מבוא למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

מרצה: יהודה פינצ'ובר

24 ביוני 2009

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של פרופ' יהודה פינצ'ובר. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. **אין הטכניון או מי מטעמו ־ ובפרט, הפקולטה למתמטיקה, על מרצה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.**
הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.tehcnion.ac.il

תוכן עניינים

1 הקדמה[1]

1.1 מד"ר

מחפשים פונקציה של משתנה בלתי תלוי אחד $u(t)$, כאשר $t\in(a,b)$.
נתונה פונקציה

$$F\left(s,v_0,v_1,\ldots,v_k\right)$$

חלקה מספיק.
$u\in c^k\left((a,b)\right)$ נקראת פתרון של המשוואה

$$F\left(t,u,u',u'',\ldots,u^{(k}\right) \tag{1}$$

אם לכל $t\in(a,b)$ ההצבה של u וכל נגזרותיה בנקודה t בתוך F מביאה ל־0

$$F\left(t,u(t),u'(t),\ldots,u^{(k)}(t)\right)=0 \tag{2}$$

עבור משוואה

$$u''+u'+y^2=0$$

אזי

$$F=v_0^2+v_1+v_2$$

והשאלות ־ האם יש פתרון, כמה פתרונות יש, מה אפשר להגיד על התלות שלהן בתנאי ההתחלה, ואיך הם מתנהגים במצבי קצה.
במד"ח ישאלו שאלות דומות

[1] הרצאה ראשונה, 15.3.2009

1.2 מד"ח

מחפשים פונקציה $u:\Omega\to\mathbb{R}$ כאשר $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{D}$, תחום, כאשר $u\in C^{k}\left(\Omega\right)$, גזירה k פעמים ברציפות בתחום Ω, המקיימת,

$$F\left(x,x_{1},\ldots,x_{d},u,u_{x_{1}},u_{x_{2}},\ldots,u_{x_{d}},u_{x_{1}x_{1}}\ldots\right)=0 \tag{3}$$

(כאשר $u_{x_{1}x_{2}}$ היא גזירה פעם אחת לפי x_{1} ופעם שני לפי x_{2}) ניתן לכתוב גם

$$F\left(x,Dx,D^{2}x,D^{(3)}x,\ldots D^{(k)}x\right)=0 \tag{4}$$

נתרכז במקה הדו־מימדי - 2 משתנים בלתי תלויים - (x,y) או - (x,t).

$$F\left(\left(x,y\right),u,u_{x},u_{y}\right)=0 \tag{5}$$

או בצורה מפורשת יותר,

1.2.1 משוואת ההולכה

נעסוק בהתפשטות של מזהם באוויר - באטמוספרה יש מזהם, ואנחנו רוצים לדעת איך הוא מתפשט בנוכחות רוח (שדה מהירויות)

צפיפות המזהם תהיה $c\left(x,y,z,t\right)$. בנוסף יש לנו שדה מהירויות נתון - $\vec{u}\left(x,y,z,t\right)$.

צפיפות המזהם ניתנת לפתרון על ידי משוואה דיפרנציאלית חלקית מהצורה

$$c_{t}+\mathrm{div}\left(c\vec{u}\right)=0 \tag{6}$$

(הדיברגנץ הוא רק לפי הקואורדינטות המרחביות - x,y,z)

כלומר,

$$\begin{aligned}c_{t} & =\frac{\partial}{\partial x}\left(cu_{1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(cu_{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(cu_{3}\right)\\ & =u_{1}\frac{\partial c}{\partial x}+u_{2}\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{1}+\frac{\partial}{\partial y}u_{2}+\frac{\partial}{\partial z}u_{3}\right)c=0\end{aligned}$$

זו מד"ח מסדר ראשון. המשוואה הזו היא משוואה לינארית, כי התלות בפונקציה הנדרשת c, היא לינארית ($\vec{u}$ נתון).

נתונה צפיפות הזיהום בזמן $t=0$, ורוצים לדעת את צפיפות הזיהום בזמן מאוחר יותר.

בעיית התחלה ידוע

$$c\left(x,y,z,0\right) \tag{7}$$

והשאלה - מצא את $c\left(x,y,z,t\right)$ לכל $t>0$.

בעיית התחלה אחרת יכולה להיות למשל, ידיעת הזיהום לאורך קו במרחב־זמן.

$$c\left(x(x),y(s),z(s),t(s)\right)$$

ומחפשים את c בסביבת הקו.

1.2.2 משוואת החום

מגדירים אופרטור דיפרנציאלי - **לפלסיאן**, עבור $u:\Omega\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Delta:C^{2}\left(\Omega\right) & \to C\left(\Omega\right)\\ \Delta u & =u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\end{aligned}$$

במקרה הכללי -

$$= \sum_{i=1}^{d} u_{x_i x_i}$$

משוואת החום ב-$\mathbb{R}^D$: $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, גזירה פעמיים לפי $x_1,\dots x_d$ ופעם לפי t - הזמן -

$$u_t - k\Delta_x u = 0$$

(הלפלסיאן הוא רק לפי $\vec{x}$, ולא לפי t) במפורש, בשני מימדים מרחביים -

$$u_t - k\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0$$

ובמימד מרחבי אחד

$$u_t - ku_{xx} = 0 \qquad \begin{array}{c} 0 < x < b \\ t > 0 \end{array}$$

כאשר $k > 0$- נתון.
פירוש פיזיקלי - מוט נמצא על הקטע (a,b), ו-u הטמפרטורה.
נניח נתונה הטמפרטורה בזמן $t = 0$ **תנאי ההתחלה** -

$$u(x,u) = f(x) \qquad a \le x \le b$$

נחפש את הטמפרטורה בזמן $u\left(x,t\right)$ עבור $t > 0$ ו-$0 < x < b$.
נדאג שבקצוות הטמפרטורה תשאר זהותית אפס - זהו **תנאי שפה** (תנאי דריכלה)-

$$u\left(a,t\right) = u\left(b,t\right) = 0 \qquad \forall t \ge 0$$

רוצים למצוא את $u(x,t)$ לכל $0 < x < b$, $t > 0$.

בעיית חום נוספת במקרה החד מימדי -

$$\begin{array}{rll} (\text{PDE}): & u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < b, t > 0 \\ (\text{IC}): & u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le b \\ (\text{BC}) & u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0 & t > 0 \end{array}$$

כאשר (IC) - תנאי התחלה, PDE - מד"ח ו-(BC) - תנאי שפה.
הממשאות הפיזיקאלית של תנאי השפה - המוט מבודד טרמית - לא עובר חום מהקצה. זהו **תנאי נוימן**.
אותה משוואה מופיעה ב"סיפורים" שונים מבחינה פיזיקאלית - וההתנהגות של הפתרון.

- בבעיית דריכלה - $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$
- בבעיית נוימן $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

משוואת החום היא קירוב פיזיקאלי - ההתנהגות של התוצאה **אינה** מדוייקת, לדוגמה - הפתרון, $u(x,t), t > 0$ היא תמיד פונקציה חלקה - לכל תנאי התחלה.

השעה השניה של ההרצאה חסרה

2 משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון[2]

נציג שיטה לפתרון משוואות מסדר ראשון (עד כדי יכולתנו לבצע את האינתגלים, או לפתור משוואות רגילות)

- משוואות של שני משתנים בלתי תלויים - x, y

[2] הרצאה שניה, 18.03.2009

- תחילה נעסוק במשוואה חלקית מטיפוס קוויזי־לינארי.

הגדרה 2.1 מד"ח מסדר k יקרא **קווזי־לינארי**, אם התלות בנגזרות החלקיות מסדר k, היא לינארית.

דוגמה 1.2 משוואת פואסון, $\Delta u = F\left(x,y\right)$, לינארית.
אם $\Delta u = G\left(x,y,u,\vec{\nabla}u\right)$ את הלפלסיאן Δ ניתן לכתוב בתור

$$\operatorname{div}\left(\vec{\nabla}u\right)=u_{xx}+u_{yy}$$

נסתכל על

$$\operatorname{div}\left(\left|\vec{\nabla}u\right|^{p-2}\cdot\vec{\nabla}u\right)=0$$

זהו אופרטור ה־p לפלסיאן. זו משוואה קוואזי־לינארית.

הגדרה 2.2 משוואה **סמי־לינארית**: אם התלות בכל הנגזרות החלקיות של u (פרט לנגזרת מסדר אפס) היא לינארית.

דוגמה 2.2 $\Delta u = f\left(u\right)$, או באופן מפורש,

$$\Delta u = u^2$$

משוואה קוואזי־לינארית מסדר I בשני משתנים, היא מהצורה

$$a\left(x,y,u\right)u_x+b\left(x,y,u\right)u_y=c\left(x,y,u\right) \tag{8}$$

a,b,c פונקציות נתונות (גזורות ברציפות) לכל, $\left(x,u\right)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, $u\in\mathbb{R}$.

דוגמה 3.2

$$xu_x+yu_y=1$$

כאן, $a=x,b=y,c=1$, והמשוואה לינארית.
עבור

$$\left(x^2+u\right)u_x+uu_y=1$$

זו משוואה קוואזי־לינארית.

מחפשים פונקציה $u=u\left(x,y\right)$ שפותרת את (8). מחפשים משטח.
שאלה אפשרית: למצוא פתרון כללי, ל־(8). כלומר, למצוא את אוסף כל הפתרונות האפשריים למשוואה. לרוב לא נתעניין במשוואה זו.

הגדרה 2.3 משוואה מהטיפוס (8) תקרא **לא מנוונת**, אם המקדמים $\left|a\left(x,y,u\right)\right|+\left|b\left(x,y,u\right)\right|>0$ לכל $\left(x,y,u\right)\in\Omega\times\mathbb{R}$ (כלומר, הם לא מתאפסים בתחום)

הערה 2.4 כשמסתכלים על משוואה (8), מניחים שהיא אינה מנוונת, וזאת כדי להתאים לתנאי הקיום והיחידות, שמתייייחס ל־$y'=F\left(x,y\right)$.

2.1 בעיית קושי

נתונה המשוואה (8), ונתון קו $\Gamma = \left\{ \left(x_0\left(s\right), y_0\left(s\right), u_0\left(s\right)\right) \mid s \in I \right\}$ (I ־ קטע), גזיר ברציפות (יסומן גם $\Gamma(s)$). $\Gamma \subset \mathbb{R}$.

מצא משטח פותר מפורש, $u = u\left(x, y\right)$ (פתרון של (8)) שמכיל את Γ. Γ נקרא **"קו התחלה"**.

נתן פרוש גאומטרי למשוואה. בכל נקודה, קיים וקטור תלת מימדי $\left(a, b, c\right) \in \mathbb{R}$,

$$\left(a\left(x, y, u\right), b\left(x, y, u\right), c\left(x, y, u\right)\right) \tag{9}$$

זהו שדה וקטורי גזיר. נשאל מה המשווה אומר לנו על השדה הוקטורי, $\left(a, b, c\right)$ צורת כתיבה אחרת למשווה (8) היא:

$$\left(a, b, c\right) \cdot \left(u_x, u_y, -1\right) = 0$$

אם $u = u\left(x, y\right)$ הוא משטח פותר, אז הוקטור $\left(u_x, u_y, -1\right)$ הוא וקטור ניצב למשטח בנקודה $\left(x, y, u\right)$. כלומר, השדה הוקטורי בנקודה $\left(x, y, u\right)$ נמצא במישור המשיר של המשטח הפותר, בנקודה $\left(x, y, u\right)$.

כדי למצוא את המשטח בהנתן קו ־ נוציא "קווים אופיניים" מכל נקודה על קו ההתחלה, כך נקבל משטח שמכיל את קו ההתחלה. נצטרך לדאוג שהקווים האופיניים יגדירו את המשטח הפותר.

הגדרה 2.5 קו אופייני הוא קו שבכל נקודה עליו, המשיק לו הוא בכיוון השדה הוקטורי $\left(a, b, c\right)$.

במונחים של אנליזה, קו כזה נקרא **קו אינגטרלי** של השדה $\left(a, b, c\right)$.

אם הקו האינטגרלי ניתן בצורה פרמטרית על ידי $\left(x\left(t\right), y\left(t\right), u\left(t\right)\right)$, אז מתקיים בהכרח, על פי הגדרה:

$$\frac{dx}{dt} = a\left(x, y, u\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = b\left(x, y, u\right)$$
$$\frac{du}{dt} = c\left(x, y, u\right)$$

זו מערכת מד"ר, לא לינארית, מסדר ראשון. (משפט הקיום והיחידות, אומר שבהנחה ש־a, b, c מספיק חלקים, למערכת זו יש פתרון בהנתן תנאי התחלה). מכל נקודה על קו ההתחלה, נסתכל על הנקודה כנקודת התחלה למערכת המד"ר. תנאי ההתחלה תלוי בפרמטר s.

הקו האופייני תלוי בשני פרמטרים ־ t ־ ההתקדמות לכיוון קו אופייני, ו־s, ההתקדמות לכיוון Γ, קו ההתחלה. לכן, נכתוב אותו

$$\left(x\left(t, s\right), y\left(t, s\right), u\left(t, s\right)\right)$$

תנאי ההתחלה: נרצה שב"זמן" $t = 0$, נתחיל את הקו האופייני בתנאי ההתחלה $\Gamma(s)$, כלומר:

$$\left(x\left(0, s\right), y\left(0, s\right), u\left(0, s\right)\right) = \Gamma(s) = \left(x_0(s), y_0(s), u_0(s)\right)$$

על פי משפט הקיום והיחידות במד"ר, מבטיח קיום קו אופייני לוקאלי לכל $s \in I$.

תזכורת: משוואות הפסים האופיניים [3] עבור המשוואה

$$F\left(x, y, u, u_y, u_x = 0\right) = F\left(x, y, u, p, q\right)$$

[3] אחד באפריל, החסרתי כמה הרצאות קודם

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_p$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F_q$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = pF_p + qF_q$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -F_x - pF_u$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -F_y - qF_u$$

2.1.1 משוואת האקונל

משוואה זו היתה המוטיבציה של המילטון לפתח את שיטת הקווים האופיניים. מחשבון ואריאציה, הוא הגיע למשוואה

$$u_x^2 + u_y^2 = n^2(x,y) \quad \Rightarrow F = p^2 - q^2 - n_0^2 = 0$$

דוגמה לבעיית קושי: $n(x,y) = n_0$ כאשר n_0 קבוע. כלומר, טווח הומוגני (מקדם השבירה הוא קבוע).

$$u(x,2,x) = 1$$

ולכן

$$x_0(s) = s \quad y_0(s) = 2s \quad u_0(s) = 1$$

רוצים למצוא את $(x(t,s), y(t,s), u(t,s), q(t,s))$ שפותרים את מערכת הפסים האופיניים עם פסי התחלה. אבל אין לנו מספיק תנאי התחלה, ולכן צריכים להשלים ולמצוא את $p_0(s)$, $q_0(s)$ שיתנו לנו את תנאי ההתחלה:

$$x(0,s) = x_0(s)$$
$$y(0,s) = y_0(s)$$
$$u(0,s) = u_0(s)$$

$$p^2(0,s) + q^2(0,s) = n_0^2$$

ותנאי התואמות הנגזר מזה ש־$\mathrm{d}u = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ או

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} = p_0\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} + q_0\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}$$

הקשר הוא כזה שעל קו ההתחלה הוא צריך להתקיים. $u_0(s) = 1$ ולכן $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 0$ ו־

$$0 = p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot 2$$

ולכן פתרון אחד אפשר יהוא

$$p_0(s) = p(0,s) = \frac{2n_0}{\sqrt{5}}$$
$$q_0(s) = -\frac{n_0}{\sqrt{5}}$$

זה אינו פתרון יחיד. פתרון נוסף יהיה

$$p_0(s) = -\frac{2n_0}{\sqrt{5}}$$
$$q_0(s) = \frac{n_0}{\sqrt{5}}$$

תנאי החיתוך (המוכלל) הוא

$$x_0' F_q - y_0' F_p \neq 0$$

כלומר

$$1 \cdot 2q - 2 \cdot 2p =$$

נציב את p_0, q_0

$$\begin{aligned} 2q_0 - 4p_0 &= -\frac{2n_0}{\sqrt{5}} - \frac{8n_0}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{16n_0}{\sqrt{5}} \neq 0 \end{aligned}$$

הפתרון, בצורה פרמטרית, התלויה בפרמטרים t, s היא

$$(x(t,s), y(t,s), u(t,s), p(t,s), q(t,s)) = \left(s + \frac{4n_0}{\sqrt{5}}, 2s - \frac{2n_0 t}{\sqrt{5}}, 1 + 2n_0^2 t, \frac{2n_0}{\sqrt{5}}, -\frac{n_0}{\sqrt{5}}\right)$$

כדי לחלץ, נמצא תחילה את t.

$$2x - y = 2s + \frac{8n_0 t}{\sqrt{5}} - 2s + \frac{2n_0 t}{\sqrt{5}} = \frac{10n_0 t}{\sqrt{5}}$$

ולכן

$$u(x,y) = 1 + \frac{n_0}{\sqrt{5}}(2x - y)$$

u מתארת את חזית הגל ־ וחזית הגל שומרת על הלינאריות שלה.

חלק I
משוואות מסדר שני

3 מיון

ממיינים את המשוואות לשלושה סוגים. המיון תקף לאו דווקא למשוואות לינאריות או קוואזי לינאריות, הוא תקף גם למשוואות לא לינאריות, אך לשם פשטות, נסתכל על משוואה לינארית.

נסתכל על משוואות עם מקדמים ממשיים. משוואה לינארית ניתן לכתוב כאופרטור לינארי. הצורה הכללית של משוואה מסדר שני היא

$$\begin{aligned} L[u] = &\overbrace{a(x,u)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}}^{L_0[U]} \\ &+ d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y) \end{aligned}$$

$L_0[u]$ הוא החלק העיקרי של המשוואה , ונוכל לכתוב

$$L[u] = L_0[u] + l.o.t = g(x,y)$$

(Lower order terms). המיון מתבצע על החלק העיקרי.

נסתכל על הדיסקרימיננטה של האופרטור

$$\delta(L)(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$$

הגדרה 3.1 האופרטור L יקרא

- **היפרבולי** בנקודה (x,y) אם $\delta(L)(x,y)>0$
- **פרבולי** אם $\delta(L)(x,y)=0$
- **אליפטי** אם $\delta(L)(x,y)<0$

L אליפטי בתחום $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ אם הוא אליפטי בכל נקודה ב־Ω

הנחה: המשוואה היא באמת מסדר שני – ואינה מנוונת: בכל נקודה, $|a(x,y)|^2+|b(x,y)|^2+|c(x,y)|^2\gneqq 0$
יש הבדלים ניכרים בין הסוגים השונים של משוואות. יש קווים משותפים של משוואות פרבוליות ומשוואות אליפטיות, אך הן שונות במידה ניכרת ממשוואות היפרבוליות.

משפט 3.2 נניח a,b,c פונקציות רציפות, ותהא העתקה למערכת קוארדינטת: $(x,y)\to(\xi,\eta)$ (החלפת משתנים, עם יעקוביאן, $J\neq 0$) חלקה (C^2), אזי הטיפוס של המשוואה אינו משתנה בקוארדינטות החדשות.

הוכחה: נניח $Lu(x,y)=g(x,u)$. נתבונן בפונקציה

$$w(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

ובכיוון השני –

$$u(x,y)=w(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

נגזור את u לפי x ו־y:

$$\begin{aligned}u_x&=w_\xi\xi_x+w_\eta\eta_x\\u_y&=w_\xi\xi_u+w_\eta\eta_y\end{aligned}$$

נגזרות מסדר גבוהה לא מעניינות אותנו ־ הן לא משפיעלות על סוג המשוואה,

$$\begin{aligned}u_{xx}&=(w_\xi\xi_x+w_\eta\eta_x)_x\\&=w_{\xi\xi}\xi_x^2+2w_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+w_{\eta\eta}\eta_x^2+w_\xi\xi_{xx}+w_\eta\eta_{xx}\end{aligned}$$

בצורה דומה, מחשבים את u_{xy},u_{yy}. בקוארדינטות החדשות, נקבל

$$L(u)=\ell(w)=A(\xi,\eta)w_{\xi\xi}+2B(\xi,\eta)w_{\xi\xi}+C(\xi,\eta)w_{\eta\eta}+\mathrm{L.O.T}=G(\xi,\eta)$$

$$\begin{aligned}A(\xi,\eta)&=a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2\\B(\xi,\eta)&=a\xi_x\eta_x+b(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+c\xi_y\eta_y\\C(\xi,\eta)&=a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2\end{aligned}$$

צריך להראות שדיסקרימיננטה שמתאימה ל־a,b,c היא בעלת אותו סימן כמו הדיסקרימיננטה שמתקבלת מ־A,B,C . זה נובע מכך שמתקיימת הזהות:

$$-\Delta(\xi,\eta)=\det\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}=\det\left[J\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}J^T\right]$$

כאשר J היא מטריצת היעקוביאן. אזי

$$B^2-AC=\left(b^2-ac\right)|J|^2$$

או,

$$-\Delta=-\delta|J|^2$$

■

היו לנו שלוש דוגמאות קלאסיות למשוואות מפיסיקה[4]:

[4] 05.04.2009

- משוואת הגלים:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F$$

זו משוואה פרבולית.

