

תורה אלקטרוסטטיקה

מרצה: בוריס שפירא

28 בספטמבר 2009

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של פרופ' בוריס שפירא. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. אין הטכניון או מי מטעמו - ובפרט, הפקולטה לפיזיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה. הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל-ronen@tx.technion.ac.il. הגרסה העדכנית תפורסם ב-ronen@www.technion.ac.il

תוכן עניינים

	I	אלקטרוסטטיקה	
3	1	אלקטרוסטטיקה - מושגים ויחידות	
3		1.0.1 השדה החשמלי	
4		1.0.2 פוטנציאל חשמלי	
4		1.0.3 משוואת פואסון	
4	2	אלקטרוסטטיקה	
5	2.1	בעיות באלקטרוסטטיקה, שיטות ודוגמאות	
5	2.1.1	פילוג מטען בכל המרחב	
5	2.1.2	כאשר המטען לא ידוע בכל המרחב	
6	2.1.3	פונקציית גרין עבור בעיית דריכלה	
7	2.1.4	פתרון פורמלי בעזרת פונקציית גרין	
7	2.2	דוגמה: חישוב פונקציית גרין של בעיית דריכלה עבור חצי מרחב	
8	2.2.1	חישוב פונקציית גרין	
8	2.2.2	פתרון בעיה באמצעות פונקציית גרין	
8	2.2.3	חישוב התפלגות המטען	
9	2.3	פונקציית גרין עבור גאומטריה כדורית	
9	3	פיתוח בפונקציות עצמיות	
11	3.1	דוגמה חד ממדית	
11	3.1.1	נטפל בבעיה אחרת:	
11	3.1.2	הפונקציות הללו מהוות בסיס	
12	3.2	פונקציית גרין עבור מלבן	
13	4	הפרדת משתנים	
16	4.1	הפרדת משתנים בקואורדינטות כדוריות	
17	4.1.1	נפתור בעיה פיזיקלית:	
19	4.1.2	הפרדת משתנים בקואורדינטות גליליות	
19	5	פיתוח במולטיפולים	
22	5.1	דוגמאות פשוטות	
22	5.2	המקרה הכללי - עבור קונפיגורציה שרירותית של מטענים	
23	5.2.1	הקדמה מתמטית - פיתוח של $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ לטור טיילור ב- \mathbf{r}' סביב \mathbf{r}	
23	5.2.2	פיתוח	
24	5.3	פיתוח פורמלי בסדרים גבוהים	
25	6	עבודה ואנרגיה באלקטרוסטטיקה	
28	6.1	אנרגיה של מטענים בשדה חיצוני נתון	
28	6.2	דוגמאות	
29			

29	אנרגיה של דיפול	6.2.1	
30	אנרגיה של אוסף מטענים	6.2.2	
31	הכללה לפילוג רציף	6.2.3	
33	אלקטרוסטטיקה של חומרים דיאלקטריים		7
33	חומרים דיאלקטריים	7.1	
35	התאוריה המקרוסקופית	7.1.1	
37	תנאי שפה	7.1.2	
38	סיכום	7.1.3	
39	בעיות		7.2
39	דוגמה בעלת סימטריה גלילית	7.2.1	
40	מטען בין חומרים דיאלקטריים	7.2.2	
41	כדור דיאלקטרי בשדה חיצוני אחיד	7.2.3	
43	בחזרה לתמונה המיקרוסקופית		7.3
44	הערות על חומרים דיאלקטריים		7.4

II מגנטוסטטיקה

45			
46	יסודות המגניטוסטטיקה		8
46	חוק ביו-סבר	8.1	
47	צפיפות זרם	8.1.1	
48	משוואות המגניטוסטטיקה בצורה דיפרנציאלית	8.2	
50	הפוטנציאל הוקטורי	8.3	
51	חישוב שדה במרחק רק מהזרמים	8.4	
53	כח הפועל על כריכה עם זרם בשדה מגנטי חיצוני	8.5	
54	שדות מגנטיים בחומר		9
56	תנאי שפה	9.1	
56	דוגמאות של בעיות עם תנאי שפה	9.2	
57	זרם בצפיפות אחידה	9.2.1	
58	עוד דוגמה	9.2.2	
59	ההסבר המיקרוסקופי של תכונות מגנטיות של חומר	9.3	
59	השפעת שדה מגנטי על אטום בודד	9.3.1	
61	חוק פארדיי ואנרגיה מגנטית		10
61	דוגמה: האנרגיה המגנטית של לולאת זרם	10.0.2	
62	הכלל לפילוג כלשהו של זרמים	10.0.3	

III משוואות מקסוול

63			
63	משוואות מקסוול		11
64	הפוטנציאל וחופש הכיול	11.1	
65	חופש הכיול	11.1.1	
66	חוקי שימור		12
66	שימור מטען	12.1	
66	שימור אנרגיה, משפט Poynting	12.2	
68	שימור תנע	12.3	
70	גלים אלקטרומגנטיים בריק		13
71	גל מישורי מונוכרומטי	13.1	
72	אנרגיה ותנע בגל מישורי מונוכרומטי	13.1.1	
72	סופרפוזיציה של גלים מישוריים	13.1.2	
73	אמפליטודה קומפלקסית	13.1.3	
73	השוואה עם משוואת שרדינגר	13.1.4	
74	קיטוב מעגלי ואליפטי	13.1.5	
75	משוואות מקסוול בחומר		14
77	מודל לורנץ	14.1	
78	גלים מישוריים ומונוכרומטיים בחומר	14.2	

79	דוגמה: מתכת בתדירות נמוכה: $\omega \ll \gamma$	14.2.1
80	דוגמה: מתכת אידיאלית (פלסמה אלקטרונית)	14.2.2
80	מהירות הפאזה ומהירות החבורה	14.3
81	החזרה ושבירה של גלים אלקטרומגנטיים	14.4
83	מחקר עדכני - Negative refraction	14.4.1
84	אלקטרודינמיקה	15
84	תורת היחסות: סקירה	15.1
84	מרחב זמן	15.1.1
84	שתי טענות יסוד	15.1.2
84	טרנספורמציות לורנץ	15.1.3
85	אלגברה של 4-וקטורים ו-4-טנזורים	15.2
86	מרחב מינקובסקי	15.3
87	טרנספורמציה של 4-וקטור קונטרה-וריאנטי	15.3.1
88	דוגמה פשוטה	15.3.2
88	חזרה ל 4-וקטורים	15.3.3
88	4-טנזורים	15.3.4
89	שדות	15.3.5
89	ניסוח קו-וריאנטי של אלקטרודינמיקה	15.4
92	טרנספורמציה של שדות	15.5

חלק I

אלקטרוסטטיקה

1 אלקטרוסטטיקה - מושגים ויחידות

ביחידות SI

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

$$[F] = N \quad (1.2)$$

$$[r] = m \quad (1.3)$$

$$[q] = C \quad (1.4)$$

$$\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (1.5)$$

כאשר הכוח, F , נמדד בניוטונים, המיקום r , נמדד במטרים והמטען, C - בקולון

ביחידות גאוסיות (Gaussian, CGS) -

$$F = q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.6)$$

$$[F] = \text{dyne} = \frac{g \cdot cm}{sec^2} \quad (1.7)$$

$$[r] = cm \quad (1.8)$$

$$[q] = [F \cdot r^2]^{1/2} = g^{1/2} cm^{3/2} sec^{-1} \quad (1.9)$$

יש לנו חופש לבחירת היחידות - ולכן בחרנו מערכת יחידות שבהן $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$. לדוגמה, אם נכריז על $c = 1$, אזי $\ell = ct$, כלומר - למרחק ולזמן יהיו אותם יחידות - ושניית אור תהיה $1 \text{ sec} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}$. העובדה שיש בטבע חוק יסודי - חוק קולון - מאפשרת לנו לבטא יחידות מטען באמצעות יחידות מכניות (גרם, סנטימטר, שנייה)

1.0.1 השדה החשמלי

בהינתן מטען q_1 , נסתכל על נקודה בחלל, במרחק \mathbf{r} , אזי השדה החשמלי יהיה (ב-SI)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.10)$$

באלקטרוסטטיקה - ניתן לומר שהשדה "קיים" רק כאשר נמצא בנקודה בחלל מטען נוסף שמגיב לשדה. באלקטרודינמיקה - אין זה כך. נכליל את השדה למספר מטענים נקודתיים q_1, q_2, q_3, \dots הנמצאים ב- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ מהראשית, בהתאמה. מה השדה בחשמלי בנקודה נוספת, \mathbf{r} ?

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1.11)$$

בהכללה לרצף - $\rho(r)$ היא צפיפות המטען, כלומר, $\rho(\mathbf{r}) d^3r$ הוא המטען באלמנט d^3r , סביב \mathbf{r} , אזי השדה יהיה:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.12)$$

1.0.2 פוטנציאל חשמלי

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.13)$$

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (1.14)$$

אז הפוטנציאל החשמלי הוא שדה וקטורי

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.15)$$

1.0.3 משוואת פואסון

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.16)$$

נשתמש בנוסחת עזר:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

הוכחה: (של נוסחה (1.17))

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \quad (1.19)$$

$$= -\frac{1}{r^3} \cdot 3 + \frac{3}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 0 \quad (1.20)$$

ישנה סינגולריות ב- $r = 0$

$$\int_V d^3r \nabla^2 \frac{1}{r} = \quad (1.21)$$

לפי משפט גאוס, $\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} d^3r = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da$,

$$= \oint_S \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} da \quad (1.22)$$

$$= - \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da}{r^3} \quad (1.23)$$

נכתב זאת באמצעות זווית מרחבית, $d\Omega$

$$= - \oint_S d\Omega \frac{r^3}{r^3} = -4\pi \quad (1.24)$$

נשים לב ש-

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (1.25)$$

וקיבלנו, לבסוף ש-

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (-4\pi) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.26)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

וקיבלנו את משוואת פואסון

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})} \quad (1.28)$$

שדה חשמלי נגזר מפוטנציאל, ולכן

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.29)$$

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.30)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (1.31)$$

2 אלקטרוסטטיקה

2.1 בעיות באלקטרוסטטיקה, שיטות ודוגמאות¹

2.1.1 פילוג מטען בכל המרחב

נתון פילוג מטען בכל המרחב, $\rho(\mathbf{r})$. ρ יכול להיות מטען נקודתי, פונקציית δ . בוחרים את ראשית הצירים בנקודה O , ומסתכלים בנקודת התצפית \mathbf{r} . צריך למצוא את הפוטנציאל, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ואת השדה, $\phi(\mathbf{r})$, בכל מקום.

¹הרצאה שנייה בווידאו

הפתרון הוא מיידי:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.2)$$

זהו "פתרון" הבעיה, למרות שלא דווקא קל לפתור את האינטגרל (בהינתן $\rho(\mathbf{r})$ מורכב יחסית)

פונקציית גרין, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, זוהי פונקציית גרין עבור המרחב האינסופי. אזי $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ הפוטנציאל בנקודה \mathbf{r} , שיוצר מטען יחידה נקודתי בנקודה \mathbf{r}' . אזי הפוטנציאל על כל המרחב הוא

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' \quad (2.3)$$

זוהי לא פונקציית גרין כללית, אלא פונקציית גרין עבור הבעיה הספציפית הזו. פונקציית גרין מקיימת את משוואת פואסון עבור מטען נקודתי שנמצא בנקודה \mathbf{r}' :

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.4)$$

תכונה נוספת של פונקציית גרין היא סימטריה: Reciprocity $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. הסימטרי ברורה עבור פונקציית שלנו, אבל היא תכונה כללית של כל פונקציית גרין שהיא.

2.1.2 כאשר המטען לא ידוע בכל המרחב

בדרך כלל מטען בכל המרחב לא ידוע. בעיה טיפוסית באלקטרוסטטיקה: קופסה מתכתית, ובפנים - חלל. בתוך החלל יש פילוג מסויים של מטען. המטען בפנים נתון: $\rho(\mathbf{r})$ בתוך תחום V , בתוך הקופסה. אנחנו לא יודעים את המטענים בחוץ או את המטענים על הקופסה. נתון שהמטען על דפנות הקופסה הוא Φ_0 . הקופסה מוליכה, ולכן הפוטנציאל שווה על כל הדפנות. מהנתונים הללו אפשר למצוא את הפוטנציאל $\Phi(\mathbf{r})$ בתוך V . אנחנו נטפל בבעיות מסוג זה. ניתן להכליל את תנאי השפה. עבור נקודות \mathbf{r}_s על השפה S

$$\phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}_s) \quad (2.5)$$

כשר f פונקציה ידועה כלשהי. עבור מתכת אחידה, הפוטנציאל שווה בכל מקום על המעטפת, אבל ניתן לחשוב על שני מוליכים מופרדים.

למשל, ניתן לעשות קופסה משני חצאי כדור מתכתיים, המופרדים בשכבת מבודד. כאן, כאן, כל אחד מהם יהיה בפוטנציאל שונה.

הבעיה המתמטית היא מהסוג הבא: יש לפתור את משוואת פואסון:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

בתוך התחום V . לא מעניין אותנו מה שיש מחוץ לתחום V - רק ערך הפוטנציאל על המעטפת - תנאי השפה

$$\phi(\mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}_s) \quad (2.7)$$

כאשר f פונקציה נתונה. זוהי בעיית דריכלה. לבעיה זו יש פתרון אחד ויחיד². השיטה הראשונה שנלמד כדי לפתור שיטות מסוג זה היא שיטת פונקציות גרין.

²ההוכחה בקורס במד"ח או בג'קסון

2.1.3 פונקציית גרין עבור בעיית דריכלה

נגדיר את פונקציית גרין, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, מקיימת את המשוואה

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.8)$$

אנחנו צריכים לפתור את המשוואה בתוך תחום V עם תנאי שפה

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=r_s} = 0 \quad (2.9)$$

כלומר, צריכים למצוא פונקציה המקיימת את המשוואה, ומתאפסת על תנאי השפה. כאן יש לנו מטען נקודה ב- \mathbf{r}' , ופוטנציאל 0 על השפה (כלומר, השפה מוארקה). זה יעזור לנו לפתור את הבעיה המורכבת יותר שראינו קודם.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.10)$$

הוא הפוטנציאל בנקודה \mathbf{r} שיוצר מטען יחידה נקודתי הנמצא בנקודה \mathbf{r}' . בהכחה נשתמש בסימטריות של פונקציית גרין, אך לא נוכיח את הכלליות של הסימטריה.

2.1.4 פתרון פורמלי בעזרת פונקציית גרין

נסכם את המשוואות:

$$\nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}'), \quad \phi(\mathbf{r}'_s) = f(\mathbf{r}'_s) \quad (2.11)$$

(∇'^2) גוזר לפי הארגומנט (\mathbf{r}')

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=r_s} \quad (2.12)$$

(תוך שימוש בסימטריה). נכפיל את משוואה (2.11) ב- $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, ואת (2.12) ב- $\Phi(\mathbf{r}')$ ונחסר. נקבל:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + 4\pi\Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.13)$$

את הביטוי בצד שמאל נכתוב כ:

$$\vec{\nabla}' \cdot \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \vec{\nabla}' \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \vec{\nabla}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \quad (2.14)$$

נבצע אינטגרל על d^3r' ונשתמש במשפט גאוס:

$$\int_V \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{A} d^3r' = \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.15)$$

ונקבל את משוואה (2.13) בצורה:

$$\oint d\mathbf{S}' \cdot \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}') - \underbrace{\Phi(\mathbf{r}')}_{=f(\mathbf{r}'_s)} \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + 4\pi\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

אבל מצד ימין יש אינטגרל על השפה, שבו פונקציית גרין שווה לאפס בכל נקודה

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')}_{(A)} - \frac{1}{4\pi} \underbrace{\oint d\mathbf{S}' \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')}_{(B)} \quad (2.17)$$

כאשר (A) היא התרומה מהנפח ו-(B) הוא התרומה מהשפה. אלמנט שטח $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, כשהנורמל מכון החוצה מהשפה.

החלק הקשה יהיה למצוא פונקציית גרין. בצורה מדויקת-אנליטית, נוכל למצוא אותה רק עבור בעיות עם הרבה סימטריה. אבל היא מאפשרת לנו לכתוב את הפוטנציאל של בעיה כלשהי, על פילוג שרירותי של פוטנציאל על השפה ופילוג שרירותי של צפיפות מטען - באמצעות פונקציית גרין.

2.2 דוגמה: חישוב פונקציית גרין של בעיית דריכלה עבור חצי מרחב³

במערכת הצירים x, y, z , $z = 0$ הוא מישור אינסופי. נפתור בעיית במרחב $z > 0$.

2.2.1 חישוב פונקציית גרין

לכל בעיה באלקטרוסטטיקה, פונקציית גרין מקיימת את המשוואה

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad z > 0 \quad (2.18)$$

על השפה, הפוטנציאל מתאפס:

$$G((x, y, z = 0), \mathbf{r}') = 0 \quad (2.19)$$

כאשר $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ הפוטנציאל ב- \mathbf{r}' עקב מטען יחידה בנקודה \mathbf{r}' . במקרה הפשוט הזה, ניתן להשתמש בשיטת הדמויות (מפיזיקה 2מ') כדי לפתור את הבעיה. בשיטת הדמויות:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \quad (2.20)$$

כאשר הנקודה \mathbf{r}'' היא נקודת המראה של \mathbf{r}' , סימטרית למישור (כלומר, $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$ או $z'' = -z'$). נחשב את

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 0 \quad (2.21)$$

נבדוק את תנאי השפה. עבור נקודה על המישור:

$$G((x, y, z = 0), \mathbf{r}') = 0 \quad (2.22)$$

ואכן, פונקציית הגרין שמצאנו מקיימת את הדרישות - ובגלל יחידות הפתרון, זה הפתרון. נכתוב אותה בצורה מדויקת:

$$G(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \quad (2.23)$$

נשים לב ש- $(x, y, z), (x', y', z')$ הם בחצי המישור $z > 0$. כאשר יש פונקציית גרין, ניתן לפתור כל מני בעיות באלקטרוסטטיקה על הגאומטריה הזו של המרחב.

2.2.2 פתרון בעיה באמצעות פונקציית גרין

נתון פוטנציאל על המישור $z = 0$:

$$\phi(x, y, z = 0) = \begin{cases} V, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases} \quad (2.24)$$

כאשר a הוא רדיוס דיסקה סביב ראשית הצירים, ו- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - הרדיוס בקואורדינטות גליליות. נחפש את הפוטנציאל בכל המרחב (עבור $z > 0$). זוהי בדיוק סוג הבעיה שבה נעזר בפונקציית גרין. נסתכל רק על איבר (B) במשוואה (2.13) משום שבתוך הנפח אין מטענים.

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int dx' dy' \Phi(x', y', z' = 0) \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial z} G(x, y, z, x', y', z') \Big|_{z'=0} \right] \quad (2.25)$$

כאשר סימן ה- " - " ל- $\frac{\partial}{\partial z}$ מגיע מכיוון הנורמל - הנורמל החיצוני, לכיוון $-\hat{z}$.

$$\frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \left(-\frac{1}{2} \left[(x-x') + (y-y')^2 + (z-0)^2 \right]^{-3/2} + \frac{1}{2} \left[(x-x') + (y-y')^2 + z^2 \right]^{-3/2} \right) \cdot 2z \quad (2.26)$$

$$= 2z \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right]^{-3/2} \quad (2.27)$$

³הרצאה שלישית בוידאו

$$\phi(x, y, z) = \frac{2}{4\pi} \int dx' dy' \Phi(x, y, z=0) \cdot z \cdot \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right]^{-3/2} \quad (2.28)$$

זהו ביטוי הנכון לכל תנאי שפה. חישוב הפוטנציאל בכל (חצי) המרחב היא בעיה קשה (מבחינת האינטגרל). נחשב רק את הפוטנציאל על ציר z , ונעבור לקואורדינטות גליליות:

$$\phi(0, 0, z) = \frac{z}{2\pi} V \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \rho' d\rho' \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.29)$$

$$=_{u=\rho'^2} \frac{z}{2\pi} V \cdot 2\pi \int_0^{a^2} \frac{\frac{1}{2} du}{(u+z^2)^{3/2}} = Vz \frac{1}{2} \frac{-2}{\sqrt{u+z^2}} \Big|_0^{a^2} \quad (2.30)$$

$$= -\frac{Vz}{\sqrt{z^2+a^2}} + V \quad (2.31)$$

$$\boxed{\phi(0, 0, z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right)} \quad (2.32)$$

נבדוק מקרים גבוליים:

$$\phi(0, 0, z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} V \quad (2.33)$$

עבור $z \gg a$, נפתח את Φ לטור:

$$\phi(0, 0, z) = V \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \right) \approx V \frac{a^2}{2z^2} \quad (2.34)$$

כלומר, במרחק גדול, הדסקה נראית כמו דיפול.

2.2.3 חישוב התפלגות המטען⁴

לאחר שפתרנו את הבעיה, ואנחנו יודעים את הפוטנציאל בכל המרחב שמעל המישור, ניתן לקבל את השדה, וממנו את צפיפות המטען על המשטח. בוריס ניסה לחשב את צפיפות המטען, אבל לא הצליח לקבל ביטוי פשוט – שיבהיר מה זה הדיפול הזה. התמונה צריכה להראות שיש מטען על הדסקה, ומטען מחוץ לדסקה, בסימן הפוך, שהולך ודועך לאפס במרחקים גדולים.

2.3 פונקצית גרין עבור גאומטריה כדורית

רוצים למצוא פונקצית גרין בתוך כדור. כלומר, מה הפוטנציאל המשרה מטען שנמצא בתוך הכדור, שרדיוסו a , כאשר תנאי השפה – הפוטנציאל על הכדור, הוא אפס.

בנקודה \mathbf{R} נמצא מטען בגודל q , ורוצים לדעת מה המטען בנקודה כלשהי \mathbf{x} . פונקצית גרין תהיה הפוטנציאל הנדון עבור המטען $q = 4\pi\epsilon_0$.

נפתור את משוואת פואסון עם מטען נקודתי, עם תנאי שפה על שפת הכדור:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad \phi(\mathbf{r}_s) = 0 \quad (2.35)$$

נפתור את הבעיה באמצעות מטען דמות Q , הנמצא בנקודה \mathbf{R}' מחוץ לכדור (q, Q) והראשית חלים על אותו (ישר)

$$\mathbf{R}' = R' \hat{R} \quad (2.36)$$

⁴הרצאה רביעית

נכתוב את הפוטנציאל ששני המטענים יוצרים:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|} \right) \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{R}{r} \hat{\mathbf{R}} \right|} + \frac{Q}{R' \left| \hat{\mathbf{R}} - \frac{r}{R'} \hat{\mathbf{r}} \right|} \right] \quad (2.38)$$

נדרוש ש- $\phi(r=a) = 0$, אם, באמצעות בחירה של R', Q , נוכל לקיים את התנאי, אז זהו הפתרון. נשתמש בזהות:

$$\left| \hat{\mathbf{r}} - \gamma \hat{\mathbf{R}} \right| = \left| \hat{\mathbf{R}} - \gamma \hat{\mathbf{r}} \right| \quad (2.39)$$

כי

$$\left| \hat{\mathbf{r}} - \gamma \hat{\mathbf{R}} \right|^2 = 1 - 2\gamma (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) + \gamma^2 = \left| \hat{\mathbf{R}} - \gamma \hat{\mathbf{r}} \right|^2 \quad (2.40)$$

נשתמש בזה כדי לכתוב את

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{R}{r} \hat{\mathbf{R}} \right|} + \frac{Q}{R' \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{r}{R'} \hat{\mathbf{R}} \right|} \right] \quad (2.41)$$

על השפה,

$$\phi(r=a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{a \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{R}{a} \hat{\mathbf{R}} \right|} + \frac{Q}{R' \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{a}{R'} \hat{\mathbf{R}} \right|} \right] = 0 \quad (2.42)$$

אז, ברור שחייב להתקיים $\frac{R}{a} = \frac{a}{R'}$, אזי המכנה יהיה זהה עד כדי $\frac{1}{R'}$.

$$\boxed{R' = \frac{a^2}{R}} \quad (2.43)$$

ו-

$$\frac{q}{a} = -\frac{Q}{R'} = -\frac{Q}{a^2} R \quad (2.44)$$

$$\boxed{Q = -q \frac{a}{R}} \quad (2.45)$$

תנאי השפה מתקיים, וכמובן - המשוואה הדיפרנציאלית עצמה מתקיימת, ולכן זהו הפתרון:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{qa}{R \left| \mathbf{r} - \frac{a^2}{R} \hat{\mathbf{R}} \right|} \right] \quad (2.46)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{a}{R \left| \mathbf{r} - \frac{a^2}{R^2} \mathbf{R} \right|} \right] \quad (2.47)$$

כדי לכתוב את פונקצית גרין, נציב $\mathbf{r}' = \mathbf{R}, q = 4\pi\epsilon_0$

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' \left| \mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|}} \quad (2.48)$$

צפיפות המטען על המעטפת, נתונה באמצעות השדה המגנטי בסביבת המעטפת:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n \quad (2.49)$$

$$E_n - E_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.50)$$

בעיות אחרות באמצעות פונקציות גרין שמצאנו - ניתן לפתור בעיות דריכלה שונות בעלות גאומטריה כדורית - למשל, למצוא ϕ בתוך נפח כדור, כאשר

$$\phi(\mathbf{r}_s) = f(\theta, \varphi) \quad (2.51)$$

כאשר f פונקציה ידועה - ואין מטענים מחוץ לנפח:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.52)$$

את הבעיה הזו ניתן לפתור באופן ישיר באמצעות משוואה (2.13).

בעיה חיצונית אנחנו טיפלנו בבעיית דריכלה פנימית. באותה צורה, ניתן לדון בבעיה חיצונית. למשל, כדור ברדיוס a שעל מעטפתו פוטנציאל $\phi(r=0, \theta, \varphi)$, ובהעדר מטענים מחוץ לכדור

$$r > a, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.53)$$

הביטוי עבור פונקצית גרין הוא אותו הביטוי. ההבדל היחיד הוא שמטען הדמות יהיה בתוך הכדור ($R > a \Rightarrow R' < a$)

תנאי שפה שונים נניח ורוצים לפתור את משוואת לפלס בתוך תחום סגור V ,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.54)$$

עם תנאי שפה, לפי הנגזרת לפי הנורמל, \hat{n} , על השפה:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} = f(\mathbf{r}_s) \quad (2.55)$$

כאשר f פונקציה ידועה. זוהי בעיית **נוימן**. המשמעות הפיזיקלית שלה: הנגזרת הנורמלית היא פילוג המטען על שטח השפה. אנחנו לא נעסוק בבעיה הזו.

3 פיתוח בפונקציות עצמיות⁵

3.1 דוגמה חד ממדית

כאשר התחום הוא בין 0 ל- a , הלפלסיאן בממד אחד, הוא נגזרת שני לפי x , אזי, פונקציית גרין מקיימת:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x') = -4\pi\delta(x - x') \quad G(0, x') = G(a, x') = 0 \quad (3.1)$$

למרות שהעולם הוא תלת ממדי, הבעיה מתארת באופן מדויק גם שני לוחות אינסופיים מקבילים עם התפלגות פוטנציאל אחידה. אין שום רכיב שתלוי ב- z , y , ולכן היא שקולה לבעיה החד-ממדית הנתונה נפתור זאת בכמה שלבים:

3.1.1 נטפל בבעיה אחרת:

נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$0 \leq x \leq a \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad \psi(x=0) = \psi(x=a) = 0 \quad (3.2)$$

זוהי משוואה המתארת, למשל, תנודות של מיתר עם קצוות ב- 0 , a , או המשוואה הדיפרנציאלית ממכניקה קוונטית של חלקיק בקופסה (בבור פוטנציאל אינסופי).

אנחנו יודעים לפתור כאלו משוואות - ואנחנו יודעים שהפתרונות קיימים רק עבור ערכים מסיימים של k , ערכים עצמיים - והפתרונות הן פונקציות עצמיות

⁵הרצאה חמישית

הפתרון הכלי של המשוואה הוא

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (3.3)$$

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.4)$$

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{a}n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

אזי, נבחר את המקדם באופן שרירותי ונכתוב:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_n x \quad (3.7)$$

אלו הן פונקציות עצמיות מנורמלות. (כך ש- $\int_0^a \psi^2 = 1$).

$$k_n^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 n^2 \quad (3.8)$$

הם הערכים העצמיים.

3.1.2 הפונקציות הללו מהוות בסיס

$\psi_n(x)$ מהוות מערכת פונקציות שלמה ואורתונורמלית, על הקטע $[0, a]$, עם תנאי שפה אפס. אורתונורמליות:

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_m dx = \delta_{nm} \quad (3.9)$$

לכן, כל פונקציה המוגדרת על הקטע (אם אותם תנאי שפה), ניתנות לפיתוח כסכום של הפונקציות אז נרשום את פונקצית גרין

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x') \psi_n(x) \quad (3.10)$$

נציב למשוואה (2.12)

$$\sum_n A_n(x') (-k_n^2) \psi_n(x) = -4\pi \delta(x - x') \quad (3.11)$$

נכפיל ב- $\psi_m^*(x)$ ונבצע אינטגרציה על x :

$$\sum_n k_n^2 A_n(x') \underbrace{\int_0^a \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx}_{\delta_{nm}} = 4\pi \int dx \psi_m^*(x) \delta(x - x') \quad (3.12)$$

אזי מקדמי הפיתוח יהיו

$$A_m(x') = \frac{4\pi}{k_m^2} \psi_m^*(x') \quad (3.13)$$

אזי

$$G(x, x') = \sum_n \frac{4\pi}{k_n^2} \psi_n^*(x') \psi_n(x) \quad (3.14)$$

זוהי תוצאה כללית. הגענו אליה באמצעות דוגמה, אבל לא השתמשנו באופן מפורש בתוצאה של המד"ח. תמיד ניתן לכתוב את פונקצית גרין בתור פיתוח של פונקציות עצמיות.

נציב את הביטוי המפורש של הפונקציות ונקבל

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\pi n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x'\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \quad (3.15)$$

זוהי שיטה כללית - אם יודעים את הפונקציות העצמיות עבור גאומטריה נתונה - ניתן לכתוב את פונקציות גרין בתור סכומן.

