

גיאומטריה וסימטריה

מרצה: עמוס נבו

26 בפברואר 2010

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של עמוס נבו. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. אין הטכניון או מי מטעמו - ובפרט, הפקולטה למתמטיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה. הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל-ronen@tx.tehcnion.ac.il

תוכן עניינים

2 גיאומטריה אוקלידית בסיסית ב- \mathbb{R}^n	1
3 מטריצות אורתוגונליות	1.0.1
4 תנועה צפידה	1.0.2
5 מבנה חבורת האיזומטריות של \mathbb{R}^n	1.1
6 סיבובים ושיקופים במישור	1.1.1
7 "לוח הכפל" ב- $O_2(\mathbb{R})$	1.1.2
9 $O_3(\mathbb{R})$	1.1.3
11 סימטריה	2
11 חבורת התנועות הצפידות (איזומטריות) של המישור	2.1
15 תתי חבורות סופיות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$	2.1.1
16 חבורות דיסקרטיות	2.1.2
19 פעולות של חבורות	2.2
23 עקרונות ספירה לפעולות על קבוצות סופיות	2.3
25 תתי חבורות סופיות של $SO_3(\mathbb{R})$	2.4
27 איזומורפיזם של החבורות האפלטוניות	2.4.1
28 סדרים של איברים בחבורות קריסטלוגרפיות	2.5
29 נוסחאת אוילר	2.6
29 אמפריקה	2.6.1
30 מרחב שפת-כדור	2.6.2
31 הוכחה של נוסחאת אוילר	2.6.3
32 הקשר בין מספר הפאות ומספר הצלעות של פאון קמור	2.6.4
33 פולרן	2.6.5
33 החבורה $SU_2(\mathbb{C})$	3
34 מבנה $SU_2(\mathbb{C})$	3.1
35 הקשר בין $SO_3(\mathbb{R})$ ל- $SU_2(\mathbb{C})$	3.2
37 הצגות אוניטריות	4
38 הצגות פריקות	4.1
41 ההצגה המיוחסת לפעולה	4.2
41 דוגמאות	4.2.1
42 הצגות של חבורות קומפקטיות	4.3
45 הצגות של $SO_3(\mathbb{R})$	4.4
46 התמרות אינטגרליות	4.5
46 התמרת קרני- X	4.5.1
47 בעיית היחידות שיחזור לגופים קמורים ב- \mathbb{R}^3	4.5.2

1 גיאומטריה אוקלידית בסיסית ב- \mathbb{R}^n .

על \mathbb{R}^n מוגדרת מכפלה פנימית:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

שהיא תבנית בילינארית, סימטרית וחיובית לחלוטין. כלומר, היא מקיימת אדיטיביות משמאל,

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

סימטריות:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

ומכאן נובעת גם אדיטיביות מימין. כמו כן, מתקיימת הומוגניות (משמאל ומימין)

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$$

ולבסוף, חיוביות:

$$\langle x, x \rangle > 0$$

אלא אם כן, $x = 0$.

הגדרת אורך הנורמה של x :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

הגדרת מרחק בין שתי נקודות: המרחק בין x ו- y הוא $\|x - y\|$.

נוסחת הקוסינוס בהינתן $x, y \in \mathbb{R}^n$, במישור הנפרש על ידי x, y נקבל:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \|x\| \|y\| \cos \theta$$

כאשר θ היא הזווית בין x ל- y . זו כמובן נוסחת הקוסינוס לריבוע האורך של הצלע $x - y$ במשולש. נסמן: $\|x\| = a$, $\|y\| = b$, ונקבל: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$. באופן שקול:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

מהשוואת הנוסחאות, נקבל כי

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

או,

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \quad (1)$$

אם כן, נוסחא זו שקולה למשפט הקוסינוס במישור.

הערה 1.1 בנוסחאת הקוסינוסים (1) אנו רואים כי $\langle x, y \rangle = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$. במקרה זה (ורק במקרה זה), הנוסחא נותנת:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

וזהו משפט פיתגורס.

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y \rangle = 0$$

הגדרה 1.2 בסיס נקרא **אורתוגונלי** אם כל שני וקטורים בו הם ניצבים זה לזה, ונקרא **אורתונורמלי** אם בנוסף לכל וקטור בו יש אורך 1.

כלומר, אם $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ עבור $i \neq j$, אזי הבסיס אורתוגונלי, ואם $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, אזי הבסיס אורתונורמלי.

1.0.1 מטריצות אורתוגונליות

הגדרה 1.3 מטריצה $n \times n$, A , נקראת אורתוגונלית, אם $A^t A = I$.

