אלגברה לינארית ב'

מרצה: שלומי ג'ילקי

30 במרץ 2009

רשימות אלו הוקלדו במהלך השיעורים של הקורס "אלגברה לינארית ב'" , במהלך סמסטר חורף 2008, בהרצאות מאת פרופסור שלומי ג'ילקי, ומפורסמת ברשותו.

הרשימות הוקלדו ע"י רונן אברבנאל (ronen@tx.technion.ac.il) ומפורסמת ב־www.technion.ac.il/~ronen. המחברת תתעדכן מעת לעת במיקום זה.

הרשימות עלולות לכלול טעויות, חוסרים ואי דיוקים, והשימוש בהם על אחריותכם בלבד. בפרט, היא אינה מכילה כלל שרטוטים ואיורים שצוירו על הלוח. בפרט, אין הפקולטה למתמטיקה או מי מטעמה אחראים על תוכן הרשימות.

הערות, הארות ותיקונים אתם מוזמנים לשלוח ל־(ronen@tx.technion.ac.il)

תוכן עניינים

1 צורות קנוניות . . . 2
1.1 חזרה . . . 2
1.1.1 אופרטורים המיוצגים על ידי מטריצות אלכסוניות . . . 2
1.2 פולינומים . . . 3
1.3 שילוש של אופרטורים . . . 5
1.3.1 T־אינוריאנטיות . . . 5
1.3.2 סכומים ישרים . . . 8
1.3.3 הטלות . . . 9
1.4 משפט הפירוק הראשוני . . . 11
1.4.1 מעל שדה סגור אלגברית . . . 12
1.5 צורת ג'ורדן . . . 13
1.5.1 מאפסים וחברים . . . 13
1.5.2 למות עזר . . . 14
1.5.3 עבור מטריצה נילפוטנטית . . . 16
1.5.4 עבור אופרטור כללי . . . 17
1.5.5 שימושים . . . 19
1.5.6 מציאת צורת ג'ורדן (במקרה הנילפוטנטי) . . . 21
2 מרחבי מכפלה פנימית . . . 21
2.1 מכפלת בסיסים . . . 24
2.1.1 דוגמאות . . . 26
2.2 אורתוגונליות . . . 27
2.2.1 דוגמאות . . . 27
2.3 בסיסים אורתוגונלי . . . 27
2.3.1 הטלות אורתוגונליות . . . 28
2.3.2 המרחב הדואלי . . . 31
2.3.3 דואליות במכפלה פנימית . . . 32
2.3.4 תכונות אופרטור צמוד . . . 35
2.4 איזומורפיזמים . . . 36
2.4.1 דוגמאות מחבורות ־ אופרטורים אוניטריים . . . 38
2.5 לכסון אורתונורמלי . . . 40
2.5.1 אופרטורים צמודים לעצמם . . . 41
2.5.2 הכללה לאופרטורים נורמליים . . . 42

2.5.3 המשפט הספקטרלי 43
3 תבניות בי־לינאריות 44
3.0.4 שינוי בסיס 45
3.1 תבניות סימטריות 46
3.2 תבניות אנטיסימטריות 50
3.3 חבורות של תבניות 52
3.3.1 בשפה של מטריצות 52

1 צורות קנוניות

1.1 חזרה

F,K שדה. ($\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$).
שדה סדור אלגברית - לכל פולינום עם מקדמים ממשיים בשדה יש שורש ($\mathbb{C}$)
V מרחב וקטורי מעל שדה. לרוב נדבר על שדות סופיים $\dim(v) < \infty$.
חבורה אבלית - חבורה עם כל התכונות ה"רגילות" של החיבור והכפל)
$V = (v, +, \cdot)$. הוא ממימד סופי אם יש בסיססופי $\{v_1, ..., v_n\}$ קבוצה פורשת.
$T : V \to W$ העתקה לינארית.
$T : V \to V$ אופרטור לינארי ממרחב לעצמו.
T לינארית אמ"מ היא משמרת חיבור וכפל בסקאלר.
ניתן לייצג העתקות לינאריות על ידי מטריצות
בהנתן בסיסB של V, $[T]_B$ מטריצה מייצגת.
רוצים למצוא מטריצה מייצגת "פשוטה" ככל האפשר. למשל - אלכסונית (אפסים מלבד האלכסון) או משולשית (אפסים מתחת לאלכסון). או מטריצת בלוקים אלכסונית.

1.1.1 אופורטורים המיוצגים על ידי מטריצות אלכסוניות

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל F, ויהי T אופרטור על V. **ערך עצמי** של T הוא סקלר $c \in F$ עבורו קיים וקטור $0 \neq \alpha \in V$ כך ש־$T(\alpha) = c\alpha$.
אם c ערך עצמי של T, אז

1. $\alpha \in V$ עבורו $T(\alpha) = c\alpha$ נקרא וקטור עצמי המשוייך ל־c. (0 הוא וקטור עצמי של כל ערך עצמי)
2. הקבוצה $\{\alpha \in V | T(\alpha) = c\alpha\}$ נקראת המרחב העצמי של T המשוייך לערך העצמי C. זהו תת־מרחב של V (נובע מההגדרה של העתקה לינארית)

משפט 1.2 יהי T אופרטור לינארי על מרחב וקטורי V ממימד סופי, ויהי $c \in F$. הטענות הבאות שקולות:

1. c ערך עצמי של T
2. האופרטור $T - cI$ סינגולרי (אינו הפיך)
3. $\det(T - cI) = 0$

A, B מטריצות המייצגות את T, אז $A = P^{-1}BP$ עבור P הפיכה כלשהי. ואז $\det(A) = \det(B)$. לכן ניתן להגדיר דטרמיננטה של אופרטור.)

הגדרה 1.3 הפולינום $\det(xI - T)$ במשתנה x נקרא **הפולינום האופייני של** T. זהו פולינום ממעלה $\dim(V)$.

מסקנה 1.4 הערכים העצמיים של $T : V \to V$ $\dim(V) < \infty$ הם בדיוק שורשי הפולינום האופייני של T.

הגדרה 1.5 יהי T אופרטור על V. $\dim(V) < \infty$. נאמר כי T־**לכסין** (ניתן ללכסון) אם קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים של T.

(בהנתן בסיס כנ"ל, $B = \{v_1, .., v_n\}$, עם $T(v_i) = c_i v_i$, ברור ש־ $[T]_B = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$)

משפט 1.6 יהי V ,$T:V\to V$ ממימד סופי. יהיו $c_1,..,c_k$ הערכים העצמיים <u>השונים</u> של T, ויהיו המרחבים העצמיים $W_i=\ker(T-c_iI)$ המרחבים העצמיים. הטענות הבאות שקולות:

1. T לכסין

2. הפולינום האופייני של T הוא מכפלה $\prod_{i=1}^{k}(x-c_i)^{d_i}$ כאשר $d_i=\dim W_i$.

3. $\sum_{i=1}^{k}\dim W_1=\dim V$.

הוכחה: $2\to1$ הוסבר בע"פ.
ב־2, סכום המעלות הוא המימד של V, וזה גורר את 3.
נראה ש־$1\Rightarrow3$.
נקודת מפתח ב־$1\Rightarrow3$ (ולכן של המשפט) היא הבאה:
נניח כי $\beta_i\in W_i$כך ש־$\sum_{i=1}^{k}\beta_i=0$. אז $\beta_i=0$ לכל i.
אכן, לכל פולינום $f\in F[x]$ יש לנו $0=f(T)(0)$ (אופרטור לינארי על אפס)

$$f(T)\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f(T)\beta_i$$

ו־$f(T)\beta_i=f(c_i)\beta_i$ ולכן

$$=\sum_{i=1}^{k}f(c_i)\beta_i$$

לכן, אם נבחר פולינומים $f_1,..,f_k$ כך ש־$f_i(c_i)=\delta_{ij}$ אז נקבל ש־$f_i(T)(0)=\beta_i$ לכל i. ($\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$)

נראה שאפשר לבנות כאלה פולינומים. נבנה למשל את f_1

$$f_1(x)=\frac{(x-c_2)(x-c_3)...(x-c_k)}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)...(c_1-c_k)}$$

ניתן לבנות f_i כזה עבור כל c_j.

$$f_i(x)=\frac{(x-c_1)...\widehat{(x-c_i)}...(x-c_k)}{(c_i-c_1)(c_i-c_2)..(c_i\hat{-}c_i)..(c_i-c_k)}$$

■

ניסוח מטריציוני שקול: תהי $A\in\mathrm{mat}_n(F)$ ויהיו $c_1,...,c_k\in F$ הערכים העצמיים שלA
יהיW_i מרחב הפתרונות של $(A-c_iI)x=0$ ויהי B_i בסיס מסודר של W_i. נגדיר מטריצה $P=(B_1,..,B_k)$ שעמודותיה הן הוקטורים ב־$B_1,...,B_k$.
אז המטריצה A דומה מעל F למטריצה אלכסונית (קיים P הפיך.. וכו') אם ורק אם P ריבועית. אם P ריבועית היא הפיכה ו־$P^{-1}AP$ אלכסונית.

1.2 פולינומים

יהי $T:V\to V$, $\dim V=n<\infty$.
נתבונן באוסף הפולינומים ב־$F[X]$, המאפסים את T'כלומר, $p\in F[x]$ עבורים $P(T)=0$.

1. אם $p(T)=q(T)=0$ אז גם $(p+q)(T)=0$

2. אם $p(T)=q(T)$ ו־$q(T)\in F[x]$ אז גם $(pq)(T)=0$.
 אכן, $(pq)(T)=p(T)\circ q(T)=0$

3. קיים $0 \neq p \in F[x]$ כך ש־$p(T) = 0$.

אכן, האופרטורים $I, T, T^2, .., T^{n^2}$ מרכיבים קבוצה בת $n^2 + 1$ איברים במרחב הוקטורי $\mathrm{End}(V)$ (המרחב של כל העתקות מ־V ל־V $= \mathrm{Hom}(V, V)$). מכיוון ש־$\dim \mathrm{End}(V) = n^2$, הרי ש־$I, T, T^2, .., T^{n^2}$ תלויים לינארית.

כלומר, קיימים סקלרים, $c_1, .., c_{n^2+1}$, לא כולם שווים ל־0, כך ש־

$$c_0 I + c_1 T + .. + c_{n^2+1} T^{2^2} = 0$$

לכן עבור

$$0 \neq p = c_0 + c_1 x + .. + c_{n^2} x^{n^2} \in F[x]$$

מתקיים $p(T) = 0$

הגדרה 1.7 יהי $T : V \to V$, $\dim V < \infty$. הפולינום המתוקן (מקדם עליון הוא 1) בעל הדרגה הקטנה ביותר המאפס את T, נקרא **הפולינום המינימלי של** T.

הגדרה 1.8 $f \in F[x]$. f **מאפס את** T $\iff f(T) = 0$

למה 1.9 אם $q(T) = 0$, אז הפולינום המינימלי p של T מחלק את q.

הוכחה: נרשום

$$q = pa + b$$

כאשר $b = 0$ או $\deg b < \deg p$. (a, p, b, q פולינומים).

נציב את T ־ $0 = q(T) = p(T)a + b(T) = 0a + b(T)$

לכן b מאפס את T. לא יתכן ש־$\deg b < \deg p$ (p מינימלי), לכן בהכרח, $b = 0$ ו־$q = pa$. כלומר ־ p מחלק את q. ∎

דוגמא: $T = I : V \to V$ ־ המינימלי ־ $x - 1$. האופייני ־ $(x-1)^{\dim V}$

באופן אנלוגי עבור מטריצות: למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

תרגיל: להוכיח $f(P^{-1}AP) = P^{-1} f(A) P$

משפט 1.10 יהי $T : V \to V$, $\dim V = n < \infty$ (או תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(f)$).

לפולינום האופייני ולפולינום המינימלי של T (של A) יש אותם שורשים (יתכן מריבויים שונים).

הוכחה: יהי P הפולינום המינימלי של T, ונניח שיש לו שורש $P(c) = 0$ עבור $c \in F$.

צריך להוכיח כי c ערך עצמי של T. אכן, $p = (x - c)\, q$ ו־$q(T) \neq 0$ (כי $\deg q < \deg p$, ו־p הוא המינימלי שמאפס)

יהי $\beta \in V$ עבורו $q(T)(\beta) \neq 0$ ונגדיר $\alpha := q(T)\beta$, $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= P(T)(\beta) = (T - cI)\, q(T)(\beta) \\ &= (T - cI)(\alpha) \end{aligned}$$

ולכן $T(\alpha) = c\alpha$ ו־c ערך עצמי של T.

ובכיוון ההפוך, נניח ש־c ערך עצמי של T, ונניח כי $T(\alpha) = c\alpha$ עם $\alpha \neq 0$.

אז $0 = p(T)(\alpha) = p(c)\,\alpha \iff p(c) = 0$. ∎

דוגמא: יהי T אופרטור לכסין, ויהיו $c_1, .., c_k$ הערכים העצמיים השונים שלו. הפולינום המינימלי הוא

$$(x - c_1)(x - c_1) \cdots (x - c_k)$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ הפולינום האופייני הוא $x^2 + 1$, אין לו שורשים ב־$\mathbb{R}$.

נציב את $A^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

משפט 1.11 (משפט קיילי המילטון)
יהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$. אם f הפולינום האופייני של T, אז $f(T)=0$. במילים אחרות: הפולינום המינימלי של T מחלק את הפולינום האופייני של T.

דוגמא: נראה נכונות עבור $\dim V=2$. יהי f הפולינום האופייני של T, יודעים כי $f(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+\det(A)$ כאשר A מטריצה מייצגת כלשהי של T. ביחס לבסיס המסודר (α_1,α_2). (כלומר, $T(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{2}A_{ji}\alpha_j$, $i=1,2$)
אז נקבל

$$f(T)=T^2-(A_{11}+A_{22})\,T+(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})\,I$$

נגדיר מטריצה

$$B=\begin{pmatrix}T-A_{11}I & -A_{21}I\\ -A_{12}I & T-A_{22}I\end{pmatrix}\in \operatorname{Mat}_2\left(F[T]\right)$$

אז $f(T)=\det(B)$.
לכן, מספיק להראות ש-$\det B=0$.
יש לנו כי

$$\begin{aligned}B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}T-A_{11}I & -A_{21}I\\ -A_{12}I & T-A_{22}I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(T-A_{11}I)\,\alpha_1-A_{21}\alpha_2\\ -A_{12}\alpha_1+(T-A_{22}I)\,A_2\end{pmatrix}\\ &=^{\star} 0\end{aligned}$$

לכן, אם $\tilde{B}=\mathbf{Adj}(B)=\begin{pmatrix}T-A_{22}I & A_{21}I\\ A_{12}I & T-A_{11}I\end{pmatrix}$,
($\mathbf{Adj}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$) אז $\det B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=0=\tilde{B}B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\iff \det B=0$.
את ההוכחה במקרה הכללי ניתן למצוא בספר. בהמשך הקורס, נוכיח את המשפט בצורה שונה.

1.3 שילוש של אופרטורים

__המטרה:__ להוכיח שמעל שדה סגור אלגברית (למשל $\mathbb{C}$), כל אופרטור $T:V\to V$, $\dim V<\infty$, ניתן לשילוש.

1.3.1 T-אינווריאנטיות

הגדרה 1.12 יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. תת מרחב $W\subseteq V$ נקרא "**T-אינווריאנטי**" (או, אינווריאנטי תחת T, $T-\text{invariant}$) אם $T(W)\subseteq W$.

דוגמאות:

1. (1) 0, V, $\Im(T)$, $\ker(T)$ הם T-אינוריאנטים.
   $\ker T$: $v\in\ker T$ אז $T(v)=0\in\ker T$.
   $\Im(T)$: $T(v)\in\Im T$, אז $T(T(v))\in\Im T$.
2. בהעתקת הזהות $I:V\to V$, כל תת מרחב הוא אינוריאנטי
3. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $0,\mathbb{R}^2$ הם תתי המרחבים האינוריאנטים היחידים.
4. וקטור עצמי תמיד מגדיר תת מרחב אינוריאנטי ממימד אחד. (גורר את 3)

5. יהי $S:V\to V$ אופרטור לינארי המתחלף עם $T:V\to V$ ($ST=TS$). אז, $\mathrm{Im}(S)$ ו־$\ker(S)$ הם T־אינוריאנטים. (S יכול להיות פולינום ב־T).

הוכחה: יהי $v\in\ker S$, $S(T(v))=T(S(V))=T(0)=0$, לכן $T(v)\in\ker S$.

אם $S(v)\in\mathrm{Im}(S)$ אז $T(S(v))=S(T(v))\in\mathrm{Im}S$. ■

הערה 1.13 יהי $T:V\to V$, ו־$\dim V<\infty$, ויהי $W\subseteq V$ T־אינוריאנט.

אז יש ל־V בסיס לפיו T מיוצגת ע"י מטריצת בלוקים $\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$ כאשר B מטריצה המייצרת את האופרטור $T_{|W}W:\to W$.

למה 1.14 יהי $T:V\to V$, ו־$\dim V<\infty$. יהי $W\subseteq V$ T־אינוריאנט. אז, הפולינום האופייני (המינימלי) של $T_{|W}$ מחלק את הפולינום האופייני (מינימלי) של T.

הוכחה: לפי ההערה, נייצג את T ע"י מטריצת בלוקים $A=\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$,כאשר B מייצגת את $T_{|W}$. אז

$$\det(xI-A)=\det(xI-B)\det(xI-D)$$

כלומר, הפולינום האופייני של $T_{|V}$ הוא מכפלה של פולינום בפולינום האופייני של $T_{|W}$. ■

לגבי המינימלי, נשים לב, כי לכל k, $A^k=\begin{pmatrix}B^k&C_k\\0&D^k\end{pmatrix}$ עבור איזשהי מטריצה c_k. לכן, אם $f(A)=0$ עבור $f\in F[x]$, אז גם $f(B)=0$.

הגדרה 1.15 יהי $T:V\to V$, ויהי $W\subseteq V$ תת מרחב אינוריאנטי.

יהי $\alpha\in V$. **המוביל של** α**לתוך** W הוא קבוצת כל הפולינמים $S(\alpha,W)$ ע, עבורם $g(T)\alpha\in W$.

אם $W=0$, "המוביל של α" נקראה **המאפס** של α

למה 1.16 המוביל של α לתוך W סגור תחת חיבור. וסגור תחת כפל בפולינום כלשהו.

הוכחה: נניח ש־$f,g\in S(\alpha,W)$. אז

$$\begin{aligned}(f+g)(T)(\alpha)&=(f(T)+g(T))(\alpha)\\&=f(T)(\alpha)+g(T)(\alpha)\in W\end{aligned}$$

כעת, נניח כי $f\in S(\alpha,W)$ ו־$g\in F[x]$ כלשהו.

$$\begin{aligned}(fg)(T)(\alpha)&=(f(T)g(T))(\alpha)\\&=(g(T)f(T))(\alpha)\\&=g(T)\left(\underbrace{f(T)(\alpha)}_{\in W}\right)\in Wfh\end{aligned}$$

כי $g(T)(W)\subseteq W$. ■

$T:V\to V$. $W\subseteq V$, W T אינוריאנטי $\iff T(W)\subseteq W$.

$\alpha\in V$, $S(\alpha,W)\subseteq k[x]$ - המוביל של αלתוך W.

הגדרה 1.17 הפולינום המתוקן בעל הדרגה המינימלית ב־$S(\alpha,W)$ נקרא **המוביל של** α.

הערה 1.18 המוביל של α מחלק כל פולינום ב־$S(\alpha,W)$, בפרט - המוביל של α מחלק את הפולינום המינימלי של T.

למה 1.19 תהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$, עם פולינום מינימלי המתפרק למכפלה של גורמים לינאריים $p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$.
יהי $W\subsetneq V$, T-אינוריאנטי. אז קיים $\alpha\in V\setminus W$ כך ש-$(T-cI)(\alpha)\in W$ עבור איזשהו ע"ע c של T (במילים אחרות: המוביל של α לינארי).

הוכחה: יהי $\beta\in V\setminus W$. יהי g המוביל של β לתוך W. אז $g|p$. מאחר ו-$\beta\notin W$, g אינו קבוע. לכן $g=(x-c_1)^{e_1}\cdots(x-c_k)^{e_k}$ כאשר לפחות אחד ה-e_i-ים גדול ממש מ-0.
יהי j כך ש-$e_j>0$. אז קיים פולינום h כך ש- $g=(x-c_j)h$. מהגדרת g, $\alpha_i=h(T)(\beta)\notin W$.
אבל

$$(T-c_jI)(\alpha)=(T-c_jI)h(T)(\beta)=g(T)(\beta)\in W$$

מהגדרת g. ■

דוגמא: עבור $W=\{0\}\subsetneq V$, הלמה אומרת שקיים $\alpha_1\neq 0$ כך ש-$(T-cI)(\alpha_1)=0 \iff T\alpha_1=c\alpha_1$ כלומר α_1- וקטור עצמי.
$W=\operatorname{span}\{\alpha_1\}$. אז לפי הלמה, קיים $\alpha_2\notin\operatorname{span}\{\alpha_1\}$ כך ש-$(T-\tilde{c}I)(\alpha_2)=a\alpha_1$. כלומר, $T(\alpha_2)=\tilde{c}+a\alpha_1$.