הבעיה עם השיטה הזו היא שהיא נותנת לנו טור, שלא תמיד ניתן לחשב את סכומו בקלות. במקרה הזה, זהו פיתוח של פונקציות גרין בטור פוריה. אנחנו רק נכתוב את התשובה ונבדוק אותה:

$$G(x, x') = \frac{4\pi}{a} \begin{cases} x(x-x'), & x < x' \\ x'(a-x), & x > x' \end{cases} \quad (3.16)$$

מיד רואים שהיא מקיימת את כל תנאי השפה, ומהצבה:
עבור $x \neq x'$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = 0 \quad (3.17)$$

יש לראות שעבור $x = x'$, יש סינגולריות, פונקציות דלתא, במיקום הנכון:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x') = -4\pi \delta(x - x') \quad (3.18)$$

רואים שלנגזרת הראשונה של הפונקציה יש קפיצה. נבצע אינטגרל על x באזור קטן סביב x' , אזי נקבל

$$\frac{d}{dx} G(x, x') \Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0} = -4\pi \quad (3.19)$$

נגזור את G , ונוודא שגם התנאי הזה מתקיים:

$$\frac{d}{dx} G(x, x') \Big|_{x'+0} = -x' \cdot \frac{4\pi}{a} \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dx} G(x, x') \Big|_{x'-0} = \frac{4\pi}{a} (a - x') \quad (3.21)$$

נחסר את שני הביטויים ונקבל שההפרש הוא אכן -4π . ולכן זוהי אכן פונקציות גרין עבור הבעיה שהגדרנו

3.2 פונקציות גרין עבור מלבן

נדבר על בעיה שמוגדרת במישור - בתור מלבן, שהיקפו הוא עקום C , שצלעו a בכיוון x ו- b בכיוון y , והמעטפת מוארכת. נמקם מטען נקודתי בנקודה (x', y') , ונחפש את הפוטנציאל בנקודה (x, y) , גם היא בתוך המלבן. (כדי להקביל זו מבעיה אמיתית - זהו צינור אינסופי עם חתך מלבני, ולכן הכל סימטרי בציר z , והמטען הנקודתי הוא חוט מטען אינסופי).

פונקציית גרין מקיימת את המשוואה

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) G(x, y; x', y') = -4\pi \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (3.22)$$

עם תנאי השפה

$$G(x, y; x', y') \Big|_{x, y \in C} = 0 \quad (3.23)$$

1. בעיית פונקציות עצמיות:

משוואת הערכים העצמיים:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\psi + k^2\psi = 0 \quad (3.24)$$

זו אינה משוואת לפלס ואינה משוואת פואסון, כי אם בעיית פונקציות עצמיות. נפתור אותה עם תנאי שפה

$$\psi(x, y=0) = \psi(x, y=a) = \psi(x=0, y) = \psi(x=a, y) = 0 \quad (3.25)$$

הפתרון הוא ברור מהדוגמה החד ממדית:

$$\psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \quad (3.26)$$

אלו הפונקציות העצמיות המתאימות לגאומטריה. הערכים העצמיים הם:

$$k_{nm}^2 = p_n^2 + q_m^2 \quad (3.27)$$

$$p_n = \frac{\pi}{a}n, \quad q_m = \frac{\pi}{b}m \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.28)$$

ואלו הן פונקציות אורתונורמליות:

$$\int_a^a dx \int_0^b dy \psi_{sl}^*(x, y) \psi_{nm}(x, y) = \delta_{sn} \delta_{rm} \quad (3.29)$$

2. נכתוב את פונקצית גרין

$$G(x, y; x', y') = \sum_{n,m} A_{nm}(x', y') \psi_{nm}(x, y) \quad (3.30)$$

נציב במשוואה (2.12) המגדירה את פונקצית גרין, ונגזור פעמיים:

$$\sum_{n,m} A_{nm}(x', y') (-p_n^2 - q_m^2) \psi_{nm}(x, y) = -4\pi \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (3.31)$$

כפל ב- $\psi_{sr}^*(x, y)$ ואינטגרל על x, y נותנים את מקדמי הפיתוח (בהתבסס על האורתונורמליות של הפונקציות העצמיות)

$$A_{sr}(x', y') (p_s^2 + q_r^2) = 4\pi \psi_{sr}^*(x', y') \quad (3.32)$$

ולכן פונקצית גרין תהיה

$$G(x, y; x', y') = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2 + q_m^2} \psi_{nm}^*(x', y') \psi_{nm}(x, y) \quad (3.33)$$

$$= 4\pi \frac{4}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x') \sin(p_n x) \sin(q_m y') \sin(q_m y)}{p_n^2 + q_m^2} \quad (3.34)$$

כאשר

$$p_n = \frac{\pi n}{a}, \quad q_m = \frac{\pi m}{b}, \quad (n, m = 1, \dots, \infty) \quad (3.35)$$

במראה הזה, אפשר לעשות סכום על m , ולהישאר עם סכום אחד. אנחנו לא נתעסק עם זה כרגע. נשתמש בפונקציה הזו כדי לפתור בעיה באלקטרוסטטיקה.

3. בעזרת פונקצית גרין, נפתור בעיה אחרת באלקטרוסטטיקה: במלבן שאורך צלעותיו a, b (המעטפת היא עקם C). נתון $\phi = 0$ על השפה, פרט לבסיס התחתון (צלע שאורכה a שנמצע על ציר x) ובו הפוטנציאל $\phi(x, y = 0) = V$. אין מטענים בתוך התחום. רוצים למצוא את $\phi(x, y)$ בתוך המלבן. זו בעיה אחרת באלקטרוסטטיקה, בעלת גאומטריה דומה לבעיה שכבר פתרנו. שוב, באמצעות נוסחה (2.13):

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_C \phi(\mathbf{r}_c) \frac{\partial G}{\partial y'} d\ell' \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow \phi(x, y) = -\frac{V}{4\pi} \int_0^a dx' \left(-\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \Big|_{y'=0} \quad (3.37)$$

הכיוון של הנורמל ה- \hat{y} , ולכן הסימן, הוא מינוס. נחשב את הנגזרת של פונקצית גרין:

$$-\frac{\partial G}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \frac{16\pi}{ab} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2 + q_m^2} \sin(p_n x') \sin(p_n x) \cdot q_m \cdot \overbrace{1}^{\sin(y=0)} \cdot \sin(q_m y) \quad (3.38)$$

נציב במשוואה לפוטנציאל ונקבל:

$$\phi(x, y) = \frac{V}{4\pi} \cdot \frac{16\pi}{ab} \sum_{n,m} \frac{q_m}{p_n^2 + q_m^2} \sin(p_n x) \sin(q_m y) \int_0^a \sin(p_n x') dx' \quad (3.39)$$

נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^a dx' \sin p_n x' = -\frac{1}{p_n} \cos p_n x' \Big|_0^a = \begin{cases} 2/p_n, & n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.40)$$

כאשר ההפרדה לזוגי/אי זוגי היא לצורך הצבה במחזורים של \cos . לבסוף, נקבל

$$\phi(x, y) = 8 \frac{V}{ab} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(p_n x)}{p_n} \sum_m \frac{q_m}{p_n^2 + q_m^2} \sin(q_m y) \quad (3.41)$$

קיבלנו טור, ולא ביטוי סגור (ניתן לחשב אותו עבור m), ואנחנו נסתפק בפתרון מדויק של מקר פרטי.

4. ניקח $b \rightarrow \infty$, כלומר, גובה הקופסה, בכיוון y , הוא אינסופי. לקירות - פוטנציאל אפס, ובבסיס נקבע פוטנציאל V . נגדיר

$$\Delta q = q_{m+1} - q_m = \frac{\pi}{b} \quad (3.42)$$

עבור $b \rightarrow \infty$, Δq הוא מספר אינפיניטסימלי

$$\sum_m F(q_m) = \frac{1}{\Delta q} \sum_{m=1}^{\infty} F(q_m) \Delta q \quad (3.43)$$

את הסכום ניתן להחליף באינטגרל, כי $\Delta q \rightarrow 0$,

$$= \frac{b}{\pi} \int_0^{b=\infty} dq \frac{q}{p_n^2 + q^2} \sin(qy) \quad (3.44)$$

קבענו את הגבול התחתון באפס כי הגבול התחתון הוא $\Delta q \rightarrow 0$,

$$= \frac{b}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-p_n y} \quad (3.45)$$

⁶ הרצאה שיטית

$$\phi(x, y) = 8V \frac{1}{2a} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(p_n x)}{p_n} e^{-p_n y} \quad (3.46)$$

$$= \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} e^{-\pi n y/a} \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (3.47)$$

כאשר בשלב האחרון הצבנו את $p_n = \frac{\pi n}{a}$. נבדוק שהפוטנציאל מקיים את תנאי השפה:

$$\phi(x, y=0) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(\pi n x/a)}{n} \quad (3.48)$$

זה טור פוריה משויים, שישנם בו רק מקדמים אי-זוגיים, והסכום שווה ל- $\frac{4\pi}{4}$ ולכן

$$\phi(x, y=0) = V \quad (3.49)$$

זהו דרך לחשב סכומים - בהינתן למשל, שהסכום על הבסיס ידוע. עבור $y \gg a$,

$$\phi(x, y) \approx \frac{4V}{\pi} e^{-\pi y/a} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.50)$$

כלומר, כמתרחקים מהבסיס, הפוטנציאל נופל אקספוננציאלית.

4 הפרדת משתנים

ננסה לפתור, את משוואת לפלס עבור הבעיה שכרגע פתרנו, בשיטת הפרדת משתנים: מלבן שבסיו a , ועל בסיסו פוטנציאל V , גובהו אינסופי ועל קירותיו הפוטנציאל מתאפס, ובתוך המלבן אין מטענים. נפתור את משוואת לפלס עבור הבעיה:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \phi(x, y) = 0 \quad 0 \leq y < \infty, \quad 0 \leq x \leq a \quad (4.1)$$

$$\phi(x, y=0) = V, \quad \phi(x=0, y) = \phi(x=a, y) = 0 \quad (4.2)$$

1. נתעלם לרגע מתנאי שפה, ונסכל שלמשוואת לפלס ישנם פתרונות מהצורה

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4.3)$$

כאשר X, Y פונקציות כלשהן. אכן, עם נציב את הניחוש למשוואת לפלס, נגזור ונקבל

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (4.4)$$

וזה נכון רק אם $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$, קבוע כלשהו ו- $\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2$. במקום משוואת לפלס, קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה, בממדה אחד (פעמיים...):

אז הפתרון הוא מכפלה של הפתרון עבור X ופתרון עבור Y

$$\phi_\alpha(x, y) = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) (C e^{\alpha y} + D e^{-\alpha y}) \quad (4.5)$$

כלומר, משוואת לפלס מקיימת הפרדת משתנים במערכת צירים קרטזית. קיימות עוד מערכות צירים בהם משוואת לפלס מקיימת הפרדת משתנים (למעשה, יש 11 מערכות צירים כאלו)

2. על ידי בחירה של הקבועים ניתן לקיים חלק מתנאי השפה:

- אנחנו רוצים שהביטוי יתאפס ב- $X = 0$, לכן $B = 0$.
- אנחנו רוצים לאפס את הפוטנציאל ב- $X = a$, אז התנאי השני ידרוש $\sin \alpha a = 0$, או,

$$\alpha_n = \frac{\pi}{a}n, \dots n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

- עבור $y \rightarrow \infty$, אנחנו לא רוצים שהביטוי יתבדר, והסופיות דורשת $C = 0$.

$$\phi(x, y) = \underbrace{A_n D}_{C_n} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) e^{-\pi n/a y} \quad (4.7)$$

פונקציות אלו מקיימות את תנאי השפה על הקירות - הם מתאפסים שם, אבל הן אינן מקיימות את תנאי השפה - פוטנציאל V על הבסיס.

3. נחפש פתרון המהווה צרוף לינארי של הפונקציות העצמיות -

$$\phi_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\pi n y/a} \sin \frac{\pi n}{a} x \quad (4.8)$$

צריך להראות שניתן לבחור את המקדמים כך שהביטוי ייתן את הפוטנציאל הדרוש על הבסיס. הצרוף מקיים את המשוואה (כי כל איבר מקיים את המשוואה), ונשאר רק לדאוג לתנאי על הבסיס. מה שנקבל הוא פיתוח כטור פוריה:

$$\phi(x, y=0) = V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (4.9)$$

נכפיל את שני החלקים בפונקציה $\sin \frac{\pi m}{a} x$, ונבצע אינטגרציה על x :

$$V \int \sin \frac{\pi m x}{a} dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m x}{a} dx \quad (4.10)$$

באגף הימני יש לנו פונקציות אורתוגונליות, לכן האינטגרל משמאל הוא $\frac{a}{2} \delta_{nm}$, אזי

$$C_n = \frac{2}{a} V \int_0^a \sin \frac{\pi m x}{d} dx = \frac{2}{a} V \begin{cases} \frac{2a}{\pi m} & , m = 1, 3, \dots \\ 0 & , m = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (4.11)$$

וקיבלנו

$$\phi(x, y) = \frac{4}{\pi} V \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} e^{-\pi n y/a} \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (4.12)$$

וקיבלנו את אותו פתרון כמו באמצעות פונקציות גרין. גם כאן, ניתן להגיע לביטוי סגור באמצעות ארקטנגנסים, סינוסים וסינוסים היפרבוליים.

4.1 הפרדת משתנים בקואורדינטות כדוריות

ניתן להפריד משתנים במשוואות לפלס גם בקואורדינטות כדוריות. כלומר, הביטוי הבא:

$$\phi_{\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_{\ell}(r) P_{\ell}^{(m)}(\cos \theta) Q_m(\varphi) \quad (4.13)$$

מקיים את משוואת לפלס:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.14)$$

⁷הרצאה שביעית

כאשר P_ℓ הם פולינומי לג'נדר. בדרך מופיעים שני קבועים ℓ, m , בפיתוח הקודם הופיע רק קבוע 1, α , אבל כאן יש שלוש משוואות, ולכן יש שני קבועים. לא נעשה את הפיתוח שוב. הביטוי מקיים את משוואת לפלאס אם הפונקציה Q מקיימת:

$$\frac{1}{Q_m} \frac{d^2 Q_m}{d\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow Q_m e^{im\varphi} \quad (4.15)$$

הפונקציה P מקיימת משוואה יותר מסובכת:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_\ell^{(m)}}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_\ell^{(m)} = 0 \quad (4.16)$$

כלומר, פולינומי לג'נדר הם פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית מסדר שני הנדונה. (m) הוא האינדקס $[m]$. הפונקציה R מקיימת את המשוואה הרדיאלית:

$$\frac{1}{R_\ell} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_\ell}{dr} \right) = \ell(\ell+1) \Rightarrow R_\ell(r) = Ar^\ell + Br^{-\ell-1} \quad (4.17)$$

אנחנו רוצים שכל הפונקציות הללו יהיו חד ערכיות וסופיות של הפונקציות התלויות ב- θ ו- φ , מכתיבות ערכים של ℓ :

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell \quad (4.18)$$

פונקציה כדורית הם מערכת מנורמלת התלויה בפולינומי לג'נדר

$$Y_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (4.19)$$

אבל אנחנו לא נשתמש בפונקציות כדוריות, כי נסתכל רק על המצב שבו $m=0$.

עבור $m=0$

$$\phi_{\ell 0}(r, \theta) = \phi_\ell(r, \theta) = R_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) \quad (4.20)$$

כאשר P_ℓ הם פולינומי לג'נדר. הם אורתונורמליים:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (4.21)$$

כל פונקציה של θ ניתן לפתח בפולינומי לג'נדר, כלומר, $P_\ell(\cos \theta)$,

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (4.22)$$

כאשר את מקדמי הפיתוח ניתן למצוא מתנאי האורתוגונליות:

$$\int f(\theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \underbrace{\int P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) d\theta}_{\frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}} = A_{\ell'} \frac{2}{2\ell+1} \quad (4.23)$$

אזי

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.24)$$

4.1.1 נפתור בעיה פיזיקלית:

נתון כדור בעל רדיוס a , הפוטנציאל על פני הכדור

$$\phi(r = a, \theta) = V(\theta) \quad (4.25)$$

זה אינו המקרה הכי כללי - אפשר לעשות פוטנציאל שתלוי בשתי הזוויות, θ, φ . מקרה זה, שבו הפוטנציאל תלוי רק ב- θ , נקרא סימטריה אזימוטלית. נגדיר בעיית דריכלה: צריך למצוא את הפוטנציאל, $\phi(r, \theta)$, בתוך הכדור. יש לפתור את משוואת לפלס עם תנאי השפה הנ"ל:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi(a, \theta) = V(\theta) \quad (4.26)$$

אנחנו יודעים שהפוטנציאל יהיה תלוי ב- r, θ , אבל לא ב- φ , ולכן הסט המתאים הוא הסט עבור $m = 0$.

$$\phi_\ell(r, \theta) = R_\ell(r) P_\ell(\cos \theta) = (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \theta) \quad (4.27)$$

ביטוי זה מקיים את משוואת לפלס. כדי לקיים את תנאי השפה, נדרוש $B_\ell = 0$, אחרת תהיה לנו התבדרות של פוטנציאל במרכז. נחפש את הפתרון כסכום על ℓ :

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (4.28)$$

ואת המקדמים נמצא באמצעות תנאי השפה - על פני הכדור:

$$r = a, \quad V(\theta) = \sum_{\ell} A_\ell a^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (4.29)$$

מקדמי פיתוח נתונים במשוואה (4.24).

$$A_\ell = \frac{2\ell + 1}{2a^\ell} \int_0^\pi V(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.30)$$

פתרנו בעיית דריכלה עם תנאי שפה שרירותי על פני הכדור (בתנאי שהפוטנציאל תלוי ב- θ ולא ב- φ) זה אינו ביטוי סגור, אבל עבור פונקציה שרירותית $V(\theta)$ ניתן לכתוב פתרון של הבעיה כסכום של פולינומי לגנדר עם המקדמים הנתונים.

בעיה זו אנחנו יודעים לפתור גם באמצעות פונקציות גרין - כי אנחנו יודעים את פונקצית גרין עבור כדור. בשיטות שונות מגיעים לביטויים שונים - באמצעות פונקציות גרין, קיבלנו ביטוי עד כדי אינטגרל - וכאן קיבלנו עד כדי סכום.

באופן כללי לא נוכל לבצע את האינטגרל, אולי נוכל לפתח אותו כסכום, אבל כאן קיבלנו את התשובה כסכום ולא כאינטגרל - אבל התוצאה הסופית צריכה לצאת אותו הדבר. כך ניתן ללמוד דברים שונים על הבעיה גם כשלא ניתן לפתור אף אחד מהם באופן מדויק.

בדיק באותה צורה, ניתן לטפל בבעיית דריכלה חיצונית. בפונקציה הרדיאלית נצטרך לשמור את הקבוע B במקום את A , כדי שהפונקציה לא תתבדר באינסוף. כדי למצוא פוטנציאל בין שני קליפות כדוריות, נצטרך לשמור את שני האיברים בפונקציה הרדיאלית.

4.1.2 הפרדת משתנים בקואורדינטות גליליות⁸

נבצע בצורה מפורטת יותר הפרדת משתנים בקואורדינטות גליליות. נקודה מאופיינת על ידי שלוש קואורדינטות z , הזווית מציר x (מהיטל על מישור xy), והרדיוס במישור, ρ .

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.31)$$

⁸07.04.2009, מופיע בתור רשימות של בוריס באתר הקורס עם יותר פרטים

נכתוב

$$\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) Q(\varphi) Z(z) \quad (4.32)$$

כדי להשתכנע שזה נכון, נציב, נגזור, ונחלק ב- RQZ .

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.33)$$

האיבר האחרון תלוי רק ב- z , ולכן, כדי שכל הביטוי יהיה שווה לאפס, נדרוש $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2$, וכל שאר המשוואה שווה ל- $-k^2$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \Rightarrow Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (4.34)$$

אזי

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -k^2 \quad (4.35)$$

נכתוב את זה בצורה קצת אחרת:

$$\underbrace{\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho}}_{m^2} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{-m^2} = 0 \quad (4.36)$$

שלושת האיברים האחרונים תלויים רק ב- φ והאיבר האחרון רק ב- φ . אזי האיבר האחרון הוא קבוע $\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2$

$$Q(\varphi) = C' \sin(m\varphi) + D' \cos(m\varphi) \quad (4.37)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (4.38)$$

זוהי משוואת בסל, משוואה לינארית מסדר שני. הקושי כאן הוא שהמקדם תלוי ב- ρ . למשוואה לינארית מסדר שני תמיד יש שני פתרונות בלתי תלויים - הם מכונים פונקציות בסל (או פונקציית נוימן) הפתרון הכללי:

$$R(\rho) = \underbrace{AJ_m(k\rho)}_{Bessel} + \underbrace{BN_m(k\rho)}_{Neumann} \quad (4.39)$$

פונקציות בסל מופיעות בכל בעיה עם סימטריה גלילית. באופן כללי,

$$\phi_{km}(\rho, \varphi, z) = [AJ_m(k\rho) + BN_m(k\rho)] \cdot [C' \sin(m\varphi) + D' \cos(m\varphi)] \cdot [Ce^{kz} + De^{-kz}] \quad (4.40)$$

וביטוי זה מקיים את משוואת לפלס.

פונקציות בסל נגדיר

$$x = k\rho \quad (4.41)$$

וממשוואה (4.38), נקבל את -

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R(x) = 0 \quad (4.42)$$

הפתרונות יהיו $J_m(x), N_m(x)$, שני פתרונות בלתי תלויים. נחקור את תכונות הפונקציות הללו.

עבור $x \ll 1$, ניתן לפתח את J_m לטור טיילור,

$$J_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \quad (4.43)$$

כלומר, פונקצית בסל (של כל סדר m , מלבד J_0 , מתאפסת בראשית. $J_0(0) = 1$ לעומת זאת,

$$N_m = \begin{cases} -\frac{(m-1)!}{\pi} & , m = 1, 2, \dots \\ \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) & , m = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

אפשר לפתח גם פיתוחים אסימפטוטיים לפונקציות הללו, הצורה שלהם עבור $x \gg 1$ (ואולי אפילו $x \gg m$),

$$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.45)$$

$$N_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.46)$$

פיתוח של פונקצית בסל לטור פורייה: ל- $J_m(x)$ ישנם אינסוף אפסים. נסמן ב- x_{ms} - אפס מספר s עבור הפונקציה $J_m(x)$ ($s = 1, 2, \dots$). בציר ρ , נתבונן בקטע מ-0 עד a . אם נדרוש שפונקציית בסל תתאפס בקצה,

$$J_m(ka) = 0 \quad (4.47)$$

נקבל את הערכים הבאים של k :

$$ka = x_{ms} \Rightarrow k_{ms} = \frac{1}{a} x_{ms} \quad (4.48)$$

עבור m מסוים, $\{J_m(x_{ms} \frac{\rho}{a})\}_{s=1,2,\dots}$ זהו סט של פונקציות ממסופרות על ידי אינדקס s . הפונקציות הללו, עבור כל m , מהוות סט שלם ואורתוגונלי על קטע $0 \leq \rho \leq a$. תנאי האורתוגונליות:

$$\int_0^a \rho J_m\left(x_{ms} \frac{\rho}{a}\right) J_m\left(x_{ms'} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{ms}) \delta_{ss'} \quad (4.49)$$

כל פונקציה $f(\rho)$ (כל פונקציה שמתארת מציאות פיזיקלית שמעניינת אותנו) ניתן לפתח בסט הזה.

$$f(\rho) = \sum_{s=1}^{\infty} A_{ms} J_m\left(x_{ms} \frac{\rho}{a}\right) \quad (4.50)$$

טור זה נקרה טור פוריה-בסל.

$$\int_0^a f(\rho) \rho J_m\left(x_{ms'} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \sum_s A_{ms} \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{ms}) \delta_{ss'} \quad (4.51)$$

$$= A_{ms'} \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{ms'}) \quad (4.52)$$

ואלו הם מקדמי הפיתוח.

$$A_{ms} = \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(x_{ms})} \int_0^a f(\rho) J_m\left(x_{ms} \frac{\rho}{a}\right) d\rho \quad (4.53)$$

דוגמה גליל בגובה L וברדיוס a . נקבע פוטנציאל על כל הגליל - על הבסיס העליון $\phi = V \neq 0$, ובמעטפת ובבסיס התחתון, הפוטנציאל יהיה אפס, $\phi = 0$. צריך למצוא $\phi(\rho, z)$ בתוך הגליל. היות ואין תלות ב- φ , מספק לעבוד עם פונקציות מהצורה:

$$\phi_k(\rho, z) = R_{k0}(\rho) Z_k(z) \quad (4.54)$$

עקב התנאי $\phi(\rho, z = 0) = 0$,

$$Z_k = C e^{kz} + D e^{-kz} \quad (4.55)$$

$$\sim \sinh(kz) \quad (4.56)$$

(כי רק אז הביטוי יתאפס עבור $z = 0$). סופיות ב- $\rho \rightarrow 0$, דורשת ש-

$$R_{k0}(\rho) \sim J_0(k\rho) \quad (4.57)$$

$$\phi_{k0}(\rho, z) = J_0(k\rho) \cdot \sinh(kz) \quad (4.58)$$

עוד לא השתמשנו בתנאי $\phi = 0$ על המעטפת. זה ידרוש:

$$J_0(k, a) = 0 \Rightarrow k_{0s} = \frac{1}{a} x_{0s} \quad (4.59)$$

אזי הביטוי $J_0\left(\frac{x_{0s}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{0s}}{a}z\right)$ מקיים את משוואת לפלס ואת תנאי השפה על המעטפת, ועל הבסיס התחתון. הוא אינו מקיים את התנאי על הבסיס העליון.

$$\phi(\rho, z) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s J_0\left(\frac{x_{0s}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{0s}}{a}z\right) \quad (4.60)$$

ניקח את התנאי $Z = L$ ונקבל

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} C_s J_0\left(\frac{x_{0s}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{0s}}{a}L\right) \quad (4.61)$$

הפתרון המפורט נמצא ברשימות של בוריס. התשובה הסופית:

$$C_s = \frac{2V}{x_{0s} J_1(x_{0s})} \sinh^{-1}\left(\frac{x_{0s}}{a}L\right) \quad (4.62)$$

5 פיתוח במולטיפולים⁹

5.1 דוגמאות פשוטות

- מטען נקודתי - (מונופול). בנקודה \mathbf{r} הוא יוצר פוטנציאל

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (5.1)$$

- דיפול - שני מטענים, האחד $\pm q$, על ציר z , במרחק $\frac{d}{2}$ מהראשית. עבור קונפיגורציה כזו של מטענים

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (5.2)$$

(כאשר r_+ , r_- הם המרחקים מכל אחד מהמטענים). מטריגונומטריה,

$$r_{\pm}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp rd \cos \theta \quad (5.3)$$

(כאשר d המרחק בין המטענים ו- θ היא הזווית בין ציר z לוקטור \mathbf{r}) במרחק גדול מהדיפול, עבור $r \gg d$, נזיח את האיבר הריבועי ב- d ,

$$\approx r^2 \mp rd \cos \theta \quad (5.4)$$

ניתן להגדיר "דיפול נקודתי", כאשר $d \rightarrow 0$ ו- $q \rightarrow \infty$, אבל לא נתעסק עם זה בינתיים.

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta} \approx r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \quad (5.5)$$

ולכן,

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{1 - \frac{d}{2r} \cos \theta} - \frac{1}{1 + \frac{d}{2r} \cos \theta} \right] \quad (5.6)$$

$$\approx \frac{d}{r^2} \cos \theta \quad (5.7)$$

לכן, פוטנציאל של דיפול במרחקים גדולים

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \quad (r \gg d) \quad (5.8)$$

ניתן לכתוב את הביטוי גם בצורה

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (5.9)$$

כאשר

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{d}{2}q + \left(-\frac{d}{2}\right)(-q) \right] = qd\hat{\mathbf{z}} \quad (5.10)$$

הדיפול מתואר על ידי וקטור \mathbf{p} , בכיוון החיובי של ציר z , (מהמטען השלילי למטען החיובי).

- קוואדרופול - בראשי נמקם מטען $-2q$, במרחק $\frac{d}{2}$, על ציר z , נמקם שני מטענים שגודלם q . זהו קוואדרופול לינארי. מומנט הדיפול ומומנט המונופול של הקונפיגורציה הזו של מטענים הוא אפס. (המטען הכולל הוא אפס, ו- $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{d}{2}q + \left(-\frac{d}{2}\right)q\right) = 0$) במרחק גדול מקונפיגורציית המטענים

$$\phi(r) \sim \frac{1}{r^3} \quad (5.11)$$

אפשר לחשב זו ישירות, אבל לא נטרח, כי עוד מעט נחשב זאת עבור קונפיגורציה כללית של מולטיפול

- קוואדרופול מישורי, ארבעה מטענים, נמצאים על צלעות ריבוע, כאשר בקדקודים מנוגדים יש מטענים שווים סימן. גם כאן, במרחקים גדולים, הפוטנציאל ידעך כמו $\frac{1}{r^3}$

5.2 המקרה הכללי - עבור קונפיגורציה שרירותית של מטענים

5.2.1 הקדמה מתמטית - פיתוח של $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ לטור טיילור ב- \mathbf{r}' סביר \mathbf{r}

נסמן

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r} \quad (5.12)$$

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = \mathbf{r}' \quad (5.13)$$

$$f(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \cdot (-x'_\alpha)}_{-\mathbf{r}' \cdot \nabla f} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot x'_\alpha \cdot x'_\beta \quad (5.14)$$

אבל עדיף לא להשתמש בקיצורים עם ∇ .

5.2.2 פיתוח

נתון פילוג צפיפות מטען שרירותי $\rho(\mathbf{r}')$ בתוך תחום מיסויים. נבחר את ראשית הצירים בנקודה O , בתוך התחום. נסתכל על השפעת המטענים על הנקודה \mathbf{r} , הרחק מחוץ לתחום שבו יש מטען.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.15)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\frac{1}{r} + \sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right] \quad (5.16)$$

האיבר הראשון של הפיתוח (מונופול) תורם לפוטנציאל תרומה ϕ_0

$$\phi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad q = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \quad (5.17)$$

אם המטען הכולל אינו אפס, זו התרומה העיקרית לפוטנציאל.

האיבר השני - דיפול

$$\phi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right), \quad p_\alpha = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha \quad (5.18)$$

ל- \mathbf{p} יש שלושה רכיבים, והוא מגדיר וקטור. אנחנו מפתחים כרגע ברצף, אבל ניתן לעשות זאת עבור מטענים נקודתיים - $\rho(\mathbf{r}')$ הוא סכום של פונקציות דלתא.

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_\alpha}{r} \quad (5.20)$$

אזי ניתן לכתוב את

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \right) \sum_{\alpha} p_\alpha x_\alpha \quad (5.21)$$

קיבלנו בחישוב ישיר את אותו הביטוי כמו בחישוב ישיר עבור 2 מטענים

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (5.22)$$

קוואדרופול

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \mathcal{D}_{\alpha\beta} = 3 \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha x'_\beta \quad (5.23)$$

כאשר \mathcal{D} הוא טנזור, שניתן לכתוב גם באמצעות מטריצה.