- משוואת החום:

$$u_t-ku_{xx}=F$$

זוהי משוואה פרבולית.

- משוואת פואסון:

$$u_{xx}+u_{yy}=F$$

היא משוואה אליפטית.

אלו הן משוואות פשוטות למדי, כי המקדמים פשוטים, או שאין חלק מהאיברים.
אם נוכל להעביר משוואה מסדר שני כלשהי, למשוואה אחת מהנ"ל, מאותו הטיפוס, אז נוכל לפתור אותן בקלות.
נוכיח, כי בהנחות מסויימות, לכל משוואה מסדר שני ניתן למצוא טרנספורמציה, באופן לוקאלי לפחות, כך, שבקאורדיונטות החדשות, יש למשוואה את אותו החלק העיקרי כמו במשוואות אלו.

הגדרה 3.3 יהא L אופרטור מטיפוס היפרבולי/פרובלי/אליפטי, בתחום D.
אומרים שטרנספורמציה $\xi=\xi\left(x,y\right)$, $\eta=\eta\left(x,y\right)$, היא טרנספורמציה **קאנונית** אם בקוארדינטות $\left(\xi,\eta\right)$, החלק העיקרי של האופרטור הוא מהצורה:

- במקרה ה־היפרבולי,

$$\ell_0\left(w\right)=w_{\xi\eta}$$

- במקרה פרבולי,

$$\ell_0\left(w\right)=w_{\xi\xi}$$

- במקרה האליפטי,

$$\ell_0\left(w\right)=w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}$$

הצורות הנ"ל נקראות **צורות קאנוניות** של אופרטור מסדר שני.

באופן לוקאלי, ניתן להעביר כל משוואה (מסדר שני) למשוואה מאחת הצורות הנ"ל. כלומר, לכל נקודה יש סביבה, וטרנספורמציה קאנונית, כך שניתן להעבירה לטרנספורמציה קאנונית.

3.1 המקרה ההיפרבולי

משפט 3.4 נניח כי האופרטור L היפרבולי בתחום D, ותהא $\left(x_0,y_0\right)\in D$, אזי קיימת סביבה של $\left(x_0,y_0\right)\in$ $U\subseteq D$, ושינוי משנה

$$\left(\xi,\eta\right):U\to\mathbb{R}$$

$$\xi=\xi\left(x,y\right),\quad\eta=\eta\left(x,y\right)$$

פונקציות גזירות ברציפות, שהיעקוביאן שלהן אינו מתאפס, כך שהטרנספורמציה היא קאנונית.

הוכחה: תזכורת:

$$\begin{aligned}
A(\xi,\eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\
B(\xi,\eta) &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\
C(\xi,\eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2
\end{aligned}$$

רוצים, ש־$C(\xi,\eta) = A(\xi,\eta) = 0$ בתחום U, המהווה סביבה של הנקודה. המשוואה, $A = 0$ היא משוואה לא־לינארית מסדר ראשון, שאנחנו יודעים לפתור.

למרות שהיא אינה קוואזי־לינארית, ניתן לפתור אותה, בגלל צורתה המיוחדת, בשיטות של משוואות קוואזי לינאריות. המשוואה עבור C היא זהה.

$$A = 0$$

נפרק את המשוואה לגורמים לינארים:

$$\frac{1}{a}\left[a\xi_x + \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y\right]\left[a\xi_x + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y\right] = 0$$

(התנאי לכך שניתן לעשות זאת, הוא שהדסקרימיננטה שונה מאפס, ואכן כן, עבור משוואה היפרבולית.

כדי שזה יהיה שווה זהותית לאפס, מספיק לפתור כל משוואה בנפרד:

$$a\xi_x^{\pm} + \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)\xi_y^{\pm} = 0$$

הסיבה שאנחנו צריכים את שתי המשוואות (ולא מספיק לנו אחת) היא שאנחנו רוצים למצוא 2 פונקציות בת"ל, ξ, η.

אלו הן שתי משוואות לינאריות, מסדר ראשון, בלתי תלויות. משוואות כאלה למדנו לפתור.

נשתמש בשיטת הקווים האופיניים ונקבל,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^{\pm}}{\mathrm{d}t} &= a \\
\frac{\mathrm{d}y^{\pm}}{\mathrm{d}t} &= b \pm \sqrt{b^2 - ac} \\
\frac{\mathrm{d}\xi^{\pm}}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}$$

כלומר, $\xi^{\pm}$ קבועה על היטל של קו אופיני, נשתמש בפמרטיציה x:

$$\frac{\mathrm{d}y^{\pm}}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad a \neq 0$$

אם $a = 0$, אפשר להניח ש־$c \neq 0$, ופשוט נחליף בינהם , אבל אם $a, c = 0$ אז $b \neq 0$.

הערה 3.5 אם

$$a(x_0, y_0) = c(x_0, y_0) = 0$$

אז מבצעים תחילה טרנספורמציה

$$\begin{aligned}
X &= x + y \\
Y &= x - y
\end{aligned}$$

ואז, בקוארדינטות החדשות, $X - Y$, אז $\tilde{a} \neq 0$ או $\tilde{c} \neq 0$

כשעושים את האינטגרציה, מקבלים ש־

$$y^{\pm}=g_{\pm}\left(y^{\pm},x\right)=\mathrm{const}$$

לכן, אפשר לבחור

$$\xi=g_{+}\left(x,y\right)$$
$$\eta=g_{-}\left(x,y\right)$$

■

דוגמה 1.3

$$xu_{xx}+u_{yy}=0\quad x<0$$

אזי

$$a=x,\quad b=0,\quad c=1$$

אנחנו רואים ש־

$$b^{2}-ac=-x>0$$

נפתור:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}^{\pm}=\frac{\pm\sqrt{-x}}{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

אזי המשוואה היא

$$\mathrm{d}y^{\pm}=\pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x}}\Rightarrow y\pm2\sqrt{-x}=\mathrm{const}$$

אז אם נבחר טרנספורמציה קאנונית:

$$\xi=y+2\sqrt{-x}$$
$$\eta=y-2\sqrt{-x}$$

(כל טרנספורמציה על ξ,η, שתשאיר אותם קבועים, היא ליגיטימית)
לא מובטח שהטרנספורמציה הזו היא גלובלית, אבל הרבה פעמים, באופן מעשי, היא כן כזו.

קיבלנו שתי משפחות של קווים –

$$\xi\left(x,y\right)=\mathrm{const}$$
$$\eta\left(x,y\right)=\mathrm{const}$$

האוסף הזה של המשפחות נקרא קווים אופיניים של המשוואה ההיפרבולית.

תרגיל 3.6 הראו שניתן לבחור את ξ,η כך שהיעקוביאן של ההעתקה שונה מאפס. צריכים להראות ש־

$$\xi_{x}\eta_{y}-\xi_{y}\eta_{x}\neq0$$

3.2 במקרה הפרבולי

הצורה הקאנונית היא

$$Aw_{\xi\xi} + \mathrm{L.O.T}\left(\xi, \xi\right)$$

צריכים למצוא טרנספומציה כך ש־$B = C = 0$.

משפט 3.7 אם האופרטור L הוא פרבולי בסביבת D של (x_0, y_0). אז קיימת סביבה של (x_0, y_0), $U \subset D$, וטרנספורמציה קאנונית, גזירה ברציפות, המוגדרת שם.

הוכחה: נתון $B^2\left(x,y\right) - A\left(x,y\right)C\left(x,y\right) = 0$ ב־D. לכן, מספיק לדאוג לכך ש־$C \equiv 0$, כי אז $B = 0$.
המשוואה עבור $C = 0$:

$$a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0$$

אבל הפעם, בגלל שהדיסקרימיננטה מתאפס,

$$\frac{1}{a}\left(a\eta_x + b\eta_y\right)^2 = 0$$

צריך להתקיים:

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$

זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון עבור η. η קבועה על ההיטל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b}{a}$$

את ξ ניתן לבחור באופן שרירותי (כך שהיעקוביאן לא יתאפס). ■

במקרה הפרבולי, יש משפחה אחת של קווים אופיניים.

3.3 המקרה האליפטי[5]

הצורה הקאנונית של המקרה האליפטי היא

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \mathrm{l.o.t} = \tilde{H}\left(\xi, \eta\right)$$

נדרוש ־

$$A \equiv C$$
$$B \equiv 0$$

נרשום את המשוואות עבור שני אלו:

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

ניתן לראות שהמשוואה עבור ξ, η היא מצומדת. מחפשים שתי פונקציות במשוואה אחת. אבל יש לנו גם משוואה נוספת, עבור B: עבור $B \geq 0$,

$$B = a\xi_x\eta_x + b\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + c\xi_y\eta_y = 0$$

יש לנו כאן, לראשונה, מערכת של משוואות דיפרנציאליות חלקיות. מערכת מצומדת שצריך לחלץ ממנה שתי פונקציות.
נעבור אגפים במשוואה הראשונה, ונקבל

$$a\left(\xi_x^2 - \eta_x^2\right) + 2b\left(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y\right) + c\left(\xi_y^2 - \eta_y^2\right) = 0$$

[5] 19.04.2009

הביטוי, $\xi_x^2 - \eta_x^2$, מזכיר לנו את החלק הממשי של $\partial_x \left(\xi - i\eta\right)^2$. נכפול את המשוואה השניה ב־$2i$:

$$2a\xi_x i\eta_x + 2b\left(\xi_x i\eta_y + \xi_y o\eta_x\right) + 2c\xi_y i\eta_i = 0$$

אם נציב

$$\phi\left(x,y\right) = \xi\left(x,y\right) + i\eta\left(x,y\right)$$

שתי המשוואות הללו שקולות למשוואה הבאה:

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0$$

כאשר ϕ פונקציה מרוכבת. האם ניתן להשתמש במה שלמדנו על משוואות מסדר ראשון, עבור משתנים מרוכבים?
צריכים לפתור

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm i\sqrt{ax - b^2}}{a}$$

ϕ קבועה על קווים כאלו.
צריך לפתור מד"ר מרוכבת כאשר x, y משתנים מרוכבים.

תנאי לפתרון: המקדמים a, b, c הן פונקציות אנליטיות ממשיות

הגדרה 3.8 פונקציה $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ נקראת **אנליטית ממשית** ב־D אם לכל $(x_0, y_0) \in D$, קיימת סביבה $U \subseteq D$ כך ש־F ניתנת להצגה שם כטור חזקות ב־x ו־y.

$$F\left(x,y\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a_{j,k}\left(x - x_0\right)^k \left(y - y_0\right)^{j-k} \qquad (x,y) \in U$$

למשל, $\sin xy$ היא אנליטית ממשית. כל פולינום הוא בודאי אנליטי ממשי.
משפט הקיום והיחידות למד"ר ממשית, מתקיים למד"ר מרוכב בתנאי ש־$\frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$ היא פונקציה אנליטית.
מקבלים

$$\phi\left(x,y\right) = \mathrm{const}$$
$$\psi\left(x,y\right) = \mathrm{const}$$

משתנים מרוכבים.
והמשוואה בקואורדינטות המרוכבות ניתנת על ידי

$$w_{\phi\psi} + \mathrm{l.o.t} = \tilde{H}$$

נחזור למשתנים ξ, η.

$$\xi\left(x,y\right) = \mathrm{Re}\phi$$
$$\eta\left(x,y\right) = \mathrm{Im}\phi$$

וקיבלנו $A = C$, $B = 0$.

דוגמה 2.3

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

כדי שהמשוואה תהיה אליפטית, נדרוש $x > 0$. המשוואה היא

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a} = \pm i\sqrt{x}$$

נשתמש בשיטות הפתרון של משוואה דיפרנציאלית רגילה (פרידה)

$$y \pm i\frac{2}{3}\left(x\right)^{3/2} = \mathrm{const}$$

נבחר:

$$\xi\left(x,y\right) = y$$
$$\eta\left(x,y\right) = \frac{2}{3}\left(x\right)^{3/2}$$

מציבים ומקבלים צורה קנונית.

$$\begin{aligned}\xi_x &= 0\\ \xi_y &= 1\\ \eta_x &= x^{1/2}\\ \eta_y &= 0\end{aligned}$$

4 משוואת הגלים

4.1 המקרה החד מימדי ההומוגני

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

משוואה זו אינה בצורה קאנונית. נעבור לצורה הקנונית:
אנחנו רוצים ש־ξ יהיה קבוע על

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm c$$

אזי

$$\begin{aligned}\xi &= x + ct\\ \eta &= \eta - ct\end{aligned}$$

אזי

$$u_t = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x$$

נרשום את היעקוביאן:

$$J = \begin{vmatrix} \eta_x = 1 & \eta_x = 1 \\ \eta_t = c & \eta_t = -c \end{vmatrix}$$

ולכן

$$u_t = c\left(w_\xi - w_\eta\right)$$

ו־

$$\begin{aligned}u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x = w_\xi + w_\eta\\ u_{xx} &= \left(w_\xi\right)_x + \left(w_\eta\right)_x\\ &= w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta} + w_{\eta\xi} + w_{\eta\eta}\\ &= w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}\end{aligned}$$

ו־

$$u_{tt}=c^{2}\left(w_{\xi\xi}-2w_{\xi\eta}+w_{\eta\eta}\right)$$

אזי,

$$u_{tt}-c^{2}u_{xx}=c^{2}\left(-4w_{\xi\eta}\right)=0$$

משוואה זו שקולה למשוואה

$$w_{\xi\eta}=0$$

זוהי משוואה שאפשר לפתור באופן מפורש ־ ולמצוא את הפתרון הכללי. נסתכל על הפונקציה

$$v=w_{\xi}$$

ואז המשוואה תהיה

$$v_{\eta}=0$$

אזי

$$v=f\left(\xi\right)$$

ולכן

$$w_{\xi}=f\left(\xi\right)$$

זוהי משוואה חלקית, התלויה רק ב־ξ, ולכן

$$\boxed{w\left(\xi,\eta\right)=F\left(\xi\right)+G\left(\eta\right)}$$

כאשר $F,G\in C^{2}$, פונקציות ממשיות.

ואז, בהצבת הטרנספורמציה, הפתרון הכללי של משוואת הגלים הומוגנית במימד אחד:

$$\boxed{u\left(x,t\right)=F\left(x+ct\right)+G\left(x-ct\right)}$$

F,G נקבעות על ידי תנאי שפה, תנאי התחלה וכו'.

במישור (x,t), נצייר את הקווים האופייניים העוברים בנקודה (x_0,t_0). אלו שני קווים ישרים ־ $x-ct=x_0-ct_0$ ו־$x+ct=x_0+ct_0$.

נניח שיודעים את F ו־G.

נשווה את הגרף של $F\left(x+ct_1\right)$ עם הגרף של $F\left(x\right)$. הגרף של $F\left(x+ct_1\right)$ הוא הגרף של $F\left(x\right)$ מוזז ב־ct_1 שמאלה.

הגרף של $G\left(x-ct_1\right)$ מוזז ב־ct_1 ימינה יחסית ל־$G\left(x\right)$. אזי $F\left(x+ct\right)$ הוא גל נסוג במהירות c, ואילו $G\left(x-ct\right)$ הוא גל מתקדם במהירות c.

הפתרון הכללי של משוואת הגלים ההומוגנית החד מימדית הוא סכום – סופרפוזיציה – של גל מתקדם וגל נסוג במהירות c. c נקראת "מהירות הגל".

גלים הם לאו דווקא גזירים פעמיים ברציפות. ניתן לייצר גלים עם אי רציפות ואי גזירות (מסור, שיניים).

נכליל את הפתרון של משוואת הגלים:

הגדרה 4.1 פתרון מוכלל של משוואת הגלים החד מימדית (הומוגנית) הוא מהצורה:
סכום של גל מתקדם ונסוג במהירות c, כלומר,

$$u\left(x,t\right)=F\left(x+ct\right)+G\left(x-ct\right)$$

כאשר F,G הן פונקציות רציפות למקוטעין.

הערה 4.2 למה זו הכללה טובה? F ו־G כאלו, רציפות למקוטעין, אפשר להחליק. הן גבול של סדרת פונקציות חלקות F_n, G_n

$$F_n(x) \to G(x)$$
$$G_n(x) \to G(x)$$

לכל x בקטע.

לכן, הפונקציה

$$u_n(x,t) := F_n(x+ct) + G_n(x-ct)$$

היא פתרון קלאסי אמיתי של משוואת הגלים, ו־

$$u_n(x,t) \to u(x,t)$$

כלומר, כל פתרון מוכלל הוא גבול נקודתי של סדרת פתרונות קלאסיים.

נניח שבזמן $t = t_0$, ידוע שהפתרון $u(x,t)$ אינו חלק בנקודה (x_0, t_0), ורק שם.

נסתכל היכן $u(x, t_1)$ אינו חלק (עבור $t_1 > t_0$)

$$u(x, t_1) = F(x + ct_1) + G(x - ct_1)$$

ידוע שמכיוון שיש נקודה לא חלקה בנקודה

$$u(x_0, t_0) = F(x_0 + ct_0) + G(x_0 - ct_0)$$

אזי אחת הפונקציות, F, G אינה חלק בנקודה – F אינה חלקה ב־$x_0 + ct_0$ או ש־G אינה חלק ב־$x_0 - ct_0$.

חוסר החלקות בזמן $t = t_1$ צפויה לכן בנקודות

$$x_1 = x_0 + ct_0 - ct_1$$

או

$$x_2 = x_0 - ct_0 + ct_1$$

מסקנה 4.3 נקדות אי החלקות מתקדמות ונשמרות לאורך הקווים האופיניים (ורק שם)

הערה 4.4 במשוואות פרבוליות או אליפטיות, עבור תנאי שפה לא רציף, אחרי זמן אינפיטסימלי הפתרון רציף.

במשוואות היפרבוליות, אי החלקות נשמרת ומתקדמת לאורך הקווים האופיניים.

4.1.1 בעיית קושי למשוואת הגלים ההומוגנית

זוהי בעיית התחלה ללא תנאי שפה.

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \qquad -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) &= g(x) \qquad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

כאשר f, g פונקציות נתונות. הפתרון u צריך לקיים: $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ ו־$u_t \in C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

נניח u פתרון של הבעיה. אז

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(c-xt)$$

משוואות עבור F,G -

$$\begin{aligned} u(x,0) &= F(x)+G(x)=g(x) \\ u_t(x,t) &= cF'(x+ct)-cG'(x-ct) \\ u_t(x,0) &= cF'(x)-cG'(x)=g(x) \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה אלגברית ומשוואה דיפרנציאלית עבור F,G: נבצע אינטגרציה למשוואה השניה ונקבל

$$cF(x)-cG(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s+k_{\text{onst}}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^g g(s)\,\mathrm{d}s+\frac{k}{2c} \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s-\frac{k}{2c} \end{aligned}$$

כרגע, אין לנו שום איפורמציה לגבי הקבוע. אבל אם הפתרון הוא סכום של גל מתקדם ונסוג, אז תמיד אפשר להוסיף קבוע לגל המתקדם ולהפחית אותו מהגל הנסוג. ההצגה הזו הנא נכונה עד כדי קבוע.

$$\boxed{u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s}$$

זוהי נוסחאת דלמבר.

ההנחות הן ש־$f\in C^2(\mathbb{R})$, אבל $g\in C^1(\mathbb{R})$

אם f,g מקבלים את התנאים ו־u הוא פתרון, אז הוא מהצורה שהראנו.

אם f רציפה למקוטעין ו־g אינטגרבילית, מקבלים פתרון מוכלל לבעיית קושי.

4.2 משוואת הגלים הלא־הומוגנית, במימד אחד[6]

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$$

עבור $F(x,t)$ נתון, ובהנתן תנאי ההתחלה על

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

מהמקרה ההומוגני.

כדי למצוא את הפתרון הלא־המוגוני, רוצים לדעת את u בנקודה (x_0,t_0), ונסתכל על משולש אופייני – משולש שנוצר מהחיתוך של הקווים האופייניים עם ציר ה־x.