משפט 1.20 תהי $T:V\to V$ ו-$\dim V<\infty$ מעל שדה F. T ניתנת לשילוש (קיים ל-V בסיס לפיו T מיוצגת על ידי מטריצה משולשית עליונה) אם ורק אם הפולינום המינימלי של T מתפרק למכפלה של גורמים לינארים מעל F.

הוכחה: אם T ניתנת לשילוש, אז קיים בסיס לפיו T מיוצגת על ידי מטריצה $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}$ אז האופיני של T הוא לכן $(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})$ כלומר, מתפרק לגורמים לינארים מעל F. לפי משפט קיילי־המילטון, הפולינום המינימלי של T מחלק את האופיני ולכן הוא גם מכפלה של גורמים לינארים.
בכיוון ההפוך: נפעיל את הלמה מספר פעמים. נתחיל עם $W=\{0\}$ ונקבל וקטור עצמי α_1.
אחר כך נפעיל את הלמה על $W_1=\operatorname{span}\{\alpha_1\}$ ונקבל α_2 עם $T(\alpha_2)=a_{11}\alpha_1+a_{22}\alpha_2$ וכך הלאה. ■

מסקנה 1.21 יהי F שדה סגור אלגברית (למשל, $F=\mathbb{C}$) אז כל מטריצה מסדר n על F, דומה למטריצה משולשת.

משפט 1.22 תהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$, T נתנת לליכסון $\iff$ הפולינום המינימלי של T מתפרק למכפלה של גורמים לינארים שונים.

הוכחה: ראינו שאם T לכסינה, אז הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים לינארים שונים.
בכיוון ההפוך - יהי W תת המרחב (T אינוריאנטי) של V הנפרש על ידי כל הוקטורים העצמיים של T. עלינו להראות ש-$V=W$.
נניח בשלילה ש-$W\subsetneq V$.
מהלמה הקודמת - קיים $\alpha\notin W$, וערך עצמי c_j של T, כך ש-$\beta=(T-c_j)(\alpha)\in W$.
מכיוון ש-$\beta\in W$, הרי ש-$\beta=\beta_1+\ldots+\beta_k$ עם $T(\beta_i)=c_i\beta_i$ לכל i. לכן לכל פולינום $h\in F[x]$

$$h(T)(\beta)=h(c_1)\beta_1+\ldots+h(c_k)\beta_k$$

כעת, נסמן ב-P א תהפולינום המינימלי של T. אנחנו מניחים שהוא מתפרק לגורמים לינארים שונים. נרשות $P=(x-c_j)q$ עבור איזשהו פולינום q.
כמו כן, אם נסתכל על $q-q(c_j)=(c-x_j)h$ עבור איזשהו פולינום h.
יש לנו $q(T)(\alpha)-q(c_j)\alpha=h(T)\underbrace{(T-c_jI)(\alpha)}_{\beta}=h(T)(\beta)\in W$.

מאחר ו-$0=p(T)(\alpha)=(T-c_jI)\underbrace{q(T)(\alpha)}$ נקבל ש-$q(T)(\alpha)\in W$, וקטור עצמי. לכן, $q(c_j)(\alpha)\in W$, אבל $\alpha\notin W$, לכן $q(c_j)=0$, אבל זו סתירה כי הריבוי של c_j ב-P הוא 1 מההנחה. ■

הערה 1.23 נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים - $f(x)=(c-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$, c_iשונים.
אז על מנת לקבוע אם T לכסינה, מספיק להציב את T בפולינום $(x-c_1)\cdots(x-c_k)$. אם מקבלים 0 - T לכסינה. אחרת, T לא לכסינה.

1.3.2 סכומים ישרים

הגדרה 1.24 יהיו $W_1,\dots,W_k\subseteq V$ תתי מרחבים. נאמר ש־$W_1,\dots,W_k$ **בלתי תלויים** אם, $\alpha_1+\dots+\alpha_k=0$, כאשר $\alpha_i\in W_i$, מכריח $\alpha_i=\dots=\alpha_k=0$.

הערה 1.25 המשמעות של אי תלות $W_1,\dots,W_k$, שלכל וקטור $\alpha\in W_1+\dots+W_k$ יש **הצגה יחידה** $\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_k$, כאשר $\alpha_i\in W_i$ לכל i

למה 1.26 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. יהיו $W_1,\dots,W_k\subseteq V$ תתי מרחבים של V, אז הטענות הבאות שקולות:

1. $W_1,\dots,W_k$ בלתי תלויים
2. לכל $2\le J\le k$, מתקבל $W_j\cap(W_1+\dots+W_{j-1})=0$
3. אם B_i בסיס מסודר של W_i, $1\le i\le k$, אז הסדרה $B=(B_1,B_2,\dots,B_k)$ היא בסיס מסודר של $W:=W_1+\dots+W_k$.

הוכחה:

- $(1)\Leftarrow(2)$

יהי $\alpha\in W_j\cap(W_1+\dots+W_{j-1})$ אז

$$W_j\ni\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}$$

עם α_i לכל $1\le i\le j-1$, נעביר אגפים: $\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}+\alpha=0$ ומאי תלות ה־W_iים, נובע כי $\alpha_1=\dots=\alpha_{j-1}=\alpha=0$

- $(2)\Leftarrow(1)$

נניח $0=\alpha_1+\dots+\alpha_k$, $\alpha_i\in W_i$, יהי $1\le j\le k$ המקסימלי עבורו $\alpha_j\neq 0$: $0=\alpha_1+\dots+\alpha_{j-1}+\alpha_j$. אבל אז

$$0\neq\alpha_j=-\alpha_1-\dots-\alpha_{j-1}\in W_1+\dots+W_{j-1}$$

בסתירה להנחה (2).

- $(1)\Leftarrow(3)$

כל יחס לינארי בין הוקטורים ב־B, הוא מהצורה $\beta_1+\dots+\beta_k=0$ כאשר $\beta_i\in W_i$ צרוף לינארי של איברי B_i. מההנחה, $\beta_i=0$ לכל i, והמקדמים שלו ביחס ל־B_iאפסים.

- $(3)\Leftarrow(1)$, ברור.

הגדרה 1.27 אם אחד התנאים (ולכן כולם) בלמה ־ מתקיימים, נאמר כי $W=W_i+\dots+W_k$ הוא **סכום ישר** של $W_1,\dots,W_k$ וסמן

$$W=W_1\oplus\dots\oplus W_k$$

דוגמאות ■

- אם ל־V יש בסיס $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, ונגדיר $W_i=\operatorname{spn}\{\alpha_i\}$, תת מרחב ממימד אחד. אז $V=W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_n$
- יהי $T:V\to V$, יהיו $\{W_i\}$ המרחבים העצמיים של T. הוכחנו ש־$\{W_i\}$ קבוצה בלתי תלויה של תתי מרחבים, ו־$V=\biguplus\{W_i\}\iff T$ לכסינה.

1.3.3 הטלות

הגדרה 1.28 העתקה $E:V\to V$ המקיימת $E^2=E$ נקראת **הטלה**

הערה 1.29 תהי $E:V\to V$ העתקה, יהי $R:=\mathrm{Im}E$, $N=\ker E$.

1. $\beta\in R\iff E\beta=\beta$.

- אכן, אם $\beta\in R$, אז $\beta=E\alpha$ אבל אז $E\beta=EE\alpha=E^2\alpha=E\alpha=\beta$

2. $V=R\oplus N$.

- נראה ש־ $V=R+N$ ־ יהי $\beta\in V$, אז $\beta=E\beta+(\beta-E\beta)$ כאשר, $E\beta\in R$ ו־$\beta-E\beta\in N$ ($E(\beta-E\beta)=E\beta-E^2\beta=0$)
- נראה שהחיתוך אפס ־ אם $\beta\in R\cap N$, אז אם הוא בתמונה , $\beta=E\beta$, ואם הוא בגרעין $E\beta=0$, כלומר ־ $\beta=0$.

3. אם $R,N\subseteq V$, כך ש־ $V=R\oplus N$, אז קיימת הטלה יחידה E עם תמונה R וגרעין N. היא נקראת "ההטלה מ־V על R לאורך N"

- אכן, נגדיר $E:V\to V$, $E(v)=v_R$ כאשר $v=v_r+v_n$.

4. הטלה $E:V\to V$ תמיד לכסינה.

- אכן, נקח את בסיס $\{\alpha_1,\ldots\alpha_k\}$ של $R=\mathrm{Im}E$ ונשלים לבסיס $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n\}$כאשר $\{\alpha_{k+1},\ldots\alpha_n\}$בסיס של $N=\ker E$. אז המטריצה המייצגת את E לפי בסיס זה היא $\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}$ כאשר I מטריצת היחידה מסדר k.

משפט 1.30 אם $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$ אז קיימות העתקות $E_1,\ldots,E_k:V\to V$ כך שמתקיימים:

1. כל E_i הטלה.
2. $E_i\cdot E_j=0$, $i\neq j$
3. $E_1+\ldots+E_k=I$
4. $\mathrm{Im}E_i=W_i$

בכיוון ההפוך, אם $E_1,\ldots,E_k$ העתקות על V, המקיימות את תנאים $1-3$, ואם $W_i=\mathrm{Im}E_i$, אז $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$.

הוכחה: $\Leftarrow$ נגדיר את E_i להיות ההטלה על W_i, כלומר, כל וקטור $\alpha\in V$ ניתן לכתיבה באופן יחיד כ־ $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_k$, ו־ E_i מוגדרת על ידי $E_i(\alpha)=\alpha_i$.
כעת $(2)-(4)$ ברורים. למשל, (3) נובע כי־ $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_k\iff\alpha=E_1\alpha+\ldots+E_k\alpha=(E_1+\ldots+E_k)\alpha$
בכיוון ההפוך: ראשית נראה ש־$V=W_1+\ldots+W_k$:
יהי $\alpha\in V$, אז

$$\alpha=I\alpha=\underbrace{(E_1+E_k)}_{I}\alpha=E_1\alpha+\ldots+\underbrace{E_k\alpha}_{\in W_k}\in W_1+\ldots W_k$$

.

הביטוי עבור αיחיד כי אם $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_k$, כאשר $\alpha_i\in W_i$, לכל i, אז

$$\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_k=E_1\beta_1+\ldots+E_k\beta_k$$

עבור $\beta_i,\ldots,\beta_k\in V$. כעת, לכל i,

$$E_i\alpha=E_i(E_1\beta_1+\ldots E_k\beta_k)\underset{(2)}{=}E_i^2\beta_i\underset{(1)}{=}E_i\beta_i=\alpha_i$$

כלומר, יש הצגה יחידה ־ והסכום הוא ישר. ■

משפט 1.31 תהי $T:V\to V$, ויהיו $W_1,\ldots,W_k$ ו־$E_1,\ldots,E_k$ כמו במשפט הקודם. אז כל W_i הוא T־אינוריינטי, $\Longleftrightarrow$ $TE_i=E_iT$ לכל i.

הוכחה: נניח כי $TE_i=E_iT$ לכל i.
יהי $\alpha\in W_j$, אז $\alpha=E_j\alpha$. ולכן ־ $T(\alpha)=T(E_j\alpha)=E_j(T\alpha)\in W_j$ ולכן W_j הוא T אינוריינטי
בכיוון השני: נניח כי כל W_i הוא T־אינוריינטי. יהי $\alpha\in V$, אז $\alpha=E_1\alpha+\ldots+E_k\alpha$ ולכן $T\alpha=\underbrace{T\overbrace{E_1\alpha}^{\in W_1}}_{\in W_1}+\ldots+TE_k\alpha$.
מאחר ו־$E_i\alpha\in W_i$ ו־W_i הוא T־אינוריינטי, אז ישנו $T(E_i\alpha)=E_i\beta_i$, עבור $\beta_i\in V$ כלשהו. אז,

$$(\star\star)\quad E_jTE_i\alpha=E_jE_i\beta_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ E_j\beta_j & i=j\end{cases}$$

לכן,

$$\begin{aligned}E_jT\alpha &= E_jTE_1\alpha+\ldots+E_jTE_k\alpha=\\ &=_{\star\star} E_j\beta_j=TE_j\alpha\end{aligned}$$

לכל $\alpha\in V$ ולכן $E_jT=TE_j$ ■

משפט 1.32 תהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$. אם T לכסינה, ואם $c_1,\ldots,c_k$ הערכים העצמיים השונים של T, אז קיימים אופרטורים $E_1\ldots,E_k$ על V כך ש־

1. $T=C_1E_1+\ldots+c_kE_k$
2. $I=E_1+\ldots+E_k$
3. $E_iE_j=0$ עבור $i\neq j$
4. $E_i^2=E_i$
5. $\mathrm{Im}E_i$ היא המרחב העצמי המשויך ל־c_i

ובכיוון ההפוך, אם קיימים סקלרים שונים $c_1,\ldots,c_k$ ו־k אופרטורים שונים מ־0 $E_1,\ldots,E_k$ המקיימים את $(1)-(3)$, אז T לכסינה, $c_1,\ldots,c_k$ ערכים עצמיים שונים ו־$(4),(5)$ מתקיימים גם כן

הוכחה: $\Leftarrow$ יהיו W_i המרחבים העצמיים של T המשויכים לערכים העצמיים c_i. אז $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$.
תהינה $E_1,\ldots,E_k$ ההטלות המקיימות את $(2)-(5)$, שקיומן מובטח מהמשפט הקודם.
נותר להוכיח את (1): לכל $\alpha\in V$,

$$T\alpha=T\underbrace{E_1\alpha}_{\in W_1,\text{eiganvector}}+TE_k\alpha=c_1E_1\alpha+\ldots+c_kE_k\alpha=(c_1E_1+\ldots+c_kE_k)\,\alpha$$

בכיוון ההפוך:
מתקיימים (1), (2) ו־(3).
אם נכפול את שני האגפים של (2), פי E_i , נקבל מ־(3) ש־$E_i=E_i^2$ ־ (4).
נכפול את שני האגפים ב־(1), פי E_i ונקבל ש־$TE_i=c_iE_i$, ולכן $\mathrm{Im}E_i$ מוכלת במרחב העצמי המשוייך ל־c_i.
יתרה מכך ־ מכיוון ש־$E_i\neq 0$, הרי ש־c_i ערך עצמי.
בנוסף, $c_1,\ldots,c_k$ הם כל הערכים העצמיים של T, כי אם c סקאלר (נחפש מתי $T-cI=0$), אז לפי (1)ו־(2),

$$T-cI=(c_1-c)\,E_1+\ldots+(c_k-c)\,E_k$$

ולכן, אם $(T-cI)\,\alpha=0$, $(c_i-c)\,E_i\alpha=0$, ואם $\alpha\neq 0$, אז $E_i\alpha\neq 0$ עבור i כלשהו (נובע מ־(2)), ועבור i זה, $c=c_i$.

בודאי ש־T לכסינה, כי הראנו שכל וקטור ב־$\mathrm{Im}E_i$ הוא וקטור עצמי, והעובדה ש־$I = E_1 + \ldots + E_k$ הוא סכום ההטלות הללו, מראה שוקטורים עצמיים פורשים את V.

נותר להוכיח את ההכלה ההפוכה (המרחב העצמי של c_i מוכל ב־$\mathrm{Im}E_i$)

נניח ש־$T\alpha = c_i\alpha$. אז מ־(1) ו־(2), $\sum_{j=1}^{k}(c_j - c_i)E_j\alpha = 0$, ולכן, $\underbrace{(c_j - c_i)}_{\neq 0 \forall i\neq j} E_j\alpha = 0$ לכל j, (כי תתי המרחבים $\mathrm{Im}E_j$ בלתי תלויים). לכן, לכל $j \neq i$, $E_j\alpha = 0$ ו־$\alpha = E_i\alpha$, כלומר, $\alpha \in \mathrm{Im}E_i$. ■

1.4 משפט הפירוק הראשוני

הערה 1.33 אחד הדברים הטובים בפירוק $T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$ של אופרטור לכסין, הוא שלכל פולינום g מעל השדה F, יש לנו $g(T) = g(c_1)E_1 + \ldots + g(c_k)E_k$.

למשל, עבור הפולינומים $P_j = \prod_{i\neq j}\frac{(x-c_i)}{(c_j-c_i)}$, יש לנו כי $P_j(T) = E_j$ (כי $P_j(c_i) = \delta_{ij}$).

כלומר, ההטלות E_i הן פולינומים ב־T.

משפט 1.34 (הפירוק הראשוני - Primary decomposition)

תהי $T : V \to V$, $\dim V < \infty$ מעל שדה F. יהי P הפולינום המינימלי של T ונכתוב את $P = P_1^{r_1}\cdots P_k^{r_k}$ (כאשר P_i פולינומים מתוקנים, אי פריקים שונים מעל F, ו־$r_i > 0$ שלמים)

יהיו $W_i = \ker P_i^{r_i}(T)$, $1 \leq i \leq k$. אז:

1. $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$
2. כל W_i הוא T־אינוריינטי
3. הפולינום המינימלי של $T_i := T_{|W_i}$ (הצמצום של T ל־W_i) הוא $P_i^{r_i}$.

הערה 1.35 אין צורך להניח ש־$\dim V < \infty$, וכן מספיק בשביל (1) ו־(2), ש־$P(T) = 0$ (לא חייב להיות המינימלי)

דוגמא כללית: T לכסין, אז $P(T) = \prod_{i=1}^{k}(x-c_i)$ ו־$P_i = x - c_i$, $W_i = \ker(T - c_iI)$ ו־$V = \bigoplus_{i=1}^{k}W_i$.

הוכחה: הרעיון הוא למצוא הטלות $E_1,\ldots,E_k$ המשויכות ל־(i). נמצא פולינום h_i כך ש־$h_i(T)$ הוא זהות ש ל־W_i ו־0 על W_j לכל $j \neq i$, וכך ש־$\sum h_i(T) = I$ וכו'.

עבור $1 \leq j \leq k$, נגדיר $f_i = \frac{P}{P_j^{r_i}} = \prod_{j\neq i}P_j^{R_j}$. מאחר ו־$P_i,\ldots,P_k$ אי פריקים שונים, הרי שהמחלק המשותף המקסימלי של $f_1,\ldots,f_k$ הוא 1.

לכן קיימים פולינומים $g_1,\ldots,g_k$ כך ש־

$$1 = g_1f_1 + \ldots + g_kf_k = \sum_{i=1}^{k}g_if_i$$

נשים לב שאם $j \neq i$, אז $P|f_if_j$ (כי אז "מחזירים" את הגורם שהוסר + מוסיפים איברים).

נראה כי $h_i = g_if_i$ מקיימים את המבוקש.

נגדיר $E_i = h_i(T) = g_i(T)f_i(T)$. מאחר ו־$\sum_{i=1}^{k}h_i = 1$ ו־$P|f_if_j'$ עבור $i \neq j$ יש לנו

$$\begin{aligned} E_1 + \ldots + E_k &= I \\ E_iE_j &= 0 \quad i \neq j \end{aligned}$$

כמו שראינו, יש לנו גם $E_i^2 = E_i$ לכל i, לכן ה־E_i־ים הטלות המתאימות לאיזשהו פרוק של V לסכום ישר.

נראה ש־$W_i = \mathrm{Im}E_i$. אם $\alpha \in \mathrm{Im}E_i$, אז $\alpha = E_i\alpha$ ולכן

$$\begin{aligned} P_i(T)^{R_i}\alpha &= P_i(T)^{R_i}E_i\alpha = \overbrace{P_i(T)^{r_i}f(T)}^{P(T)}g_i(T)\alpha \\ &= g_i(T)p(T)\alpha = 0 \end{aligned}$$

ולכן, $\alpha \in W_i = \ker P_i^{r_i}(T)$

בכיוון ההפוך - יהי $\alpha \in \ker P_i^{r_i}(T)$, אם $j \neq i$ אז $P_i^{r_i}|f_jg_j$ ולכן

$$E_j\alpha = f_i(T)g_i(T)\alpha = 0$$

לכן $E_i\alpha=\alpha$ והוכחנו את (1).

כמובן ש־(2) ברור.

לגבי (3), ברור כי $P_i^{r_i}(T_i)=0$ כי בהגדרה, $P_i(T)^{r_i}$ הוא 0 על W_i, ולכן הפולינום המינימלי של T_i מחלק את $P_i^{r_i}$.

בכיוון ההפוך־ יש g פולינום המאפס את T_i. אז $g(T)f_i(T)=0$, ולכן P, שהוא המינימלי, $P|gf_i$. אבל

$$P=P_i^{r_i}f_i$$

ולכן $P_i^{r_i}|g$. לכן הפולינום המינימלי של T_i הוא $P_i^{r_i}$. ■

1.4.1 מעל שדה סגור אלגברית

(בסימונים של המשפט הקודם), נתבונן במקרה בו הפולינום המינימלי של T מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים - כלומר, $P_i=(x-c_i)^{r_i}$. אז $W_i=\ker(T-c_iI)^{r_i}$.