מקובל להגדיר טנזור קצת אחר

$$Q_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \int d^3r' r'^2 \rho(r') \quad (5.24)$$

לטנזור Q נקרא "טנזור המומנט הקואדרופולי".

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (5.25)$$

העקבה של Q ,

$$\text{trace} Q = \sum_{\alpha=1}^3 Q_{\alpha\alpha} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x_1'^2 + 3x_2'^2 + 3x_3'^2 - 3r'^2) = 0 \quad (5.26)$$

אזי התרומה הקואדרופולית לפוטנציאל היא

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5.27)$$

אם כן, למה מותר לפנו להחליף את D ב- Q ? צריך להראות שהאיבר שמבדיל בין Q ל- D שאינו תורם לביטוי

$$\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad r \neq 0 \quad (5.28)$$

נותר לנו לחשב איבר אחד - את הנגזרות המעורבות:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{x_\beta}{r^3} \right) \quad (5.29)$$

$$= -x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r^3} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (5.30)$$

$$= x_\beta \frac{4}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{r^3} \delta_{\alpha\beta} \quad (5.31)$$

$$= \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{1}{r^3} \delta_{\alpha\beta} \quad (5.32)$$

נחזור לביטוי עבור ϕ_2

$$\phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta} \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{1}{r^3} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (5.33)$$

אבל האיבר השני אינו טורם, משום ש- $\text{trace} Q = 0$

$$\phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \quad (5.34)$$

ניתן להמשיך בפיתוח הנ"ל - לאוקטפול וכן הלאה.

5.3 פיתוח פורמלי בסדרים גבוהים¹⁰

אם רוצים להמשיך לסדרים גבוהים יותר, זה מתחיל להיות מאוד כבד. נפתח סדרים גבוהים יותר באמצעות תכונות של פונקציות כדוריות.

¹⁰19.04.2009, שעה שנייה

תזכורת עבור בעיה בעלת סימטריה אזימותרית, פתרון של משוואת לפלאס:

$$\sum (r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (5.35)$$

אם נסתכל על ציר z ($\theta = 0$):

$$\phi(r, \theta = 0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}(r) \quad (5.36)$$

אם $\phi(r, 0)$, הפוטנציאל על ציר z , ידוע, אז ניתן לשחזר את הפוטנציאל בכל המרחב.

נפתח את הפוטנציאל במרחב נתבונן בבעיה פשוטה של מטען נקודתי על ציר z , במרחק r' מהראשית. נסתכל על פוטנציאל בנקודה r , בזווית θ מציר z . הפוטנציאל בנקודה r ,

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.37)$$

עבור $r > r', \theta = 0$

$$\phi(r, \theta = 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{r'}{r}} \quad (5.38)$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots \right) \quad (5.39)$$

כאשר הפיתוח של $\frac{1}{1 - \frac{r'}{r}}$ הוא פיתוח של סדרה הנדסית שזה וסכומה

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{\ell} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} \quad (5.40)$$

אז, לפי הנאמר בתזכורת,

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} \cdot P_{\ell}(\cos \theta) \quad (5.41)$$

קיבלנו פיתוח של $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ בפולינומי לגנדר, P_{ℓ} :

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad r > r'} \quad (5.42)$$

נקודות שרירותיות נאפיין את \mathbf{r}, \mathbf{r}' על ידי

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi) \quad (5.43)$$

$$\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi') \quad (5.44)$$

כאשר הזווית בין \mathbf{r}, \mathbf{r}' היא γ אזי

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) \quad (5.45)$$

נרצה לבטא את γ באמצעות הזוויות של הבעיה

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi') \quad (5.46)$$

אזי

$$P_\ell (\cos \gamma) = P_\ell (\theta, \varphi; \theta', \varphi') \quad (5.47)$$

קבענו את θ', φ' , ונסתכל על הפולינום לג'נדר הזה כפונקציה של θ, φ , ונפתח אותו בפונקציות כדוריות, $Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$. זוהי מערכת שלמה, ולכן ניתן לפתח ביטוי כזה.

$$P_\ell (\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^* (\theta', \varphi') Y_{\ell m} (\theta, \varphi) \quad (5.48)$$

זהו משפט ידוע בפונקציות ספריות (Addition Theorem). באמצעות הפיתוח הזה, ניתן לקבל פיתוח במולטיפולים לכל סדר.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^* (\theta', \varphi') Y_{\ell m} (\theta, \varphi) \quad r > r' \quad (5.49)$$

באמצעות הפיתוח הזה, נמצא את $\phi(\mathbf{r})$ עבור פילוג כלשהו של מטען (במרחק גדול)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (5.50)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell + 1} \left[\int d^3 r' Y_{\ell m}^* (\theta, \varphi') r'^{\ell} \rho(\mathbf{r}') \right] \frac{Y_{\ell m} (\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \quad (5.51)$$

נגדיר את המומנטים המולטיפולים - $q_{m\ell}$

$$q_{m\ell} = \int d^3 r' Y_{\ell m}^* (\theta', \varphi') r'^{\ell} \rho(\mathbf{r}') \quad (5.52)$$

ובאמצעותם נרשום את הפוטנציאל

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell + 1} q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m} (\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \quad (5.53)$$

• למשל, עבור $\ell = 0$, זהו מונופול ($Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$):

$$q_{00} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi} \quad (5.54)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (5.55)$$

ואכן, זו התוצאה המוכרת.

• עבור $\ell = 1$, דיפול, כבר יהיו שלושה מספרים $q_{11}, q_{10}, q_{1,-1}$:

$$q_{11} = \int d^3r \left[\overbrace{-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}}^{Y_{11}} \right] r \rho(\mathbf{r}) \quad (5.56)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r (\sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi) r \rho(\mathbf{r}) \quad (5.57)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r (x - iy) \rho(\mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{4}{8\pi}} (p_x - ip_y) \quad (5.58)$$

$$q_{1,-1} = -q_{1,1}^* \quad (5.59)$$

$$q_{1,0} = \int d^3r \left[\overbrace{\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta}^{Y_{10}} \right] r \rho(\mathbf{r}) \quad (5.60)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z \quad (5.61)$$

אפשר להציב את הגדלים הללו לפוטנציאל ϕ ולהראות שמתקבל אותו הביטוי.

6 עבודה ואנרגיה באלקטרוסטטיקה¹¹

זה מושג לא מסובך במיוחד, אבל די עדין. בספרות יש הגדרות שונות לאנרגיה, שלעיתים נראים כמו סתירה. במבט עמוק יותר, רואים שאין סתירה, אלא פשוט ביטויים שונים המתייחסים למצבים שונים.

6.1 אנרגיה של מטענים בשדה חיצוני נתון

$\mathbf{E}(\mathbf{r}), \phi(\mathbf{r})$ הם פוטנציאל ושדה חיצוני.

• האנרגיה של מטען נקודתי q בנקודה \mathbf{r}_0 :

$$W = q\phi(\mathbf{r}_0) \quad (6.1)$$

כאשר נניח שעבור $r \rightarrow \infty$, הפוטנציאל $\phi \rightarrow 0$. גודל זה הוא העבודה הדרושה להבאת מטען q מאינסוף ל- \mathbf{r}_0 .

• אנרגיה של דיפול בשדה חיצוני: הנקודה \mathbf{r}_0 היא מרכז הדיפול, כאשר המרחק בין המטענים $\pm q$ למרכז הדיפול הוא $\pm \frac{1}{2} \mathbf{d}$.

$$W = q\phi\left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) - q\phi\left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \quad (6.2)$$

נניח שהדיפול קטן, כלומר, בכיוון \mathbf{d} אין שינויים גדולים בכיוון או בגודל

$$\approx q \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{d} \right] = -\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} \quad (6.3)$$

כאשר $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ מומנט הדיפול.

• הכללה לפילוג $\rho(\mathbf{r})$ של מטען: נבחר נקודה 0 בתוך הפילוג $\rho(\mathbf{r})$, שהמרחקים ימדדו ביחס אליה. לכן,

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(0) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \Big|_{x_{\alpha}=0} x_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Big|_{x_{\alpha}=0, x_{\beta}=0} + \dots \quad (6.4)$$

$$= \phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha} x_{\beta} \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}(0) + \dots \quad (6.5)$$

$$= \phi_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} (3x_{\alpha} x_{\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \dots \quad (6.6)$$

מותר לנו להוסיף איבר כזה כי $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$ $\sum_{\alpha} \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$. ההתאפסות של הדיברגנץ על השדה קוראת כי מדברים רק על **השדה החיצוני**. הדיברגנץ של פילוג המטען עצמו אינו מתאפס בתחום.

$$W = \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r = \phi(0) \int \rho(\mathbf{r}) d^3r - \mathbf{E}(0) \cdot \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \quad (6.7)$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}(0) \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3x_{\alpha} x_{\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta}) + \dots \quad (6.8)$$

$$= q\phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}(0) + \dots \quad (6.9)$$

כאשר q, \mathbf{p}, Q מאפיינים את פילוג המטען, והאפיון של השדה החיצוני נמצא בפוטנציאל בנקודה - ובנגזרות שלו.

6.2 דוגמאות

6.2.1 אנרגיה של דיפול

1. דיפול בעל מומנט \mathbf{p}_1 (כיוון φ, θ) נמצא בראשית הצירים. איזה שדה דיפול זה משרה בנקודה \mathbf{r} ?

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{3}{r^4} \hat{r} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \mathbf{p}_1 \right] \quad (6.11)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\hat{r} (\mathbf{p}_1 \cdot \hat{r}) - \mathbf{p}_1] \quad (6.12)$$

2. בנקודה $(0, 0, z)$, נמקם דיפול נוסף, \mathbf{p}_2 , שכיוונו מוגדר על ידי הזוויות (φ_2, θ_2) . מה היא אנרגיית האינטראקציה בין שני הדיפולים?

הדוגמה היא עדין כללית, כי בהינתן כיוון שרירותי של הדיפולים, תמיד ניתן להגדיר את מערכת הצירים כך שהדיפול יהיה על ציר \hat{z} .

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^3} (3\hat{z}\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1) \quad (6.13)$$

אזי אנרגיית האינטראקציה

$$W_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^3} (-3p_{1z}p_{2z} + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1) \quad (6.14)$$

3. מה הכוח הפועל, בכיוון ציר z , בין הדיפולים:

$$F_z = -\frac{\partial W_{12}}{\partial z} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 z^4} (-3p_{12}p_{2z} + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \quad (6.15)$$

כיוון הוכח, משיכה או דחייה, תלוי באוריינטציה בין הדיפולים (המכפלות בין המומנטים). כוח דוחה הוא עבור סימן חיובי.

$$\mathbf{p}_i = p_i (\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i) \quad i = 1, 2 \quad (6.16)$$

אזי

$$F_z = \frac{4}{4\pi\epsilon_0 z^4} p_1 p_2 [-4 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2] \quad (6.17)$$

$$= \frac{3p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 z^4} [-2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] \quad (6.18)$$

• כאשר שני הדיפולים הם מקבילים (במישור $x-y$), אזי $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, אזי נשאר רק האיבר $F^{-1} \sin \theta_1 \sin \theta_2$ יהיה חיובי, כוח דחייה.

6.2.2 אנרגיה של אוסף מטענים¹²

ישנו מטען q_1 ב- \mathbf{r}_1 . מביאים מאינסוף מטען q_2 לנקודה \mathbf{r}_2 . העבודה הדרושה היא

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{q_1}{r_{12}} \quad (6.19)$$

האנרגיה הזו יכולה להיות חיובית או שלילית, כתלות בסימני המטען. נכליל את הביטוי לאוסף מטענים כלשהו, אך נתחיל בשלב ביניים נוסף. נביא שוב מאינסוף מטען שלישי, q_3 לנקודה \mathbf{r}_3 . העבודה הדרושה:

$$W_{13} + W_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q_3 \frac{q_1}{r_{13}} + q_3 \frac{q_2}{r_{23}} \right) \quad (6.20)$$

סך הכל, העבודה שדרושה כדי להרכיב את קונפיגורציה שלוש המטענים היא סכום של שלושה איברים היא

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23} \quad (6.21)$$

נכליל ל- N מטענים q_i הוא מטען מס' i ו- \mathbf{r}_i מיקומו ($i = 1, \dots, N$). האנרגיה פוטנציאלית הכללית של אוסף המטענים W תהיה:

$$W = W_{12} + W_{13} + \dots + W_{1N} \quad (6.22)$$

$$+ W_{23} + W_{24} + \dots + W_{2N} + \dots \quad (6.23)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N W_{ij} \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (6.25)$$

נוריד את האילוץ עבור $j > i$, ונסכם על i, j בלתי תלויים, ונוסיף פקטור חצי כדי לפצות על האיברים הכפולים

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (6.26)$$

נגדיר את הפוטנציאל בנקודה \mathbf{r}_i , עקב כל המטענים מלבד q_i הוא:

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (6.27)$$

אזי

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (6.28)$$

6.2.3 הכללה לפילוג רציף

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (6.29)$$

הערה 6.1 נשווה לביטוי $W = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$ בשדה חיצוני: כאן הפוטנציאל הוא פוטנציאל חיצוני, נתון, של מטענים אחרים. חשוב להיות מודע להבדלים הללו, ולזכור באיזה מצב אנחנו מטפלים כאן.

הקשר בין $\rho(\mathbf{r})$ ל- $\phi(\mathbf{r})$, במקרה זה, נתון על ידי משוואת פואסון:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \implies \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (6.30)$$

אזי

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \phi(\mathbf{r}) \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_V \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \cdot \phi) d^3r - \int_V \mathbf{E} \nabla \phi d^3r \right] \quad (6.32)$$

נסתכל בנפרד על החישובים השונים של היטוי:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \phi) \quad (6.33)$$

ולפי משפט גאוס,

$$= \oint_{\partial V} \phi E_n dS \quad (6.34)$$

נראה שכאשר $V \rightarrow \infty$, אז הביטוי שואף לאפס. לכאורה זה לא נראה כך, כי גם השפה, ∂V שואפת לאינסוף, אבל

$$\phi(R) \sim \frac{1}{R}, \quad E(r) \sim \frac{1}{R^2} \quad (6.35)$$

אבל שטח המעטפת של V , $S = \partial V \sim R^2$, ולכן

$$\oint_S \phi E_n dS \xrightarrow{V \rightarrow \infty, S \rightarrow \infty} 0 \quad (6.36)$$

נשאר רק האיבר השני: כאן האינטגרל הוא על כל המרחב, כי בניגוד למטען, השדה קיים בכל מקום במרחב. בתוך ענן הצפיפות ומחוץ לו

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\text{all space}} \mathbf{E} \cdot \underbrace{\nabla \phi}_{\mathbf{E}} d^3r \quad (6.37)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon \int_{\text{all space}} E^2(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.38)$$

סיכום: עבור אוסף מטענים נקודתי, עבור אוסף מטענים נקודתי,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (6.39)$$

כאשר מכילים את הביטוי לרצף,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \iint_V \frac{\rho(\mathbf{r}) d^3r \rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

ואחרי כמה פעולות מתמטיות, השתמשנו בקשר בין ρ ו- ϕ וקיבלנו את הביטוי, שוב, עבור רצף,

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{all space}} E^2(\mathbf{r}) d^3r \quad (6.41)$$

כאשר נוסחה (6.41) שקולה לנוסחה (6.40). אבל בביטוי (6.40) הביטוי נראה כמו אנרגיה פוטנציאלית בין מטענים. להבדיל, בנוסחה (6.41), לא מופיעים כלל המטענים, אלא מופיע שדה, והאנרגיה היא בכל המרחב. הפרוש של נוסחה (6.41) היא האמירה שאנרגיה אלקטרוסטטית אצורה בתוך השדה: איפה שיש שדה, יש אנרגיה.

לכן, ניתן להגדיר את הביטוי $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\mathbf{r})$ כצפיפות האנרגיה בנקודה \mathbf{r} . במסגרת אלקטרוסטטיקה, אין משמעות ל"היכן ממוקמת האנרגיה". גם המושג עצמו של "שדה חשמלי" הוא רק עזר מתמטי, בשלב זה. בנוסחה¹³ (6.41), השדה מופיע בריבוע כלומר, האנרגיה היא חיובית ממש. לעומת זאת, בנוסחה (6.39), האנרגיה הכללית יכולה להיות שלילית. נוסחה (6.39) היא הגיונית: אם המטענים מנוגדים, צריך להשקיע אנרגיה כדי להפריד אותם לאינסוף, להוריד את האנרגיה לאפס, ולכן האנרגיה היא שלילית. במעבר מ- (6.39) ל- (6.40) - לא מאפשרים מטען נקודתי: עבור מטען נקודתי, ρ הוא אינסופי. לכן, עבור מטען נקודתי, לפי נוסחה (6.39), האנרגיה תהיה אפס (לא תהיה אינטראקציה). לעומת זאת, עבור מטען עם צפיפות δ , נוסחה (6.40) תיתן:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \implies \frac{q^2}{2} \int d^3r \delta(\mathbf{r}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.42)$$

והאינטגרל אינו מוגדר: הפונקציה באפס שואפת לאינסוף. עבור מטען נקודתי,

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6.43)$$

ושוב, אם ננסה לחשב את האנרגיה, נעשה אינטגרל על כל המרחב, נקבל התבדרות:

$$W \propto \int_0^\infty r^2 dr \cdot \frac{1}{r^4} \rightarrow \infty \quad (6.44)$$

כלומר, את נוסחאות (6.40) ו- (6.41) לא ניתן ליישם למטען נקודתי.

נתבונן בכדור טעון, ברדיוס a , בצפיפות אחידה סופית, $\rho = const$, המטען הכולל,

$$q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \quad (6.45)$$

האנרגיה של פילוג המטען: נחשב זאת באמצעות נוסחה (6.41)

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} 1/r^2, & r > a \\ r/a^3, & r < a \end{cases} \quad (6.46)$$

14

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{allspace}} d^3r E_r^2(r) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{6}{5a} \quad (6.47)$$

כל זמן שהכדור סופי, הביטוי הזה תקף. אבל בגבול של מטען נקודתי: צמצום הכדור לנקודה תוך שמירה על המטען הכולל, ישנה התבדרות של הביטוי.

מושג של "מטען נקודתי" באלקטרודינמיקה אינו חי בכפיפה אחת עם מושג השדה. אבל קשה לוותר על ההשקפה הזו: לפי השקפה מודרנית, האלקטרון, כחלקיק אלמנטרי, הוא מטען נקודתי. לו לאלקטרון היו ממדים, והוא לא היה מטען נקודתי, היה אפשר לדון במבנה הפנימי שלו, דבר שנמנעים ממנו עבור חלקיקים אלמנטריים. כדי ליישב את הבעיה, פיינמן, במהלך הדוקטורט שלו, ניסה להשמיט את השדה, ולדבר רק על אינטראקציה בין מטענים, גם עבור מטענים נעים. כמו כן, את התאוריה הזו היה קשה לקוונטת.

7 אלקטרוסטטיקה של חומרים דיאלקטריים

רוב התופעות בפיזיקה, קשורות לנושא הזה, של אינטראקציה שבין שדה אלקטרומגנטי - לחומר. לדוגמה, גל אלקטרומגנטי מוחזר, או הצבא הכחול של השמים, מוסברים על ידי אינטראקציה של גלים אלקטרומגנטיים לחומר. הרבה נושאים בפיזיקה עוסקים בנושא זה, אבל אנחנו נגע כאן רק בקצה הקרחון.

7.1 חומרים דיאלקטריים

בצורה גסה, ניתן לחלק את כלל החומרים למתכות ולחומרים דיאלקטריים. במתכות, האלקטרונים חופשיים: בהשפעת שדה חשמלי, תהיה תנועה של אלקטרונים עד לסיכוך של השדה החשמלי: כך שבתוך המתכת השדה יהיה אפס.

בחומרים דיאלקטריים אין תנועה חופשית של מטענים. נדון על ההשפעה על חומרים דיאלקטריים כאשר פועל עליהם שדה חשמלי חיצוני. תחת השפעה של שדה, חומר דיאלקטרי מקבל **קיטוב**, עקב המבנה הפנימי שלו (אטומים, מולקולות), והשדה החיצוני, למרות שהאטומים הם ניטרליים וקשורים, האטומים יכולים לפתח מומנט דיפול, והחומר נעשה מקוטב.

איך שדה חיצוני פועל על אטום? בקוונטים, דיברנו על אפקט סטארק: כיצד משתנה האנרגיה ומומנט הדיפול של אטום בשדה חשמלי. כאן נדון במודל קלסי של אטום:

גרעין, במטען חיובי $+q$, וסביבו מרוח ענן של מטען אלקטרוני, שמטענו הכולל $-q$. (קוונטית, פילוג המטען נקבע על ידי הסיכוי למצוא את המטען בכל מקום במרחב, ולא אוסף של "פונקציות דלתא").

מסימטריה, בהעדר שדה חיצוני, שום כוח לא פועל על הגרעין: מטען מרוח בצורה אחידה על הכדור לא יוצר שדה במרכז.

כאשר נפעיל שדה חיצוני, E , הוא ישאף להזיז את הגרעין, וגם את הענן. כאשר נפעיל שדה, הוא ידחה את הגרעין לכיוון אחד וימשוך את ענן האלקטרונים לכיוון השני. במצב שיווי משקל חדש, הגרעין יהיה מוזז במרחק d מהמרכז.

E_e - השדה שיוצר ענן האלקטרונים בנקודה שבו נמצא הגרעין (לא נסמן את E כווקטור משום שבחישוב זה, כל השדות פועלים על הציר של השדה החיצוני E)

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{d}{a^3} \quad (7.1)$$

¹⁴לניוטון יש פיתוח ממש יפה לזה ב"פרינציפיה". אומנם עבור כבידה, אבל זה אותו הדבר.

כאשר a רדיוס הכדור. אנחנו מנסים כרגע לקבל הערכה גסה של מומנט הדיפול, ולכן לא נדבר על ה"עיוות" שנגרם לענן עקב התזוזה של הגרעין. החישוב המדויק בכל מקרה צריך להיות קוונטי. בנוסף ל- E_e , פועל על הגרעין גם השדה החיצוני E בכיוון ההפוך. והתנאי לשיווי משקל הוא כאשר

$$E_e = E \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{d}{a^3} = E \implies d = \frac{4\pi\epsilon_0}{q} a^3 E \quad (7.3)$$

ולכן, מומנט הדיפול של האטום בהשפעת שדה מגנטי חיצוני E : נבחר את ראשית הצירים במרכז הכדור,

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \quad (7.4)$$

כאשר $\rho(\mathbf{r})$ מורכב מענן האלקטרונים, ρ_e , ומהגרעין, שמטענו q , שנמצא במרחק d מראשית הצירים:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_e(\mathbf{r}) + q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \quad (7.5)$$

אם נבחר את ראשית הצירים במרכז, ענן האלקטרונים אינו טורם למומנט הדיפול, בגלל הסימטריה הכדורית: $\int \rho_e(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3r = 0$, כך שנשארה תרומת הגרעין:

$$p_{\text{atom}} = qd = 4\pi\epsilon_0 a^3 E \equiv \alpha E \quad (7.6)$$

כלומר, אטום, בהשפעת שדה חיצוני, מפתח מומנט דיפול הפרופורציוני לעוצמת השדה. המקדם α מכונה Polarizability, של אטום.

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 \quad (7.7)$$

עבור מולקולה, לא נכון לומר שהאובייקט המקורי הוא כדורי, אבל גם עבור מולקולות, מומנט הדיפול יהיה תלוי בשדה החשמלי ובאיזשהו מקדם, מאותו סדר גודל.

הגדרה 7.1 קיטוב של חומר, \mathbf{P} : זהו מומנט דיפול, ליחידת נפח,

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p}_{\text{atom}} = 4\pi\epsilon_0 n a^3 \mathbf{E} \equiv \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (7.8)$$

כאשר n הוא מספר האטומים ליחידת נפח, ו- χ הוא ה**סוספטביליות** החשמלית, electric susceptibility

$$\chi = 4\pi n a^3 \quad (7.9)$$

(הגודל הזה מתאים לגזים, תחת ההנחה שאטומים לא משפיעים על אטומים אחרים. במוצק, זה לא ככה)

גדלים שונים של סוספטביליות:

- גז מימן: $\chi = 0.00026$

- אוויר: $\chi = 0.00054$

אם ניקח $n = 2.7 \cdot 10^{19}$, מספר המולקולות בסמ"ק אחד של גז, $a \approx 1 = 10^{-8} \text{ cm}$, ובהצבה, נקבל

$$\chi \approx 4\pi \cdot 2.7 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-24} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (7.10)$$

ואכן, זהו אותו סדר גודל שנמדד ניסיונית.

7.1.1 התאוריה המקרוסקופית¹⁵

כשמדברים על תיאוריה מקרוסקופית, מתעלמים מהמבנה האטומי. מדברים על החומר כרצף, וצפיפות החומר היא מסה ליחידת נפח.

בתוך סריג, נסתכל על נקודה במרחק \mathbf{r} מראשית הצירים: נרצה לחשב את הפוטנציאל בנקודה זו, בתוך החומר, $\phi_{\text{micro}}(\mathbf{r})$. זו שאלה אקדמית: לא ניתן למדוד את הפוטנציאל בתוך החומר. ובפרט, זוהי פונקציה פראית של מקום, התלויה במרחק של כל נקודה ונקודה מהאטום. מה שאפשר למדוד הוא מיצוע על מרחקים הרבה יותר גדולים, ולכן נגדיר גדלים מקרוסקופיים:

בהינתן נקודה \mathbf{r} , נגדיר סביבה נפח, ΔV , שגודלו גדול בהרבה מהמרחקים בין אטומים. נפח זה אינו גדול מדי: הוא נבחר כך שהפנים שלו יהיה אחיד, בסקלה מיקרוסקופית, ונמצע את הגדלים על כל הנפח.

$$\phi_{\text{macro}}(\mathbf{r}) \equiv \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \phi_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (7.11)$$

כאשר המרחק $\boldsymbol{\xi}$ הוא המיקום של נקודה בתוך הנפח, יחסית לנקודה \mathbf{r} . נחשב גם את השדה המקרוסקופי:

$$\mathbf{E}_{\text{macro}} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \int \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (7.12)$$

$$= -\frac{1}{\Delta V} \int \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \phi_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (7.13)$$

את הנגזרת ניתן להוציא מהאינטגרל, כי הנגזרת היא לפי \mathbf{r} והאינטגרל הוא על $\boldsymbol{\xi}$, ולכן

$$= -\frac{1}{\Delta V} \vec{\nabla} \int \phi_{\text{micro}}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) d^3\xi = -\vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \quad (7.14)$$

נוכל לבצע חישובים אלקטרוסטטיים עבור גדלים ממוצאים:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}_{\text{micro}} = 0 \implies \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.15)$$

והשדה המיקרוסקופי מקיים את משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_{\text{micro}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{micro}} \implies \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7.16)$$

כאשר ρ היא צפיפות מטען ממוצאת בחומר. \mathbf{P} , קיטוב של חומר, מומנט דיפול ליחידת נפח.

טענה 7.2 נראה את הקשר בין צפיפות מטען ממוצעת, לקיטוב:

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} \quad (7.17)$$

הוכחה: $\mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ הוא מומנט הדיפול של אלמנט בסביבה של נקודה \mathbf{r}' בתוך החומר. אלמנט הדיפול יוצר פוטנציאל בנקודה \mathbf{r} , שערכו

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.18)$$

¹⁵03.05.2009, הרצאה שנייה

לכן, עבור סך כל הפוטנציאל בנקודה \mathbf{r} , נסכל על התרומות של כלל הדיפולים:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.19)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \nabla' \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \left[\vec{\nabla}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right] \quad (7.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.22)$$

מהנוסחה $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, נזהה את $\rho(\mathbf{r})$. אזי

$$\rho(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (7.23)$$

הוא המטען עקב קיטוב החומר (מטען קשור). עבור חומר אחיד, למשל, המטען הזה יהיה על המעטפת, על שפת החומר. ■

ואכן, אנחנו מכירים את ההצטרות הזו על שפת חומר דיאלקטרי בקבל, מפיזיקה 2מ(מ¹⁶). המטענים על השפה ייצרו שדה שיגרום לכך שהשדה בתוך החומר, יהיה נמוך יותר מהשדה החיצוני.

תהיה צפיפות מטען $\pm\sigma$ על הדופן העליונה והתחתונה של החומר, בהתאם לכיוון השדה. σ הוא מטען קשור. אם החומר הוא הומוגני, המטען הקשור הוא רק על השפה. עבור חומר לא-הומוגני, ייווצר מטען קשור באזורי אי-הרציפות.¹⁷

עבור דגם (מלבני, כרגע..) בשדה חיצוני אחיד \mathbf{E}_{ext} . בתוך הדגם, יהיה שדה \mathbf{E} שכיוונו זהה, אך גודלו קטן יותר מ- \mathbf{E}_{ext} . אם A שטח הדגם (בכיוון הניצב לשדה) ועוביו d , אזי מומנט הדיפול של הדגם יהיה

$$p = \sigma A \cdot d \quad (7.24)$$

כאשר σ הוא המטען על השטח. הקיטוב, P , מומנט הדיפול ליחידת נפח, הוא

$$P = \frac{p}{V} = \sigma \quad (7.25)$$

כלומר, הקיטוב שווה למטען הקשור השטחי, שעל דפנות הדגם. כיוון הקיטוב הוא כיוון השדה. עבור דגם לא אחיד, או בצורה מסובכת, הקיטוב ישתנה בתוך הדגם, הוא יהיה פונקציה של המקום. הקשר הכללי בין קיטוב ושדה:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (7.26)$$

זה נכון עבור שדה "חלש" אם השדה יהיה חזק יותר, עלולים להיכנס תיקונים לא לינאריים, ועבור שדות חזקים מאוד, השדה יפרק (יינן) את החומר. הקביעה "מהו שדה חזק" נקבע בניסוי או בתיאוריה מיקרוסקופית.

כרגע, נניח שאין מטען חיצוני בחומר

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} \quad (7.27)$$

נעביר אגפים, ונקבל

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0 \quad (7.28)$$

נגדיר וקטור חדש,

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7.29)$$

¹⁶אם אתם מספיק צעירים בשביל לעשות אותו
¹⁷05.05.2009

ההעתקה החשמלית, Electric displacement, כך ש-

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = 0 \quad (7.30)$$

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (7.31)$$

כשהגדרנו $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$, כאשר ϵ מכונה "קבוע דיאלקטרי", אבל באופן כללי, הוא לא תמיד קבוע. מונח מקובל יותר הוא פרמטיביות, Permittivity.