הקווים הם

$$\begin{aligned} x+ct &= x_0+ct_0 \\ x-ct &= x_0-ct_0 \end{aligned}$$

לכן, נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן $(x_0+ct_0,0)$ ו־$(x_0-ct_0,0)$. זהו המשולש האופייני, Δ, של הבעיה. כדי למצוא את הנוסחא המבוקשת, נבצע אינטגרציה של המשוואה על המשולש האופייני. נסתכל על

$$-\iint_\Delta F(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_\Delta\left(c^2u_{xx}-u_{tt}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{10}$$

הצורה הזו מזכירה את נוסחאת גרין: עבור שדה וקטורי (P,Q),

$$\iint_\Delta\left(Q_x-P_t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\oint_{\partial\Delta}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}t$$

[6] 22.04.2009

נבחר

$$
\begin{aligned}
Q_x = c^2 u_{xx} &\implies Q = u^2 u_x \\
P_t = u_{tt} &\implies P = u_t
\end{aligned}
$$

ואז, לפי נוסחאת גרין, (18) שווה ל:

$$
= \oint_{\partial\Delta} c^2 u_x \mathrm{d}t + u_t \mathrm{d}x
$$

נחלק את המשולש לשלושה עקומים - Γ_1 על בסיס המשולש, Γ_2 עבור $x+ct$ ו־Γ_3 עבור $x-ct$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} \\
&= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x) - \int_C^A \left[c^2 u_x \frac{\mathrm{d}x}{c} + u_t c \mathrm{d}t \right] + \int_A^B \left[c^2 u_x \frac{\mathrm{d}x}{c} + u_t c \mathrm{d}t \right]
\end{aligned}
$$

כאשר $u_t(x,0) = g(x)$ לפי תנאי ההתחלה, עבור Γ_2, $\mathrm{d}x = -c\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,\mathrm{d}x - c\int_C^A \underbrace{[u_x \mathrm{d}x + u_t \mathrm{d}t]}_{\mathrm{d}u} + c\int_A^B \underbrace{[u_x \mathrm{d}x + u_t \mathrm{d}t]}_{\mathrm{d}u} \\
&= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,\mathrm{d}x - c\cdot u(A) + c\cdot u'(C) + c\cdot u(B) - c\cdot u(A)
\end{aligned}
$$

ושוב, לפי תנאי ההתחלה, $u(C) = f(x_0+ct_0)$ ו־$u(B) = f(x_0-ct_0)$, ו־$u(A) = u(x_0,y_0)$, מה שאנחנו רוצים למצוא

$$
= -2cu(A) + cf(x_0+ct_0) + cf(x_0-ct_0)
$$

נבודד את $u(A) = u(x_0,t_0)$, ונקבל

$$
u(x_0,t_0) = \frac{f(x_0+ct_0)+f(x_0-ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\iint_\Delta F(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x
$$

ובאופן כללי, עבור נקודה (x,t) כלשהי:

$$
\boxed{u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\iint_\Delta F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau} \tag{11}
$$

לפי הנוסחא, הפתרון בנקודה תלוי רק מערכי ההתחלה על בסיס המשולש, הכח המאלץ, $F(x,t)$ בתוך המשולש האופייני, Δ.

לפי הנוסחא, בהנתן הפרעה מחוץ למשולש האופייני, הפרעה זו לא תגיע לנקודה.

ערך הפתרון u בנקודה (x_0,t_0) תלוי אך ורק בערכים של תנאי ההתחלה והכח המאלץ בתוך המשולש האופייני.

ניתן לשאול גם את השאלה ההפוכה. בהנתן תחום במישור $x-t$, אילו נקודות מושפעות מהפרעה באותו התחום.

נוציא קווים אופיניים שיוצאות מבסיס התחום, וכל נקודה ש"בין" הקווים האופיניים הללו תחתוך חלק מהתחום, ועל כן ברור שנקודות אלו מושפעות מהפרעה בתחום.

- תחום ההשפעה (של נקודה/תחום) – התחום שמושפע מהפרעה בתחום מסויים
- תחום הקביעה (של נקודה/תחום) – התחום שממנו מושפעת התנהגות המשוואה על נקודה/תחום.

הפונקציה

$$\begin{aligned} v\left(x,t\right) &= \frac{1}{2c}\iint_{\Delta}F\left(\xi,\tau\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2c}\int_0^t\left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F\left(\xi,\tau\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

פותרת את המשוואה

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F\left(X,t\right)$$

עם תנאי ההתחלה $v\left(x,0\right)=v_t\left(x,0\right)=0$. על פי עקרון דוהמה, ניתן למצוא את את הפתרון הכללי של משוואה לא הומוגנית באמצעות הפתרון של משוואה הומוגנית ופתרון של בעיית קושי עם תנאי שפה אפס.

ראינו שאם u (במשוואה (11)) פתרון לבעיית קושי אז הוא נתון על ידי הנוסחה (11). [7]

מצד שני: אם $f\in C^2\left(\mathbb{R}\right)$, $g\in C'\left(\mathbb{R}\right)$, $F\in\left(C\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\right)\right)$, $F_x\in C\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\right)$ אז נוסחת דלמבר מגדירה פתרון קלאסי לבעיית קושי.

ואכן, מספיק להראות ש־

$$v\left(x,t\right):=\frac{1}{2c}\int_0^t\left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F\left(\xi,\tau\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau$$

הוא פתרון בעיית קושי:

$$\begin{aligned} v_{tt}-c^2v_{xx}=F,&\quad x\in\mathbb{R},t>0 \\ v\left(x,0\right)=v_t\left(x,0\right)&\quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

לכן ברור ש־$v\left(x,0\right)=0$.

תרגיל 4.5 (להשלים)

4.2.1 מוצגות הייטב

הגדרה 4.6 בעיה דיפרנציאלית (מד"ח + תנאים נלווים, למשל, תנאי שפה, תנאי התחלה, כח מאלץ וכו') היא **מוצגת הייטב** אם:

1. קיים פתרון לבעיה. (קיום)
2. קיים לכל היותר פתרון אחד. (ייחודות)
3. יציבות – שינוי "קטן" בתנאים הנלווים גורר שינוי "קטן" בפתרון. פרפרים!

משפט 4.7 בעיית קושי האי־המוגנית

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}=F,&\qquad\left(0<t<T,x\in\mathbb{R}\right) \\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right);u_t\left(x,0\right)=g\left(x\right)& \end{aligned}$$

היא מוצגת הייטב, בתנאי ש־

$$\begin{aligned} f&\in C^2\left(\mathbb{R}\right) \\ g&\in C\left(\mathbb{R}\right) \\ F&\in C\left(\mathbb{R}\times\left[0,T\right]\right) \\ F_x&\in C\left(\mathbb{R}\times\left[0,T\right]\right) \end{aligned}$$

[7] 26.04.2009

הוכחה: צריך להראות קיום, יחידות ויציבות

- **קיום**: על פי הנוסחה (11).
- **יחידות**: ראינו שכל פתרון נתון על ידי הנוסחה (11).
- **יציבות**: נניח שנתונות שתי בעיות קושי, עם תנאים נלווים f_j, g_j, F_j ‏($j = 1, 2$)

נניח ,

$$\begin{aligned} |f_1(x) - g_2(x)| &< \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ |g_1(x) - g_2(x)| &< \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ו־

$$|F_1(x,t) - F_2(x,t)| < \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall 0 \le t < T$$

כלומר, המרחקים בין הפונקציות נמדדים בנורמת מקסימום, חסומים על ידי δ.

יהיו $u_j(x,t)$ הפתרונות של שתי הבעיות הנ"ל ($j = 1, 2$) . צריך להראות שבהנתן $\varepsilon > 0$, קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך ש־

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$$

בתנאי ש־$0 < \delta < \delta_\varepsilon$.

נגדיר

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

אז v פתרון של בעיית קושי

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, 0 \le t \le T$$

כאשר $F = F_1 - F_2$, $f = f_1 - f_2$ ו־$g = g_1 - g_2$, על פי עקרון הסופרפוזיציה.

ולכן, לפי נוסחה (11), נקבל כי:

$$\begin{aligned} v(x,t) = &\frac{f_1(x+ct) - f_2(x+ct) + f_1(x-ct) - f_2(x-ct)}{2} \\ &+ \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} [g_1(s) - g_2(s)] \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2c} \int_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} [F_1(\xi,\tau) - F_2(\xi,\tau)] \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

אנחנו רוצים ש־$|v(x,t)|$ קטן. לפי אי שוויון המשולש,

$$\begin{aligned} |v(x,t)| \le &\left| \frac{f_1(x+ct) - f_2(x+ct) + f_1(x-ct) - f_2(x-ct)}{2} \right| \\ &+ \frac{1}{2c} \left| \int\limits_{x-ct}^{x+ct} [g_1(s) - g_2(s)] \, \mathrm{d}s \right| + \frac{1}{2c} \left| \int_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} [F_1(\xi,\tau) - F_2(\xi,\tau)] \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \right| \\ \le &\frac{|f_1(x+ct) - f_2(x+ct)|}{2} + \frac{|f_1(x-ct) - f_2(x-ct)|}{2} \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(s) - g_2(s)| \, \mathrm{d}s + + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} |F_1(\xi,\tau) - F_2(\xi,\tau)| \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

לפי ההנחות, כל אחד מההפרשים קטן מ־δ, ולכן

$$\le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2c} \delta \cdot (2ct) + \frac{1}{2c} \cdot \underbrace{\frac{(2ct \cdot 2)}{2}}_{S(\Delta)} \delta$$

נשתמש בעובדה ש־ $t<T$, ונקבל

$$\le \delta\left(1+T+\frac{T^2}{2}\right)$$

אזי, נבחר $\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{1+T+\frac{T^2}{2}}$, ונקבל ש־ $|v(x,t)|<\varepsilon$.

■

דוגמה נגדית עבור בעית קושי בתחום $0<t<\infty$, שאינה מוצגת היטב נקח $g_1=0, f_1=0$ ו־$F_1=0$, ומצד שני, $f_2=0, g_2=\varepsilon$ ו־$F_2=0$, ונסתכל על הפתרונות, u_1,u_2.

$$v(x,t)=|u_1(x,t)-u_2(x,t)|=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\varepsilon \mathrm{d}s=\frac{1}{2c}\varepsilon\cdot 2ct$$
$$=\varepsilon t$$

אבל הביטוי εt אינו חסום בקטע, אין δ כך ש־ $v(x,t)<\varepsilon$, ולכן הבעיה אינה מוצגת היטב.

דוגמה נוספת $F=0, f=0$ ו־ $g(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ (זה לא חלק, אבל זה לא מטריד אותנו כאן).

הגדרה 4.8 תומך של פונקציה: הסגור של הנקודות שבהם הפונקציה אינה מתאפס.

אזי

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,\mathrm{d}s$$

נניח ש־ $x+ct>1$ ו־ $x-ct<-1$ (כלומר, $t\gg 1$), אזי

$$=\frac{1}{2c}\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}s=\frac{1}{c}$$

בהמשך נראה שעבור גל תלת מימדי, עם תנאי ההתחלה הם בעלי תומך קומפקטי, הגל דועך בזמן סופי.

4.2.2 תוצאות

משפט 4.9 נניח שבבעית קושי הנ"ל ידוע כי f,g וכן F (לכל $0\le t\le T$) הן פונקציות זוגיות של x.
אז לכל $0<t<T$, כפונקציה של x, הפתרון $u(x,t)$ הוא פונקציה זוגית.
יתר על כן, אם התנאים הנלווים הנ"ל הם אי־זוגיים, הפתרון הוא אי זוגי, ואם התנאים מחזוריים עם מחזור L, הפתרון מחזורי עם מחזור L.

הוכחה: צריך להוכיל ש־ $u(-x,t)=u(x,t)$, לכל $x\in\mathbb{R}$ ו־$t>0$.

- דרך א': הצבה בנוסחאת דלמבר.
- דרך ב': נשתמש במוצגות הייטב.

נגדיר $v(x,t)=u(-x,t)$. נראה כי v פותרת את אותה בעיית קושי, ולכן $v=u$, על פי היחידות.

$$v(x,0)=_{(1)}u(-x,0)=_{(2)}f(-x)=f(x)$$

כאשר (1)לפי הגדרה ו־$()$ בגלל ש־u פתרון.

נסתכל על v_t:

$$v_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(u(-x,t))=u_t(-x,t)$$

ולכן

$$v_t(x,0) = u_t(-x,0) = g(-x) = g(x)$$

ולכן תנאי ההתחלה של המהירות של v מתאים לתנאי ההתחלה עבור u. נבדוק את המד"ח:

$$v_t(x,t) = u_t(-x,t)$$

ולכן

$$v_{tt}(x,t) = u_{tt}(-x,t)$$

ו־

$$v_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(-x,t) = -u_x(-x,t)$$
$$v_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-u_x(-x,t)\right] = u_{xx}(-x,t)$$

לכן

$$v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) = u_{tt}(-x,t) - c^2 u_{xx}(-x,t) = F(-x,t) = F(x,t)$$

לכן v מקיימת את אותה משוואה עם אותם תנאי התחלה:

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F$$

ולכן, על פי יחידות, $u = v$.

■

ההוכחה לשני הסעיפים הבאים היא דומה.

4.3 משוואת הגלים ההומוגנית, במימדים גבוהים יותר

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

כאשר $x = \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ותנאי ההתחלה

$$u(x,0) = f(x); \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

טענה 4.10 נניח ש־u פתרון של בעיית קושי עם תנאי התחלה $u(x,0) = 0$ ו־$u_t(x,0) = g(x)$. אז, הפונקציה

$$v(x,t) = u_t(x,t)$$

היא פתרון לבעיית קושי עם $v(x,0) = g(x)$ ו־$v_t(x,0) = 0$.

הוכחה: אם u פתרון חלק של משוואת הגלים, אז כל נגזרת חלקית שלה היא גם פתרון של משוואת הגלים. (כי משוואת הגלים היא משוואה לינארית עם מקדמים קבועים)

$$v_{tt} - c^2 \Delta_x v_{xx} = u_{ttt} - c^2 \frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} - c^2 \nabla_x u\right) = 0$$

$$v(x,0) = u_t(x,0) = g(x)$$

לעומת זאת,

$$v_t = u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

ולכן

$$v_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = c^2 u_{xx}(x,0) = 0$$

מכיוון ש $u = 0$ בזמן $t = 0$, ולכן גם הנגזרת החלקית שלה מכל סדר (לפי x) והביטוי שבשורה למעלה הוא אפס.

■

4.3.1 פתרון משוואות הגלים ממימד 3, עבור סימטריה רדיאלית

נדון במקרה $n=3$, ולאחר מכן נקבל את $n=2$, באמצעות שיטת הירידה של הדמר.

נדון במקרה $n=3$ ו־f,g פונקציות שתלויות אך ורק במרחק, מהראשית, כלומר ב־$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

נחפש פתרון רדיאלי, $u\left(r,t\right)$.

בקואורדינטות כדוריות, הלפלסיאן

$$\Delta_x u\left(x,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{u}+\frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}+\frac{1}{r_2}\left(\text{Angular diveratives}\right)$$

לכן, נסתכל על המשוואה

$$u_{tt}-c^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=0$$
$$u\left(r,0\right)=f\left(r\right),\quad u_t\left(r,0\right)=g\left(r\right)$$

נציב

$$u\left(r,t\right)=ru\left(r,t\right)$$

$$\begin{aligned}v_{tt}&=ru_{tt}\\ v_{rr}&=\left(ru\right)_{rr}=\left(u+ru_r\right)_r=u_r+ru_{rr}+u_r\\ &=ru_{rr}+2u_r\end{aligned}$$

אזי

$$\frac{u_{rr}}{r}=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r$$

$$ru_{tt}-c^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=\frac{v_{tt}}{r}-\frac{c^2}{r}v_{rr}=0$$

ולכן

$$v_{tt}-c^2v_{rr}=0\qquad\left(r>0,t>0\right)$$

ו־v מקיימת את משוואת הגלים בתנאים מתאימים. הפתרון הוא כאשר

$$v\left(r,t\right)=F\left(r+ct\right)+G\left(r-ct\right)$$

אבל מה עבור $r<0$? $f'\left(0\right)=g'\left(0\right)=0$ (כי f רציונאלית וחלקה). נגדיר את ההרחבה הזוגית של הפונקציות:

$$\boxed{\tilde{f}\left(r\right):=\begin{cases}f\left(r\right) & r\geq0\\ f\left(-r\right) & r<0\end{cases}}$$

ו־

$$\boxed{\tilde{g}\left(r\right):=\begin{cases}g\left(r\right) & r\geq0\\ g\left(-r\right) & g<0\end{cases}}$$

קיבלנו בעיית קושי עבור $\tilde{v}$:

$$\tilde{v}_{tt}-c^2\tilde{v}_{tt}=0\qquad r\in\mathbb{R},t>0$$

$$\tilde{v}(r,0) = r\tilde{f}(r)$$
$$v_t(r,0) = r\tilde{g}(r) \qquad r \in \mathbb{R}$$

וקיבלנו ש־

$$\tilde{v}(r,t) = \frac{(r+ct)\tilde{f}(r+ct) + (r-ct)\tilde{f}(r-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} s\tilde{g}(s)\,\mathrm{d}s$$

ולכן

$$v(r,t) = \tilde{v}(r,t) \quad r > 0$$

פותר את בעיית התחלה־שפה עם $v'(0,t) = 0$.

$$v(r,0) = f(r)$$
$$v_t(r,0) = g(r) \qquad r > 0$$

ו־

$$\boxed{u(r,t) = \frac{1}{r}v(r,t) = \frac{1}{2r}(r+ct)\tilde{f}(r+ct) + \frac{1}{2r}(r-ct)\tilde{f}(r-ct) + \frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} s\tilde{g}(s)\,\mathrm{d}s}$$

קיבלנו נוסחה דומה לנוסחת דלמבר, לבעיית קושי הרדיאלית.

4.3.2 במקרה הכללי[8]

נזדקק לשיטת הממוצעים הספריים של דרבו: נתונה פונקציה חלקה h,

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

אזי, הממוצא הספרי, $M_h(a,x)$, ניתן על ידי ־

$$M_h(a,x) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|=a} h(\xi)\,\mathrm{d}s_\xi$$

זה אינו אינטגרל על כדור, אלא אינטגרל משטחי על הספירה. כאשר $a \to 0$, נקבל

$$M_h(0,x) = h(x)$$

ובהרחבה עבור פונקציה אי־זוגית, מתקבל גם $\frac{\partial M}{\partial a}(0,x) = 0$.
בקואורדינטת אחרות, נוחות יותר לגזירה, נציב $\vec{\xi} == \vec{x} + a\vec{\eta}$. אזי $\eta \in S^2$, כלומר $|\eta| = 1$.

$$M_h(a,x) = \frac{1}{4\pi a^2}\overbrace{a^2}^{J}\int_{|\eta|=1} h(x+a\eta)\,\mathrm{d}s_\eta \tag{12}$$

טענה 4.11 M_h מקיימת את משוואת דרבו:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)M_h(a,x) = \Delta_x M_h(a,x)$$

כלומר, הלפלסיאן הכללי שווה לחלק הרדיאלי של הלפלסיאן. עבור $h \in C^2$

[8] 03.06.2009

נרצה להראות ש־M_u מקיימת את משוואת הגלים הרדיאלית התלת מימדים, וכדי לפתור את u עצמה, נצטרך לשחזר את uמהממוצאים הספריים שלה. **הוכחה:** את החלק הרדיאלי של הלפלסיאן, ניתן לכתוב כ־

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}a^2\frac{\partial v}{\partial a}=\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial v}{\partial a}$$

נמצא תחילה את $\frac{\partial}{\partial a}M_h\left(a,x\right)$: נסתכל בנוסחא (12), ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial a}M_h\left(a,x\right)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}\nabla h\left(\vec{x}+a\vec{\eta}\right)\cdot\vec{\eta}\mathrm{d}s_\eta$$

נשמתש במשפט גאוס, $\iiint\mathrm{div}\vec{W}\mathrm{d}x=\iint\vec{W}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$, אזי,

$$=\frac{a}{4\pi}\int_{|\eta|<1}\Delta_x h\left(\vec{x}+a\vec{\eta}\right)\mathrm{d}\eta$$

כאשר ה־a בחוץ הגיע מהגורם $a\vec{\eta}$. נחזור לכדור ברדיוס a סביב x. נשתמש שני באותו קשר : $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|=a}h\left(\xi\right)\mathrm{d}\sigma_\xi=\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}h\left(x+a\eta\right)\mathrm{d}\sigma_\eta$

$$\begin{aligned}
&=\frac{a}{4\pi}\Delta_x\int_{|\eta|<1}h\left(\vec{x}+a\vec{\eta}\right)\mathrm{d}\eta\\
&=\frac{a}{4\pi}\cdot\overbrace{a^{-3}}^{J}\Delta_x\int_{|\xi-x|<a}h\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{a^{-2}}{4\pi}\Delta_x\int_0^a\mathrm{d}\alpha\int_{|x-\xi|=\alpha}h\left(\xi\right)\mathrm{d}s_\xi\\
&=a^{-2}\Delta_x\int_0^a\alpha^2M_h\left(\alpha,x\right)\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

נגזור את $\left[a^2\frac{\partial}{\partial a}M_h\left(a,x\right)\right]$ לפי a, ונחלק ב־a^2. לכן, נקבל

$$\frac{1}{\cancel{a^2}}\Delta_x\cancel{a^2}M_h\left(a,x\right)$$

■

באופן כללי,

$$\overbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}}^{\text{Radial part of }\Delta}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

נראה כיצד משוואת דרבו עוזרת לנו לפתור את המשוואה במקרה הכללי:

$$\begin{aligned}
u_{tt}-c^2\Delta_x u=0,&\qquad x\in\mathbb{R}^3,t>0\\
u\left(x,0\right)=0,&\qquad u_t\left(x,0\right)=g\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

יהא u פתרון. נסתכל איזו בעיית קושי מתקיימת עבור $M_u\left(a,x,t\right)$.

$$\begin{aligned}
M_u\left(a,x,t\right)&=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|=a}u\left(\xi,t\right)\mathrm{d}s_\xi\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}u\left(x+a\eta,t\right)\mathrm{d}s_\eta
\end{aligned}$$

טענה 4.12 לכל x, $M_u(a,x,t)$ מקיימת את משוואת הגלים הרדיאלית:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)M_u(a,x,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(a,x,t)$$

אבל זה נובע ישירות ממשוואת דרבו: אגף שמאל הוא

$$\begin{aligned}
&=\Delta_x M_u(a,x,t)\\
&=\Delta_x\frac{1}{4\pi}\int_{|\eta|=1}u(x+a\eta)\,\mathrm{d}s_\eta\\
&=\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x+a\eta,t)\,\mathrm{d}s_\eta\\
&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(a,\vec{x},t)
\end{aligned}$$

עבור $t=0$,

$$f=0\implies M_{u(x,0)=f}(a,x)=0$$

ו־

$$\frac{\partial M_u}{\partial t}(a,x,0)=M_{u_t}(a,x,0)=M_g(a,x)$$

ולכן M_u מקיימת את משוואת הגלים הרדיאלית עם תנאי ההתחלה המתאימים. לכן, נוסחת הפתרון לבעיה הרדיאלית היא

$$M_u(a,x,t)=\frac{1}{2ca}\int_{a-ct}^{a+ct}sM_g(s,x)\,\mathrm{d}s$$

ומזוגיות M_g,

$$=\frac{1}{2ca}\int_{ct-a}^{ct+a}SM_g(s,x)\,\mathrm{d}s$$

כאשר פתרון הבעיה הרדיאלית

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}(r+ct)\tilde{f}(r+ct)+\frac{1}{2r}(r-ct)\tilde{f}(r+ct)+\frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct}s\tilde{g}(s)\,\mathrm{d}s$$

כאשר $\tilde{f},\tilde{g}$ הם ההרחבות הזוגיות. אבל כבר עשינו את ההרחבה הזוגית על M_g, ולכן זה הפתרון.