נגדיר $D=c_1E_1+\ldots+c_kE_k$. אז ממשפט קודם - D לכסין. נכנה אותו "**החלק האלכסוני של** T". נתבונן ב־N,

$$\begin{aligned} N &= T-D=(TE_1+\ldots+TE_k)-(c_1E_1+\ldots+c_kE_k)\\ &=(T-c_1I)E_1+\ldots+(T-c_kI)E_k \end{aligned}$$

בפרט, לכל שלם $r>0$,

$$N^r=(T-c_1I)^rE_1+\ldots+(T-c_kI)^rE_k$$

עבור $r>r_i$ לכל $1\le i\le k$, מתקיים ש־$(T-c_iI)=0$ על W_i, ואז, $N^r=0$.

הגדרה 1.36 יהי N אופרטור על V. נאמר ש־N **נילפוטנטי** אם קיים שלם r עבורו $N^r=0$.

משפט 1.37 יהי $T:V\to V$, $\dim V<\infty$ מעל שדה F. נניח שהפולינום המינימלי של T מתפרק מעל F למכפלה של גורמים לינארים (למשל, אם $F=\mathbb{C}$).

אז, קיימים אופרטור לכסין D על V ואופרטור נילפוטנטי N על V, כך ש־

1. $T=D+N$
2. הם מתחלפים: $DN=ND$,
3. האופרטורים D ו־N נקבעים באופן יחיד, ושניהם פולינומים ב־T.

הוכחה: נותר להוכיח את היחידות של N,D .

נניח כי D' אלכסוני, ו־N' נילפוטנטי, מקיימים את (1) ו־(2).

כלומר, $D'N'=N'D'$ ו־$T=N'+D'$.

אז $D-D'=N'-N$

נסתכל על $D-D'$. מכיוון ש־ D ו־D' מתחלפים (כי הם פולינומים ב־T), הם ניתנים לליכסון סימולטני ולכן $D-D'$ לכסין.

מכיוון ש־N ו־N' מתחלפים בינהם, הרי ש־

$$(N'-N)^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(N')^iN^{k-i}$$

לכן עבור k מספיק גדול, העובדה ש־N ו־N' נילפוטנטים גוררת ש־$(N'-N)$ נילפוטנטים.

קיבלנו ש־$D-D'$ הוא גם לכסיון וגם נילפוטנט.

לכן הפולינום המינימלי של $D-D'$ הוא מהצורה x^t, (כי $D-D'$ נילפוטנטי) אבל אז $t=1$ כי $D-D'$ אלכסוני, ולכן $D-D'=0$, אז $N-N'=0$. ■

הערה 1.38 המשפט אומר שמעל שדה סגור אלגברית, מספיק ללמוד את המבנה של אופרטורים נילפוטנטים.

הערה 1.39 זו לא הדרך הסטדנרטית להוכיח את המשפט. בקורס "מודולים, חוגים וחבורות" יש הוכחה כללית יותר עבור שדות לא־סגורים אלגברית

1.5 צורת ג'ורדן

1.5.1 מאפסים וחברים

הגדרה 1.40 תהי $T: V \to V$, $\dim_F V < \infty$.
בהנתן $\alpha \in V$, נגדיר את **תת המרחב ה־T־ציקלי** הנוצר על ידי α להיות:

$$z(\alpha, t) = u = \operatorname{span}\left\{\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^r\alpha : \ r \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

זהו תת המרחב ה־T־אינוריאנטי הקטן ביותר של v, המכיל את α.
אם $z(\alpha, T) = V$, נאמר ש־α **וקטור ציקלי של** T.

דוגמה:

- להעתקת הזהות $I: V \to V$, $\dim V \geq 2$, אין וקטור ציקלי.
- תהי $T: F^2 \to F^2$ הנתונה על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. הוקטור $\varepsilon_1 = (1, 0)$ הוא וקטור ציקלי, כי $T(\varepsilon_1) = (0, 1) =$ ε_2 ו־$\operatorname{span}\{\varepsilon_1, T\varepsilon_2\} = F^2$.

הגדרה 1.41 ה־T מאפס של $\alpha \in V$ הוא הקבוצה $M(\alpha, T) = \{g \in F[x] \,|g(T)\alpha = 0\}$.
הפולינום המתוקן בעל הדרגה הקטנה ביותר ב־$M(\alpha, T)$ נקרא גם כן, "ה־T מאפס של α" ומסומן על ידי P_α.
בפרט, P_α מחלק את הפולינום המינימלי של T.

משפט 1.42 יהי $\alpha \in V$, ויהי P_α ה־Tמאפס שלו.

1. הדרגה של P_αשווה למימד של $Z(\alpha, T)$, המרחב הציקלי שנוצר על ידי α
2. אם $\deg P_\alpha = k$, אז $\left\{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\right\}$ **בסיס של** $Z(\alpha, T)$
3. הפולינום המינימלי של $T|_{Z(\alpha,T)}$ הוא P_α.

אז בעצם, איבר כללי ב־$Z(\alpha, T)$ הוא פולינום ב־α.

הוכחה: נסמן $\deg P_\alpha = k$. יהי $g \in F[x]$ פולינום כלשהו. נרשום $g = p_\alpha \cdot q + r$, כך ש־$r = 0$ או $\deg r < k$.
יש לנו $p_\alpha q \in M(\alpha, t)$. ולכן, וקטור כללי ב־$Z(\alpha, T)$ הוא מהצורה

$$g(T)\alpha = r(T)\alpha \in \operatorname{span}\left\{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\right\}$$

לכן $Z(\alpha, T) = \operatorname{span}\left\{\alpha, T\alpha, \ldots T^{k-1}\alpha\right\}$. כמובן ש־$\left\{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\right\}$ בת"ל, כי יחס לינארי לא טרוויאלי בינהם מגדיר פולינום מדרגה קטנה מ־k המאפס את α, וזה לא יתכן. זה מוכיח את (1) ו־(2).
לגבי (3), נסמן $U = T|_{Z(\alpha,T)}$. ראשית נראה ש־ $P_\alpha(U) = 0$. אם $g \in F[x]$, אז,

$$p_\alpha(U)g(T)\alpha = g(T)p_\alpha(U)\alpha = 0$$

לכן $p_\alpha(U) = 0$. אז אם $h \in F[x]$ פולינום מדרגה קטנה מ־k, אז לא יתכן ש־$h(U) = 0$, כי אז $h(U)\alpha =$ $h(T)\alpha = 0$ סתירה לכך ש־ P_α הוא המאפס של α , והוא מדרגה k. ■

מסקנה 1.43 אם α וקטור ציקלי עבור T אז הפולינום המינמלי של T שווה לפולינום האופייני של T. (נובע מהמשפט הקודם ומשפט קיילי־המילטון)

נניח ש־α וקטור ציקלי עבור T, ושהפולינום המינימלי של T הוא $p = c_0 + c_1x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$.
לפי המשפט, $\left\{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\right\}$ **בסיס של** V.
מהי המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \\ & \vdots & 0 & \\ & & 1 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_0I + c_1T + \ldots + c_{k-1}T^{k-1} + T^k \\ \Longleftrightarrow \quad & T^k = -c_0I - c_1T - \ldots - c_{k-1}T^{k1} \\ \Rightarrow \quad & T^k\alpha = -c_0\alpha - c_1T_\alpha - \ldots - c_{k-1}T^{k-1}\alpha \end{aligned}$$

מטריצה זו נקראת "**מטריצת החבר**" של הפולינום P.

משפט 1.44 יהי $U : W \to W$, $\dim W < \infty$. **ל־U יש וקטור ציקלי** $\Longleftrightarrow$ **יש בסיס מסודר של W** לפיו U מיוצג על ידי מטריצת החבר של הפולינם המינימלי של U.

הוכחה: יהי α וקטור ציקלי של U. מהמשפט הקודם, $\alpha, U\alpha, \ldots, U^{k-1}\alpha$ כאשר $k = \dim W$, **בסיס של** W, והמטריצה המייצגת את U לפי בסיס זה היא בדיוק מטריצת החבר של הפולינום המינימלי.

בכיוון ההפוך ־ בהנתן בסיס מסודר, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ של W המקיים את ההנחה, ברור כי־ α_1 וקטור ציקלי. ■

הערה 1.45 צורה רציונלית ־ אפשר לפרק את המרחב לסכום ישר של מרחבים צקיליים. יש בסיס לפיו המטריצה המיצגת היא מטריצת בלוקים שעל הבלוקים יש מטריצות חבר של פולינומים. לא נטפל בנושא זה בקורס. ההוכחות נמצאות בספר הקורס.

נרצה כעת להוכיח שאם $N : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי, אז V מתפרק לסכום ישר של תתי־מרחבים ציקליים.

1.5.2 למות עזר

למה 1.46 אם $T : V \to V$, r נילפוטנטית (כלומר, $T^r = 0$, $T^{r-1} \neq o$)

אז קיים ל־V תת מרחב T־ציקלי ממימד r.

הוכחה: לפי הנתון, $T^r = 0$ אך $T^{r-1} \neq 0$, יהי $\alpha \in V$ עבור $T^{r-1}\alpha \neq 0$, תת המרחב ה־T ציקלי הנוצר על ידי α נפרשר על ידי $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{r-1}\alpha$ (כי $T^r\alpha = 0$), לכן, אם נוכיח כי הוקטורים אלו בת"ל, ייודע כי זהו תת מרחב r־מימדי. נניח בשלילה

$$a_0\alpha + a_1\alpha T + \ldots + a_{r-1}T^{r-1}\alpha = 0$$

כאשר לא כל a_iשווים לאפס.

יהי j המינימלי כך ש־$a_j \neq 0$, אז

$$a_jT^j\alpha + \ldots + a_{r-1}T^{r-1}\alpha = 0$$

נפעיל את T^{r-i-j} על שני האגפים, ונקבל

$$a_jT^{r-1}\alpha + a_{j+1}T^r\alpha + \ldots + a_{r-1}T^{2r-2-j} = 0$$

שוויון זה שקול ל־$a_jT^{r-1}\alpha = 0$. מכיוון ש־$T^{r-1}\alpha = 0$ הרי ש־$a_j = 0$ בסתירה להנחה. ■

למה 1.47 תהי $T : V \to V$ r־נילפוטנטית ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב T־ציקלי, r מימדי. אז קיים ל־U תת מרחב משלים אינוריאנטי כלומר, תת מרחב T־אינורטנטי W כך ש־

$$V = U \oplus W$$

הוכחה: נבנה את W באינדוקציה על r.

אם $r = 1$, אז $T = 0$ ועל כן W קיים.

נניח שה־$r > 1$ וכי הלמה נכונה עבור אופרטורים $r - 1$ נילפוטנטים.

התמונה של T $V' := TV = \mathrm{Im}T$ הוא תת מרחב T אינורינטי של V, והצמצום של Tעל V' הוא $r-1$ נילפוטנטי.
יהי $\gamma, T\gamma, T^2\gamma, \ldots, T^{\gamma-1}\gamma$ **בסיס** של U.
אז $T\gamma, T^2\gamma, \ldots, T^{r'}\gamma$ **בסיס ציקלי** של $U' := TU \subset V'$.
לכן, לפי הנחת האינדוקציה, קיים תת מרחב T־אינורינטי W' של V', כך ש־$V' = U' \oplus W'$.
נגדיר

$$W_0 = T^{-1}W' = \{\alpha \in V | T\alpha \in W'\}$$

אז W_0 הוא תת מרחב של V המקיים $TW_0 \subseteq W' \subseteq W_0$ לכן W_0 הוא T־אינורינטי.

טענה 1.48 $V = U + W_0$.

הוכחה: יהי $\alpha \in V$, אז $T\alpha \in V' = U' \oplus W'$ ולכן $T\alpha = \beta' + \gamma'$ כאשר $\beta' \in U'$ ו־$\gamma' \in W'$
נרשום $\beta' = T\beta$ כאשר $\beta \in U$ ונכתוב $\alpha = \beta + \alpha - \beta$.
אז $\beta \in U$, ונראה כי $\alpha - \beta \in W_0$.
מהשוויון ־ $T\alpha = T\beta + \gamma'$ נובי כי $T((\alpha - \beta) = \gamma' \in W'$
ולכן, $\alpha - \beta \in W_0$. ■

הצררה עם w_0 היא בדר"כ $U \cap W_0 \neq 0$

טענה 1.49 $U \cap W_0 = 0$

הוכחה: יהי $\alpha \in U \cap W'$, אז $T\alpha = U' \cap W'$ ולכן $T\alpha = 0$.
בתור איבר של U, נוכל להציג את $\alpha = a_1\gamma + a_1T\gamma + \ldots + a_{r-1}T^{r-1}\gamma$

$$0 = T\alpha = a_0T\gamma + \ldots + a_{r-2}T^{\gamma-1}\gamma$$

אבל אלו הם אברי בסיס, ולכן, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{r-2} = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & a_{r-t}T^{r-1}\gamma \\ \alpha & \in & U'\left(\exists u \in U \Rightarrow \alpha = Tu\right) \end{array}$$

הוכנו שאם $U \cap W' \subset U' \cap W' = 0$ כמבוקש. ■

(המשך הוכחת המשפט)
מהטענה, נוביע כי החיתוך של W' ו־$U \cap W_0$, אף הוא אפס. היות ושני תתי מרחבים אלה מוכלים ב־W_0, נקבל כי

$$W' \oplus, (U \cap W_0) \subset W_0$$

יהי $W'' \subset W_0$, כך ש־$W_0 = W'' \oplus W' \oplus (U \cap W_0)$
נוכיח כי $W := W'' \oplus W'$ המשלים המבוקש של U.
ראשית, ה־T אינוריאנטיות של W נובעת מכך ש־$TW_0 \subseteq W' \subseteq W \subseteq W_0$
ולכן

$$TW \subset TW_0 \subset W' \subset W$$

ולכן W הוא T־אינורינטי
שנית, נדרוש ש־$U \cap W = 0$, כי $W \subseteq W_0$, ולכן $U \cap W \subseteq (U \cup W_0) \cap W = 0$
ולסיום ־ נראה ש־$V = U + W$. אז

$$V = U + W_0 = (U + (U \cap W_0)) + (W'' + W) = U + W$$

■

1.5.3 עבור מטריצה נילפוטנטית

משפט 1.50 (משפט קיום צורת ג'ורדן עבור אופרטורים נילפוטנטים)
תהיי $T : V \to V$, $\dim V < \infty$, r־נילפוטנטית. אזי:

1. קיימים מספרים טבעיים $r = r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_k$, כך ש־$r_1 + \ldots + r_k = \dim V$, ווקטורים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ כך ש־

$$T^{r_1}\alpha_1 = \ldots = T^{r_k}\alpha_k = 0$$

וסדרת הוקטורים

$$\alpha_1, T\alpha_1, \ldots . T^{r_1-1}\alpha_1, T\alpha_2, \ldots T^{r_2-1}\alpha_2, \ldots, \alpha_k, T\alpha_k, \ldots, T^{r_k-1}\alpha_k$$

מהווה בסיס ל־V.

2. המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס זה היא מטריצה בלוקים:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

כאשר B_i היא המטריצה מסדר $r_i \times r_i$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, בכל מקום יש אפס פרט לאלכסון הראשון מתחת לאלכסון הראשי, שם יש "1". המטריצה J נקראת מטריצה נילפוטנטית ב**צורת ג'ורדן**.

הוכחה: נבחר $r_1 = r$ ו־α_1 וקטור כלשהו עבורו $T^{r_1-1}\alpha_1 \neq 0$. אזי, $U_1 = \operatorname{span}\left\{\alpha_1, T\alpha_1, \ldots, T^{r_1-1}\alpha_1\right\}$ תת מרחב T־אינווריאנטי r_1 מימדי, ומלמה קודמת ־ ניתן לפרק $V = U_1 \oplus W_1$ כאשר W_1 הוא T־אינווריאנטי.
הצמצום של T ל־W_1 הוא טרנספורמציה לינארית, נילפוטנטית על W_1 בעלת אינדקס נילפוטנטיות $r_2 \leq r_1$.
נחזור על התהליך ב־W_1: נבחר וקטור α_2 ב־W_1 שעבורו $T^{r_2-1}\alpha_2 \neq 0$ ונגדיר

$$U_2 = \left\{\alpha_2, T\alpha_2, \ldots, T^{r_2-1}\alpha_2\right\}$$

אזי, מלמה קודמת, יש פירוק של $W_1 = U_2 \oplus W_2$ ולכן $V = U_1 \oplus U_2 \oplus W_2$.
וכך נמשיך ־ עד שלבסוף נקבל

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$$

כאשר $U_i = \operatorname{span}\left\{\alpha_i, T\alpha_i, \ldots, T^{r_i-1}\alpha_i\right\}$.
וזה מוכיח את חלק (1).
ובאשר לחלק (2) ־ היות ו־U_1 הוא T־אינווריאנטי, תתפרק המטריצה של Tלבלוקים שהם המטריצות של T על כל U_i בנפרד. היות ו־T מעבירה כל איבר בסיס של U_i לאיבר הבסיס הבא, ואת האחרון לאפס, תיוצג T על U_i על ידי המטריצה מסדר $r_i \times r_i$־

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

מסקנה 1.51 כל מטריצה נילפוטנית A דומה למטריצה נילפוטנית בצורת ג'ורדן, הנקראת **צורת ג'ורדן של A**.

1.5.4 עבור אופרטור כללי

משפט 1.52 (משפט ג'ורדן ־ קיום)
תהי $T : V \to V$, $\dim_F V < \infty$, כך שהופינום האופייני של T מתפרק מעל F למכפלה ש לגורמים ליניאריים:

$$f = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

כאשר $c_1, \ldots, c_k$ הם הערכים העצמיים השונים של T ב־f, ו־$d_i \geq 1$.

אזי, קיים ל־V בסיס, לפיו המטריצה המייצגת את T היא מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

כאשר כל מטריצה A_i מסדר $d_i \times d_i$, היא מהצורה ־ מטריצת בלוקים:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_1^{(i)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

כאשר כל $J_j^{(i)}$ היא **מטריצת ג'ורדן אלמנטרית** ־ עם ערך עצמי c_i, מהצורה

$$J_j^{(i)} = \begin{pmatrix} c_i & & & & 0 \\ 1 & c_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & c_i \end{pmatrix}$$

לדוגמה

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & 0 \\ & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_2} & & & \\ & & \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{J_1^{(3)}} & & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & (1) \end{pmatrix}}_{A_3} & & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \\ & (3) \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

בהוכחה, נשלב בין המקרה הנילפוטנטי למשפט הפירוק הראשון **הוכחה:** הפולינום המינימלי של T הוא מהצורה

$$P = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$$

כאשר $r_i \leq d_i$ לכל i. אם $W_i = \ker (T - c_i I)^{r_i}$ אז ממשפט הפירוק הראשוני, $V = W_1 \oplus W_2 \ldots \oplus W_k$ ול־$T_i = T_{|W_i}$ פולינום מינימלי ־ $(x-c_i)^{r_i}$.

נגדיר, $N_i = T_i - c_i I$. אז N_i נילפוטנטי, עם פולינום מינימלי x^{r_i}. על W_i, T פועל כ־N_i פלוס הסקלר c_i פעמים אופרטור הזהות.

$$T|_{w_i} = N_i + c_i I$$

נבחר בסיס ל־W_i, המתאים לפירוק הציקלי של האופרטור N_i.

אז ביחס לבסיס זה, המטריצה של N_i היא סכום ישר של מטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} c_i & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & c_i \end{pmatrix}$ והגדלים של מטריצות אלו יורדים משמאל לימין. ■

משפט 1.53 (משפט ג'ורדן ־ יחידות)

כל אופרטור ניתן לייצוג על ידי מטריצה <u>יחידה</u> בצורת ג'ורדן.

הוכחה: נתחיל מהוכחה עבור המקרה הנילפוטנטי:

תהי A מטריצה נילפוטנטית, ונתאר שיטה המאפשרת לחשב את צורת ג'ורדן של A על סמך הדרגות של חזקות של A בלבד.

נתבונן ראשית ב־ $J = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix}$, כאשר $B_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מסדר $r_i \times r_i'$, נשים לב ראשית ש־

$$J^n = \begin{pmatrix} B_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k^n \end{pmatrix}$$

(הפעם J^n זה J בחזרת n, ולא אינדקס), כאשר B_j^n כזו היא מטריצה שבה מופיעים 1־ים בכל האלכסון ה־n מתחת לראשי ו־0 בכל מקום אחר.

לכן, במעבר מ־J^n ל־J^{n+1}, "נעלם" 1 יחיד מכל שרשרת של "1", ולכן הדרגה יורדת כמספר השרשראות.