אם, בנוסף למטען קשור, ישנו מטען חיצוני ρ , יתקיים

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{ext} \quad (7.32)$$

הקיטוב, עדין תלוי רק במטען הקשור. ההגדרה $\rho = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P}$ עומדת בעינה. אזי

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = \rho_{ext} \quad (7.33)$$

נסכם

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} &= \rho_{ext} \\ \mathcal{D} &= \epsilon \mathbf{E} \end{aligned}} \quad (7.34)$$

אלו יהיו המשוואות שלנו בנוכחות חומר.

7.1.2 תנאי שפה

על משטח שמהווה את הגבול בין חומר עם ϵ_1 ו- ϵ_2 . בחומר 2, על השפה, יהיה לנו \mathcal{D}_2 ובחומר הראשון, \mathcal{D}_1 יהיה הנורמל של הגבול. מהמשוואות,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = \rho_{ext} \quad (7.35)$$

נזור תנאי שפה: נסתכל על נפח קטן V , שכולל נפח משני החומרים, ואת השפה ביניהם. הנפח יהיה עם שטח A ועם עובי δ . אזי

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = \int_V dV \rho_{ext} \quad (7.36)$$

נעריך בנפרד את שני צדדי המשוואה: לפי משפט גאוס,

$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = \oint_{\partial V} \mathcal{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.37)$$

$$= \underbrace{(\mathcal{D}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}) A}_{\text{upper edge}} - (\mathcal{D}_1 \cdot \mathbf{n}_{12}) A + O(\delta) \quad (7.38)$$

בצד ימין,

$$\int_V dV \rho_{ext} = \sigma_{ext} \cdot A \quad (7.39)$$

כאשר σ_{ext} הוא המטען הצטבר על השפה (של שני בחומרים). מהשוויון, נקבל את תנאי השפה:

$$\boxed{\mathcal{D}_{2n} - \mathcal{D}_{1n} = \sigma_{ext}} \quad (7.40)$$

כאשר D_{in} הוא הרכיב הנורמלי של הווקטור D_i .
תנאי שפה שני מקבלים מהמשוואה¹⁸

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.41)$$

בוחרים מסלול מלבני שצלעותיו a , במקביל למשטח δ -ו, אורך הציר הניצב למשטח. השטח הכולל הוא A . נבחר את כיוון המסלול נגד כיוון השעון.

$$0 = \int_A \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -E_{2x} \cdot a + E_{1x} \cdot a + O(\delta) \quad (7.42)$$

כאשר את $\delta \rightarrow 0$, לכן הוא לא טורם. מכאן, נקבל תנאי שפה עבור השדה:

$$E_{1x} = E_{2x} \quad (7.43)$$

רציפות של הרכיב המשיק של השדה (על הרכיב הנורמלי אין תנאי).

7.1.3 סיכום

עובר שדה,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (7.44)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad (7.45)$$

וישנה משוואה נוספת שמקשרת בין \mathbf{D} ל- \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7.46)$$

ε מכונה קבוע דיאלקטרי של החומר, למרות שהוא אינו קבוע, הוא תלוי, כרגע, במקום. ניתן לחץ את \mathbf{D} ולעבוד עם המשוואה

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_{ext} \implies \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla}\phi) = -\rho_{ext} \quad (7.47)$$

גם בנוכחות של חומר, אפשר את כל האלקטרוסטטיקה לצמצם למשוואה אחת. עם כל המרחב מלא בחומר עם אותו ε , אז את כל הבעיות שפתרנו בריק, ניתן להעביר לחומר, עד כדי פקטור ε . תנאי השפה:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{ext}, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (7.48)$$

כאשר t הוא הרכיב הטנגנציאלי ו- n , הרכיב הנורמלי (של D, E)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \quad (7.49)$$

כאשר $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$.

המטען הקשור (הפנימי, החיצוני תמיד מסומן כ- ρ_{ext})

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} \quad (7.50)$$

אם יש גבול חד בין חומרים, אז \mathbf{P} קופץ. מהמשוואה הזו, ניתן לקבל תנאי על מטען קשור, על הגבול בין שני חומרים,

$$\implies \sigma = P_{1n} - P_{2n} \quad (7.51)$$

כאשר σ הוא צפיפות מטען שטח קשור.

7.2 בעיות

7.2.1 דוגמה בעלת סימטריה גלילית

קבל קואקסיאלי, מורכב מגליל פנימי מתכתי ברדיוס a , ומשתי שכבות דיאלקטריות, שכבר בעלת קבוע דיאלקטרי ϵ_1 עבור $a < \rho < b$ ושכבה בעלת קבוע ϵ_2 עבור $b < \rho < c$ (המרחק מהמרכז בקואורדינטות צילנדריות). שפת הכליל הפנימית, ברדיוס $\rho = a$, טעונה בצפיפות מטען שטח σ_{ext} . מהו הפרש הפוטנציאלים בין ,

$$\phi(\rho = c) - \phi(\rho = a) = \Delta\phi \quad (7.52)$$

ל- \mathcal{D} ו- \mathbf{E} יש רכיב אחד בלבד:

$$E_\rho = E, \mathcal{D}_\rho = \mathcal{D} \quad (7.53)$$

עבור $\rho > a$,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = 0 \quad (7.54)$$

היות ויש רק רכיב רדיאלי, $\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\mathcal{D}\rho) = 0$ אזי

$$\mathcal{D} = \frac{const}{\rho} \quad (7.55)$$

נניח שבתוך המתכת $\mathcal{D} = 0$. זה לא מדויק, למרות ש- $\mathbf{E} = 0$ בתוך המתכת, משום שבתוך מתכת, $\epsilon \rightarrow \infty$. ובכל זאת, נניח שבתוך המתכת $\mathcal{D} = 0$. מתנאי השפה,

$$\mathcal{D}(\rho = a + 0) - \overbrace{\mathcal{D}(\rho = a - 0)}^0 = \sigma_{ext} \quad (7.56)$$

לכן

$$\mathcal{D}(\rho = a + 0) = \frac{const}{a} = \sigma_{ext} \implies const = a \cdot \sigma_{ext} \quad (7.57)$$

$$\boxed{\mathcal{D}(\rho) = \frac{a \cdot \sigma_{ext}}{\rho}} \quad (\rho > a) \quad (7.58)$$

דרך אחרת: באמצעות חוק גאוס. נבחר גליל ברדיוס ρ , ובאורך שרירותי L בכיוון \hat{z} . עבור גליל זה, נשתמש במשפט גאוס:

$$2\pi\rho \cdot L \cdot \mathcal{D}(\rho) = Q_{internal} = 2\pi a L \cdot \sigma_{ext} \implies \mathcal{D}(\rho) = \frac{a\sigma_{ext}}{\rho} \quad (7.59)$$

מצענו את ההעתקה החשמלית, עבור $\rho < a$. הביטוי נכון גם עבור $\rho > c$, למרות שאותנו הביטוי מעניין רק עבור בתוך הכבל. מהביטוי ל- \mathcal{D} נמצא את \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{ext} \cdot a}{\rho} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_1} & a < \rho < b \\ \frac{1}{\epsilon_2} & b < \rho < c \end{cases} \quad (7.60)$$

ומכאן, נחשב את הפוטנציאל:

$$\Delta\phi = - \int_a^c E d\rho = -\sigma_{ext} a \left[\frac{1}{\epsilon_1} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{\epsilon_2} \int_b^c \frac{d\rho}{\rho} \right] \quad (7.61)$$

$$= -\sigma_{ext} \cdot a \left[\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right] \quad (7.62)$$

אחרי שכבר מצאנו את השדה, אפשר לחשב קיטוב בכל מקום. השדה כפול $(\epsilon - \epsilon_0)$. אפשר גם לשאול איפה נמצא מטען קשור: לא בנפח, אבל על פני השטח, ברדיוס b , יהיה מטען קשור.

7.2.2 מטען בין חומרים דיאלקטריים

מטען Q_{ext} חיצוני, נמצא על הגבול בין שני חומרים, בראשית הצירים. על מישור $X - Y$, נמצא התפר בין שני חומרים דיאלקטריים: ε_1 עבור $z < 0$ ו- ε_2 עבור $z > 0$. מבקשים למצוא את \mathbf{D} , \mathbf{E} בכל המרחב. לבעיה הזו יש סימטריה אזימוטלית: נקבע את θ להיות הזווית שבין הרדיוס למישור, אז הבעיה אינה תלויה בזווית φ , כי אם רק בזווית φ . נשתמש במשוואה:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \phi) = -\rho_{ext} \quad (7.63)$$

בכל נקודה, פרט ל- 0 , מתקיים משוואת לפלס:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (7.64)$$

ישנה סימטריה אזימוטלית, ולכן

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) \rho_{\ell}(\cos \theta) \quad (7.65)$$

כל פתרון של משוואת לפלס עם סימטריה אזימוטלית, ניתן להצגה בצורה זו. $A_{\ell} = 0$, כי עבור $r \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow 0$.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \phi) = -Q_{ext} \implies \oint_s (\varepsilon \vec{\nabla} \phi) \Big|_{r=0} ds = -Q_{ext} \quad (7.66)$$

לנגזרת לש הפוטנציאל, יש רק רכיב r ,

$$(\vec{\nabla} \phi)_r = \sum_{\ell} B_{\ell} (-\ell - 1) r^{-\ell-2} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (7.67)$$

עבור $\ell = 0$,

$$B_0 \oint \varepsilon \left(-\frac{1}{r^2} \right) \Big|_{r=0} ds = -Q_{ext} \quad (7.68)$$

הביטוי לא יכול להיות תלוי ב- a !

$$B_0 \oint \varepsilon \left(-\frac{1}{a^2} \right) ds = B_0 \left(-\frac{1}{a^2} \right) \varepsilon_2 \cdot 2\pi a^2 + B_0 \left(\frac{1}{a^2} \right) \varepsilon_1 \cdot 2\pi a^2 = -Q_{ext} \quad (7.69)$$

אזי

$$B_0 = \frac{Q_{ext}}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad (7.70)$$

$$\phi = \frac{Q_{ext}}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r} \quad (7.71)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_{ext}}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} \hat{r} \quad (7.72)$$

ולבסוף,

$$\mathbf{D} = \hat{r} \frac{Q_{ext}}{2\pi (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} \cdot \begin{cases} \varepsilon_2 & , z > 0 \\ \varepsilon_1 & , z < 0 \end{cases} \quad (7.73)$$

7.2.3 כדור דיאלקטרי בשדה חיצוני אחיד

כדור דיאלקטרי בעל רדיוס a וקבוע דיאלקטרי ε , נמצא בתוך שדה חיצוני אחיד, \mathbf{E}_0 (זה היה השדה לפני ששמנו שם כדור, הכדור עלול לשנות אותו!). נרצה למצוא את \mathbf{E} ו- \mathcal{D} בכל המרחב. בתוך הכדור:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (7.74)$$

מחוץ לכדור:

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (7.75)$$

יש לפתור את משוואת לפלס בכל המרחב, עם תנאי שפה מתאימים.

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (7.76)$$

כדי למנוע התבדרויות,

$$\phi_{in} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad , r < a \quad (7.77)$$

באינסוף, בשדה זה יש שדה אחיד. לכן באינסוף, השדה מתבדר. לכן נוסיף איבר מתבדר, עם $\ell = 1$

$$\phi_{out} = - \underbrace{E_0 r \cos \theta}_{r \rightarrow \infty} + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) \quad , r > a \quad (7.78)$$

תנאי השפה: רציפות של E_{θ} על פני הכדור:

$$\left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \theta} \right|_{r=a} \quad (7.79)$$

ותנאי הרציפות לרכיב נורמלי, \mathcal{D}_r על פני הכדור:

$$\varepsilon \left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (7.80)$$

19

נכתוב לחוד את תנאי התפירה עבור $\ell = 1$ ועבור $\ell \neq 1$:

• עבור $\ell = 1$:

$$A_1 a = -E_0 a + B_1 a^{-2} \quad (7.81)$$

$$\varepsilon A_1 = \varepsilon_0 \left(-E_0 - B_1 \frac{2}{a^3} \right) \quad (7.82)$$

• ועבור כל $\ell \neq 1$,

$$A_{\ell} a^{\ell} = B_{\ell} a^{-\ell-1} \quad (7.83)$$

$$\varepsilon \ell A_{\ell} a^{\ell-1} = \varepsilon_0 B_{\ell} (-\ell - 1) a^{-\ell-2} \quad (7.84)$$

עבור $\ell = 1$, אלו משוואות לא הומוגניות, עם האיבר התלוי ב- ε_0 , שמגיע מהשדה החיצוני. בפתרון המשוואות נקבל, עבור $\ell = 1$:

$$A_1 = -\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} \cdot E_0 \quad (7.85)$$

$$B_1 = \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} a^3 E_0 \quad (7.86)$$

כל שאר המקדמים, $\ell \neq 1$, מתאפסים, כי מדובר במשוואות הומוגניות:

$$\begin{vmatrix} a^\ell & -a^{-\ell-1} \\ \varepsilon \rho a^{\ell-1} & \varepsilon_0 (\ell + 1) a^{-\ell-2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7.87)$$

ולכן, מהמשוואות הללו, מתקבל הפתרון הטריביאלי, לכל $\ell \neq 1$ $A_\ell = B_\ell = 0$, אזי, נסמן $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, הקבוע הדיאלקטרי היחסי,

$$\phi_{in}(r, \theta) = -\frac{3}{\tilde{\varepsilon} + 2} E_0 r \cos \theta \quad (7.88)$$

$$\phi_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon} + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (7.89)$$

ניתן לראות שהשדה מחוץ לכדור הוא כמו של דיפול עם מומנט מסוים.

נתרנו בפוטנציאל בתוך הכדור נחשב את השדה בתוכו:

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\tilde{\varepsilon} + 2} E_0 \hat{z} \quad (7.90)$$

השדה בתוך הכדור הוא אחיד, ובכיוון \hat{z} , אך הוא קטן יותר מהשדה החיצוני. נתעמק קצת בתמונה: ישנו שדה פנימי,

$$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p \quad (7.91)$$

כאשר \mathbf{E}_p הוא השדה שיוצר כדור בעל קיטוב \mathbf{P} יוצר בתוך עצמו. הקיטוב של הכדור

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot \mathbf{E}_{in} \quad (7.92)$$

נחשב את השדה \mathbf{E}_p , שכדור מקוטב יוצר בתוכו:

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{in} - \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{in} - \frac{\tilde{\varepsilon} + 2}{3} \mathbf{E}_{in} \quad (7.93)$$

$$= \frac{1 - \tilde{\varepsilon}}{3} \mathbf{E}_{in} \quad (7.94)$$

$$= \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{3} \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon - \varepsilon_0} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.95)$$

קיבלנו תשובה לשאלה שעוד נשאל בהמשך:

מסקנה 7.3 כדור שמקוטב קיטוב אחיד \mathbf{P} , יוצר בתוכו שדה אחיד

$$\mathbf{E}_p = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.96)$$

ישנם חומרים אלקטריים או, פרואלקטריים: חומרים כאלה, מקוטבים ללא שום שדה חיצוני. גם את השדה החיצוני ניתן לשחזר מתוך הפתרון שלנו:

הערה 7.4 מחוץ לכדור, השדה יהיה שדה של דיפול עם מומנט \mathbf{p} , בעל מומנט דיפול השווה לקיטוב כפול הנפח:

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P} \quad (7.97)$$

7.3 בחזרה לתמונה המיקרוסקופית

נפתח את נוסחאות Clausius-Mossotti

עד כה התעסקנו בתיאור המיקרוסקופי של החומר. כרגע אין לנו מושג איך מחשבים סוספטביליות. באופן כללי,

$$\mathbf{p}_{atom} = \alpha \mathbf{E} \quad (7.98)$$

בשדות חזקים, קורים גם דברים מוזרים (לדוגמה, פריצה דיאלקטרית), אבל בשדות "נורמליים" יותר, מומנט הדיפול של אטום תלוי בשדה.

נניח שאנחנו יודעים את המקדם α , ה-polarizability של האטום (חישבנו אותו בקירוב גס, לא נעסוק בחישוב מדויק יותר שלו), עבור חומר דליל (גז):

$$\mathbf{P} = n \cdot \alpha \mathbf{E} \quad (7.99)$$

כאשר n הוא מספר אטומים ליחידת נפח, ו- \mathbf{E} הוא השדה הממוצע בתוך החומר (שעבור גז דליל, הוא שווה בקירוב טוב לשדה הייצוגי)

עבור חומר צפוף יותר: מוצק או נוזל, התמונה יותר מסובכת. בחישוב עבור גז, נזניח השפעה בין האטומים. בחומר מוצק, גביש, עם שדה ממוצע בכיוון כלשהו, \mathbf{E} (בתוך החומר). כל אטום מפתח מומנט דיפול: כולם באותו הכיוון.

עבור אטום ספציפי, שנמצא באתר הסריג, אין סיבה לומר שהקיטוב שלו יהיה $\mathbf{E}\alpha$, משום ש- \mathbf{E} הוא השדה הממוצע, ואין סיבה עקרונית שהוא יהיה שווה לשדה בנקודה. נסמן ב- \mathbf{E}_o את השדה (בממוצע על זמן) בנקודה O .

נעביר סביב נקודה O כדור בעל רדיוס R ($R \gg a$), כאשר a , קבוע הסריג, המרחק בין אטומים סמוכים), אבל $B_{d^3}(O, R) \subset B_{d^3}(O, L)$,²⁰ כאשר L גודל הדגם. את \mathbf{E}_O ניתן לחלק לשתי תרומות:

- $\mathbf{E}_0^{(far)}$ - תרומה של מטענים מחוץ לכדור.

- $\mathbf{E}_0^{(near)}$ - תרומה של הדיפולים הנמצאים בתוך הכדור.

כאשר מחשבים את $\mathbf{E}^{(far)}$, ניתן להתעלם מהמבנה המיקרוסקופי של החומר. \mathbf{P} הוא קיטוב אחיד בדגם. נחשב את $\mathbf{E}_O^{(far)}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0^{(far)} + \mathbf{E}_{plug} \quad (7.100)$$

כאשר \mathbf{E}_{plug} הוא השדה שיוצר כדור בעל קיטוב אחיד \mathbf{P} במרכז שלו.

$$\mathbf{E}_{plug} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.101)$$

לכן,

$$\mathbf{E}_O^{(far)} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.102)$$

חישוב $\mathbf{E}_0^{(near)}$ ²¹ כאן, חייבים לבצע טיפול מיקרוסקופי. מסתכלים על הכדור שמרכזו ב- O . בסביבת הנקודה O יש הרבה דיפולים בגודל p . כאן חשובה ההנחה כי זהו גביש קובי, עבור סימטריה אחרת, החישוב יהיה שונה. נסמן ב- \mathbf{r}_α את מיקום האטום α ביחס לנקודה O . הדיפול שלו תורם שדה בנקודה O :

$$E_0^{(near)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_\alpha \left[\frac{\mathbf{p}_\alpha}{r_\alpha^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_\alpha) \mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^5} \right] \quad (7.103)$$

²⁰אז בפניקלית, $a \ll R \ll L$, $B_{d^3}(O, R)$ הוא כדור (פתוח) ברדיוס R סביב נקודה O , במטריקה האוקלידית בתלת ממד (d^3)
19.05.2009²¹

מטעמי סימטריה, מספיק להסתכל על רכיב \hat{x} של השדה,

$$E_{0x}^{(near)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \left[\frac{p_x}{r_{\alpha}^3} - 3 \frac{(p_x x_{\alpha} + p_y y_{\alpha} + p_z z_{\alpha}) x_{\alpha}}{r_{\alpha}^5} \right] \quad (7.104)$$

האיברים עם $x_{\alpha} y_{\alpha}, z_{\alpha} x_{\alpha}$ אינם תורמים, עבור כל $y_{\alpha} x_{\alpha}$, נמצא $(-y_{\alpha}) x_{\alpha}$, ולכן נתבונן באיבר השני,

$$-3p_x \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2}{r_{\alpha}^5} \stackrel{(1)}{=} -p_x \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2}{r_{\alpha}^5} \quad (7.105)$$

$$= -p_x \sum_{\alpha} \frac{1}{r_{\alpha}^3} \quad (7.106)$$

התרומה של האיבר הזה מבטלת את האיבר הראשון, ולכן

$$E_{0x}^{(near)} = 0 \quad (7.107)$$

נסביר את המעבר (1): בגלל סימטריה, אין שום עדיפות לכיוון כזה או אחר, ולכן $3x_{\alpha}^2 = x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2$ מסקנה זו נכונה רק עבור גביש קובי. בגביש בעל סימטריה אחרת, או בחומר אמורפי, השדה הוא לאו דווקא אפס.

לכן, השדה שמרגיש אטום שנמצא באתר בגביש קובי,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^{(far)} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.108)$$

כזכור, מומנט הדיפול של אטום אחד הוא

$$\mathbf{p}_{atom} = \alpha \mathbf{E}_0 \quad (7.109)$$

אז, הקיטוב של הגביש כולו הוא

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p}_{atom} = n \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right) \quad (7.110)$$

כאשר n הוא מספר האטומים ליחידת נפח. קיבלנו משוואה עבור הקיטוב. נחלץ את \mathbf{P} ונקבל,

$$\mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E} \equiv \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (7.111)$$

ולכן, הסוספטביליות של גביש קובי, הבנוי מאטומים בעלי פולריזביליות α , הוא

$$\chi = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \quad (7.112)$$

זוהי נוסחת Clausius-Mossutti.

ה- α האופייני לאטומים המולקולות, הוא מסדר גודל של $10^{-4} m^3$. עבור חומר דליל, זהו מספר מאוד קטן. בחומר צפוף, המרחק בין אטומים הוא מסדר גודל של גודל האטום עצמו, ולכן α ו- n הם מאותו סדר גודל, ולכן אי אפשר להתעלם מהתיקון.

עבור חומרים פירואלקטריים, או אלקטריטים, $\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \rightarrow 1$, ולכן $\chi \rightarrow \infty$.

7.4 הערות על חומרים דיאלקטריים

גבול של $\epsilon \rightarrow \infty$: בגבול זה, שדה בתוך החומר, $\mathbf{E} \rightarrow 0$, כלומר, המטען הקשור σ מקזז את המטען החיצוני, σ_{ext} , באופן מלא. השדה בתוך החומר יהיה מסוכך לחלוטין - כמו במתכת. בין לוחות אינסופיים, ועבור דגם אינסופי של חום דיאלקטרי ביניהם,

$$\mathcal{D} = \sigma_{ext} \quad (7.113)$$

ולכן, בתוך החומר, השדה הוא

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{ext}}{\varepsilon} \quad (7.114)$$

ובגבול,

$$\mathbf{E} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 0 \quad (7.115)$$

אבל D אינו תלוי ב- ε , הוא נשאר קבוע.

מומנט דיפול פרמננטי: תמיד הנחנו שבהעדר השדה, מומנט דיפולי של המולקולות שווה לאפס. זה לא תמיד נכון.

להרבה מולקולות, ישנו מומנט דיפול פרמננטי, לדוגמה, למולקולות מים. המטען בין מולקולות החמצן והמימן אינו מפולג באופן אחיד ולכן למולקולה יש מומנט דיפול. נעריך בצורה גסה את גודל מומנט הדיפול הפרמננטי, $|\mathbf{p}_0|$:

$$\mathbf{p}_0 \approx e \cdot (1) = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^{-10} m \quad (7.116)$$

$$= 1.6 \cdot 10^{-29} C \cdot m \quad (7.117)$$

$$\sim 5 \text{Debye} \quad (7.118)$$

כאשר $1 \text{Debye} = 3.3 \cdot 10^{-30} C \cdot m$.

למרות שלמולקולות בודדות יש מומנט דיפול פרמננטי, בטמפרטורות סופיות, למומנטים הללו יש כיוון אקראי, ולכן, במקרה זה, אין קיטוב של חומר.

עבור שדה $\mathbf{E} = E\hat{z} \neq 0$, תהיה עדיפות לסידור הדיפולים בכיוון השדה. נסתכל על דיפול \mathbf{p} בגודל p_0 , בכיוון $\hat{\theta}$ יחסית ל- \mathbf{E} . אזי האנרגיה הפוטנציאלית u של מומנט הדיפול \mathbf{p} בשדה \mathbf{E} ,

$$u = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (7.119)$$

מכניקה סטטיסטית מאפשרת לחשב את מומנט הדיפול הממוצע. ההסתברות, w , למצוא את \mathbf{p} בתוך זווית $d\Omega$ מרחבית

$$w = C e^{-\frac{u}{k_B T}} d\Omega \quad (7.120)$$

כדי לנרמל,

$$C \int e^{p_0 E \cos \theta / k_B T} \sin \theta d\theta d\varphi = 1 \quad (7.121)$$

נחשב את \bar{p}_z , הממוצע בכיוון \hat{z} ,

$$\bar{p}_z = C \int \sin \theta d\theta d\varphi e^{p_0 E \cos \theta / k_B T} P_0 \cos \theta \quad (7.122)$$

אזי

$$\bar{p}_z = P_0 \frac{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \cos \theta \cdot e^{p_0 E \cos \theta / k_B T}}{\int_0^\pi \sin \theta e^{p_0 E \cos \theta / k_B T}} \quad (7.123)$$

במקרה ש- $k_B T \gg p_0 E$, בטמפרטורות גבוהות יחסית לשדה (אבל מעשית, גם שדות מאוד חזקים נמצאות בתחום הזה) נוכל לפתח את האקספוננט לטור.

$$\bar{p}_z = p_0 \frac{p_0 E}{k_B T} \frac{\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{k_B T} \mathbf{E} \quad (7.124)$$

חלק II מגנטוסטטיקה

8 יסודות המגניטוסטטיקה

שני תיילי זרם הנושאים זרמים אנטי־מקבילים, ידחו אחד את השני, ואילו זרמים מקבילים נמשכים זה לזה. אין כוחות אלקטרוסטטים בין התיילים: המטען הכולל עליהם הוא אפס.

8.1 חוק ביו־סבר

אלמנט תייל באורך $d\ell$, עם זרם I . בנקודה \mathbf{r} המרוחקת משם, ייווצר אלמנט שדה מגנטי

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \times \mathbf{r}}{r^3}} \quad (8.1)$$

זוהי נוסחת Biot-Savart.

• \mathbf{B} , האינדוקציה המגנטית, מסיבות היסטוריות (מכונה גם "שדה מגנטי", אבל בחומרים מגנטיים, לשדה המגנטי, H , יש משמעות שונה, ושם צריך להבחין ביניהם). אלמנט $d\ell$ עם זרם I , הנמצא בשדה מגנטי חיצוני \mathbf{B} מרגיש כוח

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}} \quad (8.2)$$

אם אלמנט אורך $d\ell$ בכיוון \hat{z} , ושדה בכיוון $(-\hat{x})$, ייווצר כוח בכיוון $d\mathbf{F} \sim \hat{z} \times (-\hat{x}) = -\hat{y}$

כוח לורנץ הפועל על חלקיק נע נתון על ידי כוח לורנץ,

$$\mathbf{f}_{Lor} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8.4)$$

בהנחה ואין שדה חשמלי. זהו ההסבר המיקרוסקופי למשיכה בין תיילי זרם. ביחידות SI, ברור שהמימדים של השדה (כלומר, האינדוקציה המגנטית) הם

$$[B] = \frac{[F]}{[I][\ell]} = \frac{N}{A \cdot m} = 1 \text{ Tesla} \quad (8.5)$$

יחידת האינדוקציה המגנטית. ולכן, מנוסחת ביו־סבר,

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (8.6)$$

דוגמה:

• למצוא \mathbf{B} במרחק L מתייל עם זרם I : נסתכל על נקודה C במרחק L מהתייל. (התייל על ציר \hat{z}). אלמנט תייל dz במרחק z , יוצר, על הנקודה $(0, L, 0)$, הרחוקה ממנו כדי $r = \sqrt{z^2 + L^2}$ הוא

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cdot r \sin \alpha}{r^3} \quad (8.7)$$

כאשר $\sin \alpha = \frac{L}{r}$ ו־

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \cdot L dz}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I L dz}{(z^2 + L^2)^{3/2}} \quad (8.8)$$

נסכם על כל dB :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} IL \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + L^2)^{3/2}} \quad (8.9)$$

נחלץ מאינטגרל גדלים עם מימדים, כדי שישאר מספר: נגיר $u = \frac{z}{L}$, ונקבל

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} IL \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\underbrace{(u^2 + 1)^{3/2}}_{=2}} \quad (8.10)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{L} \quad (8.11)$$

כיוון השדה ברור מחוק ביו־סבר. בנקודה C, יהיה לכיוון "פנים הדף" (כאשר הרם I והנקודה C נמצאים במישור הדף).

- לחשב כח שפועל על יחידת אורך של תייל עם זרם I', במרחק L מהתייל הראשון. נסתכל על אלמנט dl' מהתייל החדש. ואז, הכח, בכיוון \hat{y} (לכיוון החוט שיוצר א תהשדה)

$$dF = I' dl' B \quad (8.12)$$

$$F = I' B \int dl' \quad (8.13)$$

אם נסתכל על כח ליחידת אורך, f, נקבל ש-

$$f = I' B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \cdot I'}{L} \quad (8.14)$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I \cdot I'}{L} \frac{N}{m} \quad (8.15)$$

8.1.1 צפיפות זרם

חוק ביו־סבר נותן לנו אפשרות לחשב שדה מגנטי של תיל דק. נניח ויש פילוג זרמים: תיל עבה עם חתך-זרם משתנה. הדרך הסטנדרטית לעשות זאת היא להשתמש במושג "צפיפות הזרם". בדומה לאלקטרוסטטיקה: שם הכללנו את המושג של מטענים נקודתיים לצפיפות המטען.