אנחנו יודעים את הממוצאים הספרים לכל a ולכל x, עכשיו צריך לשחזר את u מהממוצאים הספריים, על ידי השאפת $a\to0$. לכן, באמצעות משפט הערך הממוצא

$$u(x,t)=tM_g(ct,x)$$

הנוסחא הכללית:

$$\begin{aligned}
u(\vec{x},t)&=tM_g(ct,\vec{x})+\frac{\partial}{\partial t}tM_f(ct,\vec{x})\\
&=\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{|x-\xi|=ct}g(\xi)\,\mathrm{d}s_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{|x-\xi|=ct}f(\xi)\,\mathrm{d}s_\xi\right)
\end{aligned}$$

נסתכל על המקרה בו ל־f,g יש תומך קומפקטי.

$$\mathrm{supp}g=\overline{\{x\in\mathbb{R}^3|g(x)\neq 0\}}$$

נקח נקודה $\vec{x}$ כלשהי. נניח ש־$f\equiv 0$, ונסתכל כיצד g משפיע על u.

נקח ממוצאים כדורים ברדיוס ct סביב g. כאשר הספרות זרות לתומך של g, אין השפעה של g על $u(x,t)$, או, $u(x,t)=0$.

כאשר $\partial B(x,ct)\cap\mathrm{supp}g\neq\emptyset$, שינויים ב־$g$ יצרו שינויים ב־ $u(x,t)$, כלומר, $u(x,t)\neq 0$. אבל עבור t גדול יותר, כאשר ct עובר את התחום של $\mathrm{supp}g$, $u(x,t)=0$. ובפרט,

$$\lim_{r\to\infty}u(r,t)=0$$

איבוד הרגולריות

$$u(r,t)=\frac{1}{2r}\left[(r+ct)\tilde{f}(r+ct)+(r-ct)\tilde{f}(r-ct)\right]$$

בבעיית קושי במקרה החד מימדי, ראינו שאם $f\in C^2$, ו־$g\in C^1$, אז $u\in C^2$. זה לא נכון במקרה התלת מימדי.

$$u(0,t)=f(ct)+ct\,f'(ct)$$

כאן, על מנת ש־u תהיה גזירה פעמיים, f צריכה להיות גזירה 3 פעמים. יש כאן תופעה של **איבוד רגולריות**.

באופן כללי, בקואורדינטות כדוריות, המרכז לא מוגדר היטב.

4.4 שיטת האנרגיה להוכחת יחידות

דוגמה 1.4

$$u_{tt}-c^2\Delta_x u=F(x,t)\qquad(PDE)$$

כאשר $x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n,t>0$, כאשר Ω תחום (קבוצה פתוחה וקשירה) חסום וחלק (עם שפה חלקה).

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\qquad x\in\Omega\qquad(IC)$$

עם תנאי שפה דריכלה:

$$u(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=h(x,t)\qquad(BC)$$

עבור $x\in\partial\Omega$ ו־$t>0$.

צריך להוכיח: אם $u_1(x,t)$ ו־$u_2(x,t)$ פתרונות לבעיה, אז $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ לכל $x\in\Omega$ ו־$t>0$.

נגדיר $u:=u_1-u_2$. צריך להוכיך ש־$u=0$. אבל u מקיימת את

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2\Delta_x u=0\qquad&(PDE_0)\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,x\in\Omega\qquad&(IC_0)\\ u(x,t)=0,x\in\partial\Omega,t\geq 0\qquad&(BC_0)\end{aligned}$$

ברור ש־$u=0$, השאלה היא האם קיים פתרון נוסף. צריך להוכיח שלבעיה ההומוגנית יש אך ורק פתרון האפס.

נגדיר פונקציונאל **"אנרגיה"** בכל זמן t,

$$E:[0,\infty)\to\mathbb{R}$$

:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(u_t^2+c^2\left|\vec{\nabla}_x u\right|^2\right)\mathrm{d}x$$

כאשר u_t^2 מבטא את האנרגיה הקינטית ו-$c^2\left|\nabla_x u\right|^2$. לא תמיד לפונקציונאל האנרגיה יש משמעות פיזיקאלית. מתמטיקאים יותר מתעניינים בהאם הוא מוביל ליחידות או לא.

ידוע ש־ $E\left(t\right)\geq 0$. כמו כן,

$$E\left(0\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(0+c^2\left|\nabla_x 0\right|^2\right)\mathrm{d}x=0$$

אם נצליח להוכיח שהאנרגיה נשמרת: $E'\left(t\right)=0$, סיימנו. אם כי באופן כללי, מספיק להוכיח ש־ $E'\leq 0$. וכך, מקבלים כי $E\equiv 0$. אם E הוא אפס, אז כל אחד מהגורמים במשוואה הוא אפס זהותית, כי אינטגרנד הוא אי־שלילי, ולכן u היא קבועה. אבל $u\left(0\right)=0$ ולכן $u\equiv 0$.

נותר להראות ש־ $E'\left(t\right)=0$:

$$E'\left(t\right)=\int_{\Omega}\left(u_t u_{tt}+c^2\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\cdot u_{x_i t}\right)\mathrm{d}x$$

לפי משפט גאוס, $\int_{\Omega}\mathrm{div}\vec{w}\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{w}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$. נקח $\vec{w}=v_t\nabla_x v$ אזי

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{w}&=\mathrm{div}\left(v_t\vec{\nabla}_x v\right)\\&=v_t\Delta_x v+\boxed{\vec{\nabla}_x v_t\cdot\vec{\nabla}_x v}\end{aligned}$$

אבל זה בדיוק הגורם שבתוך האינטגרל , ולכן

$$\begin{aligned}E'\left(t\right)&=\int_{\Omega}u_t u_{tt}-c^2\left[\mathrm{div}\left(u_t\vec{\nabla}_x u\right)-u_t\Delta_x u\right]\\&=c^2\int_{\Omega}\mathrm{div}\left(u_t\vec{\nabla}_x v\right)\mathrm{d}x\\&=c^2\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial n_x}\mathrm{d}\sigma_x\end{aligned}$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה שניצב לשפה. אבל, $u|_{\partial\Omega}=0$ ולכן $u_t|_{\partial\Omega}=0$.

אם במקום תנאי דריכלה היה נתון תנאי נוימן, כלומר, $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0 \implies \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=h$

4.4.1 דוגמה נוספת: בעיית חום

עבור

$$\begin{aligned}&(PDE)\qquad u_t-k\Delta u=F\left(x,t\right)\quad \Omega\times\left(0,T\right)\\&(IC)\qquad u\left(x,0\right)=f\left(x\right)\quad x\in\Omega\\&(BC)\qquad \frac{\partial u}{\partial n}+\alpha\left(x\right)u=h\left(x\right)\qquad x\in\partial\Omega,\alpha>0\end{aligned}$$

זהו תנאי שפה מסוג שלישי, תנאי Robin.

נגדיר אנרגיה:

$$E\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}v^2\left(x,t\right)\mathrm{d}x$$

אנרגיה אפשרית נוספת שאפשר להגדיר כאן:

$$\tilde{E}_v\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\vec{\nabla}_x v\right|^2\mathrm{d}x$$

במשוואת החום, האנרגיה אינה נשמרת, אבל היא לא עולה.

יחידות נקח $v=u_1-u_2$ כאשר u_i פתרונות של הבעיה. צריך להוכיח ש־ $v\equiv 0$.

טענה 4.13 $E:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ־

1. $E\geq 0$
2. $E(0)=0$
3. $E'(t)\leq 0$

אם נוכיח את (3) (1+2 טריוויאליים) נקבל ש־$v\equiv 0$, כלומר, $u_1=u_2$.
נחשב שוב את $E'(t)$:

$$E'(t)=\int_\Omega vv_t\mathrm{d}x=\int_\Omega vk\Delta_x v\mathrm{d}x$$

ושוב נשתמש במשפט הדיברגנץ: נקח $w=v\vec{\nabla}v$ אזי $\mathrm{div}w=v\Delta v+\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}v$, ולכן,

$$\begin{aligned}&=k\int_\Omega \mathrm{div}\left(v\vec{\nabla}_x v\right)-\left|\vec{\nabla}_x v\right|^2\\&=-k\int\left|\vec{\nabla}_x v\right|^2+k\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n_x}\mathrm{d}\sigma_x\end{aligned}$$

$\frac{\partial v}{\partial n}=-\alpha(x)v$ ו־$\alpha\geq 0$, לכן יש לנו סכום של שתי פונקציה אי־שלילית,

$$=-k\int\left|\vec{\nabla}_x v\right|^2-k\int_{\partial\Omega}\alpha(x)v^2(x)\mathrm{d}\sigma_x\leq 0$$

וסיימנו.

עבור תוספת של "אופרטור שרדינגר" למשוואת החום, המשוואה תהיה $u_t-\underbrace{k\Delta u+V(x)u}_{S.O}=F$ נצטרך למצוא את הפוטנציאל כך שהאנרגיה אכן תתאפס.

4.5 בעיית קושי עבור משוואת הגלים הדו־מימדית

$$\begin{aligned}&(PDE)\qquad u_{tt}-c^2\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\right)=0\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,t>0\\&(IC)\qquad u(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2)\,,\,u_t(x_1,x_2,t=0)=g(x_1,x_2)\end{aligned}$$

כדי לפתור אותה, נשתמש ב**שיטת הירידה של הדמר**.

כל פתרון של משוואת הגלים הדו־מימדית, היא בפרט פתרון של משוואת הגלים התלת מימדית. אנחנו יודעים איך נראים פתרונות של משוואת הגלית התלת מימדית, לכן נפתור את משוואת הגלים התלת מימדית ואז נציב $x_3=0$.

נסתכל על פתרון של בעיית קושי הבאה:

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_{tt}-c^2\Delta_x\tilde{u}=0\qquad x\in\mathbb{R}^3,t>0\\&\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t=0)=f(x_1,x_2)\\&\tilde{u}_t(x_1,x_2,x_3,0)=g(x_1,x_2)\end{aligned}$$

ולאחר מכן נציב

$$u(x_1,x_2,t)=\tilde{u}(x_1,x_2,0,t)$$

ונטען ש־u הוא פתרון של הבעיה המקורית. ל־$\tilde{u}$ יש נוסחא מפורשת:

$$\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=ct}g\left(\vec{\xi}\right)\mathrm{d}s_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=ct}f\left(\vec{\xi}\right)\mathrm{d}\xi\right)$$

מציבים $x_3=0$ ו־$c^2t^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2$. אנחנו רוצים לעבור למשתנים ξ_1,ξ_2 בלבד: לעשות הטלה של המשטח למישור הדו מימדי, דיסק ברדיוס $r\le ct$.

$$\xi_3=\pm\underbrace{\sqrt{c^2t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}_{\sqrt{\quad}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_\xi&=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi^3}{\partial\xi_2}\right)^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\&=\sqrt{1+\left(\frac{\xi_1-x_1}{\sqrt{\quad}}\right)^2+\left(\frac{\xi_1-x_2}{\sqrt{\quad}}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{c^2t^2}}{\xi_3}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2=\left|\frac{ct}{\xi_3}\right|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\end{aligned}$$

אזי, לאחר ההצבה, נקבל

$$\tilde u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{g(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{f(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\right)$$

כאשר $r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}$

הערה 4.14 [9]

$$\begin{aligned}u_{tt}-c^2\Delta u=0,&\qquad\mathbb{R}^n\times(0,T)\\u_t(x,0)=g(x)&\quad u(x,0)=0\end{aligned}$$

ממימד 3, תחום ההשפעה יהיה ספרות כל ש־ $|x-\xi|=ct$. כל עוד התומך של g לא חותך את הספרה, נניח ב־ct_1מסויים, לא "מרגישים" את תחום ההתחלה. כאשר הספרה חותכת את התומך, למשל, כאשר $|x-\xi|=ct_2$, נקבל ש־$g(x)$ משפיע על הפתרון על ידי אינטגרל משטחי על החיתוך בין התומך של g לספירה.

אם נבחר $|x-\xi|=ct_3$, כך שהספירה עוברת את התומך, שוב לא נראה השפעה של תנאי ההתחלה על הפתרון u. במימד שלוש, זהו עיקרון הויגנס (במובן הצר).

לעומת זאת, במימד 2, נקבל את עקרון הויגנס במובן המוכלל: צריכים לבצע אינטגרציה על כל הדיסק (הן השפה והן הפנים שלו). לכן, כדי שתהיה השפעה של g על הפתרון u, התומך של g צריך להיות מוכל בדיסק ההשפעה, ct, ולא "לחתוך את שפתו", ולכן $u\not\equiv 0$ גם כעבור זמן רב – ההפרעה אינה חולפת.

5 שיטת הפרדת משתנים, פיתוח לפי פונקציות עצמיות

זוהי שיטה לפתרון בעיות התחלה־שפה, או בעיות שפה. בדרך כלל השיטה תהיה טובה בתחומים חסומים.

5.1 דוגמאות

ראשית נציג שני מודלים בהם שיטה זו תקפה, ראשית, נתעסק ב:

[9] 10.05.09

5.1.1 בעיית גלים מוכללת

$$\begin{aligned}
(PDE) \qquad & \rho(x)\, m(t)\, u_{tt} - L_x[u] = 0, \qquad x \in \Omega; t > 0 \\
(IC) \qquad & u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \Omega \\
(BC) \qquad & (DBC)\ u|_{\partial u} = 0 \text{ or } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \text{ or } \left.\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\, u\right|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}$$

כאשר

$$L_x[u] = \operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)\, u$$

תחת ההנחות:

- Ω תחום חסום וחלק למקוטעין.
- $p(x), \rho(x), q(x), \nabla p \in C(\bar{\Omega})$ ו־ $p, \rho : \bar{\Omega} \to (0,\infty)$
- $\alpha \geq 0$, רציפה על השפה.

דוגמה: $m, p, \rho \equiv 1$ ו־$q = 0$, אז מקבלים את משוואת הגלים. אם רק $p \equiv 1$, מקבלים $L[u] = \Delta u + q \cdot u$, הוא אופרטור שרדינגר.

5.1.2 משוואת חום מוכללת

$$\begin{aligned}
(PDE) \qquad & \rho(x)\, m(t)\, u_t - L_x[u] = 0, \qquad x \in \Omega; t > 0 \\
(IC) \qquad & u(x,0) = f(x), \qquad x \in \Omega \\
(BC) \qquad & (DBC)\ u|_{\partial u} = 0 \text{ or } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \text{ or } \left.\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\, u\right|_{\partial\Omega} = 0
\end{aligned}$$

$$L_x[u] = \operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)\, u$$

דוגמה פרטית עבור $n = 1$

$$L_x[u] = (pu')' + qu$$

אופרטו זה נקרא אופרטור **שטורם־ליוביל**.

5.2 שיטת הפרדת המשתנים

נפתור, כדוגמה את משוואת החום המוכללת, עם תנאי דריכלה, באמצעות ישטת הפרדת משתנים.
נחפש פתרונות מיוחדים:

$$u(x,t) = T(t) \cdot v(x)$$

פתרונות מופרדים/כפליים. לכאורה, אין שום סיבה שהפתרון לבעיית החום יראה ככה, אבל מתברר כי פתרונות מסוג זה מהוות אבני בניין לפתרון הכללי.
אם נציב $v(x) = 0$ או $T(x) = 0$, זה יהיה פתרון למשוואה ההומוגנית. לכן, נניח כי יש פתרונות כך ש־ $T(t), v(x)$ אינם טריוויאלים.
נחפש פתרונות מופרדים ל־(PDE) עם תנאי השפה, (BC).

נציב את הפתרון הכפלי במשוואת החום המוכללת, ונקבל

$$\rho(x)\,m(t)\,T'\cdot V=TL_x[v]=0$$

נפריד בין פונקציות התלויות רק ב־X לפונקציות התלויות רק ב־T, ונקבל

$$\frac{m(t)\,T'(t)}{T(t)}=\frac{L_x[v]}{\rho(x)\,v(x)}=-\lambda$$

כאשר $-\lambda$ הוא קבוע שלא תלוי ב־t או ב־x.
קיבלנו שתי משוואות. המשוואה הרגילה, התלויה ב־t[10]

$$(ODE_t)\qquad m(t)\,T'(t)+\lambda T(t)=0\qquad t>0$$

המשוואה השניה היא

$$(\star)\qquad L_x[v]+\lambda\rho(x)\,v=0\qquad x\in\Omega$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית חלקית התלויה רק במשתנה x. $v(x)$ מקיים את תנאי השפה,

$$(DBC)\qquad v|_{\partial\Omega}=0\qquad (v\not\equiv 0)$$

הגדרה 5.1 אומרים ש־$v_\lambda(x)$ היא פונקציה עצמית ו־λ הוא ערך עצמי של $(\star)$ עם ה־(DBC), אם $v_\lambda\neq 0$ הוא פתרון של הבעיה.

בבעיה זו, ρ נקראת "פונקצית משקל" בבעית הערכים העצמיים.
נניח ו־$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ הם פונקציות עצמיות של הבעיה עם ערכים עצמיים λ_i, בהתאמה. ויהיו $T_i(t)$ הפתרונות של (ODE_t) עם $\lambda=\lambda_i$. נגדיר:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i(t)\,v_i(x)$$

אז u הוא פתרון של הבעיה שלנו עם תנאי ההתחלה,

$$y(x,0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i(0)\,v_i(x)=f(x)$$

כלומר, f, תנאי ההתחלה, הוא צירוף לינארי של פונקציות עצמיות.

האם כל פונקציה f "סבירה" ניתן לכתוב כצרוף לינארי של פונקציות עצמיות?

דוגמה 1.5

$$\begin{aligned}(PDE)\qquad & u_t-ku_{xx}=0,\qquad 0<x<\pi,t>0,k>0\\ (BC)\qquad & u(0,t)=u(\pi,t)=0,\qquad t\geq 0\\ (IC)\qquad & u(x,0)=f(x)\qquad 0<x<\pi\end{aligned}$$

נכתוב את הפתרון

$$u(x,t)=T(t)\,v(x)$$

[10] אם היינו פותרים את משוואת הגלים, ההבדל היחיד הוא שכאן היינו מקבלים נגזרת מסדר שני

אזי

$$T'(t)+k\lambda T(t)=0 \qquad t>0$$

ו־

$$\begin{cases} v''+\lambda v=0 \\ v(0)=v(\pi)=0 \end{cases}$$

מתברר שכל הערכים העצמיים הם ממשיים (הבעיה היא צמודה לעצמה).

- נקח $\lambda<0$. הפתרון הכללי, הוא מהצורה

$$v_\lambda(x)=A_\lambda e^{\sqrt{-\lambda}x}+B_\lambda e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

האם יש פתרונות אקספוננציאלים כאלו שמתאפסים בקצוות?

$$=\alpha_\lambda\cosh\left(x\sqrt{-\lambda}\right)+\beta_\lambda\sinh\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$$

כאן, כאשר נציב $x=0$, נקבל ש־$\alpha_\lambda=0 \implies v_\lambda(0)=0$. נדרוש ש־$v_\lambda(x=0)=\pi$ ונקבל שג־$\beta_\lambda=0$, ונקבל ש־ $-\lambda<0>\lambda$ אינו ערך עצמי.

- עבור $\lambda=0$,

$$v_0(x)=a_0+b_0x$$

זוהי פונקציה לינארית שלא כולה אפס, שמתאפסת בשתתי נקודות. לכן, גם $\lambda=0$ אינו ערך עצמי.

$$\begin{aligned} v_0(0)=0 &\implies a_0=0 \\ v_0(\pi)=0 &\implies b_0=0 \end{aligned}$$

לכן, כל הערכים העצמיים חיוביים.

- $\lambda>0$. כאן הפתרון ניתן על יל משוואת הגלים, $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$

1. u מקיימת:

$$u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$$

כאשר צלעות המקבילית $ABCD$ על קווים אופיניים, כלומר, קווים מהצורה $x-ct=const$, $x+ct=const$.