נשים לב כי אם A אורתוגונלית, אזי כך גם A^{-1} , שהרי $A^t A = I$ שקול ל- $A^{-1} A^t = I$ אזי $(A^t)^t = (A^{-1})^t = A$ ולכן נובע ש-

$$(A^{-1})^t A^{-1} = I$$

גם כן.

כמובן, $\det A = \pm 1$, כי $(\det A)^2 = 1$. (נזכר כי $\det A^t = \det A$).

טענה 1.4 התנאים הבאים שקולים עבור מטריצה ריבועית:

1. A אורתוגונלית.

2. A שומרת על המכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ לכל x, y .

3. עמודות A הן בסיס אורתונורמלי.

הוכחה:

נראה ש- (2) \iff (1): לשם כך, נראה כי המכפלה הפנימית $\langle x, y \rangle$ היא המכפלה של השורה x בעמודה y : $\langle x, y \rangle = x^t y$, ולכן,

$$\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^t \cdot Ay = x^t A^t Ay$$

ולכן, אם $A^t A = I$, אזי A שומרת על המכפלה הפנימית. להיפך, אם A שומרת על המכפלה הפנימית, אז

$$\begin{aligned} x^t A^t Ay &= x^t y \\ x^t (A^t A - I) y &= 0 \end{aligned}$$

או, $A^t A - I = 0$, לכל x, y , ולכן המטריצה אורתוגונלית. נראה ש- (3) \iff (1): A אורתוגונלית \iff עמודות A בסיס אורתונורמלי.

$$A^t A = (\langle v_i, v_j \rangle)$$

כלומר, זוהי המטריצה של המכפלות הפנימיות בין העמודות של המטריצה A , כאשר v_1, \dots, v_n הן עמודות A .

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

לכן, $A^t A = I = \delta_{ij}$ אם ורק אם, עמודות A מקיימות, כלומר, אם ורק אם עמודות A בסיס אורתונורמלי. ■

1.0.2 תנועה צפידה

הגדרה 1.5 העתקה $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ נקראת תנועה צפידה אם היא שומרת מרחקים:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\|$$

לכל x, y .

במיוחד, ϕ שומרת על אורכי כל הקטעים, ולכן, ϕ מעבירה כל משולש למשולש חופף, ולכן, ϕ שומרת על זוויות.

שתי דוגמאות לתנועה צפידה

• הזזות:

$$\begin{aligned} \ell_w : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \ell_w(v) &= v + w \end{aligned}$$

־

$$\|\ell_w(v) - \ell_w(v')\| = \|v - v'\|$$

• טרנספורמציות אורתוגונליות.

משפט 1.6 התנאים הבאים הם שקולים, עבור העתקה $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

1. העתקה צפידה השומרת על הראשית.
2. f שומרת על המכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ לכל x, y .
3. f ניתן על ידי $f(x) = Ax$ כאשר A אורתוגנלית.

הוכחה:

$$(1) \implies (2)$$

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle$$

בנוסף,

$$\|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

אם נתון ש- $f(0) = 0$, אזי, $\|f(u)\| = \|u\|$ לכל u ולכן,

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle$$

ולבסוף, שוב, מאחר ש- f צפידה,

$$= \|x - y\|$$

בסך הכל,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

ולכן,

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$$

ו- f שומרת על המכפלה הפנימית.

(3) \implies (2) : נתון ש- f שומרת על המכפלה הפנימית. אם כן, f מעבירה בסיס אורתונורמלי e_1, \dots, e_n לבסיס אורתונורמלי $f(e_1), \dots, f(e_n)$. נפתח, ונקבל ש-

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$$

ולכן, המטריצה a_{ij} היא אורתוגונלית. a_{ij} הם המקדמים של פיתוח בסיס אורתונורמלי אחד באמצעות בסיס אורתונורמלי אחר. לכן, גם A^{-1} אורתוגונלית, ולכן, ההעתקה $g = A^{-1} \circ f$, היא: (א) שומרת על המכפלה הפנימית, (ב) ובנוסף, מעבירה את הבסיס האורתונורמלי e_1, \dots, e_n לעצמו. נובע מכאן כי g היא הזהות:

$$x = \sum x_i e_i$$

$$\langle g(x), e_i \rangle = x'_i = \langle g(x), g e^i \rangle = \langle x, e_i \rangle = x_i$$

לכן, $g(x) = x$, כלומר, $g = I = A^{-1} \circ f$, כלומר, $f = A$, היא טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית. (1) \implies (3) - אם A אורתוגונלית, אז A צפידה, ו- $A^0 = 0$, ו- $\|Ax\| = \|x\|$ לכל x , ולכן

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\|$$

ו- A צפידה.