נסמן ב־$\bar{m}_n\left(J^t\right)$ את מספר השרשרות של 1־ים ב־J^t שאורכן $\leq n$ ואז, נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} r(J) - r\left(J^2\right) &= \bar{m}_1(J) \\ r\left(J^2\right) - r\left(J^3\right) &= \bar{m}_1\left(J^2\right) = \bar{m}_2(J) \\ &\vdots \\ r\left(J^n\right) - r\left(J^{n+1}\right) &= \bar{m}_1\left(J^n\right) = \ldots = \bar{m}_n(J) \end{aligned}$$

אם נסמן ב־$m_n(J)$ את מספר השרשרות ב־J בעלות אורך בדיוק n, אז ברור כי

$$m_n(J) = \bar{m}_n(J) - \bar{m}_{n+1}(J)$$

ולכן $m_n(J) = \bar{m}_n(J) - \bar{m}_{n+1}(J) = r\left(J^n\right) - r\left(J^{n+1}\right) - r\left(J^{n+1}\right) + r\left(J^{n+2}\right)$

כלומר,

$$\boxed{m_n(J) = r\left(J^n\right) - 2r\left(J^{n+1}\right) + r\left(J^{n+2}\right)}$$

כעת, אם המטריצה A דומה ל־G, אז לכל n, A^n דומה ל־J^n, ולכן $r\left(J^n\right) = r\left(A^n\right)$.

לכן, אם J היא צורת ג'ורדן של A, קיים

$$\boxed{m_n(J) = r\left(A^n\right) - 2r\left(A^{n+1}\right) + r\left(A^{n+2}\right)}$$

נוסחה זו מאפשרת לחשב את J, בהנתן A כדלקמן:

A מטריצה נילפוטנטית, נאמר $A^m = 0$. נחשב את $n_i(J)$ עבור $i = 1, \ldots, n$ ונרשום את צורת ג'ורדן J כאשר סדר השרשראות באלכסון מתחת לראשי הוא לפי אורכן.

(לדוגמה, $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. צריך לחשב את $r(A),r(A^2)$ (כי $A^3=0$)

$$\begin{aligned} r\left(A\right) &= 2\\ r\left(A^2\right) &= 1 \end{aligned}$$

ולכן $m_1\left(J\right)=r\left(A^1\right)-2r\left(A^2\right)+r\left(A^3\right)$, $n_2(J)=r\left(A^2\right)-2r\left(A^3\right)+r\left(A^4\right)=1$, אז יש שרשרת אחת באורך 2, בלבד. אז לן

$$A\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

סוף דוגמה)

נוכיח את היחידות במקרה הכללי:

נניח כי $J'=\begin{pmatrix}A'_1&&\\&\ddots&\\&&A'_l\end{pmatrix}$ היא מטריצת ג'ורדן המייצגת את T ביחס לבסיס כלשהו, כאשר A'_i הם בלוקים בעלי הצורה המתוארת עבור A_i במשפט ג'ורדן: קיום, שסדרם $d'_i\times d'_i$, ובאלכסונים נמצא c'_i.

על סמך צורתם של J', קל לראות כי פולינומה האופייני הוא:

$$\prod_{i=1}^{l}\left(x-c'_i\right)^{d'_i}$$

אולם פולינום זה שווה לפולינום האופייני של J - $\prod_{i=l}^{k}\left(x-c_i\right)^{d_i}$. (כי J,J' דומות)

לכן, נקבל, לאחר סידור מתאים של האינדקסים, כי $k=l$, $c'_i=c_i$ ו־$d'_i=d_i$ (מיחידות הפירוק של פולינום לגורמים אי־פריקים)

כעת, הפירוק של J' לבלוקים מושרה מפירוק $V=W'_1\oplus\cdots\oplus W'_k$, שבו W'_i תת מרחב T־אינוריאנטי ממימד d_i כך ש־A'_i, מייצגת את T על W'_i.

היות ו־A'_i-c_iI מטריצה נילפוטנטית, נובע כי $T-c_iI$ נילפוטנטית על W'_i.

לפי הגדרת W_i, בהוכחת משפט הקיום, נקבל כי $W'_i\subseteq W_i$, ועקב שוויון מימדהם, $W'_i=W_i$.

לבסוף, A_i-c_iI ו־A'_i-c_iI הן מטריצות נילפוטנטיות בצורת ג'ורדן המייצגות את אותה הטרנספורמציה (דהינו, את $T-c_iI$) ולכן נובע, מהיחידות במקרה הנילפוטנטי, כי $A'_i-c_iI=A_i-c_iI$ ולכן $A'_i=A_i$ ו־$J'=J$. ■

מסקנה 1.54 שתי מטריצות $A,B\in M_n\left(F\right)$ אשר כל הערכים העצמיים שלהן נמצאים ב־F, דומות מעל F $\Longleftrightarrow$ יש להן אותה צורת ג'ורדן.

$$A\sim J=\begin{pmatrix}J_1&&&0\\&J_2&&\\&&\ddots&\\0&&&J_n\end{pmatrix}$$

כאשר $J_i=\begin{pmatrix}c_i&&&0\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&c_i\end{pmatrix}$.

1.5.5 שימושים

מציאת הפולינום המינימלי של מטריצה בצורת ג'ורדן תהי J מטריצה בצורת ג'ורדן, ויהיו $c_1,\ldots,c_k$ הערכים העצמיים, וריבוייהם $d_1,\ldots,d_k$ בהתאמה.

במילים אחרות - הפולינום האופייני של J הוא $(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k}$.

אז בבלוק של J המתאים לערך העצמי c_i, מופיעים ה־1־ים מתחת לאלכסון הראשי, ובשרשראות המופרדות במקומות מסוימים על ידי 0 בודד, יהיו אורכי השרשראות הללו $r_{i_1}-1\geq r_{i_2}-1\geq\ldots\geq r_{i_{t_i}}-1$ כאשר $r_{i_1}+\ldots+r_{i_{t_i}}=d_i$ (r_{i_j} הוא גודל תת־הבלוק המתקבל בפירוק מהמשפט).

הפולינום האופייני של J הוא

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k} \\ &= \prod_{\substack{i=1\ldots k \\ j=1\ldots t_i}} (x-c_i)^{r_{i_j}} \end{aligned}$$

הפולינומים $(x-c_i)^{r_{ij}}$ נקראים **המחלקים האלמנטרים** של J.

טענה 1.55 אם ניקח, עבור כל ערך עצמי, את המחלק האלמנטרי בעל המעלה המקסימלית, אז מכפלת מחלקים אלו

$$P(x)=(x-c_1)^{r_{11}}(x-c_2)^{r_{21}}\cdots(x-c_k)^{r_{k1}}$$

היא הפולינום המינימלי של J.

הוכחה: נשים לב תחילה כי אם J מורכבת מהבלוקים A_i המתאימים לערכים העצמים c_i, אז עבור פולינום כלשהו, $g(J)=0$ אם ורק אם - $g(A_i)=0$ לכן $1\leq i\leq k$.

לכן, כדי להראות ש־J מאפסת את $P(x)$, מספיק להראות כי כל בלוק A_j מאפס את $P(x)$.

לשם כך - מספיק להראות ש־A_j מאפס את $(x-c_j)^{r_{j1}}$.

כלומר ש- $(A_j-c_jI)^{r_{j1}}=0$.

אומנם, A_j-c_jI היא מטריצה נילפוטנטית בצורת ג'ורדן, שבה השרשרת הארוכה ביותר של 1 היא באורך r_{j_1-1}.

ולכן, ברורר שאם נעלה מטריצה זו בחזקת r_{j_1}, היא תתאפס

בכך הוכחנו ש- J מאפס את $P(x)$.

קל לראות, כי הפולינום המינימלי של A_j הוא $(x-c_j)^{r_{j1}}$, ולכן פולינום זה מחלק את הפולינום המינימלי של J.

היות והגורמים $(x-c_j)^{r_{j1}}$ עבור j־ים שונים הם זרים, נובע כי $p(x)$ מחלק את הפולינום המינימלי של j, ולכן שווה לו. ■

דוגמאות יהי $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$. אז הפולינום האופייני הוא כמובן $f(x)=(x-c_1)(x-c_2)$ (לאו דווקא שונים).

- כאשר $c_1\neq c_2$, במקרה הראשון, T לכסינה ומיוצגת בבסיס מסויים על ידי המטריצה $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2\end{pmatrix}$, בצורת ג'ורדן.
- $f(x)=(x-c)^2$ - אם הפולינין המינימלי הוא $p(x)=x-c$, אז $T=cI$, ומיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c\end{pmatrix}$, ואילו אם הפולינום המינימלי הוא $p(x)=(x-c)^2$, אז T מיוצגת בבסיס מסויים על ידי $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & c\end{pmatrix}$.

בכל מקרה, כל מטריצה ב־$M_2(\mathbb{C})$ דומה לאחת משתי המטריצות: $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2\end{pmatrix}$ (כש־c_1 לאו דווקא שונה מ־c_2)

עוד דוגמה $A\sim A^t$ (בתרגול).

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2\end{pmatrix}$$

מה הפולינום האפייני? $(x-2)^4$ המינימלי - $(x-2)^2$ (מאפס כל אחד מהבלוקים שעל האלכסון, שהוא משלוש)

עבור $a=0$, A בצורת ג'ורדן

$$A=J_2=\begin{pmatrix}2&0&&\\1&2&&\\&&2&0\\&&0&2\end{pmatrix}$$

עבור $a=1$

$$A=J_1=\begin{pmatrix}2&0&&\\1&2&&\\&&2&0\\&&1&2\end{pmatrix}$$

שתי המטריצות לא דומות - צורות הג'ורדן שלהן שונות, אבל הפולינומים - המינימלים והאופיניים שונים!

דוגמה אחרונה לבנתיים

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{pmatrix}$$

- פולינום אופיני - $(x-2)^2(x+1)$ (משולשית)
  - אם גם הפולינום המינימלי זהה, אז $A\sim\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
  - אם הפולינום המינימלי הוא $(x-2)(x+1)$, $A\sim\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ כי היא לכסינה.

מכיוון ש- $\begin{pmatrix}0&0&0\\3a&0&0\\ac&0&0\end{pmatrix}=(A-2I)(A+I)$ זה קורה אם ורק אם $a=0$.

1.5.6 מציאת צורת ג'ורדן (במקרה הנילפוטנטי)

- תהי A, ותהי J צורת גו'רדן של A.
- כשהוכחנו יחידות של צורת ג'ורדן. נסמן ב-n_i את מספר השרשראות באורך i.
- הוכחנו ש-$n_i=r\left(A^i\right)-2r\left(A^{i+1}\right)-r\left(A^{i+2}\right)$. ($r(A)$ - הדרגה של A)

2 מרחבי מכפלה פנימית

- כאן, F יהיה $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$
- $V,(\cdot|\cdot)$ - מכפלה פנימית.

אנחנו מכירים מכפלה סקלארית -

$$((x_1,x_2,x_3)\,|\,(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\in\mathbb{R}$$

הגדרה 2.1 יהי $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$, ויהי V מרחב וקטורי מעל F.
מכפלה פנימית ("Inner product") על V היא $(\,|\,):V\times V\to F$ כך שלכל $\alpha,\beta,\gamma\in V$ ו-$c\in F$ מתקיים -

- לינאריות במשתנה הראשון

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta|\gamma) &= (\alpha|\gamma)+(\beta|\gamma)\\ (c\alpha|\beta) &= c\,(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

- "סימטריות" -

$$(\alpha|\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$$

- חיוביות -

$$(\alpha|\alpha)>0,\,\forall\alpha\neq 0$$

בין השאר - נובע גם ש־ $(\alpha|\alpha)\in\mathbb{R}$.

הערה 2.2 נובעת נוסחה נוספת:

-

$$(\alpha|c\beta+\gamma)=\bar{c}\,(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$$

$$\begin{aligned}(\alpha|c\beta+\gamma) &= \overline{(c\beta+\gamma|\alpha)}=\overline{c\,(\alpha|\beta)+(\gamma|\alpha)}\\ &= \bar{c}\overline{(\beta,\alpha)}+\overline{(\gamma,\alpha)}\\ &= \bar{c}\,(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)\end{aligned}$$

זו הלינאריות במשתנה השני.

הערה 2.3 אם $F=\mathbb{R}$, $(|)$ סימטרית ולינארים גם במשתנה השני.

הערה 2.4 אם נדרוש $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ מעל $\mathbb{C}$, נקבל סתירה לטענת האפס -

$$0<(i\alpha|i\alpha)=i^2\,(\alpha|\alpha)=-1\,(\alpha\alpha)<0$$

דוגמאות

- המכפלה הפנימית הסטנדרטית על F^n - מוגדרת על ידי

$$((x_1,\ldots,x_n)\,,(y_1,\ldots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$$

- על $\mathbb{R}^2$ -

$$((x_1,x_2)\,,(y_1,y_2))=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$$

נבדוק שזו מכפלה פנימית (נשים לב שזוהי תבנית ריבועית - כל מונום הוא ממעלה שניה) סימטריה ולינאריות ברורים - נבדוק את התנאי האחרון -

$$((x_1,x_2)\,,(x_1,x_2))=x_1^2-2x_1x^2+4x_2^2=(x_1-x_2)^2+3x_2^2\geq 0$$

עבור $(x_1,x_2)\geq 0$.

- על $V=M_n(F)$. נוכל להגדיר מכפלה פנימית כמו בדוגמה הראשונה, על ידי זיהוי $M_n(f)$ עם F^{n^2} על ידי

$$(A,B)=\sum_{j,k}A_{jk}\bar{B_{jk}}$$

אם נגדיר את **הצמוד** של מטריצה B על ידי

$$\left(B^{\star=\dagger}\right)_{kj}=\bar{B_{jk}}$$

נוכל להביע את המכפלה הפנימית באופן הבא -

$$\boxed{(A,B)=\operatorname{trace}(AB^\star)}=\operatorname{trace}(B^\star A)$$

אכן,

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(AB^\star) &= \sum_{j=1}^{n}(AB^\star)_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{jk}(B^\star)_{kj}\\ &= \sum_{j,k=1}^{n}A_{jk}\bar{B}_{jk}\end{aligned}$$

- תהי Q מטריצה הפיכה מסדר $N\times N$ כלשהי. יהי $V=F^n$ המרחב הוקטורי של עמודות המטריצה. נגדיר

$$(X,Y)=Y^\star Q^\star QX$$

($X,Y\in V$, וקטורי עמודה) מכפלה פנימית. למשל, עבור $Q=I$, זוהי המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

- הנה דוגמה אינסוף מימדית חשובה - יהי V אוסף הפונקציות הרציפות מ-$[0,1]\to\mathbb{C}$. נגדיר

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\,\bar{g}(t)\,dt$$

- אם $(,)$ מכפלה פנימית על W ו-$T:V\to W$ איזומורפיזם של מרחבים וקטורים, נוכל להגדיר מכפלה פנימית על Vבאופן הבא - $(\alpha,\beta)_T=(T\alpha,T\beta)$, $\alpha,\beta\in V$.
  - למשל החיוביות נובעת. $\alpha\neq 0$

$$(\alpha,\alpha)_T=(T\alpha,T\alpha)>0$$

כאן - אנחנו מושכים את המכפלה הפנימית מ-W ל-V.

הערה 2.5 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית. אזי לכל $\alpha,\beta\in V$

$$(\alpha,\beta)=\Re(\alpha,\beta)+i\Im(\alpha,\beta)$$

מאחר ועבור $z\in\mathbb{C}$,

$$\Im(z)=\Re(-iz)$$

יש לנו

$$\Im(\alpha,\beta)=\Re(-i(\alpha,\beta))=\Re(\alpha,i\beta)$$

לכן המכפלה הפנימית נקבעת לחלוטין על ידי החלק הממשי שלה -

$$(\alpha,\beta)=\Re(\alpha,\beta)+i\Re(\alpha,i\beta)$$

הגדרה 2.6 יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית. אזי -

1. המספר הממשי החיובי (האי־שלילי)

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

נקרא **הנורמה של** α

2. **התבנית הריבועית** של המכפלה הפנימית היא הפונקציה

$$q : V \to \mathbb{R}$$

המוגדרת על ידי $q(\alpha) = \|\alpha\|^2$

יש לנו

$$\begin{aligned} q(\alpha \pm \beta) &= \|\alpha \pm \beta\|^2 = (\alpha \pm \beta, \alpha \pm \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) \pm (\alpha, \beta) \pm (\beta, \alpha) + (\beta, \beta) \\ &= q(\alpha) \pm 2\Re(\alpha, \beta) + q(\beta) \end{aligned}$$

לכן, במקרה הממשי -

$$\begin{aligned} q(\alpha \pm \beta) &= q(\alpha) \pm 2(\alpha, \beta) + q(\beta) \\ &\Rightarrow q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta) = 4(\alpha\beta) \\ &\iff (\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\{q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta)\} \end{aligned}$$

ואילו במקרה המרוכב -

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \frac{1}{4}\{q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta) + iq(\alpha + i\beta) - iq(\alpha - i\beta)\} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n q(\alpha + i^n\beta) \end{aligned}$$

2.1 מכפלת בסיסים

הגדרה 2.7 נניח כעת כי V מרחב וקטורי ממימד **סופי** מעל F. יהי $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס מסודר של V. ברור כי n^2 הסקאלרים - (α_i, α_j) קובעים את המכפלה הפנימית בין כל שני וקטורים - $\alpha, \beta \in V$.
אכן - אם נסמן

$$G_{jk} = (\alpha_j, \alpha_k)$$

אזו $\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k$ ו־$\beta = \sum_{k=1}^{n} y_k\alpha_k$ אזי

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \left(\sum x_k\alpha_k, \beta\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\alpha_k, \beta) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} \bar{y_j}(\alpha_k, \alpha_j) \\ &= \sum_{k,j=1}^{n} x_k\bar{y_j}G_{jk} \end{aligned}$$

אם נסמן את וקטורי הקואורדינטות של (α, β) לפי הבסיס $\mathcal{B}$, על ידי $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ אזי

$$(\alpha, \beta) = Y^\star GX$$

כאשר $G = (G_{jk})$.

אכן

$$\begin{aligned} Y^\star GX &= (\bar{y_1}, \ldots, \bar{y_n})\, G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum \bar{y}_j G_{j1}, \ldots, \sum y_j G_{jn}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \bar{y_j} G_{jk} x_k \end{aligned}$$

הגדרה 2.8 המטריצה G נקראת **המטריצה של המכפלה הפנימית** לפי הבסיס $\mathcal{B}$.
מהגדרתה, G מטריצה **הרמיטית**, כלומר - $G = G^\star$. במקרה הממשי - G סימטרית.

הגדרה 2.9 בנוסף, G **חיובית בהחלט**, -

$$X^\star GX > 0$$

לכל $X \neq 0$. בפרט - G הפיכה (אכן, אם $GX = 0$, אז $X^\star GX = 0$ ולכן $X = 0$)

בכיוון ההפוך - אם Gמטריצה מסדר $n \times n$ מעל F, כך ש-$G = G^\star$ ו-G חיובית בהחלט, אז G היא המטריצה של המכפלה הפנימית $(\alpha, \beta) = Y^\star GX$.
במקרה הכללי -

$$(\alpha, \beta) = Y^\star GX$$

ובמקרה הממשי -

$$(\alpha, \beta) = Y^t GX = X^t G^t Y$$

הגדרה 2.10 1. מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ המצויד במכפלה פנימית

2. מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב אוקלידי

3. מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ נקרה מרחב אוניטרי

משפט 2.11 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. יהיו $\alpha \in V$ ו-$c \in F$ אזי

1. $\|c\alpha\| = |c|\,\|\alpha\|$
2. $\|\alpha\| > 0$ עבור $\alpha \neq 0$.
3. $|(\alpha|\beta)| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$ (אי שוויון קושי-שוורץ)
4. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

הוכחה: ראינו את (1) ו-(2).
נוכיח את אי-שוויון קושי-שוורץ.