2. קיימות פונקציות, $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, גזירות ברציפות פעמיים, כך ש־

- די

$$v_\lambda=a_\lambda\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)+b_\lambda\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

תנאי ההתחלה,

$$v_\lambda(0)=0 \implies a_\lambda=0$$

ו־

$$b_\lambda\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0 \implies \sqrt{\lambda}\pi=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$$

ולכן, $\lambda_n=n^2$. ו־

$$v_n(x)=\sin(nx)$$

פתרנו את בעיית שטורם־ליוביל.

נחזור לשאלה של פוריה: האם כל $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ "סבירה" ניתנת כצירוף לינארי של הפונקציות $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_{n_i}\sin(n_i x)$$

הרעיון של פוריה אמר ש־

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(nx)$$

כל פונקציה סבירה היא צירוף לינארי מוכלל של מערכת הפונקציות העצמיות של בעיית הערכים העצמיים.
צריך לתת איזשהו מובן מדויק יותר להתכנסות.

כמו כן, צריך למצוא את ה־α_n

דוגמה 2.5 נניח את השוויון:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(nx)$$

נכפול בפונקציה עצמית אחרת, $\sin(mx)$, ונעשה אינטגרציה בתחום $[0,\pi]$.

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(nx)\sin(mx)\right]\mathrm{d}x$$

נניח שההתכנסות היא במידה שווה, ולכן מותר להחליף את סדר האינטגרציה והסכימה,

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & ,n=m\\ 0 & ,n\neq m\end{cases}$$

לכן, כל האיברים בסכם הם 0, פרט למקרה שבו $m=n$, ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_0^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x=\alpha_m\frac{\pi}{2}$$

לכן,

$$\boxed{\alpha_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x}$$

מכאן אנחנו מסיקים שפונקציות עצמיות שמתאימות לערכים עצמיים שונים, ניצבות זו לזו.

טענה 5.2 פונקציות עצמיות השייכות לערכים עצמיים שונים, ניצבות זו לזו, ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle_{\rho}=\int_{\Omega}f(x)\,g(x)\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

במטריצות, סימטריות פרושה ש־$\langle Au,v\rangle=\langle u,Av\rangle$. נראה שמקרה דומה קורה אצלנו. נוכיח את טענת העזר:

טענה 5.3 (טענת עזר) $\langle L_x[u], v\rangle = \langle u, L_x[v]\rangle$

הוכחה: (לטענת העזר)
נסתכל על

$$\int_\Omega (L_x[u]v - uL_x[v])\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(p\vec{\nabla}u\right)\cdot v + \cancel{quv} - u\operatorname{div}\left(p\vec{\nabla}v\right) - \cancel{quv}\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(p\vec{\nabla}u\right)\cdot v - u\operatorname{div}\left(p\vec{\nabla}v\right)\right]\mathrm{d}x$$

חשבון ביניים קצר: $\operatorname{div}\left(P\vec{\nabla}u\right)v = \operatorname{div}\left(p\vec{\nabla}uv\right) - P\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v$, אזי

$$= \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(P\left(\vec{\nabla}u\right)v - P\left(\vec{\nabla}v\right)u\right)\right]$$

נשתמש במשפט הדיברגנץ:

$$= \int_{\partial\Omega} P\cdot\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

עם u, v מקיימות תנאי דריכלה: $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$, נקבל אפס. כנ"ל עבור תנאי נוימן, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$.
עבור תנאי מעורב, $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)\frac{\partial v}{\partial n} = 0$, נקבל ש־$\frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u$, ו

$$= \int_{\partial\Omega} P\left(v(-\alpha u) - u(-\alpha v)\right)\mathrm{d}\sigma = 0$$

לכן, בשלושת תנאי השפה, נקבל שהאופרטור הוא סימטרי. זוהי זהות גרין:

$$\boxed{\int_\Omega (L_x[u]v - uL_x(v))\,\mathrm{d}x \equiv 0}$$

■

הוכחה: (לטענה)
נניח ש־u פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ ו־v פונקציה עצמית עם ערך עצמי μ, עבור $\lambda \neq \mu$.

$$0 = \int_\Omega (L_x[u]v - uL_x[v]) = \int \left[-\lambda\rho(x)uv - u(-\mu\rho(x)v)\right]\mathrm{d}x$$
$$= -(\lambda-\mu)\int_\Omega u(x)v(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = -(\lambda-u)\langle u, v\rangle_\rho = 0$$

עבור $\lambda \neq \mu$, נקבל כי $\langle u, v\rangle_\rho = 0$. ■

למה 5.4 כל הערכים העצמיים הם ממשיים

הוכחה: נניח λ ערך עצמי עם פונקציה עצמית u, ונתבונן בפונקציה $\bar{u}$ (הצמוד הקומפלקסי של u)

טענה 5.5 $\bar{u}$ היא פונקציה עצמית של הבעיה עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$. **הוכחה:**

$$L_x[\bar{u}] + \bar{\lambda}\rho(x)\bar{u} = 0, \qquad x\in\Omega$$

עם תנאי השפה: $\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$.

$$L_x[\bar{u}] = \operatorname{div}\left(p(x)\underbrace{\vec{\nabla}\bar{u}}_{\overline{\vec{\nabla}u}}\right) + q(X)\bar{u}$$
$$= \overline{\operatorname{div}\left(p(x)\vec{\nabla}u\right) + q(x)u} \qquad (p, q:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$$
$$= \bar{\lambda}\rho\bar{u}$$

■

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left(L_x\left[u\right]\bar{u} - uL_x\left[\bar{u}\right]\right)\mathrm{d}x \\ &= -\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\int_\Omega u\bar{u}\rho\left(x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\underbrace{\int_\Omega \left|u\right|^2\rho\left(x\right)\mathrm{d}x}_{>0} \end{aligned}$$

אזי הביטוי כולו נותן אפס, אם ורק אם $\lambda = \bar{\lambda}$. ■

חזרה[11] בעיית חום (בעיית גלים)

$$\begin{aligned} &(PDE) \qquad m\left(t\right)\rho\left(x\right)u_t - \operatorname{div}\left(p\left(x\right)\vec{\nabla}u\right) + q\left(x\right)u = 0 \\ &(IC) \qquad u\left(x,0\right) = f\left(x\right) \\ &(DBC), (NBC)\ or\ (RBC) \end{aligned}$$

מחפשים פתרונות מיוחדים של ה־$(PDE)+(BC)$ כך ש־

$$\begin{aligned} u\left(x,t\right) &= T\left(t\right)U\left(x\right) \\ m\left(t\right)T' + \lambda T &= 0 \\ \operatorname{div}\left(p\left(x\right)\right) + q\left(x\right)v &= \lambda p\left(x\right)v + BC \end{aligned}$$

ראינו ש:

- פונקציות עצמיות השייכות לערכים עצמיים שונים נצבות זו לזו ביחס למכפלה הפנימית

$$\left\langle u,v\right\rangle_\rho = \int_\Omega u\left(x\right)v\left(x\right)\rho\left(X\right)\mathrm{d}x$$

- כל הערכים העצמיים ממשיים.

5.2.1 תכונות של מרחבי מכפלה פנימית

- תכונות:
  - סימטריות: $\left\langle v,u\right\rangle_\rho = \left\langle u,v\right\rangle_\rho$
  - לינאריות: $u,v,w\in V$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left\langle \alpha u + \beta v, w\right\rangle_\rho = \alpha\left\langle u,w\right\rangle + \beta\left\langle v,w\right\rangle$$

  - חיוביות:

$$\begin{aligned} &\left\langle u,u\right\rangle \ge 0, \forall u \\ &\left\langle u,u\right\rangle = 0 \iff u = 0 \end{aligned}$$

[11] 13.05.2009

הגדרה 5.6 נסמן ב־V את אוסף הפונקציות הרציפות ב־Ω, המקיימות,

$$\int_{\Omega} u^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

המכפלה הפנימית משרה **נורמה**:

$$\|u\|_{\rho} = \left(\int_{\Omega} u^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

- תכונות הנורמה:
  - הומוגניות, לכל $\alpha \in \mathbb{R}, u \in V$, $\|\alpha U\| = |\alpha|\,\|U\|$
  - חיוביות: $\|u\| \geq 0$ ו־$\|u\| = 0 \iff u = 0$
  - אי שוויון המשולש: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- הנורמה משרה מטריקה: $\mathrm{d}(u,v) = \|u-v\|$

האם מרחב המכפלה הפנימית שהגדרנו הוא שלם? באופן טבעי, לא.
נשתמש במשפט ההשלמה, ונסמן את מרחב ההשלמה ב־$L^2(\Omega, \rho(x)\,\mathrm{d}x)$, מרחב הפונקציות אינטגרביליות לבג עם אינטגרל חסום על תחום Ω עם פונקצית המשקל ρ.

$$L^2(\Omega, p\mathrm{d}x) = \left\{ u_{\text{mesureable}} \;\middle|\; \int_{\Omega} u^2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

כאשר u פונקציות מדידות.

$$[u] = \{\, u \mid u = v \,\}$$

כאשר $u = v$ באומגה בכמעט כל הנקודות.
אוסף הפונקציות הרציפות צפוף בתוך $L^2(\Omega, \rho\mathrm{d}x)$, כלומר, אם $u \in L^2$, קיימת סדרה (u_n) של פונקציות רציפות ב־Ω, כך ש־$\|u_n - u\|_{\rho} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הגדרה 5.7 יהיו $u, v \in L^2$. אומרים ש־u ניצב ל־v אם $\langle u, v\rangle_{\rho} = 0$

הגדרה 5.8 סידרה $\{u_n\} \subseteq L^2$ תקרא אורתוגונלית אם

$$\langle u_n, u_m\rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ a_n > 0 & n = m \end{cases}$$

הגדרה 5.9 סידרה $\{u_n\} \subseteq L^2$ תקרא אורתונורמלית אם

$$\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{nm}$$

טענה 5.10 תהי $\{u_n\}$ סדרה אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V, ותהי $u \in V$, אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, u_n\rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

זהו אי שוויון בסל. המקדמים $\langle u, u_n\rangle$ נקראים "מקדמי פוריה" של u ביחס למערכת האורתונורמלית $\{u_n\}$.

מסקנה 5.11 (הלמה של רימן־לבג)

$$\langle u, u_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הגדרה 5.12 אומרים שסדרה אורתונורמלית $\{u_n\}$ היא **שלמה** במרחב מכפלה פנימית אם לכל $u \in V$ מתקיים שוויון באי־שוויון בסל.

$\iff$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle u, u_n \rangle u_n - u \right\| = 0$$

הגדרה 5.13 אם הגבול מתקיים, מסמנים

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle u_n$$

והטור האינסופי הנ"ל נקרא "**פיתוח פוריה**" של u ביחס למערכת (השלמה) $\{u_n\}$.

5.2.2 סדרות של פונקציות עצמיות

משפט 5.14 1. הריבוי הגיאומטרי של ערכים עצמיים לבעיית הערכים העצמיים שקיבלנו הוא סופי[12].

2. לבעיית הערכים העצמיים שקיבלנו יש סדרה אינסופית של ערכים עצמיים

$$\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \dots$$

כך ש־ $\lambda_n \to \infty$. (מצב יסוד, λ_0 הוא פשוט, אין לו ערכים מנוונים)
לאחר תהליך גרהם־שמידט, נקבל סדרה אינסופית[13] של פונקציות עצמיות, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ של הבעיה, ו־

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \to \infty$$

3. סדרת הפונקציות העצמיות $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ שקיבלנו היא סדרה אורתונורמלית שלמה, במרחב $L^2\left(\Omega, \rho \mathrm{d}x\right)$.
כלומר, לכל $u \in L^2$, אז

$$u\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u, \varphi_n \right\rangle_{\rho} \varphi_n\left(x\right)$$

כלומר,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{N} \left\langle u, \varphi_n \right\rangle_{\rho} \varphi_n\left(x\right) \right\| = 0$$

- Ω חסומה.
- p, ρ, q רציפות בתוך התחום, ועל השפה: $p, \rho, q \in C\left(\bar{\Omega}\right)$
- Ω חסומה עם שפה חלקה (C^2)

[12] לא הוכחנו
[13] לא הוכחנו אינסופיות

5.2.3 מנת קיילי, עקרון ריילי־ריס

משפט 5.15 [14]

$$\lambda_0 = \min_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \left\{ \frac{-\langle Lu, u \rangle_1}{\langle u, u \rangle_\rho} \right\}$$

אם אנחנו כותבים $\min$, אז חלק מהטענה הוא שהמינימום מתקבל.
המינימום מתקבל עבור u אם ורק אם u פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ_0.

נותר לנו להגדיר את המרחב V:

$$V = \left\{ u \in C^2(\Omega) \mid B[u] = 0 \right\}$$

(כאשר $B[u] = 0$ הוא תנאי השפה) **הוכחה:** (פורמלית. ההוכחה האמיתית לא נתנת בקורס)

$$\frac{-\langle Lu, u \rangle}{\langle u, u \rangle_r} =$$

נסמן $\hat{u}_k = \langle u, \varphi_k \rangle_r$, מקדמי הפוריה של u ביחס ל־ φ_k. אזי

$$= \frac{-\langle L\left[\sum \hat{u}_k \varphi_k\right], \sum \hat{u}_\ell \varphi_\ell \rangle}{\langle \sum \hat{u}_k \varphi_k, \sum \hat{u}_\ell \varphi_\ell \rangle_r}$$

המכנה ניתן על ידי זהות פרסבל: אם המערכת היא שלמה אז ריבוע הנורמה ניתנת על ידי סכום ריבועי מקדמי פוריה. האופרטור L הוא לינארי. נניח שמותר לנו להחליף את הסכום הסופי והאופרטור הלינארי

$$= \frac{\langle \sum -\hat{u}_k L[\varphi_k], \sum \hat{u}\varphi_k \rangle}{\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}$$

אבל $-L[\varphi_k] = \hat{u}_k \rho \lambda_k \varphi_k$, כי φ_k ערך עצמי של L

$$= \frac{\sum_{k,\ell=0}^{\infty} \lambda_k \hat{u}_k \hat{u}_\ell \langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle_\rho}{\sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}$$

מהאורתונורמליות של φ, נקבל

$$= \frac{\sum \lambda_k \hat{u}_k^2}{\sum \hat{u}_k^2}$$

נקטין את הביטוי: $\lambda_0 \leq \lambda_k$

$$\geq \frac{\sum \lambda_0 \hat{u}_k^2}{\sum \hat{u}_k^2} = \lambda_0$$

השוויון מתקבל אם ורק אם, לכל $\hat{u}_k \neq 0$, $\lambda_k = \lambda_0$. יש לכל היותר מספר סופי של כאלה. לכן, u פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ_0
נותר להוכיח שמתקבלת λ_0. נקח φ שהיא פונקציה עצמית עם וקטור עצמי λ_0. נקרא לה למשל φ_0.

$$\frac{\langle -L\varphi_0, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle_\rho} = \frac{\langle \rho\lambda_0\varphi_0, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle_\rho} = \lambda_0$$

■

[14] בקוונטית 1 קראו לזה "עקרון הואריאציה"

משפט 5.16 הערך העצמי הראשון, λ_0 הוא פשוט, והפונקציה העצמית שומרת סימן **ממש** ($0 < \varphi_0$ או $\varphi_0 < 0$) ב־Ω.

הוכחה: אם φ_0 פונקציה עצמית, אז קיבלנו

$$\langle L\varphi_0, \varphi_0\rangle = -\lambda_0 \langle \varphi_0, \varphi_0\rangle_\rho$$

$$\varphi_0(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$$

כאשר

$$\varphi_+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$$

בלי הגבלת הכלליות, נבחר $\|\varphi_0\|_\rho = 1$.

$$\langle \varphi_+, \varphi_-\rangle_\rho = \int \varphi_+(x)\varphi_-(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

כלומר, הן אורתוגונליות. באותה צורה,

$$\langle L\varphi_0, \varphi_0\rangle = \langle L\varphi_+, \varphi_+\rangle + \langle L\varphi_-, \varphi_0\rangle$$

אזי

$$-\langle L\varphi_+, \varphi_+\rangle \geq \lambda_0 \langle \varphi_+, \varphi_+\rangle_\rho$$

לפי עקרון ריילי ריס, ובאותה צורה,

$$-\langle L\varphi_-, \varphi_-\rangle \geq \lambda_0 \langle \varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho$$

מצד שני,

$$-\langle L\varphi_0, \varphi_0\rangle = -\lambda_0 \langle \varphi_0, \varphi_0\rangle_\rho = -\lambda_0 \langle \varphi_+, \varphi_+\rangle - \lambda_0 \langle \varphi_-, \varphi_-\rangle$$

כלומר,

$$-\lambda_0 \left[\langle \varphi_+, \varphi_+\rangle_\rho + \langle \varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho\right] \geq -\lambda_0 \left[\langle \varphi_+, \varphi_+\rangle_\rho + \langle \varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho\right]$$

זהו אי שוויון טריוויאלי שהגיע ממספר אי שוויונות. לכן, מתקיים שוויון:

$$-\langle L\varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho = \lambda_0 \langle \varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho$$
$$-\langle L\varphi_-, \varphi_-\rangle_\rho = \lambda_0 \langle \varphi_+, \varphi_+\rangle_\rho$$

לכן, φ_+, φ_- הן פונקצית האפס או פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ_0 (כלומר, φ_0)
על פי משפט המקסימום המוכלל [15], פתרון אי־שלילי של משוואה אליפטית הוא או אפס זהותית, או חיובי ממש בתוך התחום. ולכן או $\varphi_+ = 0$ או $\varphi_- = 0$.
פונקציה זו מכונה בפי פיזיקאים, **מצב יסוד**.

הערה 5.17 [16]נוכיח טענה שדילגנו עליה במהלך ההוכחה: $\langle L\varphi_+, \varphi_+\rangle = 0$:

$$\int L[u]\,u\mathrm{d}x = \int Lu_+u_+\mathrm{d}x + \int Lu_-u_-\mathrm{d}x$$

$$\vec{\nabla}u_+ = \begin{cases} \vec{\nabla}u & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

[15]נלמד עליו בהמשך
[16]ההוכחה לא מושלמת

■

דוגמה 3.5

$$\begin{cases} u''+\lambda u=0 & (0,\pi) \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{cases}$$

אזי הפונקציה העצמית הראשונה, $\sin(x)$, חיובית בקטע.

טענה 5.18 λ_0[17] הוא ערך עצמי פשוט

הוכחה: נניח u,v פונקציות עצמיות, עם ערך עצמי λ_0.

$$\left(\int_\Omega v\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)\neq 0$$

כי לפי המשפט הקודם, u,v חיוביות ממש. נניח ש־u,v אינן תלויות לינארית , ולכן, לכל μ,

$$w_\mu=u-\mu v\neq 0$$

כאשר גם w_μ הוא פונקציה עצמית. נסתכל על

$$I_\mu=\int_\Omega w_\mu\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}x-\mu\int v\mathrm{d}x$$

$\int u\mathrm{d}x,\int v\mathrm{d}x$ הם מספרים, ולכן קיים μ כך ש־

$$\int u\mathrm{d}x=\mu\int v\mathrm{d}x$$

ולכן $I_\mu=0$, בסתירה להנחה, כי $w_\mu>0$ או $w_\mu<0$, ולכן האינטגרל לא יכול להתאפס. ■

סיכום: תכונות פונקציות עצמיות וערכים עצמיים

1. כל הערכים העצמיים ממשיים מריבוי סופי
2. ניצבות:
3. שלמות
4. φ_0 פונקציה עצמית של λ_0 שומרת סימן
   (א) λ_0 הוא ערך עצמי פשוט
5. נוסחאת ריילי־ריס
6.

$$\begin{aligned}\lambda_0&=\inf_{\substack{i\neq 0\\ u\in V}}\frac{\int_\Omega -L[u]u\mathrm{d}x}{\int_\Omega \rho u^2\mathrm{d}x}\\ &=\inf_{\substack{u\in v\\ u\neq 0}}\frac{\int p(x)\left|\vec{\nabla}u\right|^2\mathrm{d}x-\int qu^2\mathrm{d}x\pm\int_{\partial\Omega}p(x)\frac{n\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma}{\int\rho u^2\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

[17] 24.05.2009

מסקנה 5.19 אם $q \leq 0$ ו־DBC או NBC (תנאי דריכלה או נוימן) או RBC (רובן) ו־+ $B[u] = \frac{\partial u}{\partial n}$ $\alpha(x)u = 0$ עם $\alpha \geq 0$ או $\alpha \leq 0$, אז $\lambda_0 \geq 0$. אז

$$\int_{\partial\Omega} p(x)\, u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = -\int p(x)\, \alpha(x)\, u^2 \mathrm{d}x$$

5.2.4 כמה נקודות, להשכלה כללית

תחום ההתאפסות ש לפונקציה עצמית u,

$$\{\, x \in \Omega \mid u(x) \lesseqgtr 0 \,\}$$

מרכיב קשיר.