ננסח מחדש מה שהוכחנו, ומסקנות הנובעות ממנו:

1. ראינו כי כל העתקה צפידה ששומרת על 0, היא אורתוגונלית, ובמיוחד, לינארית.
2. כמסקנה, נקבל כי העתקה צפידה היא על.

הגדרה 1.7 העתקה חח"ע ועל השומרת מרחקים נקראת **איזומטריה**.

(מרחק ניתן על ידי מטריקה, ו"שווה" זה "איזו")
אם כן, במיוחד, כל העתקה צפידה של \mathbb{R}^n היא איזומטריה של \mathbb{R}^n .
נעייך ב-

$$G = \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ is Isometry} \}$$

לכל איזומטריה f , גם f^{-1} היא איזומטריה, ואם f, g איזומטריות, כך גם $f \circ g$, ולכן G היא חבורה.

1.1 מבנה חבורת האיזומטריות של \mathbb{R}^n

תהא $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ איזומטריה. יהא $v = \varphi(0)$. נסתכל בהעתקה

$$\ell_{-\varphi(0)} = \ell_{-v}$$

נעייך ב- $\varphi^{-1} \circ \ell_{-v} = f$. אז, f איזומטריה כהרכבה של שתי איזומטריות. אבל f איזומטריה ששומרת על 0:

$$f(0) = \ell_{-v} \circ \varphi(0) = \ell_{-\varphi(0)}(\varphi(0)) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$$

לכן, f איננה אלא טרנספורמציה אורתוגונלית A . אם כן,

$$A = \ell_{-v} \circ \varphi = A = f$$

ולכן, $A = \ell_v \circ \varphi$. נסיק כי φ הרכבה של הזזה ℓ_v על טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית A .

משפט 1.8 חבורת האיזומטריות $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ של \mathbb{R}^n , היא חבורת כל ההעתקות:

$$\varphi_{A,v}(x) = Ax + v$$

כאשר $v \in \mathbb{R}^n$ כלשהו, ו- $A \in O_n(\mathbb{R})$, החבורה האורתוגונלית של מטריצות.

הערה 1.9 כל איזומטריה φ קובעת את ההצגה,

$$\varphi = \varphi_{A,v}$$

בצורה יחידה. למעשה, $v = -\varphi(0)$, ולכן, A היא הטרנספורמציה הלינארית $\ell_{-\varphi(0)} \circ \varphi$.

חוק הכפל בחבורה האוקלידית חבורת האיזומטריות של \mathbb{R}^n : בהנתן שתי איזומטריות $\varphi_{A,v}$, $\varphi_{B,w}$ אזי $\varphi_{A,v} \circ \varphi_{B,w}$ איזומטריה, ולכן, מהצורה $\varphi_{C,u}$. נמצא את C, u .

$$\varphi_{A,v} \circ \varphi_{B,w}(x) = \varphi_{A,v}(Bx + w) = ABx + Aw + v$$

ולכן,

$$\boxed{\varphi_{A,v} \circ \varphi_{B,w} = \varphi_{AB, Aw+v}}$$

ומשוואה זו מגדירה את חוק הכפל בחבורה האוקלידית.

1.1.1 סיבובים ושיקופים במישור

תהא A טרנספורמציה אורתוגונלית 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t A = I$, במילים אחרות

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נוכל לרשום $a = \cos \theta$ ואז $c = \sin \theta$. $b = \sin \varphi$ ו- $d = \cos \varphi$ ואז יתקיימו שתי המשוואות על האלכסון. אזי,

$$ab + cd = 0 \implies \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = 0$$

$$0 = \sin(\varphi + \theta)$$

אם כן, $\theta + \varphi = 0$ or π .

• אפשרות אחת: $\varphi = -\theta$. אז נקבל ש-

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

• אפשרות שני: $\varphi = \pi - \theta$

$$h_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

זהו תיאור מלא של החבורה האורתוגונלית $O_2(\mathbb{R})$, כאשר θ עובר על כל $[0, 2\pi)$. באפשרות הראשונה, $\det r_\theta = +1$, ובאפשרות השנייה, $\det h_\theta = -1$. r_θ הוא סיבוב בזווית θ נגד כיוון השעון במישור:

$$r_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_\theta \left(\lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