צפיפות זרם \mathbf{j} בנקודה \mathbf{r} : הכיוון הוא כיוון \mathbf{v} של מהירות נושאי-המטען החיוביים. נקח אלמנט שטח da, בכיוון הזרם. נסמן ב-dQ את כמות המטען העובר דרך שטח da בזמן dt, ואז

$$\mathbf{j} = \frac{dQ}{da \cdot dt} \hat{v} \quad (8.16)$$

והיחידות של צפיפות הזרם, ביחידות SI, הם:

$$[j] = \frac{A}{m^2} \quad (8.17)$$

אפשר לבטא את צפיפות הזרם באמצעות המהירות והצפיפות של נושאי המטען: נסתכל על אלמנט נפח, שאורכו vdt, והטל שטחו על המישור המאונך ל- \hat{v} הוא a, q גודל המטען של נושא מטען אחד ו-v מהירות נושאי המטען (המהירות יכולה להיות תלויה במקום), ונסמן ב-n את צפיפות נושאי המטען (מספר ליחידת נפח). אזי, המטען שעובר דרך הבסיס העליון בזמן dt, יהיה

$$dQ = nvdtda \cdot q \quad (8.18)$$

אזי,

$$\mathbf{j} = \frac{dQ}{dadt} = qn\mathbf{v} \quad (8.19)$$

משוואות הרציפות, עבור זרם סטציונרי (כי מדברים רק על מגניטוסטטיקה: הזרמים אינם תלויים בזמן)

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (8.20)$$

נחשב את השדה המגנטי שיוצר זרם עם צפיפות $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ בנקודה \mathbf{r} . נסתכל על צפיפות הזרם בנקודה \mathbf{r}' . סביב הנקודה, נגדיר אלמנט אורך, שאורכו $d\ell'$ ושטח החתוך שלו הוא da' . נחשב את השדה המגנטי שהאלמנט יוצר על נקודה \mathbf{r} :

$$\mathbf{j}dV' = \underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r}') da'}_I d\ell' = Id\ell' \quad (8.21)$$

כלומר, כך מתרגמים אלמנט זרם כפוך אורך לאלמנט צפיפות-זרם כפול נפח, לפי חוק ביו-סבר,

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (8.22)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (8.23)$$

אז, השדה הכולל שיוצר פילוג זרם $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ בנקודה \mathbf{r} הוא

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \quad (8.24)$$

8.2 משוואות המגניטוסטטיקה בצורה דיפרנציאלית

ביטוי (8.24) מאפשר לחשב שדה מגנטי עבור כל פילוג של זרם, אבל לפעמים יותר נוח לעבוד עם משוואות דיפרנציאליות.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.25)$$

כאשר $\vec{\nabla}_r$ הוא הגרדיאנט לפי \mathbf{r} . נחליף את הסדר, ונקבל

$$= \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (8.26)$$

ואם נשתמש בנוסחה $\vec{\nabla} \times (f(\mathbf{r}), \mathbf{A}) = \vec{\nabla} f \times \mathbf{A} + f \nabla^2 \mathbf{A}$, עבור שדה וקטורי קבוע \mathbf{A} ,

$$= \vec{\nabla} \times_r \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.27)$$

אז,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \implies \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.28)$$

אז

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.29)$$

נשתמש בנוסחה: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{C} = \vec{\nabla} \nabla^2 \mathbf{C} - \nabla^2 \mathbf{C}$, כאשר לפלסיאן של וקטור הוא וקטור שרכיביו $(\nabla^2 C_x, \nabla^2 C_y, \nabla^2 C_z)$. לכן,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \int d^3r' \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla^2 \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (8.30)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}_{-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right] \quad (8.31)$$

נעיר שכל האופרטורים הדיפרונציאליים פועלים על r , ולכן איפשר להזיז אותם החוצה/פנימה מאינטגרלים על r'

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\vec{\nabla} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] \quad (8.32)$$

נסתכל על האיבר הראשון, ותוך שימוש בקשר $\vec{\nabla} \cdot (f(\mathbf{r}) \mathbf{C}(\mathbf{r})) = \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{C} + f \vec{\nabla} \cdot \mathbf{C}$

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (8.33)$$

אבל לפי משפט גאוס, האיבר הראשון הוא איבר שפה, ובאינסוף, השדה הוא אפס, ולכן, אינטגרל על השפה הוא אפס. האיבר השני, גם הוא מתאפס, ממשוואות הרציפות ($\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$), לכן, קיבלנו

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})} \quad (8.34)$$

לסיכום: משוואות המגנטוסטטיקה בצורתן הדיפרנציאלית,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})} \quad (8.35)$$

נשווה אותם למשוואות הדיפרונציאליות עבור אלקטרוסטטיקה:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0 \quad (8.36)$$

מ- $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, מתקבל כי אין מטענים מגנטיים. אין אנלוג מגנטי של מטען, או מונופול מגנטי. חוקי הטבע אינם אוסרים על קיומו של מונופול מגנטי, אבל עדין לא מצאו כזה. אין במשוואות הדיפרנציאליות אינפורמציה שלא קיימת בביטוי האינטגרלי, אבל מהצורה הדיפרנציאלית, למשל, ניתן לקבל בקלות את חוק אמפר:

הצורה האינטגרלית של המשוואה $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$: נסתכל על מסילה סגורה C , המהווה את השפה של משטח S , שהנורמל אליו הוא \hat{n} . נתחיל מהמשוואה הדיפרנציאלית הנוגעת לרוטור השדה המגנטי, ונבצע אינטגרציה:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \hat{n} da = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} da \quad (8.37)$$

באמצעות משפט סטוקס, נהפוך את הביטוי משמאל לאינטגרל מסילתי. ביטוי ימין הוא כלל הזרם דרך משטח S ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I \quad (8.38)$$

כאשר I הוא הזרם הזורם דרך כלל המשטח המוגבל על ידי המסילה C . באמצעות נוסחא זו קל לפתור בעיות עם סימטריה גבוהה, גלילית למשל. נוסחא זו נקראת, לפעמים, חוק אמפר.

• לדוגמה, שדה של תיל ארוך: תיל ארוך יוצר שדה מגנטי איזוטלי, \mathbf{B} . נקח מסילה מעגלית ברדיוס L סביב המרכז, ולכן, מסימטריה,

$$2\pi L B = \mu_0 I \quad (8.39)$$

או,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \quad (8.40)$$

8.3 הפוטנציאל הוקטורי

מהביטוי

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.41)$$

נובע כי ניתן לכתוב את \mathbf{B} כרוטור של שדה אחר \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (8.42)$$

כאשר \mathbf{A} מכונה **פוטנציאל וקטורי**. ישנם בעיות שהרבה יותר קל לפתור באמצעות הפוטנציאל הזה.

הערה 8.1 השדה $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ מוגדר עד כדי גרדיאנט של שדה סקלארי, $\vec{\nabla} f(\mathbf{r})$, כאשר $f(\mathbf{r})$ פונקציה שרירותית. (חופש כיוול, gauge)

טענה 8.2 חופש הכיוול מאפשר לבחור \mathbf{A} כך ש- $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. כיוול כזה נקרא כיוול קולון.

הוכחה: נניח ובחרנו \mathbf{A}' , פוטנציאל כלשהו, כך שמתקיים,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (8.43)$$

אזי, באופן כללי, $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}' \neq 0$. ניתן להגדיר

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla f \quad (8.44)$$

אז,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}' + \vec{\nabla}^2 f \quad (8.45)$$

נדרוש שיתקבל שיוויון לאפס: נבחר f המקיימת את המשוואה

$$\vec{\nabla}^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}' \quad (8.46)$$

זוהי משוואת פואסון, וניתן למצוא לה פתרון.

נתבונן במשוואה

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (8.47)$$

נציב $\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}$, ונקבל

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (8.48)$$

אבל

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (8.49)$$

בכיוול קולון, $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$, ולכן

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (8.50)$$

ולכן, הפתרון הפורמלי, בעזרת אינטגרל הוא

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.51)$$

באנלוגיה לפתרון מאלקרוסטטיקה.

בהנתן \mathbf{A} , נוכל לכתוב ביטוי עבור \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.52)$$

והגענו לאותה משוואה שראינו קודם, כשכתבנו את הנוסחה לשדה עקב פילוג כלשהו של זרמים.

לדוגמה: למצוא שדה \mathbf{B} שיוצרת לולאת זרם. באופן כללי, זו בעיה מסובכת למדי. כשמסתכלים על פוטנציאל וקטורי, רואים שעדיף להתחיל מהנוסחה

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (8.53)$$

עם שדה, לא בדיוק ברור איזה רכיבים של שדה יש. לעומת זאת, ל- \mathbf{A} , בקוארדינטות כדוריות, ישנו רכיב בכיוון φ בלבד, כיוון הזרימה של הזרם.

8.4 חישוב שדה במרחק רק מהזרמים²²

נניח שנתון פילוג זרמים ממוקם (כלומר, שהו אוסף של לולאות זרם) $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. רוצים לחשב את השדה שהפילוג יוצר. עבור פילוג מסובך, קשה מאוד לחשב את השדה בצורה אנליטית. ניתן לכתוב מידית את האינטגרל עבור שדה וקטורי:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.54)$$

זהו אינטגרל על השדה שיוצר אלמנט זרם ב- \mathbf{r}' בנקודה x . באופן כללי, זו בעיה קשה למדי. עבור מרחק מאוד גדול מהזרמים, ניתן לקבל ביטוי פשוט, אוניברסלי, עבור כל פילוג של זרמים. פילוג זה מאופיין על ידי מומנט דיפול מגנטי. עבור r גדול, נפתח,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.55)$$

וקיבלנו,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \int d^3r' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots \right] \quad (8.56)$$

ראשית, נשים לך שאין איבר מונופול בפיתוח:

$$\int d^3r' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0 \quad (8.57)$$

נפתור את איבר המונופול בצורה פורמלית: ראשית, נסתכל על אינטגרל על כל המרחב,

$$\int d^3r \mathbf{r} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})}_{=0} = 0 \quad (8.58)$$

נסתכל על רכיב ה- x של האינטגרל, שוב, על כל המרחב,

$$0 = \int x \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r = \int \left[\nabla \cdot (x\mathbf{j}) - \mathbf{j} \cdot \nabla x \right] d^3r \quad (8.59)$$

הרכיב הראשון, הוא איבר שפה (לפי משפט הדיברגנץ של גאוס) ולכן הוא מתאפס, ולכן נשאר

$$- \int j_x d^3r = 0 \quad (8.60)$$

זה נכון על כל רכיב, ולכן

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r = 0 \quad (8.61)$$

רכיב הדיפול: נסתכל על אחד הרכיבים של \mathbf{A} , A_α ,

$$A_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{r^3} j_\alpha(\mathbf{r}) \sum_\beta x_\beta x'_\beta \quad (8.62)$$

נשאף להעביר את האינטגרל לצורה אחרת, שב יהיה ברור יותר מה קורה. נתחיל מהזהות,

$$0 = \int d^3r x_\alpha x_\beta \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}}_{\equiv 0} \quad (8.63)$$

$$= \int d^3r \left[\vec{\nabla} \cdot (x_\alpha x_\beta \mathbf{j}) - \mathbf{j} \cdot \vec{\nabla} (x_\alpha x_\beta) \right] \quad (8.64)$$

ושבו, האיבר הראשון הוא איבר שפה, ולכן נשאר עם

$$= - \int d^3r \sum_\gamma j_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (x_\alpha x_\beta) \quad (8.65)$$

$$= - \int d^3r \sum_\gamma j_\gamma (x_\alpha \delta_{\gamma\beta} + x_\beta \delta_{\alpha\gamma}) \quad (8.66)$$

$$= - \int d^3r (x_\alpha j_\beta + x_\beta j_\alpha) \quad (8.67)$$

ולכן,

$$\int d^3r x_\alpha j_\beta(\mathbf{r}) = - \int d^3r x_\beta j_\alpha(\mathbf{r}) \quad (8.68)$$

נשתמש בזהות הזו כדי לפתור את האינטגרל עבור A_α :

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_\beta x_\beta \int d^3r' \frac{1}{2} (x'_\alpha j_\beta - x'_\beta j_\alpha) \quad (8.69)$$

בסוגריים, נזהה רכיב שלישי של מכפלה וקטורית. נכתוב את הסכום באמצעות הטנזור האנטי סימטרי $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$,

$$= - \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'))_\gamma \quad (8.70)$$

אבל $\sum_{\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha$ ולכן,

$$A_\alpha(r) = - \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \right]_\alpha \quad (8.71)$$

נסמן,

$$\frac{1}{2} \int d^3r' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = \mathbf{m} \quad (8.72)$$

\mathbf{m} יהיה מומנט הדיפול המגנטי.

וקיבלנו, לבסוף, את הפוטנציאל הוקטורי של פילוג זרם כלשהי, ממרחקים גדולים

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}} \quad (8.73)$$

\mathbf{B} יהיה הרוטור של הביטוי:

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]} \quad (8.74)$$

עבור לולאה עם זרם I , שהנורמל למישור הלולאה הוא \mathbf{m} ,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\ell \quad (8.75)$$

אבל האינטגרל הוא השטח של הלולאה, ולכן, הביטוי נתון על ידי שטח הלולאה S ,

$$= I \cdot S \hat{n} \quad (8.76)$$

8.5 כח הפועל על כריכה עם זרם בשדה מגנטי חיצוני

בעקום C , הנמצא בשדה מגנטי חיצוני $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, זורם זרם I . נחלק את הכריכה לאלמנטי אורך $d\ell$, והכח הפועל עליה נתון על ידי

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\ell \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (8.77)$$

הערה 8.3 עבור שדה אחיד, $\mathbf{F} = 0$.

נחשב ברכיבים,

$$F_x = I \hat{x} \cdot \oint_C d\ell \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (8.78)$$

$$= I \oint \hat{x} \cdot (d\ell \times \mathbf{B}) \quad (8.79)$$

$$= I \oint d\ell \cdot (\mathbf{B} \times \hat{x}) \quad (8.80)$$

נשתמש במשפט סטוקס, ונעביר את האינטגרל המסלולי לאינטגרל על שטח הכריכה:

$$= I \iint d\mathbf{S} \cdot \vec{\nabla} \times (\mathbf{B} \times \hat{x}) \quad (8.81)$$

נסתכל על הביטוי, $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} \times \hat{x}$. היותו \hat{x} קבוע, נשארים לנו שני איברים

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} \times \hat{x} = -\hat{x} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}}_{\equiv 0} + (\hat{x} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (8.82)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \quad (8.83)$$

כאשר $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$ הוא וקטור המהווה נגזרת של אחד אחד מהרכיבים של \mathbf{B} לפי x : עבור $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, ולכן, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = (\partial_x B_x, \partial_x B_y, \partial_x B_z)$

$$F_x = I \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.84)$$

עבור כריכה קטנה, שבה השדה משתנה מעט, ניתן להמשיך. נבחר את ראשית הצירים בתוך הכריכה, ואז

$$B_\alpha(\mathbf{r}) = B_\alpha(\mathbf{r} = 0) + \left. \frac{\partial B_\alpha}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=0} \cdot \mathbf{r} + \dots \quad (8.85)$$

אז,

$$F_x = I \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=0} \cdot \iint d\mathbf{S} \quad (8.86)$$

קיבלנו את הזרם כפול שטח הכריכה, הלא הוא מומנט הדיפול המגנטי, \mathbf{m} , ולכן קיבלנו

$$F_x = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \cdot \mathbf{m} \quad (8.87)$$

ניתן לחזור על חישוב זהה בשאר הרכיבים, ולקבל

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}) \quad (8.88)$$

כאשר את \mathbf{m} ניתן להכניס לתוך הגרדיאנט, משום ש- \mathbf{m} קבוע. זוהי תוצאה נכונה לכל התפלגות זרמים, שמגדירה מומנט דיפול מסויים. לכן, ניתן לעבוד גם עם פונקציה פוטנציאלית מגנטית,

$$U_{meg} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} \quad (8.89)$$

זו אינה האנרגיה המלאה של הזרמים. אם נביא את הכריכה מאינסוף לתוך השדה המגנטי, האנרגיה הדרושה אינה שווה ל- U_{meg} , משום שבעת "הזזת" הכריכה יוצר בה זרם, ולכן נצטרך, לכאורה, גם להשקיע עבודה כדי לשמור על זרם קבוע.

9 שדות מגנטיים בחומר²³

הדם מבודד, כך שלא זורם בו זרם כללי. אבל יש בו זרמים מיקרוסקופיים: כל אטום יכול להיות זרם קטן. אבל הזרם הכולל, באינטגרל על כל חתך מקרוסקופי של הדגם, הזרם הכולל הוא אפס. אבל כן יכול להיות מיגנט. נסמן ב- $\langle \mathbf{m} \rangle$ את המומנט המגנטי הממוצע של אטום (או מולקולה...). בנסיבות רבות אטומים הם מין מגנטיים זעירים. יתכן ובלי שדה מגנטי חיצוני אין לאטום מומנט מגנטי, אבל יתכן והחומר כן שרוי בשדה מגנטי חיצוני, והשדה ייצור את הזרמים המיקרוסקופיים. כמו כן, לאטומים יש ספין ותנועה אורביטלית של אלקטרונים, לכן לאטום יכול להיות שדה מגנטי. אם אין שדה מגנטי חיצוני, לרוב המומנטים הללו יתקזזו: חלק מהמומנטים יצביעו לכיוון אחד, ואחרים לכיוון אחר, כך שלא יהיה מומנט מגנטי כולל. בחומרים פרומגנטיים, גם ללא שדה מגנטי חיצוני, המומנטים המיקרוסקופיים מסתדרים ויוצרים מומנט מאקרוסקופי.

בכל מקרה, כרגע לא נכנס לסיבות המדויקות, אבל לחומר יש מומנט מאקרוסקופי. נגדיר, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = n \langle \mathbf{m} \rangle$, כאשר n הוא מספר אטומים ליחידת נפח, ו- \mathbf{M} יהיה המומנט המגנטי של חומר ליחידת נפח, או המיגנט.

המיגנט יוצר שדה מגנטי: נסתכל בשדה המגנטי שיוצר אלמנט-מגנט שנמצא בנקודה \mathbf{r}' , על נקודה \mathbf{r} , שיכול להיות בתוך המגנט או מחוצה לו, אזי, הפוטנציאל הוקטורי בנקודה \mathbf{r} יהיה

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (9.1)$$

אפשר להעביר את הביטוי לצורה אחרת:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.2)$$

כאשר $\vec{\nabla}'$ הוא גרדיאנט לפי \mathbf{r}' , וזוהי פשוט זהות.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[-\vec{\nabla}' \times' \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \vec{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] \quad (9.3)$$

לאחר השתמשנו בזהות וקטורית ידועה. האיבר הראשון הוא אבר שפה, והם לא תורמים בביטוי (משום שבאינסוף, מחוץ לחומר, $\mathbf{M} = 0$). איבר שפה הוא נגזרת שלמה, במקרה זה: רוטור. כאשר מפתחים את האינטגרל לפי המשפט היסודי, מקבלים הפרשי פונקציות בקצוות האינטגרציה: באינסוף. נשאר האיבר השני:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.4)$$

$$\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.5)$$

כלומר, אם החומר ממוגנט, אז ניתן לזהות צפיפות זרם, בתור הרוטור של המיגנט, בהקבלה לנוסחה (8.51):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9.6)$$

אלו בדיוק הלולאות הללו: הזרמים האטומיים או המולקולרים שדיברנו עליהם. לא כל זרם הוא רוטור של איזשהו וקטור: זרם אומי, שזורם בחוט עם הפרש מתחים אינו רוטור של פונקציה וקטורית כלשהו. אינטגרל של הזרם הזה, על איזשהו חתך, יתן אפס.

נסביר, בצורה אינטואיטיבית יותר, מהו הזרם הנדון: עבור חומר ממוגנט, נחשוב על לולאות זרם בתוך החומר. עבור חומר אחיד, בנפתח, זרם זה יתקזז, אז לא יהיה זרם בתוך החומר, אבל כן יהיה זרם על השפה. עם החומר ממוגנט, חייבים להיות זרמים מולקולריים, או אטומיים, כאלו. נקרא לזרמים כאלו "זרמים קושרים" כדי להבדיל ביניהם לבין זרם אומי שיכול לזרום בחוט. אם יש מיגנט, אז יש שדה מגנטי:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{M} \quad (9.7)$$

אם יש בגוף גם זרמים אומיים, חיצוניים, אז הנוסחה תהיה:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}) + \vec{\nabla} \times \mathbf{M}) \quad (9.8)$$

בנוסף, נותרת גם המשוואה

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.9)$$

אך שתי משוואות אלו לא מספיקות, נאחד את \mathbf{B} עם \mathbf{M} ונגדיר

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (9.10)$$

כאשר \mathbf{M} יהיה **השדה המגנטי**. \mathbf{B} כזכור הוא האינדוקציה המגנטית, כאשר בוואקום, היא מזדהה עם השדה המגנטי. אזי, המשוואות מקבלות את הצורה:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext}, \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.11)$$

בהרבה חומרים, ובשדות לא חזקים מדי, מתקיים הקשר

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.12)$$

μ נקרא "**פרמביליות מגנטית**", Magnetic permeability. בניסיון, אנחנו שולטים בשדה המגנטי, \mathbf{H} , ולא ב- \mathbf{B} , כי המקור של \mathbf{H} הוא הזרמים החיצוניים, הנשלטים, ולכן נוה לכתוב את הקשר בצורה זו. בשדה חזק, הקשר בין \mathbf{H} ו- \mathbf{B} אינו לינארי. לא ניתן להגדיר באופן כללי מה קורה בשדה חזק. נגדיר:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H} = \chi_M \mathbf{H} \quad (9.13)$$

כאשר χ_M הוא הסוספטביליות המגנטית. ברוב החומרים, האפקטים המגנטיים מאוד חלשים, במוצקים (או נוזלים), בדרך כלל, $|\chi_M| \approx 10^{-6} - 10^{-4}$, עבור גזים, יש לנו כמה סדרי גודל פחות. בשונה מהסוספטביליות החשמלית, χ_M , הסוספטביליות המגנטית, יכולה להיות גם שלילית.

- עבור $\chi_M < 0$, החומר מכונה דיאמגנטי
- עבור $\chi_M > 0$, החומר מכונה פארהמגנטי
- עבור חומרים פירומוגנטיים, לא ניתן להגדיר סוספטביליות כך: קיים קשר לא לינארי בין \mathbf{B} ל- \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = F(\mathbf{H}) \quad (9.14)$$

וה- \mathbf{B} עבור \mathbf{H} נתון תלוי גם בהיסטוריה של המערכת.

9.1 תנאי שפה

את תנאי השפה גוזרים מהמשוואות: נניח גבול בין שני החומרים, בין חומר (1) לחומר (2). נבחר את הנורמל לכיוון (2), אז האינדוקציה המגנטית בחומר (1) היא \mathbf{B}_1 , ובחומר (2), \mathbf{B}_2 . מהמשוואה $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, נובע תנאי השפה שהרכיב הנורמלי של \mathbf{B} חייב להיות רציף: $B_{1n} = B_{2n}$. התנאי השני נגזר מהמשוואה

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext} \quad (9.15)$$

נבחר מסלול מלבני C שעובר בין שני החומרים: ברוחב a (דרך החומרים) ובאורך δ (חוצה את התפר בין שני החומרים)

$$\int \vec{\nabla} \times \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j}_{ext} d\mathbf{S} \quad (9.16)$$

אזי

$$(H_{1y} - H_{2y}) a = j_{ext,x} \cdot a \cdot \delta \quad (9.17)$$

נגדיר את הגודל

$$\mathbf{K}_{ext} = j_{ext} \cdot \delta \quad (9.18)$$

δ יהיה קטן, אבל j_{ext} גדול. בגבול, \mathbf{K}_{ext} יהיה צפיפות-זרם-שטח, אזי,

$$H_{1y} - H_{2y} = K_{ext}^{(x)} \quad (9.19)$$

כלומר, הרכיב הטנגנציאלי של H יכול לקבל קפיצה אם במשטח ביניהם זרם זרם שטח. בצורה וקטורית,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_{ext} \quad (9.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (9.21)$$

הרכיב הנורמלי רציף, וברכיב הטנגנציאלי תהיה קפיצה עם זרם שטח. את הנוסחה הזו נצטרך, למשל, כשנרצה לחשב את השדה המגנטי שיוצר כדור ממוגנט באופן אחיד.

לסיכום,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{ext} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned}} \quad (9.22)$$

בנוסף לתנאי השפה שפיתחנו.

9.2 דוגמאות של בעיות עם תנאי שפה

הדרך הסיסטמטית לפתור בעיות באלקטרוסטטיקה היא באמצעות הפוטנציאל הוקטורי. נגדיר

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (9.23)$$

נציב למשוואה עבור \mathbf{H} , ונקבל

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{j}_{ext} \quad (9.24)$$

אם μ קבוע באזור מסויים, וקבוע (אבל שונה) באזור אחרים, אזי, בכל אזור, ניתן לכתוב ת המשוואה

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}_{ext} \quad (9.25)$$

נעבוד בכיוול קולון, ונקבל את משוואת לפלס עבור כל רכיב של \mathbf{A} :

$$-\vec{\nabla}^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}_{ext} \quad (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (9.26)$$

9.2.1 זרם בצפיפות אחידה

זרם I בצפיפות אחידה זורם בתוך גליל בעל רדיוס a , ופרמיביליות μ_1 . הגליל נמצא בתוך חומר בעל פרמביליות μ_2 . צריך למצוא \mathbf{H} ו- \mathbf{B} בכל המרחב. הדרך הקצרה משתמשת בסימטריה הגלילית,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext} \quad (9.27)$$

ל- \mathbf{H} יש רכיב φ בלבד. מחוץ לגליל,

$$r > a : \quad \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} = 2\pi r H_\varphi = I_{ext} = I \quad (9.28)$$

מכאן,

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad (r > a) \quad (9.29)$$

בתוך הגליל,

$$r < a : \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi a^2} r \quad (9.30)$$

הפתרון בדרך "הסיסטמית": נבחר את ציר הגליל להיות ציר \hat{z} . היות והזרם זורם בכיוון z , אזי לפוטנציאל הוקטורי, \mathbf{A} , יש רק רכיב \hat{z} . נצטרך לפתור משוואה

$$\vec{\nabla}^2 A_z = -\mu \mathbf{j}_{ext} \quad (9.31)$$

נסמן, $A_z(r) = A(r)$,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -\mu_1 \frac{I}{\pi a^2}, \quad r < a \quad (9.32)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = 0 \quad (9.33)$$

עבור $r > a$, נקבל לאחר האינטגרל הראשון

$$r \frac{dA}{dr} = -\mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r^2 + C \quad (9.34)$$

נחלק ב- r , ונפתור את המשוואה:

$$\frac{dA}{dr} = -\mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r + \frac{C}{r} \quad (9.35)$$

לאחר האינטגרל $C \ln r \rightarrow \frac{C}{r}$, איבר שיתבדר בתוך הגליל, ולכן $C = 0$, כדי למנוע את ההתבדרות ב- $r = 0$. לאחר אינטגרל נוסף, נקבל:

$$r < a : \quad A(r) = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + C_1 \quad (9.36)$$

$$r > a : \quad r \frac{dA}{dr} = C_2 \implies A(r) = C_2 \ln r + C_3 \quad (9.37)$$

נקבע את הקבועים, מתנאי השפה, אך לא לפני שנגזור את \mathbf{B} מ- \mathbf{A} . ל- \mathbf{A} יש רק רכיב \hat{z} שתלוי ב- r , ולכן ל- \mathbf{B} יהיה רק רכיב φ :

$$\mathbf{B} = B_\varphi \hat{\varphi} = \vec{\nabla} \times \varphi \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\varphi} \quad (9.38)$$

ולכן,

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} r & , r < a \\ -C_2/r & , r > a \end{cases} \quad (9.39)$$

אין זרמי שפה. ל- \mathbf{B} אין רכיב נורמלי, לכן לא נוכל דרוש ממו רציפות, אבל רכיב H_φ רציף ב- $r = a$, מאחר ואין תנאי שפה. $B = \mu H$, ולכן,

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} a = -\frac{1}{\mu_2} \frac{C_2}{a} \implies C_2 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \quad (9.40)$$

מצאנו את הקבוע, ולכן נוכל לכתוב את התשובה במלואה:

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} r & , r < a \\ -\frac{\mu_2 I}{2\pi r} & , r > a \end{cases} \quad (9.41)$$

מרגע שיש \mathbf{B} , ניתן לחלץ בקלות את \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_\varphi = \begin{cases} \frac{I r}{2\pi a^2} & , r < a \\ \frac{I}{2\pi r} & , r > a \end{cases} \quad (9.42)$$

בדומה לחישוב הקודם.

מתוך שתי הדרכים, הדרך הקצרה יותר עובדת רק במקרים פרטיים מאוד, ואילו הדרך השניה תעבוד גם במקרים בהם הדרך הראשונה לא עובדת, כי היא מבוססת על דברים מאוד כלליים: על משוואת לפלס ועל פוטנציאל וקטורי.

9.2.2 עוד דוגמה ²⁴

כדור בעל פרמביליות μ , נמצא בשדה מגנטי חיצוני \mathbf{H}_0 . צריכים למצוא את \mathbf{H} ו- \mathbf{B} בכל המרחב. בבעיה זו אין זרמים חיצוניים, \mathbf{j}_{ext} יש הזרמים שיוצרים את השדה החיצוני, \mathbf{H}_0 , אבל הם לא קשורים לבעיה (במקומם, פשוט נתון לנו \mathbf{H}_0). כמו כן, יתכנו זרמים פנימיים, קשורים, בתוך החומר, אבל הם לא נכללים ב- \mathbf{j}_{ext} .

בבעיה, זו

$$\mathbf{j}_{ext} = \mathbf{k}_{ext} = 0 \quad (9.43)$$

אז, המשוואות שלנו, בכל המרחב, יהיו

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.44)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0 \quad (9.45)$$

בנוסף לקשר, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. מאחר ו- $\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0$,²⁵ ניתן להגדיר פוטנציאל סקאלרי מגנטי:

$$\mathbf{H} = -\vec{\nabla} \phi_M \quad (9.46)$$

מבחינה מתמטית זו אותה בעיה שפתרנו באלקטרוסטטיקה. תנאי השפה:

- רציפות של ϕ_M על השפה: $\phi_M(r, \theta)|_{r=a}$ רציף (זה מבטיח רציפות של H_θ)
- רציפות של רכיב נורמלי של \mathbf{B} : $\left(-\mu \frac{\partial \phi_M(r, \theta)}{\partial r}\right)|_{r=a}$ רציף (דרישה: רציפות של B_r)

²⁴2.06.2009
²⁵במרחב פשוט קשר!

זוהי אותה בעיה, מבחינה מתמטית, שפתרנו באלקטרוסטטיקה עבור כדור עם פרמטיביות ε :

$$\phi \rightarrow \phi_M \quad (9.47)$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \quad (9.48)$$

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{B} \quad (9.49)$$

הערה 9.1 בשיעור הקודם, אמרנו ש- \mathcal{D} אנלוגי ל- \mathbf{H} ו- \mathbf{B} אנלוגי ל- \mathbf{E} . באופן פיזיקלי, זה אכן כך. אבל כאן ההקבלה היא פרומלית, לפי צורת המשוואות, ולא לפי המשמעות הפיזיקלית. $\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = 0 \iff \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$.

וגם, $\mu \rightarrow \varepsilon$, $\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ולבסוף, $\tilde{\mu} \equiv \frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \tilde{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. בנוסף צריך להחליף בין M ל- P , לפי המשוואות:

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathcal{D} - \mathbf{P} \quad (9.50)$$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} \quad (9.51)$$

ולכן, $\mathbf{P} \rightarrow \mu_0 \mathbf{M}$. אזי, הפונציאל המגנטי יהיה

$$\phi_{M,in}(r, \theta) = -\frac{3}{\tilde{\mu} + 2} H_0 r \cos \theta \quad (9.52)$$

$$\phi_{M,out}(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \frac{\tilde{\mu} - 1}{\tilde{\mu} + 2} H_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (9.53)$$

אזי

$$\mathbf{H}_{in} = \frac{3}{\tilde{\mu} + 2} \mathbf{H}_0 \quad (9.54)$$

הערה 9.2 עשינו דוגמאות עבור חומרים לינארים, המאופיינים על ידי פרמביליות μ וקשר לינארי בין האינדוקציה לשדה המגנטי.