ברור עבור $\alpha = 0$, עבור $\alpha \neq 0$ נגדיר $\gamma = \beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\gamma\| = \left(\beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha, \beta - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\right) \\
&= (\beta,\beta) - \left(\beta, \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\right) - \left(\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}, \beta\right) + \left(\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}, \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}\right) \\
&= (\beta,\beta) - \frac{(\alpha|\beta)}{\|\alpha\|^2}(\beta,\alpha) - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}(\alpha,\beta) + \frac{(\alpha,\beta)(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2\|\alpha\|^2}(\alpha,\alpha) \\
&= \|\beta\|^2 - 2\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{\|\alpha\|^2} + \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{\|\alpha\|^4} - \|\alpha\|^2 \\
&= \|\beta^2\| - \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{\|\alpha\|^2}
\end{aligned}$$

ולכן, נקבל

$$|(\alpha,\beta)|^2 \leq \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$$

ובכלל של כל הביטויים אי־שליליים

$$|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$$

■

הוכחה: (אי שוויון המשלוש)

$$\begin{aligned}
\|\alpha+\beta\|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\
&= (\alpha,\alpha) + (\beta,\alpha) + (\alpha,\beta) + (\beta,\beta) \\
&= \|\alpha\|^2 + 2\Re(\alpha,\beta) + \|\beta\|^2 \\
&\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\| + \|\beta\|^2 \\
&= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2
\end{aligned}$$

בגלל שהנורמה היא מספר אי שלילי, אפשר להוציא שורש משני האגפים ־ וקיבלנו את אי שוויון המשולש. ■

2.1.1 דוגמאות

- לכל $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in F^n$, מתקיים

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

זהו אי־שוויון קושי־שוורץ ב־F^n עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

- לכל $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ מתקבל ־

$$|x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_2 + 4x_2y_2| \leq \sqrt{\left[(x_1-x_2)^2 + 3x_2^2\right]\left[(y_1-y_2)^2 + 3y_2^2\right]}$$

זהו אי שוויון קושי שוורץ עם המכפלה הפנימית ־ $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$

-

$$\left|\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 |g(x)|^2\,dx}$$

•
$$\left|\mathrm{tr}\left(AB^{\star}\right)\right| \leq \sqrt{\mathrm{tr}\left(AA^{\star}\right)\mathrm{tr}\left(BB^{\star}\right)}$$

2.2 אורתוגונליות

הגדרה 2.12 1. $\alpha,\beta\in V$ נקראים **אורתוגונליים**, אם $(\alpha,\beta)=0$ (ואז גם $(\beta,\alpha)=0$)

2. קבוצת וקטורים נקראת אורתוגונלית, אם כל שני וקטורים בקבוצה ־ אורתוגונלים.
אם בנוסף, הנורמה של וקטור הקבוצה שווה 1, הקבוצה נקראת **אורתונורמלית.**

2.2.1 דוגמאות

- וקטור ה־0 אורתוגונלי לכל וקטור, והוא הוקטור היחידי בעל תכונה זו
- הבסיס הסטנדרטי של F^n, $B=\{e_1,\ldots,e_n\}'$כאשר e_i היא ה־n־יה עם ה־1 במקום i ו־0 בשאר המקומות, הוא קבוצה אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית
- הבסיס הסטנדרטי של $M_n\left(F\right)$, $B=\{E_{ij}\}$, כאשר E_{ij} מטריצה עם 1 בכניסה ה־ij ואפס בשאר הכניסות, הוא קבוצה אורתונורמלית, ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ־ $\mathrm{tr}\left(AB^{\star}\right)$.
  – נראה דוגמה לזה ־

$$\begin{aligned}\left(E_{ij},E_{kl}\right) &= \mathrm{tr}\left(E_{ik}E_{kl}^{\star}\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ik}E_{lk}\right)\\ &= \delta_{jl}\mathrm{tr}\left(E_{ik}\right)=\delta_{jl}\delta_{ik}\end{aligned}$$

ובפרט,

$$\|E_{ij}\|^2=\left(E_{ij},E_{ij}\right)=\delta_{ii}\delta_{jj}=1$$

לעומת זאת, $\left(E_{ij},E_{kl}\right)=0$ עבור $E_{ij}\neq E_{kl}$

- כל וקטור $\alpha\neq 0$ ניתן לנרמול ־ הנורמה של הוקטור $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$, היא 1 .

2.3 בסיסים אורתוגונלי

משפט 2.13 קבוצה אורתוגונלית של וקטורים שונים מ־0, היא בלתי תלויה לינארית

הוכחה: יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ בקבוצה, ויהי $\beta=c_1\alpha_1+\ldots+c_m\alpha_m$.
לכל i,

$$\begin{aligned}\left(\beta,\alpha_i\right) &= \left(c_1\alpha_1+\ldots+c_m\alpha_m,\alpha_i\right)\\ &= c_1\left(\alpha_1,\alpha_i\right)+\ldots+c_i\left(\alpha_i,\alpha_i\right)+\ldots c_i\left(\alpha_m,\alpha_i\right)\\ &= c_i\left(\alpha_i,\alpha_i\right)=c_i\|\alpha_i\|^2\\ c_i &= \frac{\left(\beta,\alpha_i\right)}{\|\alpha_i\|^2}\end{aligned}$$

בפרט, עבור $\beta=0$, $c_i=0$ לכל i. ■

אם המכפלה היא אורטונורמלית ־ $c_i=\left(\beta,\alpha_i\right)$.

מסקנה 2.14 אם β צירוף לינארי של קבוצה אורתוגונלית, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, אז $\beta=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(\beta,\alpha_i\right)}{\|\alpha_i\|^2}\alpha_i$. אם בנוסף הקבוצה אורתונורמלית, אז

$$\beta=\sum_{i=1}^{n}\left(\beta,\alpha_i\right)\alpha_i$$

הערה 2.15 מספר האיברים בקבוצה אורתוגונלית, תמיד קטן או שווה למימד של V.

משפט 2.16 (תהליך האורתוגונליזציה של גרהם־שמידט)
יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $\beta_1, \ldots, \beta_n$ וקטורים בת"ל.
אז ניתן בנות קבוצה אורתוגונלית של וקטורים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, כך שלכל $1 \leq i \leq n$, הקבוצה $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ מהווה בסיס ל־$\operatorname{span}\{\beta_1, \ldots, \beta_i\}$.

הוכחה: יהי $\alpha_1 = \beta_1$. נבנה את שאר ה־α באופן אינדוקטיבי.
נניח כי בנינו את $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ($1 \leq m < n$) כך ש־ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ יהיה בסיס של $\beta_1, \ldots, \beta_m$, ו־$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ אורתוגונליים.
נבנה את α_{m+1} -
נגדיר

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2} \alpha_i$$

ראשית, α_{m+1} אינו אפס, כי אז β_{m+1} היה ב־$\operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} = \operatorname{span}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, בסתירה לאי־תלות $\beta_1, \ldots, \beta_n$.
בנוסף, עבור $1 \leq j \leq m$, נבדוק ש־$(\alpha_{m+1}, \alpha_j) = 0$-

$$\begin{aligned}
(\alpha_{m+1}, \alpha_j) &= (\beta_{m+1}, \alpha_j) - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_i)}{\|\alpha_i\|^2} (\alpha_i, \alpha_j) \\
&= (\beta_{m+1}, \alpha_j) - \frac{(\beta_{m+1}, \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} (\alpha_j, \alpha_j) \\
&= (\beta_{m+1}, \alpha_j) - (\beta_{m+1}, \alpha_j) = 0
\end{aligned}$$

לסיום - מההנחה, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. מהבניה

$$\beta_{m+1} \in \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\}$$

לכן $\operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\} = \operatorname{span}\{\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}\}$, כמו כן, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ בת"ל כקבוצה אורתוגונלית.■

מסקנה 2.17 לכל מרחב מכפלה פנימית V, יש בסיס אורתונורמלי.

הוכחה: נתחיל עם בסיס כלשהו של V, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, נפעיל עליו את תהליך גרהם־שמידט, ונקבל בסיס אורותוגונלי של V - $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ולבסוף - ננרמל ונקבל בסיס אורתונורמלי של V - $\left\{\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}\right\}$. ■

הערה 2.18 אם $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בסיס אורתונורמלי מסודר של V, אז ביחס אליו - המכפלה הפנימית על V נתונה על ידי

$$\left(\sum x_i \alpha_i, \sum x_i \alpha_i\right) = \sum x_i \bar{y}_i$$

2.3.1 הטלות אורתוגונליות

הגדרה 2.19 יהי W תת מרחב של מרחב מכפלה פנימית V. יהי $\beta \in V$ וקטור כלשהו. נאמר ש־$\alpha \in W$ הוא **קירוב טוב ביותר** של β ב־W אם $\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|$, לכל $\gamma \in W$.

משפט 2.20 (בסימונים של ההגדרה)

1. הוקטור $\alpha \in W$ הוא קירוב טוב ביותר של βב־V $\iff$ $\beta - \alpha$ אורתוגונלי לכל וקטור ב־W.
2. אם קיים קירוב טוב ביותר ל־β, אז הוא יחיד.

3. אם $\dim W<\infty$ ו־$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ בסיס אורתוגונלי של W, אז $\alpha=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}$ הוא קירוב טוב ביותר של β.

הוכחה:

1. ראשית נשים לב שאם $\gamma\in V$, אז $\beta-\gamma=(\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma)$ ולכן

$$\|\beta-\gamma\|^2=\|(\beta-\alpha)\|^2+2\mathrm{Re}\,(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^2 \qquad (\star)$$

לכן, אם $\beta-\alpha$ אורתוגונלית לכל וקטור ב־W, אז לכל $\gamma\in W,\alpha-\gamma\in W$, ולכן ־

$$\|\beta-\gamma\|^2=\|\beta-\alpha\|^2+\|\alpha-\gamma\|^2>_{\gamma\neq\alpha}\|\beta-\alpha\|^2$$

כלומר, α קירוב טוב ביותר של β.
בכיוון ההפוך ־ נניח כי $\|\beta-\gamma\|\geq\|\beta-\alpha\|$ לכל $\gamma\in W$. אז מ־$(\star)$,

$$2\mathrm{Re}\,(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^2\geq 0$$

לכל $\gamma\in W$. מכיוון ש־$\alpha-\gamma\in W$ הוא וקטור כלשהו ב־W, יש לנו שלכל $\tau\in W$,

$$2\mathrm{Re}\,(\beta-\alpha,\tau)+\|\tau\|^2\geq 0$$

בפרט, אם $\alpha\neq\gamma\in W$, נוכל לקחת

$$\tau=-\frac{(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)}{\|\alpha-\gamma\|^2}(\alpha-\gamma)\in W$$

נקבל ש־

$$2\mathrm{Re}\left(-\frac{|(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}\right)+\frac{|(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}\geq 0$$

אבל זה יכול לקרות אם ורק אם $\frac{|(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)|}{\|\alpha-\gamma\|^2}=0$, כלוצר, אם ורק אם $(\beta-\alpha,\alpha-\gamma)=0$. מכיוון ש־$\gamma\in W$, גם $\alpha-\gamma$ וקטור כלשהו ב־W, ולכן $\beta-\alpha$ מאונך לכל וקטור ב־W.

2. אם גם α' קירוב טוב יותר של β, אז $\beta-\alpha'$ מאונך לכל וקטור ב־W, וגם $\beta-\alpha$ מאונך לכל וקטור ב־W. לכן

$$(\beta-\alpha')-(\beta-\alpha)=\alpha-\alpha'\in W$$

מאונך לכל וקטור ב־W, וזה מכריח $\alpha-\alpha'=0$.

נניח כי $\dim W<\infty$. אז יש ל־W בסיס אורתוגונלי $\{\alpha_1\ldots,\alpha_n\}$, ויהי $\alpha:=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|}\alpha_k$.
על מנת להוכיח כי α קירבו טוב ביותר של β, מספיק לוודא ש־$(\beta-\alpha,\alpha_j)=0$ לכל j.
אכן,

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha,\alpha_j) &= (\beta,\alpha_j)-(\alpha,\alpha_j)=\\ &= (\beta,\alpha_j)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|}\alpha_k,\alpha_j\right)\\ &= (\beta,\alpha_j)-(\beta,\alpha_j)=0\end{aligned}$$

■

הגדרה 2.21 יהי V מרחב מכפלה פנימית ו־$S\subseteq V$ תת קבוצה. **המשלים האורתוגונלי של** S הוא

$$S^{\perp}=\{\alpha\in V|\,(\alpha,s)=0,\forall s\in S\}$$

הערה 2.22
- $S^{\perp} \subseteq V$ תת מרחב.
- $V^{\perp} = \{0\}$
- $\{0\}^{\perp} = V$

הגדרה 2.23 הקירוב הטוב ביותר $\alpha \in W$ של וקטור $\beta \in V$, נקרא גם **ההיטל האורתוגונלי** של β על W.
ההעתקה מ־V $E : V \to V$, $\beta \mapsto \alpha$, נקראת "**ההטלה האורתוגונלית של** V **על** W".

$\beta - \alpha \in W^{\perp}$.

משפט 2.24 יהי $W \subseteq V$, תת מרחב ממימד סופי, של מרחב מכפלה פנימית V, ותהי E ההטלה האורטוגונלית של V על W. אז E אופרטור לינארי, $E^2 = E$ (במילים אחרות: E הטלה במובן הרגיל), $\mathrm{Im}E = W$, $\ker E = W^{\perp}$ ו־$V = W \oplus W^{\perp}$.

הוכחה: נותר להוכיח כי E העתקה לינארית.
יהיו $\alpha, \beta \in V$ ו־$c \in F$. אז, מהמשפט הקודם –

$$(\alpha - E\alpha), (\beta - E\beta) \in W^{\perp}$$

לכן, הוקטור

$$c(\alpha - E\alpha) + (\beta - E\beta) = c\alpha + \beta - (cE\alpha + E\beta) \in W^{\perp}$$

כי $W^{\perp}$ תת מרחב. מאחר ו־$cE\alpha + E\beta \in W$, הרי שמהמשפט שמאפיין הטלה אורטוגונלית – נובע כי ההטלה האורתוגונלית של $c\alpha + \beta$ היא $cE\alpha + E\beta$, או – במילים אחרות –

$$E(c\alpha + \beta) = cE\alpha + E\beta$$

ולכן E העתקה לינארית.
השאר – נובע ממה שהוכחנו על הטלות בעבר. ■

הערה 2.25
1. לכל $\beta \in V$, הפירוק של β הוא –

$$\beta = E\beta + (\beta - E\beta)$$

כאשר $E\beta \in W$ ו־$(\beta - E\beta) \in W^{\perp}$. ברור ש־$W \cap W^{\perp} = 0$

2. (כאשר $\dim V < \infty$), האופרטור הלינארי $I - E$ הוא ההטלה האורטוגונלית של V על $W^{\perp}$.

מסקנה 2.26 (אי שוויון בסל)
תהי $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, קבוצה אורתוגונלית של וקטורים $\neq 0$, במרחב מכפלה פנימית – V. לכל $\beta \in V$, מתקיים –

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|(\beta, \alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leq \|\beta\|^2$$

שוויון מתקיים $\iff \beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k$

הוכחה: נסמן $\gamma := \sum_{k=1}^{n} \frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k$.
אז קיים וקטור δ כך ש:

$$\beta = \gamma + \delta, \quad (\gamma, \delta) = 0$$

(אם נסמן את $W = \mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, אז כל β ניתן לסמן כ־$\gamma \in W$ ו־$\delta \in W^{\perp}$, כאשר $\gamma = E\beta$ ו־$\delta = \beta - \gamma$)
לכן, $\|\beta\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2$ (זה נכון רק כי $\gamma \perp \delta$)

מספיק להראות ש- $\|\gamma\|^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{|(\beta,\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2}$, אכן

$$\begin{aligned}
\|\gamma\|^2 &= (\gamma,\gamma)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k,\sum_{l=1}^{n}\frac{(\beta,\alpha_l)}{\|\alpha_l\|^2}\alpha_l\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|}\alpha_k,\frac{(\beta,\alpha_k)}{\|\alpha_k\|}\alpha_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha,\beta_k)}{\|\alpha_k\|^2}\frac{\overline{(\alpha,\beta_k)}}{\|\alpha_k\|^2}\|\alpha_k\|^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{|(\beta,\alpha_k)|}{\|\alpha_k\|^2}
\end{aligned}$$

■

הערה 2.27 אם $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ קבוצה אורתוגונלית, אז אי שוויון בסל נקרא כך -

$$\sum_{k=1}^{n}|(\beta,\alpha_k)|^2\leq\|\beta\|$$

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה כלשהו F.

2.3.2 המרחב הדואלי

הגדרה 2.28 המרחב הוקטורי של אוסף כל ההעתקות הלינאריות מ- V לשדה F נקרא **המרחב הדואלי של** V.
העתקה לינארית מ- V לשדה F, נקראת לעיתים **פונקציונאל לינארי**
המרחב הדואלי מסומן -

$$V^\star:=\mathrm{Hom}\left(V,F\right)$$

טענה 2.29 אם $\dim V\leq\infty$, אז $\dim V^\star=\dim V$

הוכחה: נבחר בסיס $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ של V. נגדיר n פונקציונאלים לינאריים - $f_1,\ldots,f_n\in V^\star$, על ידי

$$f_i\left(\alpha_j\right)=\delta_{ij}$$

ברור ש- $\{f_1,\ldots,f_n\}$ בלתי תלויה לינארית. צריך להראות שהם פורשים את $V^\star$. ■

יהא $f\in V^\star$, אז

$$f=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)f_i$$

יהי $v=\sum a_i\alpha_i\in V$, וקטור כלשהו. אז -

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}f\left(\alpha_i\right)f_i\right)(v) &= \left(\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)f_i\right)\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\alpha_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}f\left(\alpha_i\right)a_if_i\left(\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_if\left(\alpha_i\right)=f(v)
\end{aligned}$$

טענה 2.30 אם $\dim V < \infty$, אז $V \cong (V^\star)^\star$

הוכחה: נגדיר העתקה: $T : V \to V^{\star\star}$.

$$T(v)(f) = f(v) \in F$$

ראשית, נשים לב שלכל $v \in V$, $T(v) \in (V^\star)^\star$, כלומר ש־$T(v) : V \to F$ העתקה לינארית.

$$T(v)\left(cf+g\right)$$

כאשר $f,g \in V^\star$ ו־$c \in F$

$$= \left(cf+g\right)(v) = cf(v) + g(v) = cT(v)(f) + T(v)(g)$$

ולכן זו העתקה לינארית מוגדרת היטב.
מכיוון ש־$\dim V = \dim V^{\star\star}$, מספיק לבדוק ש־$T$ חח"ע.
נניח כי $T(v) = 0$, אז לכל $f \in V^\star$,

$$0 = T(v)(f) = f(v)$$

כלומר, בכל פונקציונאל לינארי f, $f(v) = 0$, וזה $\iff v = 0$. ∎

2.3.3 דואליות במכפלה פנימית

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל F.
נקבע וקטור $\beta \in V$, ונתבונן בהעתקה מ־$V \to F$, $\alpha \mapsto (\alpha, \beta)$.
מלינאריות המכפלה הפנימית במשתנה הראשון, זהו פונקציונאל לינארי.
במילים אחרות ־ הגדרנו העתקה לינארית מ־ $\begin{cases} V \to V^\star \\ \beta \mapsto (\quad, \beta) \end{cases}$.

משפט 2.31 יהי V מרחב מכפלה פנימית <u>ממימד סופי</u>, ויהי $f \in V^\star$ פונקציונאל לינארי על V, אז קיים וקטור יחיד $\beta \in V$ כך ש־$f(\alpha) = (\alpha, \beta)$ לכל $\alpha \in V$.
(במילים אחרות, ההעתקה שהוגדרה קודם היא איזומורפיזם)

הוכחה: יהי $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V.
נגדיר ־ $\beta = \sum_{j=1}^{n} \overline{f\left(\alpha_j\right)} \alpha_j$.
אז לכל $1 \le k \le n$,

$$\begin{aligned} (\alpha_k, \beta) &= \left(\alpha_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{f\left(\alpha_j\right)} \alpha_j\right) \\ &= f\left(\alpha_k\right) \end{aligned}$$

לגבי יחידות ־ היא נובעת מכך שההעתקה שהגדרנו $V \to V^\star$ היא העתקה על בין מרחבים מאותו מימד, ולכן היא גם חח"ע. ∎

דוגמה: המשפט אינו נכון בדר"כ כשהממד אינו סופי -
נקח $V = \mathbb{R}[x]$ עם מכפלה פנימית $(f,g) = \int_0^1 f(t)f(t)dt$.
נקבע $z \in \mathbb{R}$, אז ההעתקה $V \to \mathbb{R}$ שמעתיקה $f \mapsto f(z)$, היא פונקציונאל לינארי. נראה שפונקציונאל זה אינו נתון על ידי מכפלה פנימית בוקטור (פולינום) g.
אחרת, לכל פולינום f -

$$f(z) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

אבל אז, עבור $h := (x-z)$ נקבל

$$0 = \int_0^1 h(t)f(t)g(t)\,dt$$

לכל f.
בפרט, עבור $f = h \cdot g$, נקבל

$$0 = \int_0^1 h\left(t\right) g^2(t)\,dt$$

זה קורה $\iff$ $0 = h(t)g(t) = (x-z)\,g(t)$, וזה מתקיים אם ורק אם $g(t) = 0$. קיבלנו אם כן, שרק פונקציונאל האפס הוא מהצורה $(\ ,g)$.
באופן דומה, מוכיחים שלכל $z_1, \ldots, z_t \in \mathbb{R}$ וסקאלרים $a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{R}$, הפונקציונאל הלינארי $v \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto a_1 f\left(z_1\right) + \ldots + a_t f\left(z_t\right)$$

אינו מהצורה $(\ ,g)$ אלא אם כן הוא פונקציונאל האפס.

משפט 2.32 לכל אופרטור לינארי T על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי V, קיים אופרטור לינארי **יחיד**, $T^\star$ על V כך ש-

$$(T\alpha, \beta) = (\alpha, T^\star\beta)$$

לכל $\alpha, \beta \in V$.

