &= \rho g \iiint_{\Omega} dV = g\rho V(\Omega) \end{aligned}$$

5.5 להשלים, 3.2

5.6 נוסחאות גרין

נחשב ביטויים מהצורה $\iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} dS$, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, בעלי נגזרות חלקיות חציפות מסדר שתיים לפחות. כל וקטור יחידה אפשר לכתוב כ- $\hat{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ כאשר (α, β, γ) הן הזוויות מהוקטור אל כל אחד מהצירים.

נקח גוף Ω ושפתו, $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} dS &= \iint_{\partial\Omega} u (v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} (uv_x, uv_y, uv_z) \underbrace{(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)}_{\hat{n}} dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} (uv_x, uv_y, uv_z) d\vec{S} \\ &= \iint_{\partial\Omega} \underbrace{u \vec{\nabla} v}_{=\vec{F}} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

נפעיל את נוסחאת גאוס עבור $\vec{F} = u \vec{\nabla} v$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \underbrace{\nabla (u \vec{\nabla} v)}_{\nabla (uv_x, uv_y, uv_z)} dV \\ \nabla (uv_x, uv_y, uv_z) &= (uv_x)_x + (uv_y)_y + (uv_z)_z \\ &= u \left(\underbrace{v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}}_{\Delta\text{-Laplace Operator}} \right) + (u_x v_x + u_y v_y + v_z v_z) \\ &= u\Delta v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \end{aligned}$$

כאשר Δ הוא אופרטור לפלאס, או לפלסיאן. לסיכום -

$$\boxed{\iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} dS = \iiint_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dV} \quad (3)$$

הגדרה 5.18 לפלסיאן -

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$$

היא נוסחאת גרין הראשונה.

נרשום כנ"ל $u \leftrightarrow v$ נחסים ונקבל את נוסחאת גרין השניה

$$\boxed{\iiint (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint \left(u \frac{dv}{\partial \hat{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) dS} \quad (4)$$

פונקציה הרמונית

הגדרה 5.19 פונקציה $u(x, y, z)$ נקראת הרמונית בתחום אם $\Delta u \equiv 0$ בתחום

הערה 5.20 הערה מתורנת הפונקציות - $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ אנליטית \iff מתקיימות משוואות קושי-רימאן $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$.
 בפרט, נובע כי $u(x, y), v(x, y)$ הרמוניות, כי $u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y$, אזי $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

מסקנות מנוסחאות גרין

מסקנה 5.21 אם u הרמוני, אז בנוסחאת גרין,

$$\iiint (v\Delta u + \nabla u \nabla v) dV = \iint f \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$$

כאשר $v \equiv 1$, אזי נקבל

$$0 = \iint \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$$

כלומר, ה"שטף" של פונקציה הרמונית הוא אפס על כל משטח.

נקח u הרמוני, ונקח $v \equiv u$. מנוסחא 3, נשאר

$$\iiint_{\Omega} \|\vec{\nabla} u\|^2 dV = \iint_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS \quad (5)$$

משפט 5.22 אם $u(x, y, z)$ הרמונית, והיא מתאפסת על כל השפה $\partial \Omega$, אז $u(x, y, z) \equiv 0$ בכל התחום.

הוכחה: כי במשוואה 5, אם אגף ימין מתאפס, אז באינטגרל שמאל, $\iiint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dV = 0$, אז $\nabla u \equiv 0$ בכל התחום (אינטגרל על גודל חיובי ממש). לכן, $u = \text{const}$ בתחום, ומכיוון שבנקודות שפה הוא אפס, אז הוא בכל התחום. ■

הערה 5.23 נתמך קצת את משפט גאוס

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \vec{F} dV &= \iint_{\partial \Omega} \vec{F} \underbrace{d\vec{S}}_{\hat{n} dS} \\ &= \iint (\vec{F} \hat{n}) dS \end{aligned}$$

מסקנה 5.24 אם $u(x, y, z), w(x, y, z)$ הרמוניות, ב- Ω , ו- $u \equiv w$ על השפה $\partial \Omega$, אז $u \equiv w$ בכל התחום.

הוכחה: נסמן $h = u - w$, אז $\Delta h = \Delta u - \Delta w = 0$, ולכן h הרמונית. $h \equiv 0$ על השפה, ולכן, לפי משפט 5.22, $h \equiv 0$ בכל Ω , ולכן $u \equiv w$ בכל Ω . ■

5.6.1 איך לצמצם מ-3 מימדים ל-2

לכל נוסחא שנכתבה פה (נוסחאות 3 ו-4) עם אינטגרל משולש משמאל ואינטגרל כפול מימין, ניתן למצוא נוסחא מקבילה עם אינטגרל כפול מימין ואינטגרל משמאל.
 נתון תחום D ב- \mathbb{R}^2 , ונרחיב אותו ל- \mathbb{R}^3 על ידי גליל בגובה 1.

$$\Omega = D \times [0, 1]$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$$

ב- D נתון $\vec{F}(x, y) = (F_1, F_2)$, ונרחיב אותו ל- Ω על ידי $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$, עבור Ω ו- \vec{F} אלה,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dV = \iint_{\partial\Omega} F dS$$

$$\int_{z=0}^1 \iint_{(x,y) \in D} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + 0 \right) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (F_1, F_2, 0) \cdot \hat{n} dS$$

התחום מורכב מבסיס עליון, בסיס תחתון ומעטפת. על בסיס עליון ותחתון, הנורמל הוא $\hat{n} = \pm \hat{k}$, ולכן $(F_1, F_2, 0) \cdot \hat{k} = 0$.
 על העטפת, הנורמל מורכב מרכיב $\hat{n} = (n_1, n_2, 0)$ (כי הוא אופקי...). אלמנט שטח על הגליל, $dS = ds \cdot dz$ (אלמנט קשת כפול אלמנט גובה) מאגף ימין, נקבל

$$= \int_{z=0}^1 \int_{\partial D} (F_1(x, y)n_1 + F_2(x, y)n_2 + 0) = ds \cdot dz$$

נבצע אינטגרציה. כל הביטויים לא תלויים ב- z ולכן $\int_0^1 dz = 1$ וקיבלנו

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{F}(x, y)) dx dy = \int_{\partial D} \vec{F}(x, y) \cdot \hat{n} ds$$

fin.