עבור חומרים פרומגנטיים, החישוב יותר מסובך. באנלוגיה עם אלקטרוסטטיקה, ניתן מיד לפתור בעיה של כדור פירומגנטי: מיגנוט אחיד \mathbf{M} ,

$$\mathbf{H}_{in} = -\frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (9.55)$$

9.3 ההסבר המיקרוסקופי של תכונות מגנטיות של חומר²⁶

הסבר קונסיסטנטי של תכונות מגנטיות ניתן לעשות רק במסגרת מכניקת קוונטים. החומר בנוי מאטומים ומלקולות. ראשית, יש להבין כיצד אטום מגיב עם שדה מגנטי חיצוני. עבור חומר דליל, זה מספיק. עבור חומר צפוף, צריך לקחת בחשבון אינטראקציה בין אטומים.

9.3.1 השפעת שדה מגנטי על אטום בודד²⁷

בהמלטוניאן של אטום, שדה מגנטי מופיע בשתי דרכים:

$\hat{\mathbf{p}}_i$ - הוא אופרטור התנע של אלקטרון מספר i .

בנוכחות שדה מגנטי חיצוני, מחליפים את התנע הקאנוני $\hat{\mathbf{p}}_i$ ב-

$$\hat{\mathbf{p}}_i \implies \hat{\mathbf{p}}_i + \frac{e}{c} \mathbf{A}(r_i) \quad (e > 0) \quad (9.56)$$

²⁶הנושא הזה מחוץ לסילבוס
²⁷ביחידות גאוסיאניות

בנוסף, ישנו איבר

$$2\mu_B \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}} \quad (9.57)$$

כאשר $\hat{\mathbf{S}}$ הוא אופרטור של הספין הכולל (ספין + תנע זוויתי אורביטלי).
 כאשר $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 0.58 \cdot 10^{-8} \text{ eV/gauss}$, מגנטון Bohr, וה-"2", הוא המקדם הג'ירומגנטי של האלקטרון.
 ניתן להסתכל על השדה המגנטי בתור הפרעה. ההמילטוניאן של אטום,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_B \quad (9.58)$$

כאשר השדה בכיוון \hat{z} , מתקבל,

$$\mathcal{H}_B = \mu_B B (\hat{L}_z + 2S_z) + \frac{e^2}{8mc^2} B^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (9.59)$$

חומרים דיאמגנטיים נניח שהמספרים הקוונטיים $L = 0, S = 0$. זה קורה אצל גזים אצילים. לכן, האיבר הראשון לא יטרום דבר, ונצטרך לטפל, בתור הפרעה, רק באיבר השני, האיבר הדיאמגנטי

$$\frac{e^2}{8mc^2} B^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (9.60)$$

השינוי באנרגיה של האטום עקב השדה המגנטי, בחישוב לתורת הפרעות בסדר ראשון,

$$\Delta U_{dia} = \frac{e^2}{8mc^2} B^2 \sum_i (\langle x_i^2 \rangle + \langle y_i^2 \rangle) \quad (9.61)$$

מסימטריה, $\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_i^2 \rangle$, את הגדלים הללו ניתן לחשב, אם מכירים את מצב היסוד,

$$\Delta U_{dia} = \frac{e^2}{12mc^2} B^2 \sum_i \langle r_i^2 \rangle \quad (9.62)$$

נעריך את המומנט המגנטי שהאטום יפתח (בהשפעת שדה מגנטי)

$$m_{atom} - \frac{\partial}{\partial B} U = - \frac{\partial}{\partial B} (\Delta U_{dia}) \quad (9.63)$$

$$= - \frac{e^2}{6mc^2} B \sum_i \langle r_i^2 \rangle \quad (9.64)$$

$$\simeq - \frac{e^2}{mc^2} B a_B^2 \quad (9.65)$$

נחשב את המיגנט

$$M = - \frac{e^2}{mc^2} a_B^2 n B \equiv \chi B \quad (9.66)$$

כאשר n הוא צפיפות האטומים ליחידת נפח. הגודל הזה הוא גודל שלילי: הזרמים הללו, מבצעים סיבוב, אם כי חלש למדי, של השדה החיצוני.
 לכן, עבור $n \simeq \frac{1}{a_b^3}$, עבור חומר צפוף

$$|\chi_{Dia}| \simeq \frac{e^2}{mc^2} a_B^2 \frac{1}{a_b^3} = \frac{e^2/a_B}{mc^2} \simeq 10^{-5} \quad (9.67)$$

וזהו אכן סדר הגודל של המקדם הפרמבילי.

פארמגנטיים אם לא מתקיים $L = 0, S = 0$, אז האיבר הראשון בהמילטוניאן יהיה הדומיננטי. לאטומים יש מומנט מגנטי פרמגנטי.

10 חוק פארדיי ואנרגיה מגנטית²⁸

כאשר מסתכלים בנפרד על תופעות אלקטרוסטטיות ומגנטוסטטיות, נראה כאילו הן אינן קשורות. בסביבות שנות השלושים של המאה ה-19, הוכיח מייקל פארדיי שיש קשר הדוק בין תופעות חשמליות ומגנטיות:

1. באזור שבו ישנו שדה מגנטי ניח, לולאה מתכתית נעה ימינה במהירות v , אל מחוץ לאזור שבו יש שדה. כל עוד הלולאה נעה כך שחלקה נמצא בשדה וחלקה לא, מופיע זרם חשמלי על הלולאה.
2. אזור שבו שורה שדה מגנטי B נע שמאלה, כאשר לולאה ניחת חופפת אותו חלקית (וכמות החפיפה משתנה בעת שהשדה מוזז). מופיע זרם בלולאה.
3. לולאה חופפת בחלקה שדה מגנטי $B(t)$, המשתנה בזמן. אף אחד מרכיבי המערכת לא זז, ומופיע זרם בלולאה.

על פניו, נראה שיש הבדל במנגנון יצירת הזרם בין (1) ל-(2): בניסוי (1), זהו כח לורנץ הפועל על המטענים שבתוך הלולאה המוזזת. במקרה (2), אין כלל כוח לורנץ: כאן המסגרת ניחת והשדה נוסע שמאלה: כח לורנץ אינו פועל על מטען ניח. כאן, נוצר שדה חשמלי המושרה על ידי השתף המשתנה. את כל הניסויים הללו ניתן לסכם בנוסחא המכונה **חוק פרדיי**:
הכח האלקטרומניע (כ.א.מ.) $\mathcal{E}(t)$ הוא

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \quad (10.1)$$

כאשר $\Phi(t)$ הוא השטף המגנטי דרך הלולאה, המשתנה בזמן. הסימן "-" מכונה "חוק לנץ" הקובע שהכח האלקטרומניע מתנגד לשינוי בשטף.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.2)$$

כאשר האינטגרל \oint_C הוא אינטגרל מסלולי על המסגרת, ו- $\int_S d\mathbf{S}$ הוא אינטגרל משטחי על השטח שמתווה המסגרת. לפי משפט סטוקס,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.3)$$

ומחוק פארדיי נקבל,

$$\int_S \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.4)$$

ומכאן מקבלים את חוק פארדיי בצורתו הדיפרנציאלית:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (10.5)$$

שדה זה שונה מהשדה האלקטרוסטטי: הרוטור שלו אינו אפס, זה אינו שדה משמר. לכאורה, ניתן היה להסתכל על השדה הזה כשדה שונה, אבל השדה החשמלי, באשר הוא, הוא שדה שפועל על מטענים חשמליים באותה הצורה, ולכן לא עושים הבחנה ביניהם.

10.0.2 דוגמה: האנרגיה המגנטית של לולאת זרם

מעגל חשמלי סגור המכיל נגד R מפסק ומקור כח \mathcal{E} . כאשר סוגרים את המתג, מופיע זרם המתחיל לגדול: מאפס ועד להתיצבותו.

נכתוב ביטוי עבור השתף המגנטי דרך הלולאה,

$$\Phi(t) = LI \quad (10.6)$$

כאשר I הוא הזרם ו- L הוא השראות עצמית, Self Inductance. אזי,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (10.7)$$

הזרם מתייצב אחרי זמן $t \gg \frac{L}{R}$. כלומר, מקור המתח עושה עבודה נגד הכא"מ. כדי ליצור את הזרם, המקור חייב להשקיע אנרגיה (בנוסף לאנרגיה המתבזבזת בנגד על פי חוק ג'אול). אנרגיה זו אצורה בשדה המגנטי של הזרם. נחשב את האנרגיה העצורה בשדה המגנטי בדוגמה זו, ולאחר מכן נכליל אותה לפילוג זרם כלשהו.

האנרגיה המגנטית בדוגמה הנ"ל: העבודה ליחידת זמן נגד הכא"מ המושרה,

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = \frac{d\Phi}{dt} \cdot I = LI\frac{dI}{dt} \quad (10.8)$$

ולכן, העבודה כולה היא (לאחר אינטגרציה)

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \quad (10.9)$$

אזי W היא האנרגיה של השדה המגנטי של זרם I . ניתן להביא את הביטוי לצורה קצת אחרת:

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (10.10)$$

ו-

$$LI = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \implies \quad (10.11)$$

$$W = \frac{1}{2}I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (10.12)$$

10.0.3 הכלל לפילוג כלשהו של זרמים

באזור מסויים במרחב ישנו פילוג זרמים $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. כדי לתרגם את הביטוי מלולאה אחת לפילוג נחליף

$$I d\boldsymbol{\ell} \rightarrow \mathbf{j} dV \quad (10.13)$$

ונקבל את הביטוי, עבור אנרגיה של שדה מגנטי:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r \quad (10.14)$$

זוהי אנרגיה האצורה בשדה המגנטי: אם נכבה את הזרמים, נקבל אותה בחזרה. באמצעות קצת אלגברה, נעביר את הביטוי לצורה קצת אחרת:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r \quad (10.15)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} d^3r \quad (10.16)$$

נשתב ב- $\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B}$ ונקבל,

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{A} d^3r - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d^3r \quad (10.17)$$

האיבר השני הוא איבר שפה: והוא יתאפס אם האינטגרל הוא על כל המרחב: שדה \mathbf{A} דועך כמו $\frac{1}{r}$ ושדה \mathbf{B} כמו $\frac{1}{r^2}$, ולכן, כאשר מעבירים את הביטוי לשתף דרך משטח אינסופי, שטח המשטח גדל כמו r^2 , ולכן, האינטגרל עליו יתאפס.

לכן, מאחר ו- $\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{all space}} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) d^3r \quad (10.18)$$

זהו ביטוי דומה לביטוי עבור אנרגיה אלקטרוסטטית. ההרחבה לכל המרחב באה מכך שניתן להרחיב אינטגרל על הנפח שבו יש שדה לאינטגרל על כל המרחב, תחת ההנחה שהוא יתאפס על האזורים בהם אין שדה. ניתן לכתוב את האנרגיה המגנטית באמצעות צפיפות זרם בלבד, ולקבל עוד ביטוי עבור W : נתחיל ממשוואה (10.14), נשתמש ב-

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.19)$$

ונקבל

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint d^3r d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.20)$$

נרצה להדגיש נקודה לגביה נוסחא זו: נתבונן בשני פילוגי זרם: $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$ ו- $\mathbf{j}_2(\mathbf{r})$ כאשר אין חפיפה בין הזרמים.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \quad (10.21)$$

נחשב את האנרגיה העצורה בשני הפילוגים:

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint d^3r d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r})] \cdot [\mathbf{j}_1(\mathbf{r}') + \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')] \quad (10.22)$$

לאחר פתיחת הסוגיים יופיע סכום של שלוש תרומות, נכנה אותן:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} \quad (10.23)$$

כאשר

$$W_i = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint d^3r d^3r' \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (i = 1, 2) \quad (10.24)$$

$$W_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint d^3r d^3r' \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.25)$$

באלקטרוסטטיקה, ניתן היה לפרש את אנרגיית הקשר כאנרגיה פוטנציאלית בין מטענים, ולגזור ממנה כח בין פילוגי מטען. כאן, אי אפשר לפרש אנרגיה זו כאנרגיה פוטנציאלית בין זרמים, ולגזור ממנה כח: נקח שני אלמנטי זרם, $I'd\ell'$ ו- $Id\ell$. לפי ביטוי זה, $W_{1,2} > 0$ (עבור שני זרמים הזורמים באותו הכיוון). אם נחשוב על הביטוי כאנרגיה פוטנציאלית בין הזרמים, נגיע למסקנה שזרמים מקבילים דוחים, בניגוד לתוצאה שכבר קיבלנו, שזרמים מקבילים מושכים זה את זה. למעשה, כן ניתן לחשב כח בין שני פילוגי זרם באמצעות נוסחא זו, אבל אז צריך להשתמש בסימן + בנגזרת.

חלק III

משוואות מקסוול

11 משוואות מקסוול²⁹

אלקטרודינמיקה לפי מקסוול:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & , & & \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & , & & \vec{\nabla} \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (11.1)$$

²⁹07.06.2009, שעה שניה

משוואות אלו נכונות לגבי הפיזיקה שקורית בתחנת הכח בחדרה. בגלי צה"ל הן לא טובות: הן בהם גלים אלקטרומגנטיים. כשמתבוננים במשוואות, רואים שיש בהם פגם:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} \implies \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (11.2)$$

וביטוי זה, $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$, סותר את משוואת הרציפות: $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, כאשר ρ היא צפיפות המטען החשמלי. משוואת הרציפות היא יותר מחוק שימור המטען: משוואת הרציפות טוענת שאם יש חוק שימור לוקאלי, אם ממקום מסויים מטען עובר ממקום אחד למקום אחר, אז מופיע דיברגנץ של זרם. מחוק זה מופיע חוק שימור המטען הכולל: $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$, ומכאן יוצא שכלל המטען נשמר. מקסוול תיקן את המשוואה עבור $\vec{\nabla} \times \mathbf{E}$, חוק אמפר (מטיעונים אחרים דווקא), והחליף את חוק אמפר ב-

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.3)$$

חור אומר ששינוי של שדה מגנטי משרה שדה חשמלי, ואילו האיבר הנוסף אומר ששינוי של שדה חשמלי משרה שדה מגנטי. כעשיו מערכת המשוואות עקבית עם משוואת הרציפות:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} \quad (11.4)$$

$$= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11.5)$$

ומשוואת רציפות מתקיימת.

MAXWELL EQUATIONS	
$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	(M1)
$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$	(M2)
$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(M3)
$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	(M4)

המסקנה המיידית: גלים אלקטרומגנטיים. בהעדר מקורות ($\mathbf{j} = 0, \rho = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.7)$$

ונקבל את משוואת הגלים:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (11.8)$$

כאשר $[\mu_0 \epsilon_0] = \frac{1}{[v]^2}$ נסמו,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec} = c \text{ Speed of light in vacume} \quad (11.9)$$

מקסוול איחד את המושג של חשמל, מגנטיות ואור לסט אחד של משוואות. התופעות האופטיות, החשמליות והמגנטיות היו מוכרות בנפרד אלפי שנים לפני כן.

11.1 הפוטנציאל וחופש הכיול

מ-(M2):

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (11.10)$$

מ-(M3):

$$\vec{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (11.11)$$

ולכן,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (11.12)$$

אז הגדרנו שני פוטנציאלים: פוטנציאל חשמלי-סקלרי ϕ ופוטנציאל מגנטי-וקטורי \mathbf{A} . נציב את הפוטנציאל למשוואות האחרות:

מ-(M1), $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, נקבל, בהצבת הפוטנציאלים,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.13)$$

וממשוואה (M4), $\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, נקבל,

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (11.14)$$

קיבלנו שתי משוואות עבור הפוטנציאלים:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}} \quad (11.15)$$

צמצנו את סט המשוואות לשתי המשוואות, שבאות מ-(M1) ומ-(M4). לא ויתרנו על (M2) ו-(M3) שמאפשרות לנו להגדיר את הפוטנציאלים ϕ , \mathbf{A} . בנוסף, יש קשר בין פוטנציאלים ושדות:

$$\boxed{\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (11.16)$$

במשוואות מקסוול היו 6 משתנים בלתי תלויים: שלושה רכיבים של \mathbf{E} ושלושה רכיבים של \mathbf{E} . במשוואות עבור הפוטנציאלים יש רק ארבעה משתנים בלתי תלויים: אחד עבור הפוטנציאל ושלושה עבור שלושת הרכיבים של \mathbf{A} . עובדה זו קשורה לחופש הכיול.

11.1.1 חופש הכיול

אם במקום ϕ , \mathbf{A} נגדיר

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \vec{\nabla} \chi(\mathbf{r}, t) \quad (11.17)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (11.18)$$

עבור פונקציה $\chi(\mathbf{r}, t)$ כלשהי, אזי \mathbf{E} , \mathbf{B} לא משתנים³⁰:

$$\mathbf{E}' = -\vec{\nabla} \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \chi) = \mathbf{E} \quad (11.19)$$

$$\mathbf{B}' = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}' = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (11.20)$$

דבר זה מאפשר לנו חופש כיול. נהוג לעבוד בכמה כיולים שימושיים:

³⁰עבור χ חלק מספיק, ניתן לשנות את סדר הגזירה החלקית, ואז $\partial_t \vec{\nabla}_x \chi = \vec{\nabla}_x \partial_t \chi$

• **כיוול לורנץ:** נדרוש

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \quad (11.21)$$

כיוול זה נוח משום שבכיוול לורנץ, המשוואות נפרדות: נשארים עם המשוואות:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (11.22)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.23)$$

• **כיוול קולון:** נדרוש כמו שכבר ראינו,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0} \quad (11.24)$$

בכיוול זה, נקבל

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.25)$$

היא משוואת פואסון המוכרת לנו מאלקרוסטטיקה:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.26)$$

מכאן נראה כאילו הפוטנציאל בנקודה \mathbf{r} מגיב באותו רגע על שינוי בפילוג המטען ρ בנקודה \mathbf{r}' .

12 חוקי שימור³¹

12.1 שימור מטען

אם מפעילים דיברגנץ על (M4), מקבלים:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0} \quad (12.1)$$

זוהי משוואת הרציפות, והיא יותר מ"סתם" טענה אודות שימור כלל המטען בעולם. משוואה זו היא טענה יותר חזקה: היא אומרת איך מטען יכול להשתנות במקום אחד, לקבלת תוספת של מטען במקום אחר, דרך הזרם.

12.2 שימור אנרגיה, משפט Poynting.

מטענים כלואים בנפח V במרחב, המוקף בשטח $S = \partial V$. המטענים בתנועה, אבל הם מוגבלים לנוע בתוך הנפח V . המטענים יוצרים שדות חשמליים ומגנטיים, שמשפיעים בחזרה על המטענים. יהא q_i המטען ה- i שבתוך הנפח, ממוקם ב- \mathbf{r}_i ו- $\mathbf{v}_i(t)$ מהירותו של המטען ה- i , ו- $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ השדות החשמליים והמגנטיים ב- \mathbf{r} , t .

נחשב את העבודה, dW , שהשדה החשמלי עושה על המטענים בזמן dt .

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt = \sum_i q_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{v}_i dt \quad (12.2)$$

כאן, מדברים רק על השדה החשמלי ולא על השדה המגנטי, כי השדה המגנטי לא עושה עבודה: הכח הכולל הוא $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ אבל $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

נכליל לרצף:

$$dW = dt \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (12.3)$$

$$= dt \int d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (12.4)$$

כאשר $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. אם במעגל חשמלי זורם זרם קבוע, אז האנרגיה המתבזזת (לפי חוק ג'אול) היא $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. כרגע, לא מדברים על אנרגיה מתבזזת אלא על מטענים ושדות. שדה יכול לעשות עבודה על המטענים והאנרגיה של המטענים - משתנה.

$$\frac{dW}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (12.5)$$

נרצה לחלץ ממשוואות מקסוול את הביטוי במונחים של שדות. נשתמש במשוואה (M4),

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d^3r \quad (12.6)$$

לפי הזהות הוקטורית $\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{B}$, נקבל

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_V \left[-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{E} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3r \quad (12.7)$$

על האיבר השני, נפעיל את משוואה (M3) ונקבל

$$= - \int \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3r \quad (12.8)$$

נסמן

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (12.9)$$

, צפיפות האנרגיה האלקטרומגנטית (סכום האנרגיה החשמלית ליחידת נפח ממשוואה (6.41) והאנרגיה המגנטית ליחידת נפח ממשוואה (10.18)), ונגדיר את וקטור פוינטינג,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (12.10)$$

אזי, מהעברת אגפים, נקבל:

$$\int_V \left[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{S} \right] = 0 \quad (12.11)$$

קיבלנו חוק שימור אנרגיה, בצורה דיפרנציאלית, או:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{S}} \quad (12.12)$$

וקטור פוינטינג, \mathbf{S} הוא שטף האנרגיה ו- u הוא צפיפות האנרגיה האלקטרומגנטית. לפי חוק גאוס,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{S} d^3r = \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{n} \quad (12.13)$$

אנרגיה יכולה לברוח מהנפח הזה על ידי קרינה אלקטרומגנטית: כאשר מטען מואץ, הוא קורן קרינה. זהו האיבר שלל השטח: האנרגיה יכולה לצאת מהמשטח בצורה של קרינה.

בצורה אינטגרלית נקבל את המשוואה

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u d^3r = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r - \oint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA \quad (12.14)$$

או,

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{field} = - \frac{\partial}{\partial t} V_{particles} - \oint_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA \quad (12.15)$$

השינוי באנרגיה של השדה, U_{field} הוא שינוי האנרגיה של המטענים, יחד עם שינוי האנרגיה האלקטרומגנטית הנפלטת מהנפח.

כיוונים: השדות המגנטי והשמלי מאונכים זה לזה, ו- \mathbf{k} , כיוון התפשטות הגל, הוא הכיוון הניצב להם. ואכן, כיוונים אלו מקיימים את משוואות מקסוול בריק. הכיוון של \mathbf{S} הוא כיוון התפשטות הגל, \mathbf{k} .

דוגמה: איבוד אנרגיה בחוט מוליך זרם I זורם בחוט בעל רדיוס a , שמרכזו בציר \hat{z} . R הוא התנגדות של חתיכת חוט באורך L . יש למצוא את \mathbf{S} . יש לנו שדה חשמלי בכיוון \hat{z} :

$$E_z = \frac{IR}{L} \quad (12.16)$$

הזרם בחוט יוצר שדה מגנטי \mathbf{H} , עם רכיב φ בלבד. על המעטפת,

$$2\pi a \cdot H_\varphi(r=a) = I \quad (12.17)$$

ולכן,

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi a} \quad (12.18)$$

נחשב את וקטור פוינטינג,

$$S_r = \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} E_z \cdot B_\varphi = E_z H_\varphi = \frac{IR}{L} \cdot \frac{I}{2\pi a} \quad (12.19)$$

אז קיבלנו,

$$S_r \cdot 2\pi a \cdot L = \frac{IR}{L} \cdot \frac{I}{2\pi a} = I^2 R \quad (12.20)$$

כלומר, שתף האנרגיה הנפלט הוא בדיוק האנרגיה המתבזזת בחוט עם זרם.

12.3 שימור תנע³²

נסתכל על תחום במרחב שבו זרמים $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ וצפיפות מטען $\rho(\mathbf{r}, t)$. כמו כן יש גם שדות שיוצרים את הזרמים. $\rho(\mathbf{r}, t) d^3r$ הוא מטען באלמנט נפח d^3r . הכח הפועל על אלמנט זה של מטען,

$$dF = (\rho d^3r) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12.21)$$

הכח מקנה תנע למטען: לפי חוק ניוטון, שינוי התנע של כל החלקיקים, $d\mathbf{P}_{particles}$, בנפח V :

$$\frac{d\mathbf{P}_{particles}}{dt} = \int_V d^3r (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (12.22)$$

ממשוואות (M1) ו-(M4) נחלת את ρ ו- \mathbf{j} :

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \quad (12.23)$$

ו-

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.24)$$

נשתמש ב-(M3) ונקבל:

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) \quad (12.25)$$

אז, תוך שימוש ב- $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\frac{d\mathbf{P}_{particles}}{dt} = -\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r + \varepsilon_0 \int d^3r \left[\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) + c^2 \mathbf{B} \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}}^{=0} \right] \quad (12.26)$$

אז, נגדיר א תהתנע של השדה,

$$\mathbf{P}_{field} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r = \varepsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3r \quad (12.27)$$

זהו התנע של השדה החשמלי בנפח V , אזי צפיפות התנע, או התנע ליחידת נפח, יהיה

$$g(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (12.28)$$

כלומר, צפיפות התנע תלויה בשטף האנרגיה.

דוגמה אחרת לקשר בין שטף האנרגיה וצפיפות התנע: חלקיקים בעלי מסה m בצפיפות n ובמהירות v . nv הוא מספר החלקיקים שפוגעים ביחידת שטח, ביחידת זמן, אזי האנרגיה ליחידת-שטח-ליחידת-זמן היא

$$nv \cdot \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = S \quad (12.29)$$

וזהו בדיוק שטף האנרגיה.

צפיפות התנע (או, התנע ליחידת נפח) היא

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot n = g \quad (12.30)$$

וקיבלנו קשר זהה בין שטף האנרגיה S לצפיפות התנע g .

נחזור לחישוב שימור התנע:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{particle} + \mathbf{P}_{field}) = \varepsilon_0 d^3r \left[\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \right] \quad (12.31)$$

נחשב את הרכיבים השונים, באמצעות הזהויות הוקטוריות:

$$\left(\mathbf{E} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{E}) \right)_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (12.32)$$

$$\left(\mathbf{B} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{B}) \right)_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (12.33)$$

נגדיר את Maxwell Stress Tensor

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left[E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (12.34)$$

באנמעות הטנזור הזה, נכתוב את חוק שימור התנע:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{particles} + \mathbf{P}_{field})_\alpha = \sum_\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} d^3r \quad (12.35)$$

נסתכל על הזהות, הנובעת ממשפט גאוס, עבור האינטגרל:

$$\int_V \sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} d^3r = \oint_{S=\partial V} \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta dS \quad (12.36)$$

הפכנו את האינטגרל לאינטגרל על המעטפת של V (משפט גאוס: $\oint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} d^3r$, או ברכיבים:

$$\left(\int_V \sum_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\beta} d^3r = \oint_S \sum_\beta A_\beta n_\beta dS \right)$$

ונקבל את חוק שימור התנע:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{particles} + \mathbf{P}_{field}) = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta dS \quad (12.37)$$

המשמעות של $\sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta dS$ - הוא כמות התנע (רכיב α) דרך אלמנט שטח dS ליחידת זמן dt .

הערה 12.1 לשדה המגנטי יש גם תנע זוויתי. ברמה המיקרוסקופית, הוא מורכב מפוטונים, שיש להם תנע זוויתי. אזי צפיפות התנע הזוויתי תהיה

$$\mathcal{L}_{field} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{S} \quad (12.38)$$

13 גלים אלקטרומגנטיים בריק

ללא זרמים ומטענים, ממשוואות מקסוול יהיו

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13.1)$$

ומכאן מקבלים משוואות גלים עבור שדה חשמלי:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0) \quad (13.2)$$

נפתור משוואה עבור \mathbf{E} עם האילוץ ולאחר מכן נחשב את \mathbf{B} . נסתכל על פתרונות מסויימים: קיימים תרונות שבהם \mathbf{E} (ו- \mathbf{B}) תלוי רק בקוארדינטה אחת, נניח, בקוארדינטה \hat{z} . פתרונות אלו נקראים "גלים מישוריים".

גלים מישוריים:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (13.3)$$

ומהתנאי ש- $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$, נובע ש- $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ ומכאן, $E_z = 0$. נשארו לנו שני רכיבים: נתבונן באחד הרכיבים הנותרים, למשל, רכיב \hat{x} :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (13.4)$$

אזי כל פונקציה f שתלויה ב- $f(z - ct)$ מקיימת את המשוואה:
נסמן $u = z - ct$, אזי

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{df}{du} \quad (13.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du} \quad (13.6)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{df}{du} \right) = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \quad (13.8)$$

ואכן, בהצבה, נקבל שוויון. לכן, כל פונקציה התלויה ב- $z - ct$, מקיימת את המשוואה. נזכור שגם כל פונקציה $g(z + ct)$ מהווה פתרון. $f(z - ct)$ מתארת גל מישורי המתקדם בכיוון ציר \hat{z} חיובי: אם בזמן t בנקודה z היה ערך מסוים f , אזי אותו ערך יהיה בזמן $t + \Delta t$ בנקודה $z + c\Delta t$.

13.1 גל מישורי מונוכרומטי

$$E_x(z, t) = E_0 \cos [k(z - ct) + \delta] \quad (13.9)$$

כאשר k הוא "מספר הגל", $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ כאשר λ אורך הגל. אפשר גם להגדיר את התדירות הזוויתית, $\omega = kc$, אזי

$$E_x(z, t) = E_0 \cos (kz - \omega t + \delta) \quad (13.10)$$

את השדה המגנטי נחשב מהמשוואה $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \mathbf{E}$:

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{E} \right)_x = 0 \quad (\mathbf{E} = E\hat{z}) \quad (13.11)$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \mathbf{E} \right)_z = 0 \quad (\mathbf{E} = E(z)) \quad (13.12)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = - \left(\vec{\nabla} \times \mathbf{E} \right)_y = - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (13.13)$$

$$= E_0 k \sin (kz - \omega t + \delta) \quad (13.14)$$

אזי,

$$B_y(z, t) = E_0 \frac{k}{\omega} \cos (kz - \omega t + \delta) \quad (13.15)$$

לכן,

$$B_y = \frac{1}{c} E_0 \cos (kz - \omega t + \delta) = \frac{1}{c} E_x \quad (13.16)$$

או, בהכללה לכיוון כללי: כאן \mathbf{k} הוא וקטור הגל, המגדיר את אורך הגל וכיוון ההתפשטות:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{e} E_0 \cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (13.17)$$

$$= \mathbf{E}_0 \cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \left(\hat{k} \times \hat{e} \right) \cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (13.18)$$

$$= \mathbf{B}_0 \cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta)$$

וקטור היחידה \hat{e} נקרא וקטור הקיטוב. מתקיים:

$$\mathbf{k} \cdot \hat{e} = 0 \quad (13.19)$$

זהו תנאי הרוחביות. כמו כן, חוק הדיספרסיה של הגל, קובע כי $\omega = |\mathbf{k}|c$.