הוכחה: יהי $\beta \in V$. אז ההעתקה $V \to F$ נתונה על ידי $\alpha \mapsto (T\alpha, \beta)$ היא פונקציונאל לינארי.
לכן, קיים וקטור יחיד $\beta' \in V$ כך ש-$(T\alpha, \beta) = (\alpha, \beta')$.
נגדיר העתקה $T^\star : V \to V$ על ידי

$$T^\star(\beta) = \beta'$$

נבדוק ש-$T^\star$ לינארית.
יהיו $\beta, \gamma \in V$ ו-$c \in F$. אז לכל $\alpha \in V$,

$$\begin{aligned}
(\alpha, T^\star\left(c\beta + \gamma\right)) &= (T\alpha, c\beta + \gamma) \\
&= (T\alpha, c\beta) + (T\alpha, \gamma) \\
&= \bar{c}\,(T\alpha, \beta) + (T\alpha, \gamma) \\
&= \bar{c}\,(\alpha, T^\star\beta) + (\alpha, T^\star\gamma) \\
&= (\alpha, cT^\star\beta) + (\alpha, T^\star\gamma) \\
&= (\alpha, cT^\star\beta + T^\star\gamma)
\end{aligned}$$

לכן, $T^\star\left(c\beta + \gamma\right) = cT^\star\beta + T\gamma$.
היחידות ברורה. ■

הגדרה 2.33 האופרטור $T^\star$ נקרא **האופרטור הצמוד של** T.

משפט 2.34 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ויהי $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי מסודר של V. יהי $T : V \to V$ אופרטור, ותהי $A = [T]_B$. אז, $[T^\star]_B = A^\star$.

הוכחה:

1. ראשית, נוכיח ש־$A_{kj} = (T\alpha_j, \alpha_k)$.
מאחר ו־B אורתורנורמלי, $\alpha = \sum_{k=1}^n (\alpha, \alpha_k)\, \alpha_k$. המטריצה A מוגדרת על ידי $T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj}\alpha_k$ מצד שני,
$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n (T\alpha_k, \alpha_k)\, \alpha_k$$
ולכן, $A_{kj} = (T\alpha_j, \alpha_k)$.

2. נסמן ב־$C = [T^\star]$. אז, לפי (1),
$$C_{kj} = (T^\star\alpha_j, \alpha_k) = \overline{(\alpha_k, T^\star\alpha_j)} = \overline{(T\alpha_k, \alpha_j)} = \overline{A_{jk}}$$
לכן, $C = A^\star$.

■

דוגמאות

•
$$V = \mathbb{C}^n \cong M_{n\times 1}(\mathbb{C})$$
עם מכפלה פנימית - $(X, Y) = Y^\star X$. אם $A \in M_n(\mathbb{C})$, אז היא מגדירה העתקה לינארית:
$$V \to V, X \mapsto AX$$
הצמוד של העתקה זו הוא האופרטור
$$V \to V, X \mapsto A^\star X$$
אכן,
$$(AX, Y) = Y^\star AX$$
אבל מתכונות הצמוד,
$$= (A^\star Y)^\star X = (X, A^\star Y)$$
לכל $X, Y \in V$.

• באופן דומה - יהי $V = M_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית -
$$(A, B) = \mathrm{tr}(B^\star A)$$
תהא $M \in M_n(\mathbb{C})$, אז הצמוד של האופרטור
$$V \to V, N \mapsto MN$$
הוא האופרטור
$$V \to V, N \mapsto M^\star N$$
אכן,
$$\begin{aligned}(MA, B) &= \mathrm{tr}(B^\star MA)\\ (A, M^\star B) &= \mathrm{tr}\left((M^\star B)^\star A\right) = \mathrm{tr}(B^\star MA)\end{aligned}$$

- יהי $V=\mathbb{R}\left[x\right]$ עם מכפלה פנימית

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

יהי $D:V\to V$ אופרטור התנע (מחולק ב־$-i\hbar$) - $\frac{\partial}{\partial t}$. נראה של־$D$ אין צמוד.

$$(Df,g)=f\left(1\right)g(1)-f\left(0\right)g\left(0\right)-\left(f,Dg\right)$$

נקבע פולינום g ונבדוק מתי קיים פולינום $D^{\star}g$ כך ש־

$$(Df,g)=\left(f,D^{\star}g\right)$$

לכל f. צריך להתקיים,

$$\left(f,D^{\star}g\right)=f\left(1\right)g\left(1\right)-f\left(0\right)g\left(0\right)-\left(f,Dg\right)$$

לכל f. או, באופן שקול -

$$\left(f,D^{\star}g+Dg\right)=f\left(1\right)g\left(1\right)-f\left(0\right)g\left(0\right)\qquad(\star)$$

ראינו, בדוגמא קודמת על פונקציונאלים לינארים, שהעתקה

$$V\to\mathbb{R},f\mapsto f(1)g(1)-f(0)g(0)$$

היא פונקציונאל לינארי (עבור g קבוע). מ־$\star$ פונקציונאל זה נתון על ידי מכפלה פנימית, וזה יתכן אם ורק אם הוא פונקציונאל האפס.

לכן, אם $D^{\star}g$ קיים, אז בהכרח $g(1)=g(0)=0$. לכן, אם נבחר g כך ש־$g(1)\neq 0$ או $g(0)\neq 0$, $D^{\star}g$ לא יהיה קיים. (תרגיל - השלימו - הראו שאם $g(1)=g(0)=0$, אז $D^{\star}g$ - קיים)

2.3.4 תכונות אופרטור צמוד

משפט 2.35 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
אם $T,U:V\to V$ ו־$c\in F$, אז

.1

$$(T+U)^{\star}=T^{\star}+U^{\star}$$

.2

$$(cT)^{\star}=\bar{c}T^{\star}$$

.3

$$(TV)^{\star}=U^{\star}T^{\star}$$

.4

$$(T^{\star})^{\star}$$

אם B בסיס אורתונורמלי של V, ו־$A = [T]_B$, אז

$$[T^\star]_B = A^\star = \bar{A}^t$$

הערה 2.36 מעניינים במיוחד אופרטורים צמודים לעצמם - $T = T^\star$. יש אנלוגיה בינם לבין מספרים ממשיים.
בהנתן $T : V \to V$ כלשהו,

$$T = \frac{T + T^\star}{2} + i\frac{T - T^\star}{2i}$$

כאשר

$$\begin{aligned} \left(\frac{T + T^\star}{2}\right) &= \frac{T + T^\star}{2} \\ \left(\frac{T - T^\star}{2i}\right) &= \frac{T - T^\star}{2i} \end{aligned}$$

כלומר,

$$T = U_1 + iU_2$$

כאשר U_1, U_2 צמודים לעצמם.

הגדרה 2.37 אופרטורים הצמודים לעצמם נקראים אופרטורים **הרמיטיים** (ראה מחברת פיסיקה קוונטית 1 להרחבה)

דוגמה לכל $T : V \to V$, $TT^\star$ הרמיטי.

2.4 איזומורפיזמים

הגדרה 2.38 יהיו V, W מרחבים מכפלה פנימיתת מעל אותו שדה F. תהי $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית.
נאמר ש־T **שומרת מכפלות פנימיות** אם

$$(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$$

לכל $\alpha, \beta \in V$.
איזומורפיזם (כמרחבי מכפלה פנימית) בין V ו־W הוא איזומורפיזם $T : V \to W$ (כמרחבים וקטורים) השומר מכפלות פנימיות.

הערה 2.39 אם T שומרת מכפלות פנימיות, אז בפרט, $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ לכל $\alpha \in V$

$$\|T\alpha\|^2 = (T\alpha, T\alpha) = (\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2$$

לכן, $T\alpha = 0$ אם ורק אם $\alpha = 0$, לכן T חח"ע.

משפט 2.40 יהיו V, W מרחבים מכפלה פנימית מעל אותו שדה F, כך ש־$\dim V = \dim W$. תהי $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הטענות הבאות שקולות:

1. T שומרת מכפלות פנימיות
2. T איזומורפיזם.
3. T מעבירה כל בסיס אורתנורמלי לבסיס אורתונורמלי של W
4. קיים בסיס אורתונרמלי של V, אותו T מעתיקה לבסיס אורתונורמלי של W.

הוכחה: ■

- $(4)\Rightarrow(3)$ - ברור
- $(2)\Rightarrow(1)$ - ראינו שאם T שומר מכפלות פנימיות, אז T חח"ע, ולכן גם על ($\dim V=\dim W$)
- $(2)\Rightarrow(3)$ - יהי $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז $\{T\alpha_1,\dots,T\alpha_n\}$ בסיס של W,

$$(T\alpha_i,T\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$$

לכן $\{T\alpha_1,\dots,T\alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

- $(1)\Rightarrow(4)$ - יהא $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, כך ש-$\{T\alpha_1,\dots,T\alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של W. אז נקח

$$\alpha=\sum a_i\alpha_i,\ \beta=\sum b_i\alpha_i\in V$$

$$\begin{aligned}(T\alpha,t\beta) &= \left(\sum a_iT\alpha_i,\sum b_iT\alpha_i\right)\\ &= a_i\bar{b_i}\left(T\alpha_i,T\alpha_i\right)=\sum a_i\bar{b_i}\left(\alpha_i,\alpha_i\right)\\ &= \sum a_i\bar{b_i}=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

מסקנה 2.41 יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית ממימד סופי מעל F. אז V ו-Wאיזומורפים (כמרחבי מכפלה פנימית) $\iff \dim V=\dim W$.

הוכחה: נניח כי $\dim V=\dim W$. נקח בסיס אורתונורמלי ל-V- $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. ונקח בסיס אורתונורמלי ל-W-, $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$.
נגדיר - $T:V\to W$ על ידי $T\alpha_i=\beta_i$. אז T מעבירה בסיס אורתונורמלי של V לבסיס אורתונורמלי של W, ולכן היא איזומורפיזם.
דוגמה:

■

אם V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי n מעל F, אז כל בסיס אורתונורמלי $\beta=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ של V איזומורפיזם -

$$\begin{aligned}V &\to F^n\\ \alpha &\mapsto [\alpha]_B\end{aligned}$$

(כאן, F^n מצויק במכפלה הפנימית הסטנדרטית)

אם $T:V\to W$ שומרת מכפלות פנימיות, אז $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$ לכל $\alpha\in V$. ($\|T\alpha\|^2=(T\alpha,T\alpha)=(\alpha,\alpha)=\|\alpha\|^2$)

משפט 2.42 יהי V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה F ותהי $T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית. אזי T שומרת מכפלות פנימיות $\iff$ $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$ לכל $\alpha\in V$.

הוכחה: כיוון אחד ראינו.
בכיוון השני - נזכור שהמכפלה הפנימית ניתנת להבעה באמצעות הנורמה:

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\left(\|\alpha+\beta\|^2-\|\alpha-\beta\|^2\right)$$

ומעל המרוכבים -

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}i^n\left\|\alpha-i\beta\right\|^2$$

לכן אם T שומרת על הנורמה, היא שומרת על המכפלה הפנימית. ■

2.4.1 דוגמאות מחבורות - אופרטורים אוניטריים

נסמן ב- $GL_n(F)$, את חבורת המטריצות ההפיכות מסדר n מעל F. יש הומומורפיזם של חבורות אל החבילה הכפלית -

$$\det : GL_n(F) \to F^\star$$

באופן שקול, $GL_n(F)$ היא חבורת האופרטורים ההפיכים מ-F^n ל-F^n.
באופן כללי, בהנתן מרחב וקטורי V, $\dim V = n$, יש לנו את החבורה $GL(V)$ של כל האופרטורים ההפיכים מ-$V \to V$.

הגדרה 2.43 יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F. אופרטור אוניטרי על V הוא איזומורפיזם מ-$V \to V$.

נסמן ב-$U(V)$ את אוסף כל האופרטורים האונטיריים על V. זוהי חבורה, המהווה תת־חבורה של $GL(V)$.

$$U(v) < GL(V)$$

משפט 2.44 יהא U אופרטור על מרחב מכפלה פנימית V. אז U אוניטרי $\iff$ הצמוד של U קיים, ו-$UU^\star = I = U^\star U$.

הוכחה: נניח כי U אוניטרי, אז לכל $\alpha, \beta \in V$,

$$\begin{aligned} (U\alpha, \beta) &= \left(U\alpha, U\left(U^{-1}\beta\right)\right) \\ &= \left(\alpha, U^{-1}\beta\right) \end{aligned}$$

לכן U^{-1} הוא הצמוד של U - $U^\star = U^{-1}$.
בכיוון ההפוך - נניח כי $U^\star = U^{-1}$. אז לכל α, β -

$$(U\alpha, U\beta) = (\alpha, U^\star U\beta) = (\alpha, \beta)$$

■

הגדרה 2.45 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת אוניטרית אם $AA^\star = I$.

משפט 2.46 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ו-$U : V \to V$ אופרטור. אז U אוניטרי $\iff$ המטריצה המיצגת של V לפי איזשהו (או כל) בסיס אורתונורמלי היא מטריצה אוניטרית.

עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית, $A^\star A = I$. מה זה אומר?

$$\begin{aligned} \left(A^\star A\right)_{jk} &= \delta_{jk} \\ \sum_{j=1}^{n} \left(A^\star\right)_{ji} A_{ik} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{A_{ij}} A_{ik} \end{aligned}$$

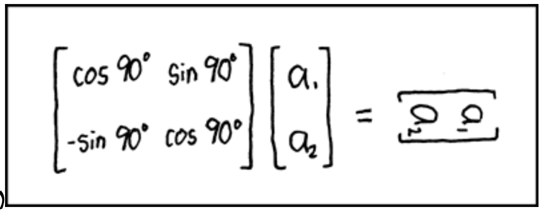
יש לנו - $\sum_{i=1}^n \bar{A}_{ij} A_{ik} = \delta_{jk}$. אבל זה אומר בדיוק שעמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי $\mathbb{C}^n$.

משפט 2.47 $A \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטריים, $\iff$ עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ $\iff$ שורות A מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$.

הגדרה 2.48 אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מקיימת $A^t A = I$, A נקראת מטריצה אורתוגונלית.

דוגמאות

- לכל $\theta\in\mathbb{R}$, נגדיר מטריצה $A_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ אז A_θ אורתוגונלית. קל לבדוק שהשורות (עמודות)



־מליות. כמו כן, קל לבדוק שהאופרטור $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \alpha\mapsto A_\theta\alpha$ הוא סיבוב בזווית θ. (מתוך xkcd.com)

- תהי $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$. אז A אורתוגונלית $\iff$ $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ ו־$a^2+b^2=1$ או $\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$ ו־$a^2+b^2=1$.
  - נדרוש־ $\begin{cases}ab+cd=0\\ a^2+c^2=1\\ b^2+d^2=1\\ ac+bd=0\end{cases}$.
  - שני המקרים נבדלים בסימן (± 1) של $\det A$.
  - תת החבורה האורתוגונלית של GL_n -

$$\begin{aligned}O(n) &= \left\{A\in M_n(\mathbb{R})\,|A^tA=I\right\}\\ U(n) &= \left\{A\in M_n(\mathbb{C})\,|A^\star A=I\right\}\end{aligned}$$

נגדיר תת חבורה נוספת של $GL(n,\mathbb{C})$ -

$$T^+(n,\mathbb{C})=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\,|A\text{ Lower triangle matrix with positive diagonal}\}$$

משפט 2.49 לכל מטריצה $B\in GL(n,\mathbb{C})$ קיימת מטריצה יחידה $M\in T^+(n,\mathbb{C})$ כך ש־$MB\in U(n)$.

הוכחה: השורות $\beta_1,\ldots,\beta_n$ של B מהוות בסיס של $\mathbb{C}^n$. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הוקטורים המתקבלים מ־$\beta_1,\ldots,\beta_n$, על ידי תהליך גרהם שמידט:

אז לכל $1\le k\le n$ - $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ בסיס אורתוגונלי של $\operatorname{span}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, ו־$\alpha_k=\beta_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\beta_k,\alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2}\alpha_j$
לכן - עבור כל k - קיימים סקאלרים יחידים c_{kj} כך ש־ $\alpha_k=\beta_k-\sum_{j<k}c_{kj}\beta_j$.
תהא U המטריצה האוניטרית עם שורות

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\ldots,\frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$$

ותהא M המטריצה ב־$T(n,\mathbb{C})$ המוגדרת על ידי:

$$M_{kj}=\begin{cases}-\frac{1}{\|\alpha_k\|}c_{kj} & j<k\\ \frac{1}{\|\alpha_k\|} & j=k\\ 0 & j>k\end{cases}$$

מתקיים -

$$\frac{\alpha_k}{\|\alpha_k\|}=\sum_{j=1}^{n}M_{kj}\beta_j$$

לכל $1 \le k \le n$.
אבל n משוואות אלו - פשוט אומרות ש־$MB = U$.
נותר לנו להוכיח יחידות: נניח כי $M_1 B = U_1$ ו־$M_2 B = U_2$.
אז,

$$\begin{aligned} M_1^{-1} U_1 &= M_2^{-1} U_2 \\ T^+(n,\mathbb{C}) \ni M_2 M_1^{-1} &= U_2 U_1^{-1} \in U(n) \end{aligned}$$

אבל גם $\left(M_2 M_1^{-1}\right)^{-1} \in T^+(n,\mathbb{C})$ (סגירות להופכי של החבורה) שהיא משולשית אליונה - כי שווה ל־$\left(M_2 M_1^{-1}\right)^\star$, ולכן היא אלכסונית.
לכן, $M_2 M_1^{-1}$ אלכסונית, ומאחר והיא אוניטרית - על האלכסון מופיעים מספרים בעלי ערך־מוחלט 1. מכיוון שהם ב־$\mathbb{R}^+$ - הם שווי ל־1. לכן - $M_2 M_1^{-1} = I$ כלומר - $M_1 = M_2$. ■

מסקנה 2.50 לכל מטריצה $B \in GL_n(\mathbb{C})$, קיימות מטריצות יחידות $N \in T^+(n,\mathbb{C})$ ו־$U \in U(n)$ כך ש־ $\boxed{B = NU}$.

2.5 לכסון אורתונורמלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $F = \mathbb{R},\mathbb{C}$. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי.
מתי T ניתן לליכסון אורתונורמלי?
(כלומר, מתי קיים ל־V בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T)
נניח כי T ניתן לליכסון אורתונורמלי.
כלומר, קיים בסיס אורתונורמלי $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ כך ש־$T\alpha_i = c_i \alpha_i$, $1 \le i \le n$ עבור אישהם $c_i \in F$.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

המטריצה שמייצגת את $T^\star$ -

$$[T^\star]_B = \begin{pmatrix} \bar{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{c}_n \end{pmatrix}$$

לכן, אם $F = \mathbb{R}$, אז $T = T^\star$ כלומר, T צמוד לעצמו.
אם $F = \mathbb{C}$, אז $TT^\star = T^\star T$.
נרצה להוכיח שאם אופרטורים מקיימים את התנאים הנ"ל, אז הם לכסינים.

הגדרה 2.51 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, ויהא $T : V \to V$. נאמר כי T **נורמלי** אם

$$TT^\star = T^\star T$$

דוגמה אם T צמוד לעצמו - אז T נורמלי.

$$V = W \oplus W^\perp$$

$E : V \to V$ הטלה על W

$$[E]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

2.5.1 אופרטורים צמודים לעצמם

משפט 2.52 יהא V מרחב מכפלה פנימית, $T: V \to V$, $T = T^{\star}$. אז הערכים העצמיים של T, ממשיים, ווקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים - הם אורתוגונלים.

הוכחה: יהא c ערך עצמי של T, ויהא $\alpha \neq 0$ כך ש- $T\alpha = c\alpha$.
אז,

$$\begin{aligned} c(\alpha,\alpha) &= (c\alpha,\alpha) = (T\alpha,\alpha) = (\alpha, T^{\star}\alpha) \\ &= (\alpha, T^{\alpha}) = (\alpha, c\alpha) = \bar{c}(\alpha,\alpha) \end{aligned}$$

מאחר ו-$(\alpha,\alpha) \geq 0$, מתקבל - $c = \bar{c}$ ולכן הוא ממשי.
נניח כי $c_1 \neq c_2$ ערכים עצמיים של T, ויהיו $\alpha, \beta \neq 0$ כך ש- $T\alpha = c_1\alpha$ ו-$T\beta = c_2\beta$.
אז

$$\begin{aligned} c_1(\alpha,\beta) &= (T\alpha,\beta) = (\alpha, T^{\star}\beta) \\ &= (\alpha, c_2\beta) = c_2(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

ולכן,

$$(c_1 - c_2)(\alpha,\beta)$$

מכיוון ש-$c_1 - c_2 \neq 0$, מתקבל ש-$(\alpha,\beta) = 0$, כלומר - מרחבים עצמיים שונים - אורתוגונלים. ■

משפט 2.53 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי $n > 0$ (V מעל $F \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$, אבל במקרה המרוכב זה לא מעניין)
$T: V \to V$, $T = T^{\star}$. אז ל-T יש וקטור עצמי שונה מאפס. (כלומר, יש ל-T ערך עצמי)

הערה 2.54 התוכן של המשפט הוא במקרה הממשי.