במימד אחד, בבעיית שטורם־ליוביל,

$$(pu')' + qu + \lambda ru = 0 \qquad x \in (a,b)$$

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \\ \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \end{aligned}$$

כאשר מתקיים $|\alpha| + |\beta| > 0$ ו־$|\gamma| + |\delta| > 0$, ו־$r, q, p', p \in C([a,b])$ ו־$p, r > 0 \text{ in } [a,b]$

דוגמה 4.5

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u = 0 \qquad & [0,\pi] \\ \varphi_n(x) = \sin((n+1)x) \qquad & n \geq 0 \\ \lambda_n = (n+1)^2 & \end{aligned}$$

משפט 5.20 1. כאשר המימד, $d = 1$, לפונקציה העצמית ה־n (מתחילים לספור מאפס), יש בדיוק n שורשים בקטע (a,b) (במימד אחד, כל הערכים העצמיים פשוטים)

2. כאשר $d \geq 2$, לפונקציה ה־n יש לכל היותר n תחומי־התאפסות ב־Ω

ההתנהגות האסימפטוטית של λ_n כאשר $n \to \infty$ בכל מימד,

$$\lambda_n \sim C_{L,\Omega} n^{\frac{2}{d}}$$

כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^{2/d}} = C_{L,\Omega}$$

תרגיל: לחשב $\Delta u + \lambda u = 0$ בתחום $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ עאשר $u|_{\partial\Omega} = 0$.

5.3 אז איך פותרים בעיות התחלה־שפה?

נסתכל שוב על בעיית חום כללית:

$$\begin{aligned}
(PDE)\quad & L[u]=r\left(x\right)u_t-\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\vec{\nabla}u\right)-q\left(x\right)u=F\left(x,t\right)\qquad x\in\Omega,t>0\\
(IC)\quad & u\left(x,0\right)=f\left(x\right)\qquad x\in\Omega\\
(BC)\quad & DBC\,\text{or}\ NBC\ \text{or}\ RBC
\end{aligned}$$

כאשר בשלב זה, תנאי השפה הומוגניים. למשל, $u|_{\partial\Omega}=0$.
נסתכל על בעיית הערכים העצמיים הקשורה לבעיה ההומוגית:

$$u\left(x,t\right)=T\left(t\right)\cdot V\left(x\right)$$

צריכה לקיים:

$$r\left(x\right)T'v-L\left[v\right]T=0$$

ומתקבל,

$$\frac{T'}{T}=\frac{Lv}{rv}=-\lambda$$

ובסופו של דבר, מתקיים

$$T'+\lambda T=0,\qquad t>0$$

והמשוואה עבור x היא

$$L\left[v\right]+\lambda rv=0\qquad\text{in }\Omega$$

עם תנאי השפה ההומוגניים. תהא $\{\varphi_n\}$ סידרה אורתונורמלית שלמה של הפונקציות העצמיות של הבעיה, ו־$\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$ הערכים העצמיים המתאימים.
אזי,

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\left(t\right)\varphi_n\left(x\right)$$

לכל t קבוע. השוויון הוא בנורמה.

$$u_n\left(t\right)=\int_{\Omega}u\left(x,t\right)\varphi_n\left(x\right)\mathrm{d}x$$

ניתן להציב את u לתוך הבעיה. אפשר להציב גם את F:

$$\begin{aligned}
F\left(x,t\right)&=\sum F_n\left(t\right)\varphi_n\left(x\right)\\
f\left(x\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\varphi_n\left(x\right)
\end{aligned}$$

נטען שמהמקדמים f_m,F_n ניתן למצוא את $u\left(t\right)$.

עוד בעיית חום[18]

$$\begin{aligned}
(PDE)\quad & m\left(t\right)r\left(x\right)u_t-L_x\left[u\right]=F\left(x,t\right)\ in\,\Omega\times\left(0,T\right)\\
(BC)\quad & B\left[u\right]=0\,on\,\partial\Omega\\
(IC)\quad & u\left(x,0\right)=f\left(x\right)\ x\in\Omega
\end{aligned}$$

[18] 27.05.2009

בעיית הערכים העצמיים הקשורה לבעיה זו היא

$$\begin{aligned} L[v] + \lambda r(x)\, v &= 0 \\ B[v] &= 0 \qquad v = v(x) \end{aligned}$$

יהיו λ_n הסדרה העולה של כל הערכים העצמיים, ו־$\varphi_n(x)$ הסידרה האורתונורמלית השלמה המתקבלת, של הפונקציות העצמיות.

אז,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, \varphi_n(x)$$

כאשר ההכתנסות היא התכנסות ב־L^2 , ו־$u_n(t)$ הם מקדמי פוריה,

$$u_n(t) = \int_\Omega u(x,t)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x$$

נרצאה למצוא את u_n. האם מקדמים אלו נקבעים בצורה חד־חד־ערכית, והאם הם נותנים לנו פתרון?

נפתח את $f, \frac{F}{r}$ לפי הפונקציות העצמיות:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \\ f_n &= \int_\Omega f(x)\, \varphi_n(x)\, r(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ו־

$$\frac{F(x,t)}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)\, \varphi_n(x)$$

ולכן,

$$F_n(t) = \int_\Omega F(x,t)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x$$

נשים לב, שזו המכפלה הפנימית הרגילה, עם משקל "1" ולא r.

נמצא מד"ר ש־$u_n(t)$ מקיימת:

$$\begin{aligned} m(t)\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} &= \int_\Omega \underbrace{m(t)\, r(x)\frac{\partial u}{\partial t}}_{=F(x,t)+L_x[u]} \varphi_n(x) \\ &= \int_\Omega L_x[u]\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x + \underbrace{\int F(x,t)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x}_{F_n(t)} \end{aligned}$$

כיוון ש־u מקבלת את תנאי השפה ההומוגניים, ניתן להחליף את הסדר, לפי נוסחאת גרין ($\int L[u]\, v \mathrm{d}x = \int uL[v]\, \mathrm{d}x$), ולקבל, עבור הביטוי הראשון:

$$\begin{aligned} &= \int_\Omega u(x,t) \underbrace{L[\varphi_n]}_{-\lambda_n r \varphi_n} \mathrm{d}x + F_n(t) \\ &= -\lambda_n \underbrace{\int u(x,t)\, \varphi_n(x)\, r(x)\, \mathrm{d}x}_{u_n(t)} + F_n(t) \end{aligned}$$

וקיבלנו את המשוואה,

$$m(t)\, r(x)\, \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} = -\lambda_n u_n(t) + F_n(t)$$

וקיבלנו את המד"ר,

$$m(t)\, u_n' + \lambda_n u_n = F_n \qquad t > 0$$

עם תנאי ההתחלה,

$$u_n(0) = ?$$

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \int_\Omega u(x,0)\, \varphi_n(x)\, r(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int f(x)\, \varphi_n(x)\, r(x)\, \mathrm{d}x = f_n \end{aligned}$$

והנוסחא, עבור $m(t) = 1$, היא

$$u_n(t) = f_n e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \int_0^t F_n(\tau)\, e^{\lambda_n \tau} \mathrm{d}\tau$$

זוהי מערכת מד"רים מסגר ראשון, לינארית ואי־הומוגנית, שקיימת נוסחה סגורה לפתרונה. לכן,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\, \varphi_n(x)$$

הוא מועמד לפתרון. עתה צריך לבדוק שהמועמד הזה, הוא אכן פתרון. צריך לבדוד התכנסות, גזירות, קיום תנאי התחלה ושפה במשוואה.

דוגמה מפורשת:

$$\begin{aligned} (PDE) &\quad u_t - u_{xx} = 1 \qquad 0 < x < \pi, t > 0 \\ (BC) &\quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ (IC) &\quad u(x,0) = f(x) = x^2 (\pi - x)^2 \end{aligned}$$

בעיית שטורם־ליוביל המתאימה,

$$\begin{aligned} v'' + \lambda v &= 0 \qquad 0 < x < \pi \\ v'(0) = v'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

כל הערכים העצמיים ממשיים ואי־שליליים (כי $q \geq 0$) אזי,

- $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} v'' &= 0 \\ v'(0) = v'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

אזי $v_0(x) = 1$.

- $\lambda > 0$,

$$v''_\lambda + \lambda v_\lambda = 0$$

אזי הפתרונות הם $\sin, \cos$: הפתרונות הם

$$v_\lambda\left(X\right) = a_\lambda \cos\sqrt{\lambda}x + b_\lambda \sin\sqrt{\lambda}x$$

וצריכים להתקיים תנאי השפה:

$$\begin{aligned} v'_\lambda\left(0\right) = 0 &\implies b_\lambda = 0 \\ v'_\lambda\left(\pi\right) = 0 &\implies a_\lambda\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = n \qquad \left(n = 1, 2, \ldots\right) \end{aligned}$$

קיבלנו ערכים עצמיים:

$$\lambda_n = n^2 \qquad \left(n = 1, 2, \ldots\right)$$

וסדרת הפונקציות העצמיון הן $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$. זו אינה סידרה מנורמלת, אבל היא אורתוגונלית.

– הנרמול:

$$\int_0^\pi \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

ולכן, הנרמול הוא $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. הנרמול של "1" $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

מצאנו את הבסיס, ונותר למצוא את $u_n\left(t\right)$

$$u\left(x,t\right) = \sum u_n\left(t\right)\varphi_n\left(x\right)$$

ומקיימת את המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} + n^2 u_n = F_n$$

כאשר

$$F_n = \int_0^\pi 1\varphi_n \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \sqrt{\pi} & n = 0 \end{cases}$$

לכן, עבור $n \neq 0$, המשוואה היא

$$u'_n + n^2 u = 0$$

עם תנאי ההתחלה,

$$\begin{aligned} n > 0 \qquad & u_n\left(0\right) = f_n = \int_0^\pi x^2\left(\pi - x\right)^2 \cos nx \, \mathrm{d}x \\ n = 0 \qquad & u_0\left(0\right) = f_0 = \int_0^\pi x^2\left(\pi - x\right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ולכן, הפתרון של המשוואה, עבור $n \neq 0$, הוא

$$u_n\left(t\right) = f_n e^{-n^2 t}$$

עבור $n = 0$, המשוואה היא

$$u'_0 = \sqrt{\pi}$$

אזי,

$$u_0(t)=f_0+\sqrt{\pi}t$$

אזי,

$$u(x,t)=f_0+\sqrt{\pi}t+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cos nx\,e^{-n^2t}$$

יש לנו חסם על f_n: $f_n<\pi^4$, לכן

$$|u_n(x,t)|\le\pi^4\cdot e^{-n^2t}<\pi^2e^{-n^2\varepsilon}\qquad t>\varepsilon>0$$

זהו איבר כללי של טור מספרים שמתכנס, ולכן הטור u_n מתכנס במידה שווה.
בחישוב מפורש של f_n (באמצעות מתמטיקה)[19] קיבלנו

$$f_n=\begin{cases}-\frac{3\pi^2}{k^2} & ,n=2k\\ 0 & ,n=2k+1\end{cases}$$

אזי,

$$|u_n(x,t)|\le\frac{c}{n^4}e^{-n^2\varepsilon}$$

לכל $t>\varepsilon$. לכן, הטור עצמו (ובמקרה הזה, גם טור הנגזרות מסדר שני) מתכנס במידה שווה. כאשר גוזרים לפי x, האיבר הכללי של טור הנגזרות לפי x מתנהג כמו

$$\left|u_n^{(1)}(x,t)\right|\le\frac{ce^{-n^2\varepsilon}}{n^3}$$

האיבר הכללי של טור "הנגזרות" חסום על ידי $\frac{c}{n^2}e^{-n^2\varepsilon}$. אם מסתכלים על המלבן $[0,T]\times[0,\pi]$, אז האיבר הכללי של טור הנגזרות לפי x, לפי t, וטור הנגזרות השניות לפי x, חסום על ידי $\frac{c}{n^2}$, ולכן, כל הטורים הללו מתכנסים במידה שווה במלבן זה.
לכן, מותר לגזור איבר־איבר, והטורים המתאימים מתכנסים לנגזרות המתאימות.
נקח את

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\cos nx\right)_t-\left(\sum u_n(t)\cos nx\right)_{xx}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(u_n'(t)+n^2u_n(t)\right)\cos nx=1$$

ולכן המשוואה מתקיימת. גם תנאי השפה מתקיימים: $\cos nx$ מתאפס על השפה, ותנאי השפה מתקיים. נותר לבדוק את תנאי ההתחלה:

$$u(x,0)=f_0+\sqrt{\pi}t+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cos nx\overset{?}{=}f(x)$$

יש התכנסות ב־L^2, אבל האם הטור מתכנס במידה שווה ל־$f(x)$?

משפט הפיתוח במימד אחד (בעיית שטורם ליוביל)

משפט 5.21 (הפיתוח)
תהא $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ המערכת האורתונורמלית השלמה השייכת לבעיית שטורם־ליוביל רגולרית בקטע $[a,b]$, ותהא f פונקציה גזירה למקוטעין בקטע $[a,b]$. אז, הפיתוח לפי הפונקציות העצמיות מתכנס (נקודתית) לכל $x\in(a,b)$ ל־$\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}$.
אם בנוסף, f רציפה ומקיימת את תנאי השפה, אז ההתנסות היא במידה שווה לפונקציה f.

הערה 5.22 במימדים יותר גבוהים, אין משפטים כלליים כאלו, וצריך לדון לכל מקרה לגופו.

לכן, בדוגמא שלנו, u מקיימת את כל תנאי הבעיה, ולכן זהו פתרון אמיתי.

[19] 31.05.2009

נגזרות מרובות: באופן כללי,

$$\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial t^{\beta}}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}}\varphi_{n}\right|\leq\frac{C_{\alpha,\beta}n^{\alpha}n^{2\beta}}{n^{4}}e^{-n^{2}\varepsilon}$$

כלומר, ככל שממשיכים וגוזרים, ההתכנסות של הטור היא יותר ויותר "גרועה" עבל כל עוד $t>\varepsilon>0$, האיבר הכללי חסום על ידי איבר כללי של טור מספרים מתכנס ($e^{-n^{2}\varepsilon}$), ולכן הפונקציה גזירה אינסוף פעמים בתוך המלבן.

מסקנה 5.23 u גזירה מכל סדר לפי x ולפי t , במלבן הפתוח $0<x<\pi,t>0$.

זו ההחלקה שקיימת מיד לכל תנאי התחלה, בבעיה פרבולית.

דוגמה 5.5 נקח את משוואת הגלים, אם אותם תנאי התחלה.

$$\begin{aligned}u_{tt}-u_{xx}=1\qquad & 0<x<\pi,t>0\\ u_{x}\left(0,t\right)=u_{x}\left(\pi,t\right)=0\\ u\left(x,0\right)=x^{2}\left(\pi-x\right)^{2},\ u_{t}\left(x,0\right)=0\end{aligned}$$

נפתור באותה הצורה:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n}\left(t\right)\cos\left(nx\right)$$

והפעם, נקבל,

$$u_{n}''\left(t\right)+n^{2}u_{n}\left(t\right)=\begin{cases}1 & ,n=0\\ 0 & ,n>0\end{cases}$$

עבור $n>0$, נקבל

$$u_{n}\left(t\right)=a_{n}\cos\left(nt\right)+b_{n}\sin\left(nt\right)\qquad n>0$$

ועבור $n=0$,

$$u_{n}\left(0\right)=f_{n}$$

ו־$\left|f_{n}\right|<\frac{c}{n^{4}}$. מצד שני,

$$u_{n}\left(0\right)=a_{n}$$

נסתכל על $u_{n}'\left(0\right)$, ונקבל,

$$u_{t}\left(x,0\right)=\sum b_{n}n\cos\left(nt\right)\cos\left(nx\right)$$

ומצב שני, $u_{t}\left(x,0\right)\equiv0$ לפי תנאי ההתחלה, ולכן $b_{n}=0$.
אז

$$u\left(x,t\right)=u_{0}\left(x,t\right)+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\cos nt\,\cos nx$$

הפעם, איבר ההנחתה האקספוננציאלי לא קיים. האיבכ הכללי $\left|u_{n}\left(x,t\right)\right|\leq\frac{c}{n^{4}}$. הטור עדין יתכנס עבור גזירה פעמיים, ולכן זהו פתרון אמיתי, אבל בגלל שאין את איבר ההנחתה הדומיננתי, $e^{-n^{2}t}$. בדוגמה הזו הטור מתכנס במ"ש עד סדר שני.

עבור פונקציות התחלה קצת פחות "יפות", למשל, פונקציה שאינה רציפה אך מקיימת את תנאי השפה, למשל, $\theta\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, לא יהיה פתרון אמיתי.

$$\tilde{f}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\sim\frac{1}{n}$$

הטור אינו מתכנס במ"ש, ולכן לא ניתן לגזור איבר־איבר.

לכן, טור הנגזרות הראשונות לא מתכנס.

5.4 תנאי שפה לא הומוגניים

$$\begin{aligned} u_t-L_x[u]&=F(x,t) \quad & x\in\Omega, t>0 \\ B[u]&=g(x,t) \quad & x\in\partial\Omega,\, t>0 \end{aligned}$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad x\in\Omega$$

מוצרים פונקציה $v(x,t)$ חלקה ב־$[0,t]\times\bar{\Omega}$ כך ש־ $B[v]=g(xt)$.

למשל, עבור תנאי דריכלה במימד אחד,

$$\begin{aligned} u(0,t)&=\alpha(t) \\ u(\pi,t)&=\beta(t) \end{aligned}$$

נמצא פונקציה המקיימת את תנאי השפה. עבור תנאי שפה רגולריים במימד אחד, הצורה הכללית של פונקצית עזר כזו היא:

$$v(x,t)=\left(a+bx+cx^2\right)\alpha(t)+\left(d+ex=hx^2\right)\beta(t)$$

צריכים למצוא את מקדמי הפולינומים כך שיתקיימו תנאי השפה. אזי, עבור בעיית דריכלה,

$$v(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\alpha(t)+\frac{x}{\pi}\beta(t)$$

מקיימת את תנאי השפה.

נניח שמצאנו v כללית כזו, במקרה הכללי, המקייימת את תנאי השפה. נחפש

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

, אזי w צריכה לקיים את הבעיה, המתקבלת מהצבת w במשוואה המקורית:

$$\begin{aligned} w_t&=v_t-u_t \\ L_x[w]&=L_x[v]-L_x[u] \end{aligned}$$

לכן,

$$w_t-L_x[w]=-\left(\underbrace{(v_t-L_x[v]}_{known}\right)+\left(\underbrace{u_t-L_x[u]}_{F(x,t)}\right)$$

אזי

$$v_t-L_x[v]-F(x,t)=\tilde{F}(x,t)$$

אזי

$$B[w]=B[u]-B[b]=g-g=0$$

ולכן W מקיימת תנאי שפה הומוגניים.

$$w(x,0)=u(x,0)-v(x,0)=f(x,0)-v(x,0)=\tilde{f}(x)$$

ועשינו רדוקציה למקרה הידוע.

6 משפטי מקסימום למשוואות אליפטיות מסדר שני

הצורה הכללית של משוואה לינארית מיסדר שני, $L[u]$ היא

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)\,\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_i u + c(x)\,u \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

כאשר $\partial_i\partial_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

הגדרה 6.1 האופרטור L יקרא **אליפטי**, בנקודה $x \in \Omega$ אם המטריצה $[a_{ij}(x)]$ מוגדרת חיובית בנקודה x, כלומר, קיים $\lambda > 0$ כך ש־

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

לכל $\xi \in \mathbb{R}^n$.

הגדרה 6.2 L יקרא **אליפטי במידה שווה** ב־Ω אם הוא אליפטי בכל נקודה ו־$\lambda(x) > \lambda > 0$.

$\lambda(x)$ יהיה, בעצם, הערך העצמי הקטן ביותר.

הערה 6.3 בגלל שאנחנו עוסקים במשוואה לינארית מסדר שני, $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, ולכן $[a_{ij}(x)]$ סימטרית, ולכן כל הערכים העצמיים ממשיים

הנחה: $a_{ij}, b_i c \in C(\bar{\Omega})$

הגדרה 6.4 $u \in C^2(\Omega)$ יקרא **תת־פתרון** אם $Lu \geq 0$, ויקרא **על־פתרון** אם $Lu \leq 0$ ב־Ω.

סימון: $L_0[u] = \sum a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u + \sum b_i(x)\,\partial_i u$

6.1 משפט המקסימום החלש

משפט 6.5 (המקסימום החלש)
יהא L אופרטור אליפטי במידה שווה על Ω תחום חסום, ו־$c \equiv 0$. תהא $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, המקיימת $L_0 u \geq 0$ ($L_0 u \leq 0$) אז,

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$
$$\left(\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)\right)$$

דוגמה 1.6 במקרה חד מימדי,

$$u'' \geq 0$$

כלומר, u קמורה בקטע. ואכן, המקסימום של פונקציה קמורה מתקבל על השפה.

למה 6.6 (זהו משפט מקסימום חזק) תהא $v \in C^2(\Omega)$, ונניח ש־ $L_0 v \gneq 0$. אז v לא מקבלת מקסימום מקומי בתוך Ω.