13.1.1 אנרגיה ותנע בגל מישורי מונוכרומטי

צפיפות האנרגיה,

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right) \quad (13.20)$$

בגל זה, $\mathbf{E}^2 = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2$ ו- $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$, ולכן

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0^2 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (13.21)$$

מכאן נחשב את וקטור פוינטינג, שטף האנרגיה

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (13.22)$$

ולפי נוסחאות (13.18) ו-(13.17): $\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{e}) = \hat{k}$, ולכן

$$= \frac{1}{c\mu_0} E_0^2 \hat{k} \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (13.23)$$

ולכן, כיוון שטף האנרגיה הוא כיוון התפשטות הגל!

צפיפות התנע, $\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$.

בהרבה מקרים רוצים לדעת ממוצע על המחזור של האנרגיה, שטף האנרגיה וצפיפות התנע. מספיק למצע על מחזור אחד כדי לקבל מיצוע על זמנים ארוכים יותר. לפי נוסחא (13.21), צפיפות האנרגיה על מחזור תהיה

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (13.24)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{k} \quad (13.25)$$

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{k} \quad (13.26)$$

מראה מחזירה ששיטחה A גל אלקטרומגנטי פוגע במראה בניצב, והופך את כיוונו. ביחידת זמן Δt , הגל עובר מרחק $c\Delta t$. כל התנע/אנרגיה של הפוטונים שנפח $A \cdot c\Delta t$ ימסר למראה. המראה מחזירה, אז המראה תקבל פי 2 מהתנע הזה.

התנע שהמראה מחזירה בפרק זמן Δt הוא:

$$\Delta p = \langle g \rangle \cdot 2 \cdot c\Delta t \cdot A \quad (13.27)$$

ולכן הלחץ שפועל על המראה, כח ליחידת שטח,

$$\frac{\Delta P}{A\Delta t} = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \cdot 2c = \epsilon_0 E_0^2 \quad (13.28)$$

13.1.2 סופרפוזיציה של גלים מישוריים

ניתן להרכיב גלים מישוריים מונוכרומטיים.

$$\int d^3k \hat{e}_{\mathbf{k}} E_0(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t + \delta_{\mathbf{k}}) \quad (13.29)$$

כאשר $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$. זו אינה הסופרפוזיציה הכי כללית: עבור כל \mathbf{k} יש עד שני קיטובים בלתי תלויים. גל מישורי מונוכרומטי הוא מושג די ערטילאי. זה לא באמת קיים.

13.1.3 אמפליטודה קומפלקסית

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \mathbf{E}_c e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} \quad (13.30)$$

כאשר

$$\mathbf{E}_c = E_0 \hat{e} e^{i\delta} \quad (13.31)$$

שדות חשמליים ומגנטיים הם גדלים ממשיים, אבל נוח לעבוד עם ביטויים מרוכבים, וכל עוד עושים פעולות לינאריות, אז ניתן, בשלבי ביניים, לשכוח מה- Re ולעבוד עם גל ממשי. נחפש פתרונות משוואות מקסוול בריק מהצורה,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} \quad (13.32)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_c e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \quad (13.33)$$

משתי משוואות מקסוול הראשונות, נשים לב ש-

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_c) = 0, \quad i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_c) = 0 \quad (13.34)$$

זהו תנאי הרוחביות.
מהמשוואה השלישית, נקבל

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_c = -(-i\omega) \mathbf{B}_c \implies \mathbf{B}_c = \frac{k}{\omega} (\hat{k} \times \mathbf{E}_c) = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \mathbf{E}_c) \quad (13.35)$$

ו-

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_c = \frac{1}{c^2} (-i\omega) \mathbf{E}_c \implies \mathbf{E}_c = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \mathbf{E}_c) \quad (13.36)$$

13.1.4 השוואה עם משוואת שרדינגר

משוואת שרדינגר,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \Delta^2 \psi \quad (13.37)$$

ופתרונה,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_k t} \quad (13.38)$$

יש שתי הבדלים עיקריים:

- כאן, הגל באמת יכול להיות מרוכב.

- יחס הדיספרסיה, הקשר בין ω ל- k , שונה:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \implies \omega_k = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (13.39)$$

13.1.5 קיטוב מעגלי ואליפטי

גל מתקדם בכיוון \hat{k} (ציר \hat{z}). \hat{e}_1, \hat{e}_2 הם וקטורי היחידה בכיוון ציר \hat{y} - \hat{x} .

$$\text{Re} E_1 \hat{e}_1 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \quad (13.40)$$

הוא גל מישורי מונוכרומטי, מקוטב בכיוון \hat{e}_1 . גל מקוטב בכיוון \hat{e}_2 יהיה

$$\text{Re} E_2 \hat{e}_2 e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \quad (13.41)$$

לכן, פתרון נוסף יהיה:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2] e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \quad (13.42)$$

נכתוב מפורשות את E_1, E_2 :

$$E_1 = C_1 e^{i\delta_1} \quad (13.43)$$

$$E_2 = C_2 e^{i\delta_2} \quad (13.44)$$

1. כאשר $\delta_1 = \delta_2 \equiv \delta$ ו- $C_1 \neq C_2$ אזי

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [(C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2) e^{i\mathbf{kr} - i\omega t + i\delta}] \quad (13.45)$$

$$= (C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2) \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \delta) \quad (13.46)$$

זהו קיטוב לינארי בזווית $\theta = \frac{C_2}{C_1}$

2. $C_1 = C_2, \delta_2 = \delta \pm \frac{\pi}{2}, \delta_1 = \delta$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = C \text{Re} \left(\left[\hat{e}_1 e^{i\delta} + \hat{e}_2 e^{i(\delta \pm \frac{\pi}{2})} \right] e^{i\mathbf{kr} - i\omega t} \right) \quad (13.47)$$

$$= C \text{Re} [(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) e^{i\mathbf{kr} - i\omega t + i\delta}] \quad (13.48)$$

$$= C \text{Re} [(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) e^{i\mathbf{kr} - i\omega t + i\delta}] \quad (13.49)$$

וקיבלנו,

$$E_x = C \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \delta) \quad (13.50)$$

$$E_y = C \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \delta \pm 2) = \mp C \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \delta) \quad (13.51)$$

כלומר, אם נסתכל על השדה בנקודה, אז גודלו נשאר קבוע, ואילו כיוונו משתנה בצורה מעגלית

• כאשר לוקחים את $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, גל זה מכונה לפעמים גם Positive helicity (בורגיות חיובית)

3. נסמן $\mathbf{kr} - \omega t = \tau$ אזי³³

$$E_x = C_1 \cos(\tau + \delta_1), \quad E_y = C_2 \cos(\tau + \delta_2) \quad (13.52)$$

אזי, נפתח את ה- \cos ונקבל,

$$\frac{E_x}{C_1} = \cos \tau \cos \delta_1 - \sin \tau \sin \delta_1 \quad (*)$$

$$\frac{E_y}{C_2} = \cos \tau \cos \delta_2 - \sin \tau \sin \delta_2 \quad (**)$$

נכפיל את (*) ב- $\sin \delta_2$ ואת (***) ב- $\sin \delta_1$ ונחסר בין שתי המשוואות. נקבל משוואה,

$$\frac{E_x}{C_1} \sin \delta_2 - \frac{E_y}{C_2} \sin \delta_1 = \cos \tau \sin (\delta_2 - \delta_1) \quad (13.53)$$

נכפיל את (*) ב- $\cos \delta_2$ ואת (***) ב- $\cos \delta_1$, ונחסר:

$$\frac{E_x}{C_1} \cos \delta_2 - \frac{E_y}{C_2} \cos \delta_1 = \sin \tau \sin (\delta_2 - \delta_1) \quad (13.54)$$

נעלה את המשוואות בריבוע, ונחבר,

$$\left(\frac{E_x}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{C_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{C_1 C_2} \cos (\delta_2 - \delta_1) = \sin^2 (\delta_2 - \delta_1) \quad (13.55)$$

זו משוואה המגדירה את הגל בעל קיטוב אליפטי. קל לראות את המקרים הפרטיים: אם $\delta_2 = \delta_1$, נקבל מהמשוואה,

$$\left(\frac{E_x}{C_1} - \frac{E_y}{C_2}\right)^2 = 0 \implies \frac{E_y}{E_x} = \frac{C_2}{C_1} \quad (13.56)$$

וזהו קיטוב לינארי.

אם $C_1 = C_2 = C$, ו- $\delta_2 - \delta_1 = \frac{\pi}{2}$, נקבל

$$E_x^2 + E_y^2 = C^2 \quad (13.57)$$

וזהו קיטוב מעגלי.

14 משוואות מקסוול בחומר

נרשום את משוואות מקסוול המיקרוסקופיות:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_{micro} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{micro} & \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}_{micro} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E}_{micro} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{micro}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \mathbf{B}_{micro} &= \mu_0 \mathbf{j}_{micro} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{micro}}{\partial t} \end{aligned} \quad (14.1)$$

אלו הם בעצם משוואות מקסוול בריק. אבל אנחנו לא רוצים לעקוב אחר כל אטום ואטום. אנחנו רוצים למצוא את המשוואות הללו, ולהגיע למשוואות בחומר. נסתכל על המיצוע כמיצוב שני שלבים:

- השלב הראשון הוא מיצוע על נפח "קטן".

התנאי ההכרחי הוא שאורך הגל $\lambda \gg a$, כאשר a הוא המרחק בין אטומים. באור נראה, התנאי הזה מצוין, λ הוא מסדר גודל של מיקרון, ו- a הוא מסדר גודל של אנגסטרם. לכן, באופטיקה של אור נראה, למשל, משתמשים בגדלים ממוצעים. עבור קרני X למשל, לא ניתן לבצע מיצוע כזה.

- בשלב השני הוא מיצוע על הצבר הסטטיסטי³⁴.

בשלב הראשון, עבור האינדוקציה המגנטית הממוצעת \mathbf{B} , נרשום,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.2)$$

נעבור למשוואות פואסון,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho_{micro} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} (-\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P}) \quad (14.3)$$

³⁴ שפרים שקוראים לזה "ממוצע על הזמן", אבל הביטוי הזה לא ממש נכון.

כאשר ראינו באלקטרוסטטיקה ש- $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\langle \rho_{micro} \rangle$.
 עקב תנועה של מטענים קשורים, מופיע זרם. \mathbf{j}_p יהיה צפיפות זרם הקיטוב (Polarization current). לפי משוואת הרציפות,

$$\frac{\partial \langle \rho_{micro} \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_p = 0 \quad (14.4)$$

$$\implies \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_p \right) = 0 \quad (14.5)$$

הזרם הממוצע יהיה

$$\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_p \quad (14.6)$$

כאשר \mathbf{j}_m הוא זרמי המיגנוט, הזרמים המיקרוסקופיים בחומר שיוצרים את המיגנוט

$$= \vec{\nabla} \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (14.7)$$

לכן, נקבל,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \mathbf{M} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (14.8)$$

אזי, נגדיר

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (14.9)$$

נרשום את משוואות מקסוול בחומר:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (14.11)$$

אלו הם משוואות מקסוול בחומר בהעדר מטענים וזרמים חיצוניים. במקרה של מתכת, קשה להגדיר מהם הזרמים "החיצוניים" ומהם הזרמים ה"פנימיים". לפעמים יש חופש בהגדרת הבעיה.. מהם זרים חיצוניים ומהם זרמים פנימיים. אם ניתן להניח קשר $\mathcal{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ו- $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, כאשר ϵ, μ קבועים, אז חוזרים למשוואות כמו ריק, רק עם $\epsilon \rightarrow \epsilon_0 \mu \rightarrow \mu_0$. אם הקשר מתקיים, אז החומר מכונה **ללא דיספרסיה**. במקרה זה, כל התכונות ישארו כמו שלמדנו, למשל, צפיפות האנרגיה תהיה

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathcal{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (14.12)$$

ושתף האנרגיה יהיה,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (14.13)$$

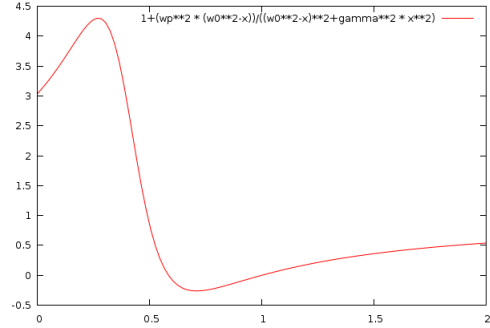
הגלים יהיו כמו הגלים בריק, אך יש להציב במקום ϵ_0, μ_0 את ϵ, μ , ולכן, מהירות הגל תהיה

$$v = c \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (14.14)$$

והיחס $\sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\mu_0 \epsilon_0}}$ הוא אינדקס השבירה n .

איך קורא שגל שנע במהירות c בריק, פוגע בחומר ומתפשט שם במהירות יותר קטנה? הגל מזיז את הדיפולים, שפולטים גלים מישוריים. אם סוכמים את כל ה"בלאגן" הזה, התוצאה נטו היא אותו גל - באותה צורה, שמתקדם במהירות קטנה יותר³⁵.

³⁵ פיינמן מדבר על זה בהרצאות שלו על פיזיקה.



איור 1: החלק הממשי של $\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0}$

14.1 מודל לורנץ

עבור שום חומר אמיתי, לא מתקיים כי ϵ, μ קבועים. עבור תחום מסויים של תדרים זה עשוי להיות נכון בקירוב אבל באופן כללי, ϵ, μ תלויים בתדירות. מודל לורנץ הוא מודל ישן ופשוטני, המסביר באופן די טוב תנועה של גלים אלקטרומגנטיים בחומר. החומר מורכב מאוסף מטענים נקודתיים המתנדנדים, בתנודות הרמוניות, סביב נקודת שיווי המשקל שלהם. נסמן ב- u את ההיסט מנקודת שיווי המשקל. כאשר שדה חשמלי מפעיל כח על החלקיק, הוא מוסט מרחק $m \cdot u$. תהיה מסת המטען, והתדירות האופייניים של כל מתנד הרמוני היא ω_0 (זו תדירות אפיינית 1). אזי, משוואת התנועה של המטען בשדה \mathbf{E} תהיה,

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{u} \right) = e \mathbf{E} \tag{14.15}$$

האיבר הלינארי $\gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ הוא חיכוך (התלוי במהירות). מניחים ש- $\mathbf{E} \sim e^{-i\omega t}$, ולכן גם $u \sim e^{-i\omega t}$ ואז המשוואה תהיה,

$$m (-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \mathbf{u} = e \mathbf{E} \tag{14.16}$$

אזי

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \cdot \frac{e}{m} \mathbf{E} \tag{14.17}$$

הקיטוב

$$\mathbf{P} = ne\mathbf{u} = \frac{e^2 n}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \tag{14.18}$$

כאשר n הוא מספר אטומים ליחידת נפח.

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \left[1 + \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \right] \mathbf{E} \tag{14.19}$$

אזי ϵ הוא המקדם של \mathbf{E} ,

$$\boxed{\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{e^2 n}{m\epsilon_0} \tag{14.20}$$

התנהגות של הרבה חומרים ניתן להתאים לנוסחה הזו. אפשר לראות שהפרמטיביות תלויה בתדירות: המידה שבה חומר מגיב לשדה תלוי בתדירות. למשל, עבור $\omega \rightarrow \infty$, $\epsilon(\omega) \rightarrow \epsilon - 0$. נפריד את הביטוי לחלק ממשי וחלק מדמה

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + i \frac{\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} + \gamma^2 \omega^2 \tag{14.21}$$

כאשר החלק המדומה הוא החלק האחראי לאיבוד אנרגיה ("חיכוך"). בתחומים שונים,

$$\frac{\varepsilon(\omega=0)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (14.22)$$

ואם ε הסטטי, עבור שדות קבועים. היחס עולה עם התדירות עד לפסגה. אזור זה מכונה "דיספרסיה נורמלית". לאחר מכן היחס יורד והוא 1 כאשר $\omega = \omega_0$, וממשיך ויורד, עד לגודל שלילי. האזור שבו ε קטן עם התדירות מכונה "דיספרסיה אנומלית".

גבול מעניין נוסף של מודל לורנץ הוא כאשר $\omega_0 \rightarrow 0$. זהו מטען חופשי (כמו למשל עבור מתכת)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{-i\gamma\omega - \omega^2} \right) \approx \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{-i\gamma\omega - \omega^2} \quad (14.23)$$

נרצה לתרגם את הגודל הזה למוליכות. באופן כללי, ממשוואות לורנץ,

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathcal{D} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (14.24)$$

כאשר $-i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E}$ הוא זרם ההולכה, \mathbf{j}_{cond} . בדרך כלל, עבור חומר מוליך, מתקיים,

$$\mathbf{j}_{cond} = \sigma(\omega) \mathbf{E} \quad (14.25)$$

עבור המוליכות σ . לכן, ממודל לורנץ, נזהה את המוליכות,

$$\sigma(\omega) = i\omega \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{-i\gamma\omega - \omega^2} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma - i\omega} = \frac{e^2 n}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} \quad (14.26)$$

זוהי נוסחאת Drude עבור מוליכות של מתכות. $\gamma = \frac{1}{\tau}$ כאשר τ הוא זמן רלקסציה. כאשר $\omega \rightarrow 0$, בשדה קבוע,

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (14.27)$$

14.2 גלים מישוריים ומונוכורמטיים בחומר

עבור גל מונוכורמטי, כל הגדלים פרופורציוניים ל- $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$. אזי, משוואות מקסוול הופכות למשוואות אלגבריות:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \implies \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu(\omega) \mathbf{H} \quad (14.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \implies i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathcal{D} \implies \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (14.29)$$

לכן, שתי המשוואות,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu(\omega) \mathbf{H} \quad (14.30)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (14.31)$$

מגדירות גלים אלקטרומגנטיים בחומר. תנאי הרוחביות, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ו- $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$ מתקיים. נקח את המשוואה הראשונה ונכפיל אותה ב- \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{H} \quad (14.32)$$

$$-k^2 \mathbf{E} = \omega \mu (-\omega \varepsilon) \mathbf{E} \quad (14.33)$$

כאשר הצבנו את $\mathbf{k} \times \mathbf{H}$ מהמשוואה השנייה. קיבלנו משוואה סגורה עבור \mathbf{E} , שלה קיים פתרון בתנאי ש- $k^2 = \omega^2 \mu(\omega) \varepsilon(\omega)$. זהו חוק הדיספרסיה.

$$k^2 = \omega^2 \mu(\omega) \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2(\omega)} \quad (14.34)$$

כאשר v היא מהירות הפאזה, התלויה ב- ω .

$$\mu(\omega) \varepsilon(\omega) = c^2 n^2 \quad (14.35)$$

עבור מקדם השבירה, n ו-

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (14.36)$$

כאשר³⁶

$$k = \omega \sqrt{\mu(\omega) \varepsilon(\omega)} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{\mu(\omega) \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (14.37)$$

במודל לורנץ, החומר בנוי מאוסצילטורים, ומתקבל,

$$\mu = \mu_0 \quad (14.38)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \right] \quad (14.39)$$

כאשר $\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}$, תדירות הפלזמה.

14.2.1 דוגמה: מתכת בתדירות נמוכה: $\omega \ll \gamma$

עבור מתכת, $\omega_0 = 0$, מטענים חופשיים ולא אוסצילטורים,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{-i\gamma\omega} = \varepsilon_0 - \frac{1}{i\omega} \frac{e^2 n \tau}{m} \approx -\frac{\sigma_0}{i\omega} \quad (14.40)$$

כאשר המוליכות,

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (14.41)$$

כאשר $\omega \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow \infty$.

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)} \quad (14.42)$$

ניתן לבחור או את k ממשי או את ω כמספר ממשי (והשני, מדומה). הבחירה הזו תלויה בבעיה: כאשר אנחנו קובעים את ω , נקבע ω ממשי ו- k יהי מדומה. למשל, כאשר נעביר חבורת גלים בתוך החומר, ונבחן כיצד היא מתפתחת עם הזמן, הבחירה תהיה הפוכה: k יהיה ממשי ו- ω תהיה מסמך מרוכב. בשלב זה, נדון בבעיה עבור ω ממשי: שולחים גל עם תדירות מוגדרת ω , ונבחן מה קורה כשהוא פוגע במתכת. נחשב את יחס הדיספרסיה,

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)} = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\sigma_0} \quad (14.43)$$

הגל בתוך המתכת דועך לפי e^{ikx} . כדי לראות את הדעיכה נקח את החלק המדומה של k , שאומר לנו איך הגל דועך לתוך החומר, ונכתוב

$$e^{-(\text{Im}k)x} = e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (14.44)$$

כאשר $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$ מכונה "skin depth".

14.2.2 דוגמה: מתכת אידיאלית (פלסמה אלקטרונית)

במתכת, המטענים חופשיים, ולכן $\omega_0 = 0$. כמו כן, אין דיסיפציה, $\gamma = 0$.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \tag{14.45}$$

יחס הדיספרסיה,

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{14.46}$$

• בתדירויות $\omega < \omega_p$, אזי $\text{Re}k = 0$, הגל מדומה טהור. הגל לא יכול להתקדם בחומר: מקדם החזרה הוא 1.

• עבור $\omega > \omega_p$, $\text{Im}k = 0$, הגל יכול להתפשט בחומר.

14.3 מהירות הפאזה ומהירות החבורה

עד כה דיברנו על גל מונוכרומטי, בתדירות מוגדרת. במציאות, התדירות אף פעם לא מוגדרת: יש לנו פולסים המורכבים ממספר תדירויות.

בריק, אין צורך להבדיל בין מהירות פאזה ומהירות חבורה.

כאשר אין דיסיפציה, ω, k חיוביים, מהירות הפאזה, v_{ph} , מוגדרת כ-

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} \tag{14.47}$$

בריק, $\omega = kc$, ולכן $v_{ph} = c$ קבוע, ולכן מהירות הפאזה היא מהירות קבועה c . בזמן $t = 0$, מכינים חבורת גלים,

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk \equiv f(x) \tag{14.48}$$

$A(k)$ הוא הרכב הספקטרלי של k : איזה רכיבים של k יש בחבורה הזו. עבור k מוגדר היטב, $A(k)$ תהיה פונקציה צרה סביב k_0 . $f(x)$ תראה כמו אוסצילציות מהירות (על סקאלה של $\frac{2\pi}{k_0}$), בתוך מעטפת אם רוחב סופי.

ברגע מאוחר יותר, כל רכיב k מקבל פאזה (התלויה ב- k)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk \tag{14.49}$$

עבור חבורה צרה, נוכל לפתח את $\omega(k)$ סביב k_0 :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{v_g} \Big|_{k=k_0} (k - k_0) + \dots \tag{14.50}$$

$$\omega + v_g (k - k_0) + \dots \tag{14.51}$$

כאשר v_g היא מהירות החבורה. נציב לאינטגרל, ונקבל,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 t + i v_g k_0 t} \int dk A(k) e^{ik(x - v_g t)} \tag{14.52}$$

$$= e^{-i\omega_0 t + i v_g k_0 t} f(x - v_g t) \tag{14.53}$$

מהירות החבורה, מוגדרת כ- $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$. סינגל, בחומר דיספרסיבי, מתקדם לא במהירות הפאזה, כי אם במהירות החבורה. אם היינו לוקחים איבר נוסף בפיתוח של $\omega(k)$, אז החבורה לא היתה שומרת על צורתה, אלא מתרחבת. בחומר דיספרסיבי, חבורת גלים נוסעת במהירות החבורה, ומתרחבת. אם יש דיספציה, אז החבורה גם תדעך ותאבד אנרגיה. באופן כללי, התפשטות של גלים בחומר היא נושא די סבוך. יתכן חומר שבו מהירות חבורה היא בכיוון הפוך ממהירות פאזה, Negative refraction.

14.4 החזרה ושכירה של גלים אלקטרומגנטיים³⁷

נניח שני חומרים שונים, המאופיינים על ידי μ_1, ε_1 עבור החומר הראשון ו- μ_2, ε_2 עבור החומר השני. יש ביניהם גבול הפרדה חד $z=0$. (הגבול הוא חד, כלומר, העובי של שכבת המעבר, δ קטן בהרבה מאורך הגל האלקטרומגנטי, λ . תמיד יש עובי כלשהו של שכבת המעבר, ואם אי אפשר להזניח אותו, צריך לקחת אותו בחשבון. תנאי זה מתקיים בהרבה מקרים).

כל חצי המרחב התחתון מלא חומר מסוג 1, וכל חצי המרחב העליון מלא בחומר מסוג 2. שולחים גל מחומר 1, k , בזווית θ יחסית לציר \hat{z} (השלילי). הגל יוחזר בוקטור k'' בזווית θ'' (יחסית לציר \hat{z} השלילי) והגל מועבר בוקטור גל k' בזווית θ' (יחסית לציר \hat{z} החיובי). אה-פריורית, אנחנו לא יודעים שהגלים הללו מהווים את כל הפתרונות, אנחנו מניחים שזה כך, ולבסוף נראה שהמשוואות אכן מתקיימות כך. אנחנו נספק בחומר איזוטרופי: μ, ε הם מספרים ולא וקטורים. בגבישים עם סימטריה נמוכה, הפתרון הוא אחר, למשל, יכולים להופיע שני גלים נשברים. נחפש פתרון בצורה:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \text{ הגל הפוגע,}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_c e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega t)}, \text{ הגל העובר,}$$

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_c e^{i(\mathbf{k}''\mathbf{r} - \omega t)}, \text{ הגל המוחזר,}$$

ברור שהביטויים הללו מקיימים את משוואות מקסוול: בחומר אחיד יכול להתקדם גל מחזורי ומונוכרומטי. מה צריך לבדוק הוא האם ניתן לקיים את תנאי השפה עם הביטויים הללו. כתבנו את אותו ω עבור שלושת הגלים: זוהי תדירות הגל שאנחנו שולחים, ושני הגלים האחרים חייבים להיות עם אותה תדירות. את השדה המגנטי מקבלים מהשדה החשמלי. למשל, האינדוקציה המגנטית של הגל הפוגע היא

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v_1} \hat{k} \times \mathbf{E} \quad (14.54)$$

ועבור הגלים האחרים:

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{v_2} \hat{k}' \times \mathbf{E}' \quad (14.55)$$

$$\mathbf{B}'' = \frac{1}{v_1} \hat{k}'' \times \mathbf{E}'' \quad (14.56)$$

כאשר v_1, v_2 הם מהירויות האור בחומר:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \quad (14.57)$$

כמו כן, צריך להתקיים יחד הדיספרסיה:

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| = k = \frac{\omega}{v_1} \quad (14.58)$$

$$k' = \frac{\omega}{v_2} \quad (14.59)$$

תנאי השפה על המישור $z=0$: צריך לדרוש רציפות של כל השדות: גם של הרכיבים הטנגנציאליים של E_t, H_t , וגם הרכיבים הנורמליים של B_n ו- D_n . על מנת שתנאי הרציפות יתקיים בכל נקודה על המישור $z=0$, נדרוש שעל מישור ההפרדה:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \quad (14.60)$$

³⁷הרצאת וידאו

או, בצורה יותר מפורשת,

$$k_x x + k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y \quad (14.61)$$

מכאן ברור שהרכיבים של כל שלושת הגלים צריכים להיות אותו הדבר:

$$k_x = k'_x = k''_x \quad (14.62)$$

ואותו הדבר לגבי k_y (אבל תמיד ניתן לבחור את הציריכם כך ש- $k_y = 0$, ואז $k'_y = k''_y = 0$).
(נשים לב שאין תנאי על k_z , משום שתנאי השפה צריכים להתקיים על מישור $z = 0$, ולכן אין תלות ב- z).
מהשיקולים הקינמטיים הללו, ניתן לקבל כמה מסקנות:

14.1 מסקנה 1. וקטורי הגל של כל שלושת הגלים נמצאים באותו מישור.

2. $k_x = k''_x$, מאחר ו-

$$k_x = k \sin \theta = k \sin \theta'' \quad (14.63)$$

אז, $\theta'' = \theta$. "זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה".

3. $k_x = k''_x$, ולכן,

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' \quad (14.64)$$

מכאן,

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{k}{k'} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (14.65)$$

זהו חוק סנל.

במקרה הפשוט, בחומרים דיאלקטריים, $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$, כולם ממשיים.

כל אלו נגזרו משיקולים קינמטיים. כדי להמשיך, נבחר קיטוב של הגל:

ניח שהגל הפוגע מקוטב לאורך ציר \hat{y} כלומר, השדה המגנטי של הגל מתנדנד במאונך למישור התנועה.
רציפות של כיב y של \mathbf{E} :

$$E_c + E''_c = E'_c \quad (14.66)$$

רציפות של H : לשדות \mathbf{B} ו- \mathbf{H} יהיו רכיבים \hat{x} ו- \hat{z} . נקבל קבציפות של הרכיבים הטנגנטיאלים של H :

$$H_x + H''_x = H'_x \quad (14.67)$$

אין צורך לדרוש במיוחד קיום של רציפות של רכיבים נורמליים של \mathbf{B}, \mathbf{D} , זה יתקיים מעצמו, מאחר ואנו עובדים עם שתי משוואות בלבד:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (14.68)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (14.69)$$

המשוואות $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ ו- $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0$ מתקיימות אוטומטית.
את הרציפות של רכיב טנגנטיאלי של \mathbf{H} , נרצה לבטא באמצעות E :

$$B_x = \frac{1}{v_1} \left(\hat{k} \times \mathbf{E} \right)_x = -\frac{1}{v_1} \frac{k_z}{k} E_y \quad (14.70)$$

$$= -\frac{k_z}{\omega} E_y \quad (14.71)$$

$$B'_x = -\frac{k'_z}{\omega} E'_y \quad (14.72)$$

$$B''_x = -\frac{k''_z}{\omega} E''_y = \frac{k_z}{\omega} E''_y \quad (14.73)$$

לא נכתוב את רכיב \hat{z} של השדה, כי אנחנו לא צריכים אותו כרגע. אזי, השדות המגנטיים:

$$H_x + H'_x = H''_x \implies \frac{1}{\mu_1} k_z (E_c - E''_c) = \frac{1}{\mu_2} k'_z E'_c \quad (14.74)$$

נציב, $k_z = k \cos \theta$ ו- $k'_z = k' \cos \theta'$. נכתוב שוב את משוואות (14.66) ו-(14.74) עם ההצבה הזו:

$$E_c + E''_c = E'_c \quad (14.75)$$

$$\frac{\cos \theta}{\mu_1} (E_c - E''_c) = \frac{\cos \theta'}{\mu_2} \underbrace{\frac{k'}{k}}_{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1}} E'_c \quad (14.76)$$

ולכן,

$$\boxed{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_c - E''_c) = \cos \theta' \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E'_c} \quad (14.74')$$

הפתרון של שתי המשוואות הללו הוא (הנעלמים הם E_c, E'_c, E''_c הוא תנאי ההתחלה),

$$E'_c = E_c \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta'} \quad (14.77)$$

$$E''_c = \frac{n_1 \cos \theta - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta'} \quad (14.78)$$

את $\cos \theta'$, ניתן לחלץ באמצעות חוק סנל:

$$\sin \theta' = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \implies n_2 \cos \theta' = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \quad (14.79)$$

אם נציב את הביטוי ל- $\cos \theta'$, נקבל את הביטוי רק באמצעות גדלים ידועים. מכאן אפשר להמשיך ולקבל, למשל, מקדם החזרה:

$$R = \left| \frac{E''_c}{E_c} \right| \quad (14.80)$$

אפשר להסתכל על כל מני פרטים מעניינים, למשל, החזרה מלאה: אם גל מגיע מחומר עם מקדם שכירה גדול יותר (נניח $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, ו- $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), אזי קיימת זווית קריטית, שבה יש רק גל חוזר, והגל הנשבר הוא ממש משיק למישור. בזווית גדולה יותר, יש רק גל חוזר.