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי B, של V, ותהא $A = [T]_B$.
מאחר ו-$T = T^{\star}$, $A = A^{\star}$.
נתבונן במרחב $W = M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $(X,Y) = Y^{\star}X$.
יהא $U: W \to W$ האופרטור - $X \mapsto AX$. מכיון ש-$A = A^{\star}$, $U = U^{\star}$.
מכיוון שאנחנו מעל $\mathbb{C}$, לאופרטור U יש ערך עצמי, c, ומהמשפט הקודם, $\boxed{c \in \mathbb{R}}$. כלומר, קיים $X \in W$, כך ש- $AX = cX$.
אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, צריך להראות שיש X כזה עם כניסות ממשיות.
אכן, קיים פתרון ב-F ל-$(A - cI)X = 0$, כי A ב-F ו-c ממשי.
(השורה של שלומי: קיים פתרון ב-$\mathbb{R}$ ל-$(A - cI)X = 0$, כי A ו-c ממשיים) ■

דוגמת-נגד למימד אינסופי אם $\dim V = \infty$, אז המשפט אינו נכון. יהא V מרחב הפונקציות הרציפות מ-$[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$ עם מכפלה פנימית

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = (f,g)$$

נתבונן באופרטור $T: V \to V$, $f(t) \mapsto tf(t)$ (צמוד לעצמו)
$T^{\star} = T$, נניח כי-$tf = cf$, $c \in \mathbb{R}$.
אז

$$tf(t) = cf(t)$$

לכל t, אזי

$$(c - t)f(t) = 0, \forall t$$

עבור $t \neq 0$, $f(t) = 0$ ובגלל הרציפות, $f(t) = 0$ לכל t.

משפט 2.55 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ותהא $T : V \to V$. יהא $W \subseteq V$ T-אינוריינטי, אז $W^\perp \subseteq V$ הוא $T^\star$-אינוריינטי.

הוכחה: יהא $\beta \in W^\perp$ ויהא $\alpha \in W$.

אז מספיק להראות ש- $\alpha \perp T^\star\beta$. $(\alpha, T^\star\beta) = \left(\underbrace{T\alpha}_{\in W}, \beta\right) = 0$ ■

משפט 2.56 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופית ויהא $T : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמוץ אז יש ל-V בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T.

במילים אחרות - T ניתן ללכסון אורתונורמלי.

הוכחה: ממשפט קודם, יש ל-T וקטור עצמי α. יהא $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$. אם $\dim V = 1$ אז סיימנו.

אחרת, נמשיך באינדוקציה על $n = \dim V$.

יהיא $W = \operatorname{span}\{\alpha_1\}$. זהוא תת מרחב T-אינוריינטי. מהמשפט הקודם, $W^\perp$ גם כן T-אינוריינטי ($T = T^\star$).

מכיוון ש-$\dim V < W^\perp$, הרי שמהנחת האינדוקציה, יש ל-$W^\perp$ בסיס אורתונורמלי $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ של וקטורים עצמיים של האופרטור T מצומצם ל-$W^\perp$.

מכיוון ש-$V = W \oplus W^\perp$, הרי ש-$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, המורכב מוקטורים עצמיים של T.

■

מסקנה 2.57 תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$, מטריצה הרמיטית (כלומר, $A = A^\star$). אז - קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית (או $P^\star AP$ אלכסונית).

אם $A \in M_n(\mathbb{R})$, קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית. (או - P^tAP אלכסונית).

הוכחה: יהא $V = M_{n\times1}(\mathbb{C})$, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. ויהא $T : V \to V$ האופרטור המיוצג על ידי A לפי הבסיס הסטנדרטי. מאחר ו-$A = A^\star$, הרי ש- $T = T^\star$.

יהא $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, בסיס אורתונורמלי של V כך ש-$T\alpha_j = c_j\alpha_j$, $1 \le j \le n$. תהא $D = [T]_B$, אז

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

אז אם P המטריצה עם עמודות $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, אז $D = P^{-1}AP$. אבל P אוניטרית, כי העמודות שלה מהוות בסיס אורתונורמלי.

במקרה שבו A היא מטריצה ממשית, סימטרית, נקח את $V = M_{n\times1}(\mathbb{R})$, עם המכפלה הסטנדרטית, ונחזור על אותו טיעון. במקרה זה, $P \in O(n)$. ■

נסכם, יהא V מרחב מכפלה פנימית ממשי ממימד סופי, ויהא $T : V \to V$ אופרטור. אז T ניתנת ללכסון אורתונורמלי אם ורק אם $T = T^\star$ באופן קשול, $A \in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה אורתונורמלית, אם ורק אם $A = A^t$.

נכליל למקרה הנורמלי (כלומר, ל-$\mathbb{C}$).

2.5.2 הכללה לאופרטורים נורמליים

משפט 2.58 יהא V מרחב מכפלה פנימית ו-$T : V \to V$ נורמלי.

יהא $\alpha \in V$. אז α וקטור עצמי של T עם ערך עצמי C $\iff$ α וקטור עצמי של $T^\star$ עם ערך עצמי $\bar{c}$.

הוכחה: ראשית, נוכיח את התכונה הבאה של אופרטור נורמלי T: לכל $\alpha \in V$ - $\|T\alpha\| = \|T^\star\alpha\|$.

אכן,

$$\begin{aligned} \|T\alpha\|^2 &= (T\alpha, T\alpha) = (\alpha, T^\star T\alpha) = (\alpha, TT^\star\alpha) = (T^\star\alpha, T^\star\alpha) \\ &= \|T^\star\alpha\|^2 \end{aligned}$$

כעת, עבור $c \in \mathbb{C}$, האופרטור $U := T - cI$ גם כן נורמלי - אכן

$$U^\star = (T - cI)^\star = T^\star - \bar{I}$$

וקל לבדוק ש־$U^\star U = UU^\star$. מכיוון ש־$(T-cI)\alpha = 0$, הרי ש־$\|(T-cI)\alpha\| = 0$. לכן ־ $\|(T^\star - \bar{c}I)\alpha = 0\|$
וזה קורה אם ורק אם $\|(T-\bar{c}I)\alpha\| = 0$, כלומר ־ $T^\star\alpha = \bar{c}\alpha$. ■

הגדרה 2.59 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ אם $AA^\star = A^\star A$.

דוגמה: במשפט הבא נוכיח כי מטריצה משולשית עליונה היא נורמלית $\iff$ היא אלכסונית.

משפט 2.60 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $T : V \to V$, ו־B בסיס אורתונורמלי. נניח כי $A = [T]_B$ משולשית עליונה. אז T נורמלית $\iff$ A אלכסונית.

הוכחה: מאחר ו־B בסיס אורתונורמלי, $A^\star$ מייצגת אצ $T^\star$ לפי B, ואם A אלכסונית, אז $A^\star A = AA^\star$ וזה גורר ש־$T^\star T = TT^\star$.

בכיוון ההפוך ־ נניח כי T נורמלית, ויהא $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

מאחר ו־A משולשית עליונה, $T\alpha_1 = A_{11}\alpha_1$. אז מהמשפט הקודם, $T^\star\alpha_1 = \bar{A}_{11}\alpha_1$.

מצד שני

$$T^\star\alpha_1 = A^\star\alpha_1 = \sum_j A^\star_{j1}\alpha_j = \sum_J \bar{A}_{1j}\alpha_j$$

ולכן, $A_{1j} = 0$ לכל $j > 1$, ובפרט ־ $A_{12} = 0$, ומאחר ו־A משולשית עליונה, נובע כי $T\alpha_2 = A_{22}\alpha_2$. לכן $T^\star\alpha_2 = \bar{A}_{22}\alpha_2$ ו־$A_{2j} = 0$ לכל $j \neq 2$. נמשיך באופן זה ונראה כי A אלכסונית. ■

משפט 2.61 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, מעל $\mathbb{C}$, ויהא $T : V \to V$ אופרטור, אז קיים בסיס אורתונורמלי של V לפיו V מיוצגת על ידי מטריצה משולשית עליונה.

הוכחה: יהא $n = \dim V$. המשפט נכון עבור $n = 1$, נניח נכונות עבור $n - 1$.

מכיוון שאנו מעל $\mathbb{C}$, קיים וקטור יחידה $\alpha \in V$ וסקלר $c \in \mathbb{C}$ כך ש־$T^\star\alpha = c\alpha$.

יהא $W = \operatorname{span}\{\alpha\}^\perp$, ותהא $S := T|_w$ (W הוא T־אינוריינטי ממשפט קודם).

מאחר ו־$\dim W < \dim V$, הרי שמהנחת האינדקציה, יש ל־W בסיס אורתונורמלי $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ לפיו S מיוצגת על ידי מטריצה משולשית עליונה.

יהא $\alpha_n = \alpha$, אז T מיוצגת לפי $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ על ידי מטריצה משולשית עליונה. ■

מסקנה 2.62 לכל $A \in M_n(\mathbb{C})$, קיימת U אוניטרית כך ש־$A^{-1}AU$ משולשית עליונה

משפט 2.63 יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, ויהא $T : V \to V$ אופרטור **נורמלי**. אז יש ל־V בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T.

הוכחה: נובע מידית משני המשפטים הקודמים. ■

מסקנה 2.64 לכל מטריצה נורמלית $A \in M_n(\mathbb{C})$ יש מטריצה אוניטרית P כך ש־$P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.5.3 המשפט הספקטרלי

משפט 2.65 (הפירוק הספקטרלי)

יהא $T : V \to V$ אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, או אופרטור צמוד לעצמו על מרחב מכפלה פנימית V ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $c_1, \ldots, c_k$ הערכים העצמיים השונים של T, ו־$W_1, \ldots, W_k$ המרחבים העצמיים המתאימים, ו־$E_1, \ldots, E_k$ ההטלות האורטוגונליות מ־V על $W_1, \ldots, W_k$ בהתאמה.

אז W_i אורתוגונלי ל־ W_k עבור $i \neq j$, $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, $I = E_1 + \ldots + E_k$ ו־$T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$.

3 תבניות בי־לינאריות

הגדרה 3.1 יהא V מרחב וקטורי מעל שה F. **תבנית בילינארית** על V היא פונקציה

$$f : V \times V \to F$$

המקיימת לינאריות בשני המשתנים ־

$$\begin{aligned} f\left(c\alpha_1+\alpha_2,\beta\right) &= cf\left(\alpha_1,\beta\right)+f\left(\alpha_1,\beta\right) \\ f\left(\alpha,c\beta_1+\beta_2\right) &= cf\left(\alpha,\beta_1\right)+f\left(\alpha,\beta_2\right) \end{aligned}$$

אוסף התבניות הלינאריות על V יסומן ב־$L\left(V,V,F\right)$, והוא מהווה תת מרחב של אוסף הפונקציות מ־$V \times V \to F$.

דוגמאות:

1. יהיו $L_1,L_2 \in V^\star$ (כלומר, $L_1,L_2 : V \to F$ פונקציונאלים לינאריים). נגדיר $f : V \times V \to F$ על ידי $f\left(\alpha,\beta\right)=L_1\left(\alpha\right)L_2\left(\beta\right)$.

2. יהא $V=M_{m\times n}\left(F\right)$ ותהא $A\in M_m\left(F\right)$. נגדיר תבנית:

$$f_A : V \times V \to F,\ f_A\left(X,Y\right)=\operatorname{trace}\left(X^tAY\right)$$

העיקבה היא לינארית, וגם כל שאר הפעולות ־ אז ברור שזוהי תבנית לינארית.
למשל,

$$\begin{aligned} f_A\left(cX_1+X_2,Y\right) &= \operatorname{trace}\left(\left(cX_1+X_2\right)^tAY\right) \\ &= \operatorname{trace}\left(cX_1^tAY+X_2^tAY\right) \\ &= c\operatorname{trace}\left(X_1^tAY\right)+\operatorname{trace}\left(X_2^tAY\right) \\ &= cf\left(X_1,Y\right)+f\left(X_2,Y\right) \end{aligned}$$

במקרה הפרטי, $n=1$, נקבל עבור $X=\left(x_1,\ldots,x_n\right),Y=\left(y_1,\ldots y_n\right)$ ש־

$$f_A\left(X,Y\right)=X^tAY=\sum_{i,j}A_{ik}x_iy_j$$

יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל f, ויהא $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ בסיס מסודר של V. נניח כי f תבנית בילינארית על V.
ו־$X=\left(x_i\right)=\left[\alpha\right]_B$ ו־$Y=\left(y_i\right)=\left[\beta\right]_B$.

$$\begin{aligned} f\left(\alpha,\beta\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\beta\right)=\sum_{i=1}^n x_if\left(\alpha_i,\beta\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_if\left(\alpha_i\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf\left(\alpha_i,\alpha_j\right) \end{aligned}$$

אז, אם נסמן $A_{ij}=f\left(\alpha_i,\alpha_j\right)$, אז

$$f\left(\alpha,\beta\right)=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_iy_j=X^tAY$$

לכן, כל תבנית בילינארית על V, היא מהצורה $f\left(\alpha,\beta\right)=\left[\alpha\right]_B^tA\left[\beta\right]_B$ עבור איזושהי $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$. נסמן ־ $A=\left[f\right]_B$
($\left[\alpha\right]_B$ הוא וקטור הקואורדינטות של α לפי בסיס B)
הוכחנו, אם כן, את המשפט הבא:

משפט 3.2 יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F. עבור בסיס מסודר נתון B, ההעתקה $L(V,V,F) \to M_n(F), f \mapsto [f]_B$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטורים, ולכן

$$\dim L(V,V,F) = (\dim V)^2$$

מסקנה 3.3 אם $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס מסודר של V ו־$B^\star = \{L_1, \ldots, L_n\}$ הבסיס הדואלי של $V^\star$(כלומר - $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$).

אז n^2 התבניות הבילינאריות

$$f_{ij}(\alpha,\beta) = L_i(\alpha) L_j(\beta)$$

כאשר $1 \leq i,j \leq n$, אז הן מהוות בסיס למרחב $L(V,V,F)$.

הערה 3.4 נשים לב ש־$[f_{i,j}] = E_{ij}$ לכל i,j.

3.0.4 שינוי בסיס

יהיו $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$, שני בסיסים של V.
ותהא f תבנית בילינארית. תהא P המטריצה ההפיכה $P \in GL_n(f)$ כך ש־ $\forall \alpha \in V$, $[\alpha]_B = P[\alpha]_{B'}$.
כלומר, $\alpha_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha'_i$.
לכל $\alpha, \beta \in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= [\alpha]_B^t [f]_B [\beta]_B \\ &= \left(P[\alpha]_{B'}\right)^t [t]_B P [\beta]_{B'} \\ &= [\alpha]_{B'}^t \left(P^t [f]_B P\right) [\beta]_{B'} \end{aligned}$$

ומצד שני, $f(\alpha,\beta) = [\alpha]_{B'}^t [f]_{B'} [\beta]_{B'}$ ולכן קיבלנו

$$\boxed{[f]_{B'} = P^t [f]_B P}$$

מסקנה 3.5 למטריצות המייצגות תבנית בילינארית f יש אותה דרגה.

הגדרה 3.6 תהא f תבנית ביליניארת על מרחב וקטורי ממימד סופי V. **הדרגה** של f היא הדרגה של מטריצה המייצגת את f.

אם $f : V \times V \to F$ תבנית בילינארית. נקבע $\alpha \in V$, ונתבונן בפונקציה $L_f^{(\alpha)} : V \to F$, $L_f^{(\alpha)}(\beta) = f(\alpha\beta)$.
מכיוון ש־f לינארית במשתנה השני, $L_f^{(\alpha)} \in V^\star$.
באופן דומה, נקבע $\beta \in V$ ונקבל פונקצינאל לינארי - $R_f^{(\beta)} \in V^\star$, $R_f^{(\beta)}(\alpha) = f(\alpha,\beta)$
הגדרנו העתקות $V \to V^\star$. $\alpha \mapsto L_f(\alpha), \beta \mapsto R_f^{(\beta)}$.

משפט 3.7 תהא $f \in L(V,V,F)$, ויהיו $L_f, R_f \in \mathrm{Hom}(V,V^\star)$, העתקות שהוגדרו לעיל.
אז הדרגה של f שווה לדרגות של L_f ו־R_f.

הוכחה: מספיק להוכיח כי ל־L_f ו־R_f יש גרעינים מאותו מימד.
יהא B בסיס מסודר של V, ותהא $A = [f]_B$, אם $\alpha, \beta \in V$ עם קוארדינטות X, Y אז

$$f(\alpha,\beta) = X^T AY$$

כעת, $R_f(\beta) = 0$, אומר ש־$f(\alpha,\beta) = 0$ לכל $\alpha \in V$, כלומר ש־$X^t AY = 0$ לכל X. זה אומר ש־$AY = 0$,
לכן מימד הגרעין של R_F הוא מימד מרחב הפתרונות של A, $n - \mathrm{rank} A$
באופן דומה, $L_f(\alpha) = 0 \iff f(\alpha,\beta) = 0$ לכל $\beta \in V$, $\iff X^T AY = 0$ לכל Y $\iff A^t X = 0$.
לכן, מימד הגרעין של L_f הוא מימד מרחב הפתרונות של A^t, הוא $n - \mathrm{rank} A$. ■

מסקנה 3.8 אם f תבנית בילינארית על מרחב n־מימדי V, אז הטענות הבאות שקולות:

- $\mathrm{rank} f = n$
- לכל $0 \neq \alpha \in V$, קיים $\beta \in V$ כך ש־$f(\alpha, \beta) \neq 0$
- לכל $0 \neq \beta \in V$, קיים $\alpha \in V$ כך ש־$f(\alpha, \beta) \neq 0$.

הגדרה 3.9 תבנית בילינארית f על מרחב וקטורי V נקראת לא מנוונת אם היא מקימת את התנאים במסקנה 3.8.

דוגמה המכפלה הפנימית הסטנדרטית על R^n היא תבנית בילינארית לא מנוונת.

הערה 3.10 f לא מנוונת $\iff$ $[f]_B$ הפיכה.

הגדרה 3.11
- תבנית סימטרית:$f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in B$ $\iff$ $[f]_B$ סימטרית
- תבנית אנטי־סימטרית ־ $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in V$ $\iff$ $[f]_B$ אנטיסימטרי

הערה 3.12 בהנתן כל תבנית מ־$V \times V \to F$, כאשר $n = \dim V < \infty$, ניתן לדבר על החבורה

$$\{T : V \to V | f(T\alpha, T\beta) = f(\alpha, \beta)\, \forall \alpha, \beta \in V\}$$

תת חבורה של $GL(V)$.

תורת לי מתעסקת בחורות כאלו כאשר $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

3.1 תבניות סימטריות

טענה 3.13 תהא $f : V \times V \to F$ תבנית בילינארית.
f תבנית סימטרית ($f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$ לכל $\alpha, \beta \in V$) $\iff$ $[f]_B$ מטריצה סימטרית לכל בסיס B.

הוכחה: יהא B בסיס מסודר של V. יהיו $\alpha, \beta \in V$, ונסמן $X = [\alpha]_B$ ו־$Y = [\beta]_B$.
תהא $A = [f]_B$

$$f(\alpha, \beta) = X^t A Y$$

מצד שני, אם $A = A^t$ (כלומר, A סימטרית) אז

$$f(\alpha, \beta) = X^t A Y = \left(X^t A Y\right)^t$$

כי $X^t A Y$ הוא סקאלר, ולכן הוא שווה לטרנזפוז שלו

$$= Y^t A^t X = Y^t A X = f(\alpha, \beta)$$

בכיוון ההפוך, אם f תבנית סימטרית ו־$B = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ בסיסמסודר של V אז

$$[f]_B = (f(\alpha_i, \alpha_j))_{ij}$$

ולכן

$$A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ji}$$

והמטריצה A סימטרית. ■

הגדרה 3.14 אם F תבנית סימטרית, אז **התבנית הריבועית** שלה היא הפונקציה $q : V \to F$ המוגדרת על ידי

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$$

(מציין של שדה ־ המספר המינימלי של פעמים שצריך לחבר כדי לקבל 0. מציין 2, כלומר ־ $1+1=0$)

טענה 3.15 אם המציין של השדה F הוא לא 2, אז תבנית סימטרית F נקבעת לחלוטין על ידי התבנית הריבועית שלה.

הוכחה: אכן, יש לנו את הזהות הקוטבית

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\left[q(\alpha+\beta)-q(\alpha-\beta)\right]$$

לכל $\alpha,\beta\in V$.

$$\begin{aligned} q(\alpha+\beta)-q(\alpha-\beta) &= f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta,\alpha-\beta) \\ &= f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta) \\ &- f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)-f(\beta,\beta) \end{aligned}$$

ואם f סימטרית אז

$$=4f(\alpha,\beta)$$

■

דוגמה המכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$,

$$f((x_1,\dots x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

והתבנית הריבועית המתאימה היא

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

התבנית

$$\begin{aligned} f_A(x,y) &= X^tAY \\ q(x) &= \sum_{i,j}A_{i,j}X_iX_j \end{aligned}$$

משפט 3.16 (ליכסון תבניות סימטריות)
יהא V מרחב וקטורי מעל שדה עם מציין 0 , ותהא f תבנית סימטרית על V. אז קיים בסיס מסודר B של V, לפיו f מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית.