הוכחה: (של למת העזר)
נניח וקיים x_0 נקודת מקסימום מקומית של Ω, אזי

$$\vec{\nabla} v(x_0) = 0$$
$$\partial_i\partial_j u(x_0) \leq 0$$

($B=\partial_i\partial_j u$ היא מטריצת ההסיאן, והיא מוגדרת אי־חיובית בנקודת מקסימום, $A=a_{ij}$ תהיה מטריצת המקדמים)
נציב

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_0\right)\partial_i\partial_j v\left(x_0\right)=\mathrm{trace}\left(AB\right)\leq 0$$

כי העקבה של מכפלת שתי מטריצות אי־חיוביות הוא אי־חיובי. ובמקסימום,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\left(x\right)\partial_i u\left(x_0\right)=0$$

וקיבלנו $L_0\left[v\left(x_0\right)\right]\leq 0$, בסתירה להנחה ■

הוכחה: (המשפט)
נגדיר פונקצית עזר

$$u_\varepsilon\left(x\right)=u\left(x\right)+\varepsilon e^{\gamma x_1}$$

כאשר γ מספר ממשי, ו־ x_1 היא הקואורדינטה הראשונה בוקטור $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$. נסתכל על

$$\begin{aligned}L_0\left[e^{\gamma x_1}\right]&=\left(\gamma^2 a_{11}\left(x\right)+\gamma b_1\left(x\right)\right)e^{\gamma x_1}\\&\geq\left(\gamma^2\lambda-\gamma d\right)e^M\end{aligned}$$

כאשר λ, קבוע האליפטיות, הוא הערך העצמי הקטן ביותר, d הוא המקסימום של $b\left(x\right)$ ו־M המקסימום של γx_1
זהו מספר חיובי עבור γ גדול מספיק.
נסמן

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u\left(x\right)=K$$

אזי,

$$u_\varepsilon\left(x\right)\leq K+\varepsilon e^M\qquad\left(x\in\bar{\Omega}\right)$$

u_ε מקיימת את הלמה, ולכן

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u_\varepsilon\left(x\right)=\max_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon\left(x\right)$$

אזי

$$u_\varepsilon\left(x\right)_{x\in\partial\Omega}\leq\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)+\varepsilon e^M$$

צריך להרואת ש־

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u\left(x\right)=\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)$$

אבל צד אחד הוא טריוויאלי: המקסימום על הקבוצה הגדולה גדול או שווה מהמקסימום על הקבוצה הקטנה, ולכן בעצם, מספיק להוכיח

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u\left(x\right)\leq\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)$$

$$\begin{aligned}u\left(x\right)=u_\varepsilon\left(x\right)-\varepsilon e^{\gamma x_1}&\leq u_\varepsilon\left(x\right)_{x\in\bar{\Omega}}\leq\max_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon\left(x\right)\\&\leq\max_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon\left(x\right)\leq\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)+\varepsilon e^M\end{aligned}$$

הביטוי נכון לכל ε, ולכן,

$$u\left(x\right)_{x\in\bar{\Omega}}\leq\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)\implies\max_{x\in\bar{\Omega}}\leq\max_{x\in\partial\Omega} u\left(x\right)$$

, כנדרש. ■

6.2 עוד משפט מקסימום[20]

הגדרה 6.7

$$u_+(x) := \max\{u(x), 0\} \geq 0$$
$$u_-(x) := \min(u(x), 0) \leq 0$$

משפט 6.8

$$L[u] = L_0[u] + c(x)u$$

נניח Ω תחום **חסום**, $\boxed{c \leq 0}$ ב־Ω ורציף ב־$\bar{\Omega}$. תהא $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, מקיימת,

$$Lu \geq 0 \text{ in } \Omega$$

אז,

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} u_+(x)$$

מקימום אי־שלילי מתקבל על השפה.

מסקנה 6.9 אם $Lu \leq 0$,

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} \geq \min_{x\in\partial\Omega}$$

הערה 6.10 תמיד נכון,

$$\min_{x\in A} u(x) = -\max_{x\in A}(-u(x))$$

ולכן מתקבלת המסקנה.

מסקנה 6.11 אם $L[u] = 0$, ו־$c \leq 0$, אז

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$$

הוכחה: (המשפט)
יהא

$$M = \max_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$$

נסתכל על הקבוצה

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega | u(x) \geq 0\}$$

אם $\Omega_+ = \varnothing$, אז גמרנו.
נניח $\Omega_+ \neq \varnothing$, ונסתכל על משפט המקסימום ב־Ω_+ :

$$L_0 u \geq -cu \geq 0 \text{ in } \Omega_+$$

לכן, המקסימום של u ב־Ω_+, מתקבל ב־$\partial\Omega_+$.
נניח ו־$a \in \partial\Omega_+ \setminus \partial\Omega$, נקודה על שפת Ω_+ שלא חותכת את השפה של Ω. אזי, $a = 0$, כי השפה ה"פנימית" של $\partial\Omega_+$ היא הנקודות בהם הפונקציה (הרציפה) u מתאפסת. אבל $\Omega_+ \neq \varnothing$, לכן לא יתכן והמקסימום של $\bar{\Omega}$ הוא אפס, ולכן,

$$\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega \neq \varnothing$$

■

[20] 3.06.2009

6.2.1 לבעיית דריכלה

הגדרה 6.12 בעיית דריכלה: מצא $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ המקיימת, $L[u]=f \text{ in } \Omega$ ו־$u|_{\partial\Omega}=g$, כאשר f,g פונקציות רציפות נתונות.

מסקנה 6.13 (ממשפט המקסימום החלש):
בתנאי המשט, קיים לכל היותר פתרון אחד לבעיית דריכלה.

דוגמה 2.6 (למקרים בהם המשפט אינו מתקיים לא קיימת יחידות)

$$\Delta u+\alpha u=0 \text{ in } \Omega$$

כאשר Ω היא הקוביה, $(0,\pi)^n\subseteq\mathbb{R}^n$, כאשר $u|_{\partial\Omega}=0$.
עבור

$$u(x)=\prod_{j=1}^{n}\sin nx_i$$

אזי, $\alpha=n$, המימד, יהיה הערך העצמי הראשון.
עבור $n=a$,

$$u''+u=0 \text{ in } (0,\pi)$$

והפתרון הוא

$$(\sin x)''+\sin x=0$$

ומקיים את תנאי השפה: $\sin(0)=\sin(\pi)=0$, בנוסף לפתרון $u\equiv 0$. ואכן, אין יחידות..

הוכחה: (למסקנה)
יהיו u_1,u_2 פתרונות של בעיית קושי,

$$\tilde{u}(x)=u_1(x)-u_2(X)$$

אז,

$$L\tilde{u}=0 \text{ in } \Omega$$
$$\tilde{u}|_{\partial\Omega}=0$$

אזי,

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}|\tilde{u}(x)|=\max_{x\in\partial\Omega}|\tilde{u}(x)|=0$$

ולכן, $u=0$ ∎

מסקנה 6.14 משפט השוואה:
בתנאי המשפט, ננניח

$$Lu\leq Lv \text{ in } \Omega$$

ו־

$$v\leq u \text{ on } \partial\Omega$$

אז,

$$v\leq u \text{ in } \Omega$$

הוכחה:

$$Lw = L(u-v) \leq 0 \text{ in } \Omega$$
$$-w = v-u \leq 0 \text{ on } \partial\Omega$$

בפרט,

$$\min_{\partial\Omega} w \geq 0$$

ו־

$$\min_{\bar{\Omega}} w \geq 0$$

■

6.3 למרת נקודת השפה, הלמה של הופף

$o \geq \frac{\partial u}{\partial n}$ בנקודת מקסימום על השפה. הנחנו נוכיח משפט שיראה שעבור תת־פתרון, $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$, בתנאי ש־צו אינה קבועה (בתוספת עוד כמה תנאים)

הגדרה 6.15 תהא $x_0 \in \partial\Omega$. אומרים ש־Ω מקיימת את תנאי הגדור הפנימי ב־x_0 אם קיים כדור $B(y_0,R) \subset \Omega$ כך ש־$x_0 \in \partial B(y_0,r)$.

למה 6.16 תהא $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, מקיימת $Lu \leq 0$, $c=0$ ב־Ω. (Ω לאו דווקא חסומה). תהא $x_0 \in \partial\Omega$ בעלת התכונות הבאות:

1. $u(x_0) > u(x)$ לכל $x \in \Omega$ (בפרט, u אינה קבועה)
2. u רציפה ב־x_0 וקיימת $\frac{\partial u(x_0)}{\partial n}$
3. Ω מקיימת את תנאי הכדור הפנימי ב־x_0 .

אז, $\frac{\partial u(x_0)}{\partial n} > 0$
ואם $c \leq 0$, צריך להניח ש־ $0 \leq u(x_0)$. אם $u(x_0)=0$, אין הנחה על הסימן של c.

מסקנה 6.17 יחידות לבעיית נוימן בתחום חסום וחלק (כל נקודה על השפה מקיימת את תנאי הכדור הפנימי).

משפט 6.18 בתנאי הלמה, $c \leq 0$, ותחום חסום וחלק , קיים פתרון יחיד (עד כדי קבוע חיבורי) לבעיה,

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ in } \partial\Omega$$

נניח תחילה $c \leq 0$ (אם $c=0$, ניתן להניח ש־$u(x_0)$ אי־שלילי על ידי הוספת קבוע, שהוא פתרון, שלא משנה את אי־השוויון) **הוכחה:** (הלמה)
נניח שהמקסימום הוא בנקודה x_0 על השפה: $u(x_0) > u(x) : \forall x \in \Omega$
קיים כדור שמרכזו y ורדיוסו R, $B(y,R) \subset \Omega$ כך ש־$x_0 \in \partial B(y,R)$ (לפי תנאי הכדור הפנימי)
נגדיר פונקצית עזר,

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

כאשר $r = \|x-y\|$. אזי, בתוך הכדור, $r<R$, מחוץ לכדור $r>R$ ועל שפת הכדור $r=R$.

$$v(x) > 0, \forall x \in B(y,R)$$
$$v|_{\partial B(y,R)} = e^{-\alpha R^2} - e^{-\alpha R^2} = 0$$

יהא $0 < \rho < R$, ונתבונן ב"טבעת"

$$A_{\rho,R} = \{\, x \mid \rho < |x-y| < R \,\}$$

אזי,

$$\begin{aligned} L[v] &= e^{-\alpha r^2}\left(4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ii}(x) + b_i(x)(x_i-y_y)\right]\right) + c(x)v \\ &\geq e^{-\alpha r^2}\left\{4\alpha^2\lambda r^2 - 2\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + |b|\, r\right) + c\right\} \qquad (\rho < r < R) \end{aligned}$$

ואילו $0 \leq -ce^{-\alpha R^2}$. עבור α גדול מספיק, הביטוי כולו גדול (או שווה) מאפס.

$$Lv \geq 0 \text{ in } A_{\rho,r}$$

נגדיר, בתחום $A_{\rho,r}$ את הפונקציה:

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - \underbrace{u(x_0)}_{\text{Const!}} + \varepsilon v(X)$$

כאשר $\varepsilon > 0$.

$$L[u_\varepsilon] = L[u] - \underbrace{cu(x_0)}_{\leq 0} + \varepsilon \underbrace{L[v]}_{\geq 0} \geq 0$$

לכן $L[u_\varepsilon] \geq 0$ ב-$A_{\rho,R}$. יש לתחום שתי שפות: על $\partial B(y,R)$,

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) = u(x) - u(x_0) \leq 0$$

על $\partial B(y,\rho)$, השפה הפנימית של ה"טבעת",

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) < 0$$

עבור ε מספיק קטן (כי $u(x) - u(x_0) < 0$, שלא על השפה) .
על כן, על פי משפט המקסימום החלש, המקסימום של $u_\varepsilon(x)$ מתקבל ב-$\overline{A_{\rho,R}}$ בנקודה x_0 (כי $u_\varepsilon(x) \leq 0$ ב-$\overline{A_{\rho,R}}$
לכן,

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x_0)}{\partial n} \geq 0$$

לכן,

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial n} \geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial n} = -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial r} = -\varepsilon\left(e^{-\alpha r^2}\right)' > 0$$

לכן, $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$.
נותר לבדוק את המקרה: $u(x_0) = 0$, כלומר, $u(x) < 0$ ב-Ω (מלבד נקודה x_0). במקרה זה, ללא הנחה על הסימן של c, $\frac{\partial u}{\partial n}$ חיובי.
נתבונן באופרטור,

$$\tilde{L} = L - c_+ = L_0 + \underbrace{c_-}_{<0}$$

כאשר $c = c_+ + c_-$, ו־$c_- = \min\{0, c(x)\}$.

$$\tilde{L}u = \underbrace{Lu}_{\geq 0} - \underbrace{c_+ u}_{<0} \geq 0$$

והמקסימום, $0 \leq u(x_0) = 0$, ולכן אפשר להשתמש בחלק הקודם עם $\tilde{L}$, ונקבל

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial n} > 0$$

■

מסקנה 6.19 בבעיית נוימן: Ω תחום חסום המקיים, בכל נקודה א תתנאי הכדור הפנימי, L אופרטור אליפטי במידה שווה, $c \leq 0$, אז לבעיה

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ in } \partial\Omega$$

יש לכל היותר פתרון יחיד אלא אם כן $c \equiv 0$, ואז הפתרון נקבע ביחידות עד כדי קבוע חיבורי

הוכחה: נניח u_1, u_2 פתרונות של הבעיה. אזי

$$u := u_1 - u_2$$

פותר את הבעיה:

$$\begin{cases} Lu = 0 & ,\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & ,\partial\Omega \end{cases} \qquad (\star)$$

נשים לב ש־$u = const \neq 0$ הוא פתרון של $(\star)$ אם ורק אם $c \equiv 0$.
נניח ש־u אינו קבוע. אזי או ל־u או ל־$-u$ יש מקסימום אי שלילי. המקסימום מתקבל על השפה, ושם $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$, וזו סתירה. ■

6.4 משפט המקסימום החזק

משפט 6.20 נניח L אליפטי במידה שווה, ונניח $c \leq 0$ ב־Ω (תחום כלשהו, לאו דווקא חלק, לאו דווקה חסום).
נניח $Lu \geq 0$ ב־Ω. אז אם u מקבלת מקסימום אי שלילי ב־Ω, אז $u \equiv const$.
יתר על כן, אם המקסימום, $u(x_0) = 0$, אז $u \equiv 0$ ללא תלות בסימן c.
[כלומר, $u \leq 0$, $Lu \geq 0$ ו־$u(x_0) = 0$ עבור $x_0 \in \Omega \Leftarrow u \equiv 0$ ללא תלות בסימן של c]

הוכחה: (חלק א': $c \leq 0$, $u(x_0) = \max_{x\in\Omega} u(x) = M \geq 0$ כאשר $x_0 \in \Omega$)
נניח ש־u אינה קבועה, ונביט בקבוצה

$$\Omega_- = \{\, x \in \Omega \mid u(x) < M \,\}$$

Ω_- קבוצה פתוחה, ולא ריקה (כי u אינה קבועה, ולכן היא מקבלת ערך כלשהו הקטן מ־M)
כמו כן, $\partial\Omega_- \cap \Omega \neq \varnothing$, כי אם

$$x \in \partial\Omega_- \cap \Omega \implies u(x) = M$$

ו־$x_0 \notin \Omega_-$ ולכן $\Omega_- \neq \Omega$.
קיימת נקודה $y \in \Omega$ כך ש־ $\mathrm{d}(y, \partial\Omega_- \cap \Omega) < \mathrm{d}(y, \partial\Omega)$. קיים כדור סביב y ברדיוס $\mathrm{d}(y, \partial\Omega_- \cap \Omega)$ המוכל ב־Ω_-. נקרא לנקודת ההשקה המקיימת

$$\mathrm{d}(y, \partial\Omega_- \cap \Omega) = R$$

ושייכת ל־$\Omega \cap \partial\Omega_-$, נקודה x_1. כלומר, $u(x_1) = M$. על פי למת נקודת השפה (למת הופף),

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) > 0$$

אבל על פי ההנחה, x_1 היא נקודת מקסימום מקומית ב־Ω ($u(x_1) = M$..) , ובה מתקיים, $\vec{\nabla} u(x_1) = 0$, וקיבלנו סתירה.

ההוכחה זהה למקרה שבו $M = 0$, כי למת נקודת השפה נכונה במקרה זה ללא תלות בסימן של c. ■

6.4.1 משפט השוואה חזק

תרגיל:

משפט 6.21 תחום חסום Ω, $c \leq 0$, ו־

$$Lu \geq Lv \text{ in } \Omega$$
$$u \leq v \text{ on } \partial\Omega$$

אז או $u = v$ או $u < v$.

7 פונקציות הרמוניות

$$Lu = \Delta u$$

כלומר, $a_{ij} = \delta_{ij},\ b_i = 0,\ c = 0$. במקרה זה, מתקיימים משפטי המקסימום שהוכנו

הגדרה 7.1 $u \in C^2(\Omega)$ תקרא **הרמונית** ב־Ω אם $\Delta u = 0$ ב־Ω.
היא תקרא **תת** הרמונית (**על** הרמונית) אם $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$) ב־Ω.

לפי משפט הדיברגנץ, עבור שדה וקטורי $\vec{w}$ בתחום "יפה" Ω ,

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{w}\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n}\mathrm{d}s$$

נקח את $w = \vec{\nabla} u$. אזי,

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}s$$

לכן, אם נתונה הבעיה בתחום חסום וחלק למקוטעין,

$$\Delta u = F \text{ in } \Omega$$

ו־

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ in } \partial\Omega$$

אז תנאי הכרחי לפתרון, הוא $\int_\Omega F\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g\mathrm{d}s$. בפרט, אם u הרמונית ב־Ω, $u \in C^1\left(\bar{\Omega}'\right)$, אז

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0$$

אם u תת־הרמונית ב־Ω, אז

$$\int_{\partial u} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s \geq 0$$

7.0.2 משפט הממוצע לפונקציות הרמוניות

משפט 7.2 נניח u הרמונית ב־Ω, ותהא $y \in \Omega$, נקודה פנימית. ונניח $B(y,R) \subset \Omega$.
אז, לכל $0 < r < R$

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{|x-y|=r} u(s)\,\mathrm{d}s$$

כאשר $n\omega_n r^{n-1}$ הוא שטח הספירה, ו־ω_n הוא נפח כדור היחידה ב־r^n. למשל, עבור $n=2$, $\omega_n = \pi$, ושטח הפנים 2π . עבור $n=3$, $\omega_n = \frac{4}{3}\pi$, ושטח הפנים, $4\pi r^2$, כי

$$\int_0^R n\omega_n r^{n-1} = \omega_n R^n = V(B(R))$$

אם u תת הרמונית, מתקיימת תכונת התת־ממוצע:

$$u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{|x-y|=r} u(s)\,\mathrm{d}s$$

הערה 7.3 עבור u רציפה ומקיימת את תכונת הרציפה בכל נקודה, אז היא הרמונית ו־C^2.

הוכחה: עבור תת־פתרון u,

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_{B_r} \Delta u \mathrm{d}x \geq 0$$

נשתמש בקוארדינטות כדוריות סביב y. נסמן $\vec{x} = \vec{y} + r\vec{\omega}$ כאשר ω וקטור יחידה: $|\vec{\omega}| = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}s &= \int_{\partial B_r} \frac{\partial u(y+r\omega)}{\partial r}\mathrm{d}s \\
&= r^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u(y+r\omega)}{\partial r}\mathrm{d}\omega \\
&= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\omega|=1} u(y+r\omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{1-n} \int_{\partial B_r} u \mathrm{d}s \right)
\end{aligned}$$

כלומר, פונקצית הממוצע הספרי היא מונוטונית לא־יורדת. כלומר, אם $r_1 < r_2$, אז הממוצע

$$\frac{1}{nw_n r_1^{n-1}} \int_{\partial B_{r_1}} u \mathrm{d}s \leq \frac{1}{nw_n r_2^{n-1}} \int_{\partial B_{r_2}} u \mathrm{d}s$$

נשאיף את $r_1 \to 0$, ונקבע $r_2 = r$, ונקבל

$$u(y) \leq \frac{1}{nw_n r^{n-1}} \int\limits_{|x-y|=r} u(x)\,\mathrm{d}s$$

■

מסקנה 7.4 אם u תת־הרמונית, אז מתקיים משפט התת־ממוצע לגבי כדורים:

$$u(y) \leq \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{B_r} u(x)\,\mathrm{d}x$$

כי

$$\omega_n \int_0^R n r^{n-1} u(y) \le \int_0^R \int\limits_{|x-y|=r} u(x)\,\mathrm{d}s$$

או:

$$\omega_n R^n u(y) \le \int_{B_r} u(x)\,\mathrm{d}x$$

הערה 7.5 במקרה העל־הרמוני, יש אי שוויון הפוך. במקרה ההרמוני מתקבל שיוויון.

עבור פונקציות הרמוניות, מתקיימים[21], :

- משפט המקסימום החלש
- למת נקודת השפה
- משפט המקסימום החזק ־ אם מתקבל מקסימום בנקודה פנימית, הפונקציה קבועה.

כל אלו נובעים מהטורה הכללית, ואין צורך להוכיח אותן בנפרד עבור פונקציות הרמוניות.
מספט שמאפיין במידה רבה פונקציות הרמוניות הוא משפט הממוצע:
אם $\Delta u = 0$ ב־Ω , ואם $B(y,R) \subset \Omega$ אז

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} u(x)\,\mathrm{d}s_x = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(y,r)} u(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall 0 < r \le R$$

פונקציה תת הרמונית (על הרמונית) מקיימת את תכונת התת ממוצע (על ממוצע).