14.4.1 מחקר עדכני - Negative refraction

עד כה, הנחנו ש- $\varepsilon > 0$ ו- $\mu > 0$, חיובים וממשיים. אם שניהם חיוביים, הגל יכול לתפשט בחומר. גם אם $\varepsilon, \mu < 0$, אז הגל יכול להתפשט בחומר, אבל יש לו תכונות מעניינות. עבור גל בתדירות מוגדרת,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu(\omega) \mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (14.81)$$

במקרה הרגיל, אם גל מתפשט בכיוון \hat{z} , השדה החשמלי יהיה בכיוון x והשדה המגנטי בכיוון y . כיוונו של וקטור פוינטינג יהיה בכיוון $\mathbf{k} \propto \mathbf{z} \propto \mathbf{x} \times \mathbf{y} \propto \mathbf{x} \times \mathbf{H} \propto \mathbf{S} \propto \mathbf{x}$. אם גם $\mu_0, \varepsilon_0 < 0$, אזי \mathbf{k} הוא בכיוון ההפוך ל- \hat{z} ($\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ מהווים שלשה שמאלית, Left Handed material), ווקטור פוינטינג יהיה בכיוון \hat{z} . כלומר, כיוון התפשטות האנרגיה יהיה בכיוון הפוך להתפשטות הגל.

תמונת השכירה תהיה גם היא שונה. עבור גל המגיע מ- $\varepsilon_1, \mu_1 > 0$, ועובר ל- $\varepsilon_2, \mu_2 < 0$, הגל המוחזר יהיה בכיוון הצפוי, ואילו הגל המועבר יהיה בכיוון הפוך מהמצופה (אם \mathbf{k} מגיע מכיוון הרביע השלישי לראשית הצירים, \mathbf{k}' יוחזר לתוך הרביע השני, במקום הרביע הראשון, כצפוי).

15 אלקטרודינמיקה³⁸

15.1 תורת היחסות: סקירה

15.1.1 מרחב זמן

מאורעות פיזיקליים מתרחשים במרחב-זמן. על מנת שיהיה לנו תיאור כמותי של קשרים בין מאורעות שונים, יש להגדיר מערכת יחוס. מערכת יחוס היא עוסף של "שלטים ושעונים. שלטים מסמנים נקודה במרחב, ושעונים מראים זמן במערכת היחוס הנבחרת.

דרך אחת לסנכרן שעונים, למשל, מספר שעונים המונחים על ציר x : נרצה שכל השעונים יראו זמן באותו מערכת יחוס. השעונים ממוקמים בנקודות $0, \ell, 2\ell, 3\ell$ וכו'.

• נכוון את השעון ב- $x = 0$ על 0.

• את השעון שנמצא ב- $x = \ell$, נכוון על $\frac{\ell}{c}$ (עבור c , מהירות האור).

• את השעון שנמצע ב- $x = \ell$, נכוון על $\frac{\ell}{2c}$.

בזמן $t = 0$, נפעיל את השעון הראשון, ב- $x = 0$, ושולחים קרן אור בכיוון ציר x .

מאורע, במערכת היחוס, מאופיין על ידי שלושה מספרים: (x, y, z, t) .

נצייר קו עולם (World line) במערכת צירים $x - t$: זהו מסלול של גוף במערכת זו.

• a - חלקיק ניח, יראה כמו קו המתלכד עם ציר t , מקביל לציר t , במיקום x קבוע.

• b - חלקיק עם מהירות קבועה, קו ישר עם זווית של יותר מ- 45° יחסית לציר x .

• c - קו עולם של פוטון: חלקיק שמתקדם במהירות האור (נקבע $c = 1$, ואז הישר יהיה בזווית של 45°)

• d - חלקיק שמשנה מהירותו, קו לא-ישר בתוך המשולש שנקבע על ידי קרניים c ו-a.

אם כל המאורעות קשורים בקשר סיבתי, הם צריכים להיות בסקטור המוגבל על ידי קרניים a ו-c.

15.1.2 שתי טענות יסוד

תורת היחסות נגזרת משתי פוסטולטים:

1. חוקי הטבע זהים בכל מערכת יחוס אינרציאלית (עקרון היחסות)

הגדרה 15.1 מערכת אינרציאלית היא מערכת שבה בהעדר כוחות, הגוף נע במהירות קבועה.

2. שינוי במצב של גוף אחד יכול להשפיע משפיע על גוף אחר רק אחרי זמן מסוים, כלומר, קיימת מהירות מקסימלית לש סיגנל שמעביר אינפורמציה. זוהי מהירות האור בריק.

מכאן נובע ששום גוף לא יכול לנוע במהירות הגבוהה ממהירות האור.

15.1.3 טרנספורמציות לורנץ

את טרנספורמציות לורנץ ניתן לגזור משתי הטענות הללו. היסטורית, לורנץ גזר את הטרנספורמציות שלו ממשוואות מקסוול. היום, כשפתחים את תורת היחסות מתחילים משתי הטענות ומכאן ניתן לגזור את טרנספורמציות לורנץ.

1. **סיבוב מרחבי** - נעבור ממערכת צירים $x - y - z$, על ידי סיבוב סביב ציר z בזווית φ , למערכת $x' - y' - z'$ (כאשר $z' = z$). צופים הנמצאים במערכות שונות לא יסכימו על קוארדינטות של נקודה מסוימת.

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (15.1)$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (15.2)$$

$$z' = z \quad (15.3)$$

$$t' = t \quad (15.4)$$

³⁸הרצאת וידאו מספר 36

2. **טרנספורמציה של boost** - כאן, משווים שתי מערכות אינרציאליות, $x - y - z$ ו- $x' - y' - z'$, כך שצירי ה- x מתלכדים, אבל המערכת השנייה נוסעת במהירות $V\hat{x}$ ביחס למערכת הראשונה. מאורע מתרחש בקוארדינטות (x, y, z, t) , במערכת היחוס יחוס O , (x', y', z', t') הן הקוארדינטות של אותו מאורע במערכת היחוס O' .

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
 (15.5)

אם משאיפים $c \rightarrow \infty$, מקבלים את טרנספורמציות גלילאו.

יש טרנספורמציות כלליות יותר, המורכבות מ-boostים וסיבובים מרחביים. הקשר ההפוך הוא:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
 (15.6)

נגדיר נושג של אינטרוול: נתבונן ב-2 מאורעות: (x_1, y_1, z_1, t_1) ו- (x_2, y_2, z_2, t_2) , שני מאורעות במערכת יחוס O . המאורעות (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) ו- (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) . נגדיר אינטרוול בין 2 מאורעות S_{12} הוא האינטרוול במערכת O , O (נסתכל על הרבוע שלהם)

$$S_{12}^2 \equiv c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$
 (15.7)

ניתן לכתוב גם את האינטרוול במערכת השנייה, ולכתוב את אותו ביטוי עם טגים. אבל אינטרוול נשאר אינווריאנטי בכל מערכת יחוס:

$$(S'_{12})^2 = S_{12}^2$$
 (15.8)

האינטרוול הוא אנלוג של אורך. עבור סיבוב מרחבי, ברור שהאינטרוול נשאר אותו דבר. אם האינטרוול מכיל גם boostים, זה פחות ברור, אבל ניתן לוודא שזה עדין תקף.

15.2 אלגברה של 4-וקטורים ו-4-טנזורים

נראה שזוהי השפה הטבעית לנסח את תורת היחסות. כאשר משוואות מקסוול יהיו כתובות בשפה זו, יהיה ברור לחלוטין שהן אינווריאנטיות תחת טרנספורמציות לורנץ.

תזכורת: נגדיר סיבוב של וקטורים במישור האוקלידי. במערכת קרטזית, נקודה מוגדרת על ידי קוארדינטות (x, y) . נבצע סיבוב-צירים קשיח, המערכת החדשה היא גם מערכת אורתוגונלית, ובמערכת O' , יהיו הקוארדינטות (x', y') . הקשר בי הקוארדינטות הוא:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 (15.9)

האורך של הוקטור נשאר קבוע:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$
 (15.10)

אינווריאנט לסיבובים.

טנזור מטרי במערכת צירים קרטזית, הטנזור המטרי הוא וקטור יחידה. במערכת צירים לא אורתוגונלית, $\{e_1, e_2\}$, יש לנו וקטור A . את הוקטור ניתן לפרק בוקטורי יחידה, ולכתוב

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2$$
 (15.11)

כאשר A^1, A^2 הם רכיבים (קונטרה וריאנטים) של וקטור A .

ניתן לרשום את הגודל של \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{i,j=1}^2 A^i A^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} A^i A^j \quad (15.12)$$

כאשר g_{ij} הוא הטנזור המטרי, $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$, כאשר α היא הזווית בין \mathbf{e}_1 ל- \mathbf{e}_2 . לדוגמא, במערכת פולארית, נקודה מאופיינת על ידי מרחק מהראשית וזווית. במצב כזה, אורך אינו $r^2 + \varphi^2 \dots$ במצב זה הטנזור המטרי הוא אלכסוני, אבל הקוארדינטות הן קוארדינטות עקומות.

15.3 מרחב מינקובסקי

ריבוע האינטרוול הוא

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (15.13)$$

גודל זה אינווריאנטי תחת טרנספורמצית לורנץ.
נסמן:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (15.14)$$

קוארדינטות של נקודה x (אם לא שמים שום סימון של וקטור, אז המספר הוא ארבע וקטור) במרחב מינקובסקי. הטנזור המטרי,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.15)$$

אזי, האינטרוול הוא

$$S^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (15.16)$$

הסכם הסכימה: כל פעם שמופיע פעמיים אותו אינדקס, פעם למעלה ופעם למטה, אז יש לסכום על האינדקס הזה:

$$S^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (15.17)$$

בכתיב זה, טרנספורמצית לורנץ תהיה (עבור x^0, x^1, x^2, x^3 קוארדינטות במערכת O ו- x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 קוארדינטות במערכת O'),

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu \quad (15.18)$$

תכף נראה מה הדרישות למטריצה Λ^α_μ כדי שהיא תתאים לטרנספורמציה לורנץ. האינטרוול נשמר:

$$g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (15.19)$$

במקום x'^α, x'^β , נציב את הטרנספורמציה:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu x^\mu \Lambda^\beta_\nu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (15.20)$$

(נשים לב שתמיד האינדקס הראשון זה שורות, והאינדקס השני זה עמודות של המטריצה) ניתן לקבל את הדרשה שהמטריצה Λ צריכה לקיים:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \quad (15.21)$$

כל מטריצה המקיימת את הדרישה הזו, היא טרנספורמצית לורנץ³⁹.
במרחב אוקלידי תלת מימדי, $g_{ij} = \delta_{ij}$, ואז

$$\sum_{j=1}^3 g_{ij} \Lambda^i_k \Lambda^j_l = g_{kl} \implies \Lambda^i_k \Lambda^j_l = \delta_{kl} \quad (15.22)$$

תנאי זה מגדיר מטריצה אורתוגונלית (אוניטרית ממשית).

15.3.1 טרנספורמציה של 4-וקטור קונטרה-וריאנטי

עד כה, דיברנו על טרנספורמציה של קוארדינטות במרחב-זמן. באופן כללי יותר, ניתן לדבר על 4-וקטור כלשהו: לאו דווקא רדיוס-וקטור במרחב זמן. 4-וקטור קונטרה-וריאנטי מוגדר על ידי אותם כללי טרנספורמציה:

$$A'^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu A^\mu \quad (15.23)$$

לוקטורים קו-ואריאנטים וקונטרה-ואריאנטים יש מושג גיאומטרי שונה. אזי, וקטור קונטרה וואריאנטי יקיים:

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = g_{\alpha\beta} A'^\alpha A'^\beta \quad (15.24)$$

נגדיר רכיבים של 4-וקטור קו-ואריאנטי:

$$A'_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad (15.25)$$

ניתן לכתוב:

$$A'^\alpha = A^\mu, \quad A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad (15.26)$$

אזי,

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A^\alpha A_\alpha = A^\alpha A_\alpha \quad (15.27)$$

(מתמטיקאים יקראו ל- $g_{\alpha\beta}$ "פסבדו-מטריקה" ולא מטריקה). ניתן להכפיל סקאלרית ארבע-וקטורים,

$$A \cdot B = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha (= g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta) \quad (15.28)$$

$g_{\alpha\beta}$ הוא טנזור אלכסוני, לכן, נוכל לכתוב,

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad (15.29)$$

כאשר $g^{\alpha\beta}$ הוא טנזור הפוך לטנזור $g_{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (15.30)$$

⁴⁰ עם וקטורים אלו, ניתן להגדיר

$$\Lambda^\beta_\alpha = g_{\alpha\beta} \Lambda^\gamma_\mu g^{\mu\beta} \quad (15.31)$$

וקטורים קו וקונטרה וואריאנטים מקיימים כללי טרנספורמציה שונים. באופן כללי,

$$\Lambda^\alpha_\beta \neq \Lambda^\beta_\alpha \quad (15.32)$$

³⁹בוריס הכין רשימות בנידון שנמצאות באתר הקורס. הוא שתל שם גם שאלות בנושא.
⁴⁰הרצאת וידאו מספר 38

15.3.2 דוגמה פשוטה

מרחב הלוך הוא מרחב אוקלידי דו-מימדי. במרחב אוקלידי, ניתן לבחור מערכת צירים קרטזית, שבה $g_{\alpha\beta}$ תהיה מטריצת יחידה, ולא יהיו הבדלים בין קו' וקונטרה'. אבל ניתן לבחור גם מערכת לא אורתוגונלית כזו. $\{e_1, e_2\}$ וקטורי יחידה (לאו דווקא אורתוגונלים), שהזווית ביניהם היא α . הרכיבים הקונטרה ואריאנטים יהיו הרכיבים המקבילים לוקטורי היחידה:

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 = A^2 \mathbf{e}_2 \tag{15.33}$$

המטריקה היא

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2 \tag{15.34}$$

אז הוקטור הקוואריאנטי יהיה

$$A_i = g_{ij} A^j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) A^j = (\mathbf{e}_i \mathbf{A}) \tag{15.35}$$

כאן, הוקטור הקוואריאנטי יהיה היטל אורתוגונלי על הצירים.

15.3.3 חזרה ל-4 וקטורים

$$A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i \tag{15.36}$$

(אינדקס לטינו הוא 3 וקטור, $i = 1, 2, 3$, אינדקס יווני הוא 4-וקטור, $\alpha = 0, 1, 2, 3$)

$$A^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A^\alpha A_\alpha \tag{15.37}$$

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha \tag{15.38}$$

נסתכל על ארבע וקטור, ונסתכל על ייצוג שלו בתור וקטור מרחבי בלבד:

$$A^\mu \rightarrow (A_0, \mathbf{A}), \quad A_\mu = (A_0, -\mathbf{A}) \tag{15.39}$$

$$A \cdot B = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{15.40}$$

15.3.4 4-טנזורים

4-טנזור הוא אוסף של 16 מספרים, מטריצה 4×4 שמקיימת כלל טרנספורמציה מסויים תחת סיבוב צירים. 4-טנזור קונטרה-ואריאנטי מקיים:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu T^{\mu\nu} \tag{15.41}$$

דוגמה פשוטה:

$$T^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta \tag{15.42}$$

זו מכפלה ישרה (מכפלה טנזורית) של שני 4-וקטורים. אפשר לעבור גם מרכיבים קונטרה-ואריאנטים לרכיבים קוואריאנטים

$$T'_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T_{\mu\nu} \tag{15.43}$$

15.3.5 שדות

שדה סקאלרי, $U(x^0, x^1, x^2, x^3)$, מקצה מספר, סקאלר, לכל נקודה במרחב-זמן. ניתן גם להגדיר שדה וקטורי: 4-וקטור שמוגדר לכל נקודה במרחב זמן, הוא יכול להיות נגזרת של שדה וקטורי:

$$dU = \frac{\partial U}{dx^\mu} dx^\mu \tag{15.44}$$

(סכימה על $\dots \mu$). dx^μ הוא ארבע-וקטור קונטרה-וואריאנטי. זהו ארבע גראדיאנט. $\frac{\partial U}{\partial x^\mu}$ הוא וקטור קו־וואריאנטי (כי U הוא סקאלר, מכפלה של קו־וואריאנטי וקונטרה-וואריאנטי) כללי המעבר:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \tag{15.45}$$

או,

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \tag{15.46}$$

ברכיבים קונטרה וואריאנטים,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \tag{15.47}$$

דוגמה

$$U = B_\mu X^\mu \tag{15.48}$$

(כאשר B_μ וקטור קבוע),

$$\frac{\partial U}{\partial x^\mu} = B_\mu \tag{15.49}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_\mu} = B^\mu \tag{15.50}$$

15.4 ניסוח קו־וריאנטי של אלקטרודינמיקה⁴¹

נתחיל מדוגמא מוכרת ממכניקה לא רלטוויסטית: חוקי הטבע חייבים להיות זהים תחת סיבוב מרחבי. למשוואת שרדינגר, או לחוקי ניוטון, יש את אותו ניסוח תחת סיבוב מרחבי. הביטוי לטענה זו מתבטא בכך שבמשוואות היסוד מופיעים סקאלרים (כמו מסה..), וקטורים (כמו מיקום ומהירות) או טנזורים (כמו למשל מומנט הקוואדרופול, או הקשר בין צפיפות זרם לשדה חשמלי בחומר לא איזוטרופי, $j_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} E_k$, כאשר σ_{ik} הוא טנזור מוליכות). בפיזיקה רלטוויסטית יש קבוצת טרנספורמציות הרבה יותר רחבה. הן כוללות סיבוב מרחבי, אבל גם boost. בפיזיקה רלטוויסטית, כל חוק טבע חייב להיות שמור תחת טרנספורמציות לורנץ. הביטוי המתמטי לטענה זו, הוא שהביטויים שצריכים להופיע במשוואות הוא 4-וקטורים, או 4-סקלרים, או 4-טנזורים. כל משוואה חייבת להיות אינווריאנטית תחת טרנספורמציות לורנץ. נרצה לכתוב את משוואות מקסוול בצורה כזו, שיהיה ברור לחלוטין שהן שמורות תחת טרנספורמציות לורנץ. בניסוי אחר, נרצה לכתוב את משוואות לורנץ בצורה קו־וואריאנטית. משוואות הרציפות:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{15.51}$$

⁴¹הרצאת וידאו מס' 39

כאן, היא כתובה באמצעות וקטור ו-3 סקלר. נרצה לכתוב אותה בצורה קווריאנטית.
 ρd^3x הוא אינווריאנט (4-סקלר או לורנץ-סקלר)
 d^3x הוא לא רינווריאנטי, $dx^\mu = dx^0 d^3x$ הוא כן. כאשר משווים את שני הביטויים, המסקנה המיידית היא
 ρ^- עובר טרנספורמציה כמו רכיב זמן (רכיב 0) של 4-וקטור.
 כדי לכתוב את \mathbf{j} כ-4-וקטור, נכתוב $j^\alpha = (c\rho, \mathbf{j})$, א, משוואת הרציפות תרשם בצורה קווריאנטית, כ-

$$\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{15.52}$$

או, בצורה מתמצטת יותר,

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \tag{15.53}$$

נעבור לפוטנציאלים, ϕ ו- \mathbf{A} . הם מקיימים את המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi \rho \end{cases} \tag{\dagger}$$

משוואות אלו כתובות בכיול לורנץ: $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. אזי, ניתן לכתוב את הפוטנציאל כ-4-וקטור:

$$A^\alpha = (\phi, \mathbf{A}) \tag{15.54}$$

לכן, מידי לכתוב את תנאי לורנץ בצורה קווריאנטית:

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{15.55}$$

בשל כך כיול לורנץ הוא מאוד נוח, מאחר והוא קווריאנטי. זה אינו נכון בכל כיול. אם בוחרים כיול לא קווריאנטי, המשוואות לא יראו קווריאנטיות. אבל אם בחרנו כיול לורנץ במערכת אינרציאלית אחת, הוא ישרא כיול לורנץ במערכת אינרציאלית אחרת.
 את שתי המשוואות (\dagger) ניתן לחבר, ונקבל אותן בהצגה קווריאנטית:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \tag{15.56}$$

משוואה זו מאחדת את שתי המשוואות, עבור פוטנציאל וקטורי ופוטנציאל סקלארי. הנגזרת $\partial_\mu \partial^\mu$ היא אנלוג של לפלסיאן ארבע-מימדי, ומסומן ב- \square , לכן,

$$\square A^\alpha = \frac{3\pi}{c} j^\alpha \tag{15.57}$$

כשמסתכלים על אוסף משוואות מקסוול, באופן מידי לא ברור האם הם קווריאנטים. אנחנו נוכיח שהן אכן כן, על ידי כתיבת המשוואות באמצעות 4-טנזור.
נגדיר 4-טנזור - טנזור השדה האלקטרומגנטי,

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{15.58}$$

ניתן לחשב את כל הרכיבים של הטנזור הזה. מופיעים בו נגזרות של 4-פוטנציאל: פוטנציאל וקטורי וסקלארי. נחשב מספר איברים:

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -(\vec{\nabla} \times \mathbf{A})_z = -B_z \tag{15.59}$$

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{\partial(-A_x)}{c\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x} = E_x \tag{15.60}$$

$F_{\beta\alpha}$ הוא טנזור אנטיסימטרי: $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. בטנזור אנטיסימטרי 4×4 יש 6 איברים בלתי תלויים: האלכסון מתאפס, ויש קשרים בין תריסר האיברים שנשארים. אנחנו רואים שאם יש לנו אינדקס זמני ואינדקס מרחבי

בביטוי, מקבלים שדה חשמלי, ואילו עבור שני רכיבים מרחביים, נקבל שדה מגנטי. לכן, נוכל לכתוב את הטנזור של השדה האלקטרומגנטי, בצורה השלמה:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15.61)$$

אלו הרכיבים הקווריאנטיים של טנזור השדה האלקטרומגנטי. הרכיבים הקונטרה-קווריאנטיים יהיו:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15.62)$$

הרכיבים שקשורים רק לקוארדינטות מרחביות (השדה המגנטי), ישארו כמו שהם, ואילו הרכיבים הקשורים הן לקוארדינטות זמניות והן לקוארדינטות מרחביות (השדה החשמלי) יהפכו את סימנם. באמצעות הטנזור הזה, נוכל לכתוב את משוואות מקסוול. נחשב את הנגזרות:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial F^{x0}}{\partial x^0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial x^i} \quad (15.63)$$

על β מבצעים סכימה, אבל α ניתן לבחור באופן חופשי. עבור:

$$\alpha = 0 \quad \frac{\partial F^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0 - \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -4\pi\rho \quad (15.64)$$

$$\alpha = 1 \quad \frac{\partial F^{1\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial E_x}{c\partial t} + 0 - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \mathbf{B})_x \quad (15.65)$$

אבל הביטוי האחרון, ממשוואת אמפר/מקסוול, זהו רכיב x של צפיפות זרם.

$$= -\frac{4\pi}{c} j_x \quad (15.66)$$

ברור ש- $\alpha = 2, 3$, יתנו את אותה משוואה עם רכיבים y, z , ולכן, נוכל לכתוב ש-

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (15.67)$$

אלו הם שתי משוואות מקסוול, שבהן מופיעים צפיפות מטען וזרם - משפט גאוס ומשוואת אמפר/מקסוול. חסרות עוד שתי משוואות מקסוול: $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, ומשוואת פאראדיי. נסתכל על הביטוי

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (15.68)$$

בביטוי זה, אין סכימה כלל, בכל מחובר יש שלושה אינדקסים שונים. אלו הן ארבע משוואות בלתי תלויות. התוכן של המשוואות הללו הוא לא טריוויאלי רק כאשר כל האינדקסים שונים. אם יש שני אינדקסים זהים, הביטוי מתאפס זהותית בכל מקרה.

עבור $\beta = 0, \gamma = 1, \alpha = 2$, נקבל את המשוואה:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{c\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \mathbf{E})_z \quad (15.69)$$

זהו רכיב z של חוק פאראדיי. אם נסכום על כל הצירופים שמכילים אינדקס זמני, נקבל

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (15.70)$$

במקרה הנותר, כאשר כל האינדקסים מרחביים, $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$, נקבל,

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \implies \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (15.71)$$

יש דרך יותר אלגנטית לכתוב את שתי המשוואות האחרונות, באמצעות טנזור דואלי לטנזור השדה F .

15.5 טרנספורמציה של שדות⁴²

שדה אלקטרומגנטי הוא יצור די מסובך, אבל נתחיל ממשהו פשוט יותר: שדה סקלארי. במערכת מסויימת, שדה סקלארי, $U(x^0, x^1, x^2, x^3) = U\{x^\mu\}$. זהו שדה סקלארי במערכת יחוס מסויימת. במערכת אחרת, הצופה משתמש בקוארדינטות

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (15.72)$$

השדה עובר טרנספורמציה, והוא יהיה

$$U' = \{x'^\mu\} \quad (15.73)$$

זהו אותו שדה בשתי מערכות. הפונקציה U לא תהיה אותה פונקציה כמו U' . הקשר ביניהן הוא:

$$U'\{x'^\mu\} = U\{x^\mu\}|_{x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu} \quad (15.74)$$

או,

$$U'\{x'^\mu\}|_{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu} = U\{x^\mu\} \quad (15.75)$$

ניתן להכליל זאת לשדה וקטורי:

$$A'^\alpha\{x'^\mu\} = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta\{x^\mu\}|_{x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu} \quad (15.76)$$

אותו הדבר ניתן לבצע גם עם טנזור. טרנספורמציה של טנזור תהיה

$$F'^{\alpha\beta}\{x'^\mu\} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta F^{\gamma\delta}(x^\mu)|_{x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu} \quad (15.77)$$

ביצד שדה מבצע טרנספורמציה תחת boost? נתבונן בטרנספורמציה,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.78)$$

נכתוב זאת בכתיבה של 4-וקטור: נסמן, $\beta = \frac{v}{c}$ ו- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, אזי

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3 \quad (15.79)$$

נכתוב את המטריצה,

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.80)$$

ככה נראה מטריצה שמגדירה טרנספורמציה לורנץ, מסוג boost בציר x .

דוגמה מערכת O' נעה במהירות $v = v\hat{x}$ יחסית למערכת O . נתרגם את טנזור השדה ממערכת O למערכת O' .

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (15.81)$$

⁴²הרצאת וידאו מספר 40 ואחרונה

נסתכל על הטרנספורמציה של הטנזור תחת boost לורנץ:

$$F'^{01} = \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu F^{\mu\nu} \quad (15.82)$$

$$= \Lambda^0_0 F^{00} + \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_1 F^{11} \quad (15.83)$$

$$= 0 + \gamma^2 F^{01} + \gamma^2 \beta^2 F^{10} + 0 \quad (15.84)$$

$$= \gamma^2 (1 - \beta^2) F^{01} = F^{01} \quad (15.85)$$

מאחר ו- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, ולכן $\gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$, לכן,

$$\boxed{E'_x = E_x} \quad (15.86)$$

נחשב את

$$F'^{02} = \Lambda^0_\mu \Lambda^2_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0_\mu F^{\mu 2} \quad (15.87)$$

$$= \gamma F^{02} - \gamma\beta F^{12} = \gamma E_y - \gamma\beta (-B_z) \quad (15.88)$$

לכן,

$$\boxed{E_y = \gamma (E_y - \beta B_z)} \quad (15.89)$$

רכיב אחרון שנחשב, עבור שני אינדקסים מרחביים,

$$F'^{12} = \Lambda^1_\mu \Lambda^2_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^1_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^1_1 \Lambda^2_2 F^{12} \quad (15.90)$$

$$= -\gamma\beta F^{02} + \gamma F^{12} \quad (15.91)$$

לכן,

$$-B'_z = \gamma\beta E_y - \gamma B_z \quad (15.92)$$

או,

$$B'_z = \gamma (B_z - \beta E_y) \quad (15.93)$$

לסיכום, טרנספורמציות השדות הם:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma (E_y - \beta B_z) & B'_y = \gamma (B_y + \beta E_z) \\ E'_z = \gamma (E_z + \beta B_y) & B'_z = \gamma (B_z - \beta E_y) \end{array}} \quad (15.94)$$

השדות במערכת O' תלויים בקוארדינטות שונות מהשדות במערכת O . נצטרך לתרגם גם את הקוארדינטות.

דוגמה מטען q נמצא בראשית של מערכת O' , שנוסעת במהירות v ביחס למערכת המעבדה O . המטען נמצא במרחק b מהצופה, בנקודה P . יש למצוא את \mathbf{E} ו- \mathbf{B} , שמודד הצופה ב- P . במערכת O' , הקוארדינטות של נקודה P הם

$$x' = -Vt', \quad y' = b, \quad z' = 0 \quad (15.95)$$

והשדות, בנקודה p , הם:

$$E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{qvt'}{r'^3} \quad (15.96)$$

$$E'_y = \frac{qy'}{r'^3} = \frac{qb}{r'^3} \quad (15.97)$$

$$E'_z = 0 \quad (15.98)$$

ו- $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$. במערכת זו, המטען נייח, ולכן

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0 \quad (15.99)$$

במערכת O ,

$$E_x(x, y, z, t) = E'_x(x', y', z', t') \quad (15.100)$$

כאשר יש לבטא את x', y', z', t' בעזרת x, y, z, t .

$$E_x(x, y, z, t) = -\frac{qv't'}{r'^3} \Big|_{\substack{r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2} \\ t' = \gamma t}} \quad (15.101)$$

$$= -\frac{qv\gamma t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (15.102)$$

נחשב את רכיב y של השדה:

$$E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z) \gamma = \gamma E'_y = \frac{\gamma q B}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (15.103)$$

$$B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y) = \gamma \beta E'_y = \beta E_y \quad (15.104)$$

fin.