הוכחה: עלינו למצוא בסיס מסודר $B=\{\alpha_1,\dots\alpha_n\}$, כך ש־$f(\alpha_i,\alpha_j)=0$ לכל $i\neq j$.
אם $f=0$ או אם $n=1$ זה ברור.
נניח $f\neq 0$ ו־$n>1$. מהזהות הקוטבית (והיא קיימת רק עבור תבניות סימטריות) , נובע כי קיים $\alpha\in V$, עבורו $q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)\neq 0$.
יהא $W=\operatorname{span}\{\alpha\}$, ונגדיר $W^\perp=\{\beta\in V|f(\alpha,\beta)=0\}$.
נראה כי $V=W\oplus W^\perp$.
ראשית, נראה ש־$W\cap W^\perp=0$.שכן אם $c\alpha\in W^\perp$, אזי

$$0=f(c\alpha,\alpha)=c\underbrace{f(\alpha,\alpha)}_{\neq 0}$$

ולכן, $c = 0$.

נותר להראות ש־$V = W + W^{\perp}$. לכל $\gamma \in V$, יש לנו

$$\gamma = \underbrace{\frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha\alpha)}\alpha}_{\in W} + \left(\gamma - \frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha\alpha)}\alpha\right)$$

נראה ש־ $\left(\gamma - \frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha\alpha)}\alpha\right) \in W^{\perp}$.

$$\begin{aligned} f\left(\gamma - \frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha\alpha)}\alpha, \alpha\right) &= f(\gamma,\alpha) - \frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha,\alpha)} f(\alpha,\alpha) \\ &= f(\gamma,\alpha) - f(\gamma,\alpha) = 0 \end{aligned}$$

לכן $V = W + W^{\perp}$.

ולסיום, קיבלנו ש־$V = W \oplus W^{\perp}$.

התבנית f מצומצמת ל־$W^{\perp}$ היא תבנית בילינארית סימטרית על מרחב ממימד $n-1$. לכן, אם הצמצום שונה מאפס, קיים, מהנחת האינדוקציה, בסיס $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ של $W^{\perp}$ לפיו f מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית.

לכן, f מיוצגת על ידימטריצה אלכסונית לפי הבסיס, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ כאשר $\alpha_1 = \alpha$. ■

מסקנה 3.17 יהא F שדה עם מציין 0, ותהא $A \in M_n(F)$ מטריצה סימטרית. אז קיימת $P \in GL_n(F)$ כדש־$P^t A P$ אלכסונית.

הערה 3.18 במקרה $F = \mathbb{R}$, הוכנו בעבר שניתן לקחת P כזו אורתוגונלית, כלומר $P^t = P^{-1}$.

מעל המרוכבים

משפט 3.19 יהא Vמרחב וקטורי ממימד סופי n מעל $\mathbb{C}$. תהא f תבנית בילינארית סימטרית על Vמדרגה r.

אז קיים בסיס מסודר $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ של V, כך ש־ $f(\beta_i, \beta_i) = \begin{cases} 1 & 1 \le i \le r \\ 0 & i > r \end{cases}$.

במילים אחרות ־

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(r פעמים 1 על האלכסון, ו־$n-r$ אפסים)

הוכחה: מהמשפט הקודם קיים בסיס מסודר, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ של V, כך ש־$1 \le i \le r$, $f(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ ו־ $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ אחרת.

אם $\sqrt{f(\alpha_i, \alpha_i)}$ מסמן שורש של $f(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{C}$, ונגדרי

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f(\alpha_i,\alpha_i)}}\alpha_i & 1 \le i \le r \\ \alpha_i & i > r \end{cases}$$

אז $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ בסיס של V המקיים את הנדרש. ■

מסקנה 3.20 בפרט, כל המטריצות הסימטריות ההפיכות ב־$M_n(\mathbb{C})$ שקולות למטריצת היחידה I. כלומר, לכל $A = A^t$, קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־$P^t A P = I$.

מעל הממשיים

משפט 3.21 יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי n מעל $\mathbb{R}$. תהא f תבנית סימטרית על V מדרגה r.
אז קיים בסיס מסודר $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ של V לפיון f מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית כך ש־$f(\beta_i, \beta_i) = \pm 1$ לכל $1 \le i \le r$ ו־$f(\beta_i, \beta_i) = 0$ לכל $i > r$.
יתר על כן, מספר ה־β_i עבורם $f(\beta_i, \beta_i) = 1$ אינו תלוי בבסיס, ולכן גם מספר ה־β_i עבורה $f(\beta_i, \beta_i) = -1$ אינו תלוי בבבחירת הבסיס.

הוכחה: מהמשפט, קיים בסיס $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ כך ש־$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ לכל $i \ne j$, $f(\alpha_j, \alpha_i) \ne 0$ כאשר $1 \le j \le r$ ו־$f(\alpha_j, \alpha_j) = 0$ עבור $j > r$.
נגדיר

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{1}{\sqrt{|f(\alpha_j, \alpha_j)|}} \alpha_j, 1 \le j \le r \\ \beta_j &= \alpha_j, j > r \end{aligned}$$

אז $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ בסיס של V המקיים את הנדרש. נניח שקיימים d 1־ים
יהא V^+ תת המרחב של V הנפרש על ידי הוקטורים $\{\beta_j\}$ עם $f(\beta_j, \beta_j) = 1$, $V^+ = \mathrm{sp}\{\beta_1, \ldots, \beta_d\}$
יהא V^- תת המרחב של V הנפרש על ידי הוקטורים $\{\beta_J\}$ עם $f(\beta_j, \beta_j) = -1$, $V^{-1} = \mathrm{sp}\{\beta_{d+1}, \ldots, \beta_r\}$
יהא $P = \dim V^+$. עלינו להראות ש־P אינו תלוי בבחירת הבסיס.
נסמן ב־$V^\perp$ את תת המרחב של V הנפרש על ידי β_j עבורם $f(\beta_j, \beta_j) = 0$. , $V^\perp = \mathrm{sp}\{\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n\}$
ברור שיש פירוק של V ל־$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp$.
($\alpha \in V$, $\alpha = \sum_{i=1}^{r} c_i\beta_i + \sum_{i>r} c_i\beta_i$ ו־$V^\perp \ni \beta = \sum_{i>r} d_i\beta_i$, אז $f(\alpha, \beta) = \sum_{i>r} c_i d_j (\beta_i, \beta_j) + \sum_{i<r} c_i d_j (\beta_i, \beta_j)$)
נשים לב שהצמצום של f ל־V^+ מגדיר תבנית חיובית בהחלט על V^+ ואילו הצמצום של f ל־V^- מגדיר תבנית שלילית בהחלט על V^-.
נוכיח כי אם $W \in V$ תת מרחב עליו f חיובית בהחלט, אז תתי המרחבים $W, V^-, V^\perp$ בת"ל. זה יוכיח כי $\dim W \le \dim V^+$.
אכן, אם $\alpha \in W, \beta \in V^-, \gamma \in V^\perp$, אז $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha, \alpha + \beta + \gamma) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) \\ 0 &= f(\beta, \alpha + \beta + \gamma) = f(\beta, \beta) + f(\beta, \alpha) \\ &\Rightarrow 0 > f(\beta, \beta) = f(\alpha\alpha) > 0 \\ &\Rightarrow f(\beta, \beta) = f(\alpha\alpha) = 0 \end{aligned}$$

מכיוון ש־f חיובית בהחלט על W, ו־$\alpha \in W$ כך ש־$f(\alpha, \alpha) = 0$, הרי ש־$\alpha = 0$. באופן דומה, כי f שלילית בהחלט על V^- , נקבל כי $\beta = 0$. לכן גם $\gamma = 0$ והוכחנו כי $W, V^-, V^\perp$ בת"ל.
למעשה, כל וקטור $\beta \in V$ האורתוגונלי לכל V, שייך ל־$V^\perp$.
הראנו שאם $W \subset V$ עליו f חיובית בהחלט, אז $W \subset V^+$.

אנחנו רוצים להראות ש־$d = \dim V^+$ אינו תלוי ב־B. כלומר, אם B' בסיס לפיו $[f]_{B'}$ מהצורה
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

אז $\dim V'^+ = \dim V^+$, כאשר V'^+ החלק החיובי המתאים ל־B'. לשם כך מספיק להראות שאם $W \subseteq V$ עליו f חיובית בהחלט, אז $\dim W \le \dim V^+$. הראינו זאת. ■

הגדרה 3.22 **הסיגנטורה** של המטריצה היא $d - s$, כאשר d הוא מספר ה־"1" ו־s הוא מספר ה־"-1".
דרגת המטריצה היא $d + s$.

3.2 תבניות אנטיסימטריות

נניח מעתה כי F שדה חלקי ל־$\mathbb{C}$.
יהא V מרחב וקטורי מעל F.

הגדרה 3.23 תבנית בילינארית $f: V \times V \to F$ נקראת אנטיסימטרית אם $f(\alpha,\beta) = -f(\beta,\alpha)$ לכל $\alpha,\beta \in V$.

טענה 3.24 תבנית f היא אנטיסימטרית $\iff$ $[f]_B$ מטריצה אנטיסימטרית ביחס לבסיס B.

הוכחה: כיוון אחד ־ ברור.
בכיוון השני, אם $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ לפיו $A = [f]_B$ אנטיסימטרית, אז לכל $\alpha,\beta \in V$ עם וקטורי קוארדינטות X, Y בהתאמה, יש לנו

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= X^t A Y \\ f(\beta,\alpha) &= Y^t A Y \end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= X^t A Y = \left(X^t A Y\right)^t \\ &= Y^t A^t X = -Y^t A X = -f(\beta,\alpha) \end{aligned}$$

■

טענה 3.25 המרחב הוקטורי $L(V,V,F)$ של כל התבניות על בי לינאריות על V מתפרק לסכום יש של תתי המרחבים של התבניות הסימטריות על V והתבניות האנטיסימטריות על V.

הוכחה: אם f תבנית בילינארית, אז $f_s(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\{f(\alpha,\beta) + f(\beta,\alpha)\}$ ו־$f_a = \frac{1}{2}\{f(\alpha,\beta - f(\beta,\alpha))\}$.
אז אלו תבניות סימטרית ואנטיסימטרית בהתאמה ו־

$$f = f_s + f_a$$

■

משפט 3.26 יהיא V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{S} \subseteq F$. תהא f תבנית אנטיסימטרית על V.
אז הדרגה, r של f זוגית, $r = 2k$, וקיים בסיס מסודר של B לפיו המטריצה המצייגת את f היא סכום ישר של מטריצת האפס מסדר $(n-r) \times (n-r)$, ו־k עותקים של המטריצה מסדר 2×2 ־ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

הוכחה: נניח כי $f \neq 0$, אז קיימים $\alpha,\beta \in V$ כך ש־ $f(\alpha,\beta) \neq 0$. אפשר להניח כי $f(\alpha,\beta) = 1$ (אם $f(\alpha,\beta) = c$, אז $f\left(\alpha\frac{1}{c},\beta\right) = 1$)
כמו כן, ברור כי $f(\alpha,\alpha) = f(\beta,\beta) = 0$ (מהאנטיסימטריות). נוודא ש־$\{\alpha,\beta\}$ בת"ל ־ יהא $\gamma = c\alpha + d\beta$ כלשהו, אז $f(\gamma,\alpha) = -d$, ו־$f(\gamma,\beta) = c$. לכן,

$$\gamma = f(\gamma,\beta)\,\alpha - f(\gamma,\alpha)\,\beta \tag{1}$$

בפרט, α ו־β בהכרח בת"ל, כי אם $\gamma = 0$ אז מ־1, $c = d = 0$.
יהא $W = \mathrm{sp}\left\{\alpha,\beta\right\}$, W תת מרחב דו ממדי של V.
נגדיר $W^{\perp} = \left\{\delta \in V | f\left(\delta, w\right) = 0, \forall w \in W\right\}$. נוכיח כי $V = W \oplus W^{\perp}$. נשים לב כי־ $W \cap W^{\perp} = 0$.
נובע מכך שכל וקטור $\gamma \in W$, מקיים: $\gamma = f\left(\gamma,\beta\right)\alpha - f\left(\gamma,\alpha\right)\beta$.
יהא $\varepsilon \in V$, ונכתוב –

$$\varepsilon = f\left(\varepsilon,\beta\right)\alpha - f\left(\varepsilon,\alpha\right)\beta + \varepsilon - f\left(\varepsilon,\beta\right)\alpha + f\left(\varepsilon,\alpha\right)\beta$$

מספיק להראות ש־ $\delta = \varepsilon - f\left(\varepsilon,\beta\right)\alpha + f\left(\varepsilon,\alpha\right)\beta \in W^{\perp}$.
אכן,

$$f\left(\delta,\alpha\right) = f\left(\varepsilon,\alpha\right) - f\left(\varepsilon,\alpha\right) = 0$$

באופן דומה,

$$f\left(\delta,\beta\right) = f\left(\varepsilon,\beta\right) - f\left(\varepsilon,\beta\right) = 0$$

כלומר, ε הוא סכום של וקטור ב־W (צירוף לינארי של α,β) ווקטור ב־$W^{\perp}$ (δ).
מכיוון ש־$\dim W^{\perp} < \dim V$, והצמצום של f על $W^{\perp}$ היא תבנית אנטי־סימטרית, הרי שמהנחת האינדוקציה, הטענה נובעת, כלומר – באינדוקציה נבנה סדרה של זוגות של וקטורים – $\left(\alpha_1,\beta_1\right),\left(\alpha_2,\beta_2\right),\ldots\left(\alpha_k,\beta_k\right)$ עם התכונות הבאות:

- $f\left(\alpha_i,\beta_i\right) = 1$, לכל $1 \le j \le k$
- $f\left(\alpha_i,\alpha_i\right) = f\left(\beta_i,\beta_j\right) = f\left(\alpha_i,\beta_j\right) = 0$ לכל $i \neq j$, וגם $f\left(\alpha_i,\alpha_i\right) = f\left(\beta_i,\beta_i\right) = 0$
- $W_j = \mathrm{sp}\left\{\alpha_j,\beta_j\right\}$, מרחב דו מימדי
- $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \oplus V^{\perp}$

■

מסקנה 3.27 נניח כי f תבנית אנטי סימטרית לא מנוונת על V. אז $\dim V$ זוגי. יהא $\left\{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_k,\beta_k\right\}$, הבסיס של V שנבנה במשפט 3.26.
אם נשנה את סדר האברים בבסיס זה, נקבל ייצוג נוח להרבה חישובים. יהא

$$B = \left\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\beta_k,\beta_{k-1},\ldots,\beta_1\right\}$$

אז, המטריצה שמייצגת את f ביחס לבססי זה היא מטריצת בלוקים

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר J היא המטריצה מסדר $k \times k$ הבאה:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 חבורות של תבניות

תבניות לא מנוונות מגדירות חבורות של אופרטורים (של מטריצות).

הגדרה 3.28 תהא f תבנית בילינארית על מרחב וקטורי V, ויהא $T:V\to V$ אופרטור על V.
נאמר ש־T **שומרת את** f אם

$$f\left(T\alpha,T\beta\right)=f\left(\alpha,\beta\right),\forall\alpha,\beta\in V$$

טענה 3.29 תהא f תבנית בילינארית לא־מנוונת על V, ונגדיר $G=\left\{T:V\to V|f\left(T\alpha,T\beta\right)=f\left(\alpha,\beta\right)\forall\alpha,\beta\right\}$, כלומר G קבוצת ההעתקות מ־V לעצמה ששומרות את f.
אזי G חבורה ביחס להרכבה.

הוכחה: (ברור שהיא סגורה להרכבה, נראה קיומו של הפיך)
תהא $T\in G$ ויהי $\alpha\in\ker T$. אז לכל $\beta\in V$,

$$0=f\left(T\alpha,T\beta\right)=f\left(\alpha,\beta\right)$$

מכיוון ש־f אינה מנוונת, הרי שבהכרח $\alpha=0$, ולכן T הפיכה.
כעת, לכל $\alpha,\beta\in V$,

$$f\left(T^{-1}\alpha,T^{-1}\beta\right)=f\left(TT^{-1}\alpha,TT^{-1}\beta\right)=f\left(\alpha,\beta\right)$$

לכן $T^{-1}\in G$, ו־G חבורה. ■

3.3.1 בשפה של מטריצות

בהקבע בסיס B של V, נקבל חבורה של מטריצות, ה"שומרות" את f.
באופן מדוייק יותר, נסמן $A=\left[f\right]_B$. אז לכל $\alpha,\beta\in V$, יהי $X=\left[\alpha\right]_B'$ $Y=\left[\alpha\right]_B$.
אזל

$$f\left(\alpha,\beta\right)=X^tAY$$

יהא $T:V\to V$ השומר על f, ותהא $M=\left[T\right]_B$. אז קיבלנו כי $f\left(T\alpha,T\beta\right)=f\left(\alpha,\beta\right)$, כלומר כי

$$\left(MX\right)^tA\left(MY\right)=X^tAY$$

באופן שקול,

$$X^t\left(M^tAM\right)Y=X^tAY$$

וזה קורה $\iff$ $M^tAM=A$.

מסקנה 3.30 תהא $A\in GL_n\left(F\right)$ נתונה. אז

$$G=\left\{M\in GL_n\left(F\right)|M^tAM=A\right\}$$

היא חבורה ביחס לכפל מטריצות.

הערה 3.31 אם f (מעל F, עם מציין $2\neq$) לא מנוונת <u>וסימטרית</u>, אז $T:V\to V$ שומרת על f $\iff$ T שומרת את התבנית הריבועית מהתאימה q.

דוגמאות

- על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$, יש לנו את התבנית הריבועית

$$q\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^1$$

אז החבורה המתאימה כאן נקראת "החבורה האורתוגונלית", $O\left(n,\mathbb{R}\right),O\left(m,\mathbb{C}\right)$. ביחס לבסיס הסטנדרטי, מתקבלות המטריצות $\left\{A\in GL_n\left(\mathbb{R}\right)|AA^t=I\right\}$ (אוניטריות/אורתוגונליות).

- על $\mathbb{R}^n$, יש לנו את התבנית הריבועית $q\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{p}x_j^2-\sum_{j=p+1}^{n}x_j^2$. התבנית הסימטרית המתאימה היא מסיגנטורה $p-\left(n-p\right)=2p-n$. מקבלים את החבורה הפסבדו־אורתוגונלית - $O\left(n,p\right)$. יש לנו $n+1$ חבורות כאלו ($0\le p\le n$).

משפט 3.32 יהא V מרחב וקטורי n מימדי מעל $\mathbb{C}$, ותהא f תבנית סימטרית לא־מנוונת על V. אז החבורה G השומרת את f איזומורפית ל־$O\left(n,\mathbb{C}\right)$.

הוכחה: ממשפט שהוכחנו, קיים ל־V בסיס B לפיו $\left[f\right]_B=I$, לכן ההעתקה

$$\begin{array}{ccc}G & \to & O\left(n,\mathbb{C}\right)\\ T & \mapsto & \left[T\right]_B\end{array}$$

היא איזומורפיזם של חבורות. ■

משפט 3.33 יהא V מרחב וקטורי n־מימדי מעל $\mathbb{R}$, ותהא f תבנית סימטרית לא מנוונת על V, אז החבורה G השומרת על f איזומורפית ל־$O\left(n,p,\mathbb{R}\right)$ עבור איזשהו $0\le p\le n$.

דוגמה - חבורת לורנץ נתבונן בתבנית הריבועית q על $\mathbb{R}^4$ הבאה:

$$q\left(x,y,z,t\right)=t^2-x^2-y^2-z^2$$

ההעתקה $T:V\to V$ השומרת את q נקראת "טרנספורמצית לורנץ", והחבורה G המתאימה (חבורת כל האופרטורים השומרים את q) נקראת "חבורת לורנץ".

נבנה כמה טרנספורמציות לורנץ -

ראשית, יהא $H=\left\{A\in M_2\left(\mathbb{C}\right)|A=A^\star\right\}$. זהו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. יהא

$$\begin{array}{ccc}\Phi:\mathbb{R}^4 & \overset{\cong}{\to} & H\\ \left(x,y,z,t\right) & \mapsto & \begin{pmatrix}t+x & y+iz\\ y-iz & t-x\end{pmatrix}\end{array}$$

זהו איזומורפיזם של מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{R}$. קל לבדוק, כי $q\left(x,y,z,t\right)=\det\Phi\left(x,y,z,t\right)$. לכן, מספיק למצוא אופרטורים $H\to H$ ששומרים את הדטרמיננטה.

תהא $M\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$, ונגדיר את האופרטור - $U_m:H\to H$, $A\mapsto MAM^\star$. מכיוון ש־

$$\det\left(MAM^\star\right)=\left|\det M\right|^2\det A$$

אז לכן, כל M ב־$GL_2\left(\mathbb{C}\right)$ עם $\left|\det M\right|^2=1$, מגדירה אופרטור על H ששומר על $\det$, ולכן דרך Φ, טרנספורמצית לורנץ על $\mathbb{R}^4$.

fin.