7.0.3 אי־שוויון הרנק

משפט 7.6 תהא u פונקציה הרמונית אי־שלילית בתחום $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. נניח ש־$\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ (מסומן גם $\Omega' \subset\subset \Omega$).
אזי, קיים קבוע $C = C(n, \Omega, \Omega')$ התלוי במימד n, ב־Ω וב־Ω', אבל לא ב־u, כך ש־

$$\sup_{x\in\Omega'} u(x) \le C \inf_{x\in\Omega'} u(x)$$

או, לכל $x, y \in \Omega'$, $u(x) \le Cu(y)$.

הוכחה: נסתכל על הכדורים $B(y,4R) \subset \Omega'$. אזי $B(y,R) \subset\subset B(y,4R)$. ראשית, נוכיח את אי־השוויון עבור הכדורים הללו.
נקח שתי נקודות, $x_1, x_2 \in B(y,R)$. צריך למצוא קבוע $C(n,\cancel{R})$, כך ש־ $u(x_1) \le Cu(x_2)$, לכל x_1, x_2 כנ"ל.

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(x_1,R)} u(x)\,\mathrm{d}x$$

הכדור $B(x,R) \subseteq B(y,2R)$. ולכן,

$$\le \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B(y,2R)} u(x)\,\mathrm{d}x$$

כי אנחנו מבצעים אינטגרציה על כדור את המכיל את הכדור הקודם, על פונקציה u אי שלילית.

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B(x_2,3R)} u(x)\,\mathrm{d}x$$

אבל $B(x_2,3R) \supseteq B(y,2R)$, לפי אי שוויון המשולש, ולכן, מתקיים אי השוויון,

$$\ge \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B(y,2R)} u(x)\,\mathrm{d}x$$

לכן, $u(x_1) \le 3^n u(x_2)$.

[21] 10.06.2009

למקרה הכללי נסתכל על הקבוצות Ω, Ω': נסמן

$$4R = d = \mathrm{d}\left(\partial\left(\Omega'\right), \Omega^c\right)$$

כאשר $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. לכל $x_1, x_2 \in \Omega'$, נקח מסילה המחברת בינהם, המוכלת כולה ב־Ω'.

טענה 7.7 ניתן לכסות מסילה המחברת שתי נקודות $x_1, x_2 \in \Omega'$ בכדורים ברדיוס $4R = d$. משיקולי קומפקטיות, ניתן למצוא כיסוי סופי למסילה הזו, ויתר על כן, מספר הכדורים N, הנדרש בלתי תלוי במסילה, ובנקודות הקצה, x_1, x_2. כך שמרכזי הכדורים נמצאים על המסילה, ומרחקם אחד מהשני קטן מ־R.

אז קבוע הרנק הוא 3^{nN}.

■

7.1 זהויות גרין

הלפלסיאן בקואורדינטות כדוריות הוא

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{(n-1)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L_\theta u$$

כאשר L_θהוא אופרטור התלוי במשתנים הזוויתיים. עבור $n = 2$,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

מהם הפונקציות ההרמוניות הרדיאליות? צריך להתקיים

$$V\left(|x|\right) = V\left(r\right)$$

המקיים,

$$\Delta v = 0$$

או,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} V\left(r\right) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} V\left(r\right) = 0$$

זהו מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני. זוהי משוואת אוילר.
עבור $n = 2$, הפתרונות הם:

$$V\left(r\right) = \alpha \cdot 1 + \beta \log r$$

ועבור $n \geq 3$,

$$V\left(r\right) = \alpha \cdot 1 + \beta r^{2-n}$$

יש הבדל מאוד עקרוני בהתנהגות הפתרונות בין $n = 2$ ל־$n \geq 3$:

$$|\log r| \xrightarrow[r \to \infty]{} \infty$$
$$r^{2-n} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

נסמן,

$$\Gamma\left(x, y\right) = \tilde{\Gamma}\left(x, -y\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x-y| & , n = 2 \\ \frac{1}{n\omega_n (2-n)} |x-y|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}$$

אזי $\Gamma\left(x, y\right)$ הרמונית לכל $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. עבור $n \geq 3$, $\Gamma\left(x, y\right) < 0$ ו־$\Gamma\left(x, y\right) \xrightarrow[x \to y]{} -\infty$ ו־$\Gamma\left(x, y\right) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

עבור $n = 2$, $\Gamma\left(x, y\right) \xrightarrow[x \to y]{} -\infty$ ו־$\Gamma\left(x, y\right) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$.

הגדרה 7.8 $\Gamma\left(x, y\right)$ מכונה **הפתרון היסודי** של הלפלסיאן עם קוטב ב־y.

7.1.1 זהויות גרין[22]

$$\left|D_x^{\beta}\tilde{\Gamma}\left(x,y\right)\right| \le C\left(n,\beta\right)\left|x-y\right|^{2-n-|\beta|}$$

כאשר β **הוא מולטיאינדקס:** $\beta=\left(m_1,m_2,\ldots,m_n\right)$ **ו־** $|\beta|=\sum_{i=1}^{n} m_i$ **.**

נזכיר א תמשפט הדיברגנץ: $\vec{W}$ שדה וקטורי, Ω תחום חסור וחלק מקוטעין, אז

$$\int_{\Omega}\mathrm{div}\vec{W}\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{w}\cdot\vec{\nu}\mathrm{d}s_x$$

דוגמא א':

$$\int_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}s_x$$

תזכורת: תנאי הכרחי לפתרון בעיית נוימן $\Delta u=F$ ב־Ω ו־$u|_{\partial\Omega}=g$ היא ש־$\int_{\Omega}F\mathrm{d}x=\int_{\Omega}g\mathrm{d}s_x$.

דוגמה 2:

$$\vec{w}=v\vec{\nabla}u$$
$$\mathrm{div}\vec{w}=v\Delta u+\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}u$$

לכן,

$$\int_{\Omega}\left(v\Delta u+\vec{\nabla}v\cdot\vec{\nabla}u\right)=\int_{\partial\Omega}v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}s_x \tag{13}$$

זוהי **נוסחאת גרין 1**.

דוגמה 3:

$$\vec{w}=v\vec{\nabla}u-u\vec{\nabla}v$$

אז

$$\int\left(v\vec{\nabla}u-u\vec{\nabla}v\right)\mathrm{d}x=\int\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s \tag{14}$$

זוהי **נוסחאת גרין השניה** ונשתמש בעיקר בה.
בכל הנוסחאות הנ"ל, $u,v\in C^2$.

מהנוסחא הראשונה של גרין: נסתכל על בעיית השפה

$$\Delta u=F \text{ in } \Omega$$
$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial v}=g$$

כאשר $\alpha,\beta\ge 0$, $\alpha,\beta\in C\left(\partial\Omega\right)$ ו־$|\alpha|+|\beta|>0$.

טענה 7.9 פרט למקרה של $\alpha=0,\beta>0$, קיים פתרון יחיד לבעיה, עבור $\beta>0$ עבור $\alpha>0$ או $\alpha=0$, היחידות היא עד כדי קבוע חיבורי.

---

[22] 14.06.2009

הוכחה: נניח כי u_1, u_2 פתרונות של הבעיה. מכיוון שהבעיה היא לינארית, תהא $u := u_1 - u_2$. צריך להוכיח: u פונקציית האפס.

u מקיימת:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

נציב בנוסחאת גרין 1,

$$u = v$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\vec{\nabla} u\right|^2 \mathrm{d}x &= \int u \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s \\ &= -\int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}s \leq 0\end{aligned}$$

לכן,

$$\vec{\nabla} u = 0 \text{ in } \Omega$$

כלומר, $u = const$.

אם $\alpha = 0 \Leftarrow$ זוהי בעיית נוימן ו־$u_1 = c + u_2$, כאשר c קבוע.

אחרת, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ ומתנאי השפה, עבור $\alpha > 0$ נובע כי $u = 0$, ולכן $c = 0$. ■

נוסחאת גרין השניה נקח $v = \Gamma\left(|x-y|\right)$ (Ω תחום חסום, y קבוע ב־Ω, נקודת קוטב קבועה). נסמן ב־

$$\Omega_\rho = \Omega \backslash B\left(y, \rho\right)$$

לכן,

$$\int_\Omega \Gamma \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s_x + \int_{\partial B(y,\rho)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} + u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right) \mathrm{d}s_x$$

נשאיף את $\rho \to 0$. אזי, Γ שתלויה במרחק מ־y , קבועה על כדור שמרכזו ב־y

$$\int_{\partial B(y,\rho)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s = \Gamma\left(\rho\right) \int_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s$$

לכן, נוכל להערך את האינטגרל על ידי המקסימום של הפונקצה בקטע, ולקבל:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B(y,\rho)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s\right| &= \left|\Gamma\left(\rho\right) \int_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s\right| \\ &\leq \frac{n\omega_n \rho^{1-n}}{n\left(n-2\right)\omega_n \rho^{n-2}} \max_{\partial B(y,\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \\ &\leq \frac{1}{n-2} \rho \max_{\partial B(y,\rho)} \left|\vec{\nabla} u\right| \to 0\end{aligned}$$

כאשר הנגזרת המכוונת קטנה או שווה לגרדיאנט.

נחשב את האיבר השני: Γ היא פונקציה רדיאלית סביב y, ולכן

$$\int_{\partial B(y,\rho)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} u \mathrm{d}s = -\Gamma'\left(\rho\right) \int_{\partial B(y,\rho)} u \mathrm{d}s_x$$

אם $\Gamma\left(\rho\right)=\frac{1}{n(2-n)\omega_n}\rho^{2-n}$ אז $\Gamma'\left(\rho\right)=\frac{1}{n\omega_n}\rho^{1-n}$[23]. ולכן האינטגרל נותן,

$$=-\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B(y,\rho)}u\mathrm{d}s_x$$

ולכן, לפי משפט הממוצא של לבג,

$$\xrightarrow[\rho\to 0]{}-u\left(y\right)$$

נעביר אגפים, ונקבל

$$u\left(y\right)=\int_{\Omega}\Gamma\left(\left|x-y\right|\right)\Delta u\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}-\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s_x$$

כלומר, אם יודעים את הלפלסיאן של u על כל הנפח, ואת הנגזרת של u ואת ערכה על השפה, אז ניתן לשחזר את u על כל הנפח.

מסקנה 7.10 נניח ש־u מקיימת:

$$u\in C_0^2\left(\mathbb{R}^n\right)$$

כלומר, u גזירה עמיים ברציפות ובעלת תומך קומפקטי ב־$\mathbb{R}^n$, או במילים אחרות, מתאפסת זהותית מחוץ לכדור גדול. אז

$$u\left(y\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma\left(\left|x-y\right|\right)\Delta u\left(x\right)\mathrm{d}x$$

נסמן את האופרטור $\Gamma\left(f\right)$

$$\Gamma\left(f\left(y\right)\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma\left(x-y\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

זהו אינטגרל של f כנגד גרעין אינטגרלים Γ. $\Gamma\left(f\left(y\right)\right)$ נקרא "הפוטנציאל הניוטוני של f"

נציב ב־(14) פונקציה הרמונית h במקום v:

$$\int_{\Omega}h\Delta u\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}h-u\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_x=0$$

נגדיר,

$$G\left(x,y\right)=\Gamma\left(\left|x-y\right|\right)+h\left(x\right)$$

אזי,

$$u\left(y\right)=\int_{\Omega}G\left(x,y\right)\Delta u\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(u\left(x\right)\frac{\partial G}{\partial\nu}-G\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}s_x$$

נבחר h הרמונית, המקיימת $h|_{\partial\Omega}=-\Gamma\left(\left|x-y\right|\right)$. כלומר, $G\left(x,y\right)|_{x\in\partial\Omega}=0$. במילים אחרות: פותרים את בעיית דריכלה עבור hעם ערכים שהם Γ על השפה. במקרה כזה, נקבל,

$$u\left(y\right)=\int_{\Omega}G\left(x,y\right)\Delta u\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial\nu}u\left(x\right)\mathrm{d}s_x$$

[23] הנגזרת זהה גם עבור $n=2$

פותרים את בעיית דריכלה:

$$\Delta u = F \text{ in } \Omega$$
$$u|_{\partial\Omega} = g$$

אזי הפתרון לבעיית דריכלה הוא

$$u(y) = \int_\Omega G(x,y) F(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu} g(x) \,\mathrm{d}s_x$$

הגדרה 7.11 G כנ"ל נקראת **פונקצית גרין** של התחום Ω, עם קוטב ב־y.

אם יודעים לפתור את בעיית דריכלה, יודעים למצוא את פונקצית גרין.
אם יודעים את פונקציית גרין, קיים פתרון לבעיית דריכלה.

7.1.2 תכונות פונקציית גרין

טענה 7.12 בהנתן תחום Ω חסום, לכל $y \in \Omega$ קיימת לכל היות פונקצית גרין אחת:

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + h(x,y)$$

כאשר $h(x,y)$ הרמונית ב־x ו־

$$G(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

הוכחה: כי h מקיימת

$$\Delta h = 0 \text{ in } \Omega$$
$$h|_{x\in\partial\Omega} = -\Gamma(|x-y|)$$

ויש יחידות לבעיית דריכלה. ■

הערה 7.13 אם התחום אינו חסום, אז אין בהכרח יחידות לבעיית דריכלה

דוגמה 1.7 $\boxed{n=2}$, הפונקציה $u(x) = \log|x|$. הרמונית עבור $|x| > 1$, $|x| = 1$ ו־$u(x) = 0$.
אם $\Omega = \{ x \mid |x| > 1 \}$, אז לבעיית דריכלה ב־$\Omega$ אין פתרון יחיד. לבעיה ההומוגנית קיימים לפחות שתי פתרונות: $0, \log|x|$.

דוגמה 2.7 בתחום $-\infty < x < \infty$ ו־$0 < y < \pi$. אז

$$u(x) = e^x \sin y$$

היא פונקציה הרמונית ו־u על השפה מתאפס.

טענה 7.14 $G(x,y) \leq 0$ לכל $x \in \Omega$, $x \neq y$.

הוכחה: בסביבות y, הפונקציה היא שלילית ממש. על השפה, הפונקציה מתאפסת. לכן, לפי משפט המקסימום החזק, ב־Ω_ρ. ■

טענה 7.15 $G(x,y) = G(y,x)$. (ההוכחה: תרגיל)

רעיון: מוציאים לא רק כדור סביב y אלא גם כדור סביב x. במצב זה, הפונקציה סימטרית ל־x, y.

7.1.3 פונקציית גרין בכדור n מימדי

התחום הוא $B = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$.

הגדרה 7.16 נקודת אינברסיה, $\bar{x}$ ביחד ל־B: אם $x \neq 0$, אז

$$\bar{x} = \hat{x}\frac{R^2}{|x|^2}$$

כך ש־ $|x||\bar{x}| = R$. כמו כן, $\bar{0} = \infty$ ו־$\bar{\infty} = 0$.[24]

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right) & , y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & , y = 0 \end{cases}$$
$$= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2xy}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2xy}\right)$$

נשים לב שהקוטב של $\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right)$ נמצא מחוץ ל־B, ולכן היא הרמונית בתוך B. צריך להראות ש־$G(x,y)$ מתאפסת על השפה. צריך להציב x כך ש־ $|x| = R$ אזי $G(x,y)$ אכן מתאפס.

נותר לנו לחשב את הנגזרת הרדיאלית

$$K(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \nu_x} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}|x-y|^{-n} > 0 \qquad x \in \partial B, y \in B$$

גרעין זה נקרא **גרעין פואסון.**

אם $u \in C^2(B(0,R)) \cap C\left(\overline{B(0,R)}\right)$ הרמונית, אז [25]

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} K(x,y)\,u(y)\,\mathrm{d}s_y$$

ו־

$$u(0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B} u(y)\,\mathrm{d}s_y \qquad x = 0$$

קיבלנו את עקרון הממוצע...

עבור $u \equiv 1$, נקבל

$$\int_{\partial B} K(x,y)\,\mathrm{d}s_y = 1$$

הערה 7.17 בהוכחה, דרשנו $C^2 u$ עד השפה. אבל כאן, ציינו ש־u צריכה להיות C^2 רק בפנים. למעשה, נוכל "למצוא את u" עבור r קטן יותר פנים, ולהשאיף אותו לשפה לקבלת הערכים על השפה.

- K פונקציה אי־שלילית
- לכל $y \in \partial B$, $K(x,y)$ הרמונית ב־B.

נקודת ראות מודרניות יותר של גרעין פואסון:

כל אחת מהפונקציות הללו, K , היא פונקציה הרמונית אי־שלילית. נניח ש־u הרמונית אי־שלילית, ו־$u(0) = 1$. אז, $\int_{\partial B} u\mathrm{d}s = 1$. לכן, פונקציה u, שהיא הרמונית ו־1 במרכז, היא ממוצא של פונקציות הרמוניות אי־שליליות.

כפונקציה של x, $K(x,y) \in C^\infty$. פונקציה הרמונית כלשהו היא אינטגרל של גרעין פואסון, ולכן

מסקנה 7.18 פונקציה הרמונית בתחום Ω גזירה בכל סדר, $C^\infty(\Omega)$.

[24] להרחבה, ראה מחברת תורה אלקטרומגנטית. זה מוסבר שם הרבה יותר טוב...

[25] 17.06.2009

7.1.4 בעיית דריכלה בכדור

תהא $\varphi \in C\left(\partial B\left(0,R\right)\right)$. מצא פונקציה הרמונית $u \in C^2\left(B\left(0,R\right)\right) \cap \left(\overline{B\left(0,R\right)}\right)$ ($\Delta u = 0$) כך ש־

$$u|_{\partial B} = \varphi$$

טענה 7.19 הפונקציה הבאה:

$$u\left(x\right) = \begin{cases} \int_{\partial B} K\left(x,y\right)\varphi\left(y\right)\mathrm{d}s_y & , \qquad x \in B \\ \varphi\left(x\right) & x \in \partial B \end{cases}$$

היא פתרון של בעיית דריכלה.

הוכחה: גרעין פואסון כפונקציה של x הוא הרמוני ב־B, ולכן גם u הרמונית ב־B [גוזרים לפי x מתחת לאינטגרל]
צריך להוכיח: אם $x_m \to x_0 \in \partial B$ ו־$\left\{x_m\right\} \subseteq B$, אז $u\left(x_m\right) \to u\left(x_0\right)$.

$$\begin{aligned} \left|u\left(x_n\right) - u\left(x_0\right)\right| &= \left|\int K\left(x_n,y\right)\varphi\left(y\right)\mathrm{d}s_y - \varphi\left(x_0\right)\right| \\ &= \left|\int_{\partial B} K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\right|\mathrm{d}s_y \end{aligned}$$

אחרי שהשתמשנו בעובדה: $\int K\left(x,y\right)\varphi\left(x,y\right) = 1$ ולכן, $\varphi\left(x_0\right) = \int K\left(x_n,y\right)\varphi\left(x_0\right)\mathrm{d}s_y$.
תהא $\delta > 0$ שתבחר בהמשך. אז

$$\begin{aligned} \left|u\left(x_n\right) - u\left(x_0\right)\right| &\le \left|\int_{\substack{y\in\partial B \\ \left|y-x_0\right|<\delta}} K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\mathrm{d}s_y\right| + \left|\int_{\substack{x\in\partial B \\ \left|x_0-y\right|\ge\delta}} K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\mathrm{d}s_y\right| \\ &\le \int_{\substack{y\in\partial B \\ \left|y-x_0\right|<\delta}} \left|K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\right|\mathrm{d}s_y + \int_{\substack{x\in\partial B \\ \left|x_0-y\right|\ge\delta}} \left|K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\right|\mathrm{d}s_y \end{aligned}$$

יהא ε נתון. נקח $\delta > 0$ קטנה מספיק, כך ש־

$$\left|\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $\left|y - x_0\right| \le \delta$. ברור שהאינטגרל

$$\int_{\substack{y\in\partial B \\ \left|y-x_0\right|<\delta}} \left|K\left(x_n,y\right)\left(\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right)\right|\mathrm{d}s_y \le \varepsilon \cdot \int_{\partial B} K\left(x_n,y\right)\mathrm{d}s_y$$

כמו כן,

$$\int_{\substack{\left|y-x_0\right|>\delta \\ y\in\partial B}} K\left(x_n,y\right)\left|\varphi\left(y\right) - \varphi\left(x_0\right)\right|\mathrm{d}s_y$$

($\varphi\left(y\right) \le M$ על ∂B)

$$\begin{aligned} &\le \frac{R^2 - \left|x_m\right|^2}{n\omega_n R} \int_{\substack{\left|y-x_0\right|>\delta \\ y\in\partial B}} \frac{2M}{\left|x_y - y\right|^n}\mathrm{d}y \\ &\le \frac{R^2 - \left|x_m\right|^2}{n\omega_n R} \frac{2M}{\delta^n} \int_{\partial B} \mathrm{d}s_y \\ &= \frac{R^2 - \left|x_m\right|^2}{n\omega_n R} \frac{2Mn\omega_n R^{n-1}}{\delta^n} \end{aligned}$$

נשאיף את $x_m \to x_0$ עבור m מספיק גדול, נקבל ש־

$$< \varepsilon$$

■