כלומר, כל מעגל עובר לעצמו, עם סיבוב בזווית θ . במיוחד, $r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi} = r_\varphi \circ r_\theta$, $r_\theta \circ r_{-\theta} = r_0 = I^{-1}$ כלומר, $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$, כלומר,

$$\{ r_\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

היא חבורה אבלית. החשבון על החבורה הזו הוא מודולי 2π :

$$r_0 = r_{2\pi} = I$$

$$r_\theta = r_{\theta+2\pi n}$$

מהצד השני, $\det h_\theta = -1$, וקיים

$$h_\theta \circ h_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל h_θ היא טנרמסורמציית שיקוף. כלומר, לכל h_θ קיימים וקטורים, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2(\theta)$ ו- $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\theta)$, כך שבבסיס $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, h_θ ניתנת על ידי ההעתקה, שנשמך J_2 :

$$J_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

כלומר, שיקוף ביחס לציר x .

השיקוף הכללי ביותר הוא ביחס לוקטורים $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, התלויים ב- θ . $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ מקובעים, אלו הם וקטורים עצמיים של h_θ : השיקוף הכללי ביותר מתבצע ביחס לוקטורים העצמיים של h_θ , $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, כאשר ε_1 הוא וקטור שבת: $h_\theta \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, והוקטור ε_2 מקיים: $h_\theta \varepsilon_2 = -\varepsilon_2$, וההעתקה h_θ הופכת את הסימן של הרכיב על ε_2 . בבסיס האורתונורמלי של הוקטורים העצמיים שלה, המטריצה המייצגת של h_θ היא J_2 .

מסקנה 1.10 1. טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית במישור, A , היא סיבוב אם ורק אם $\det A = 1$

2. טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית במישור, A , היא שיקוף אם ורק אם $\det A = -1$

3. אוסף הסיבובים הוא חבורה. תת חבורת הסיבובים של $O_2(\mathbb{R})$. נסמן תת חבורה זו ב- R .

4. לכל שני שיקופים, $h_\theta \circ h_\varphi$ הוא סיבוב, כי הוא בעל דטרמיננטה 1. לכן, $h_\theta \circ h_\varphi = r_\psi$ עבור ψ כלשהו.

$$h_\theta = r_\psi h_\varphi^{-1} = r_\psi h_\varphi$$

ולכן,

$$h_\theta \in R \cdot h_\varphi$$

כלומר, קבוצת השיקופים היא מחלקה של חבורת הסיבובים.

$$h_\theta = r_\alpha \cdot J_2$$

$$h_\theta \in R \cdot J_2$$

ולכן, קבוצת השיקופים היא $R \cdot J_2$. לכן, $O_2(\mathbb{R})$ הוא איחוד זר של סיבובים ושיקופים. ל- R יש בדיוק שתי מחלקות שקילות ב- $O_2(\mathbb{R})$, ולכן R תת חבורה נורמלית של החבורה האורתוגונלית. כמובן, ההעתקה

$$\det : O_2(\mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$$

היא אומואומורפיזם, וכמובן, $\ker \det = R$. נסמן, $R = SO_2(\mathbb{R})$ Spatial Orthogonal Group of order R .
2. באופן כללי,

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$$

1.1.2 "לוח הכפל" ב- $O_2(\mathbb{R})$

לשם כך, נחזור רגע שוב אל h_θ . $h_\theta^2 = I$, ולכן, הערכי העצמיים של h_θ הם ± 1 . כלומר, ל- h_θ יש וקטור שבת ווקטור שעובד לנגדי, והם, ניציבים.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta/2 + \sin \theta \sin \theta/2 \\ \sin \theta \cos \theta/2 - \cos \theta \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן זהו וקטור שבת. הוקטור האורתוגונלי:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta/2 \\ -\cos \theta/2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sin \theta/2 \\ -\cos \theta/2 \end{pmatrix}$$

1. הטרנספורמציה $h_\varphi \cdot h_\theta$ הוא בעל דטרמיננטה 1, ולכן סיבוב. באיזה זווית? די למצוא את הזווית בה סובב הוקטור e_1 : נסתכל על ציר השיקוף של h_θ , בזווית $\frac{\theta}{2}$ יחסית ל- e_1 , וציר השיקוף של h_φ בזווית של $\frac{\varphi}{2}$ יחסית ל- e_1 . נחשב את $h_\theta e_1$: זהו שיקוף של e_1 ביחס לציר השיקוף של h_θ , כלומר, סיבוב בזווית של θ ממקומו המקורי. לכן, $h_\theta e_1$ הוא בזווית של $\frac{\varphi}{2} - \theta$ יחסית לציר השיקוף של h_φ : לכן, הזווית בין e_1 ל- $h_\varphi h_\theta e_1$ היא:

$$\angle = 2 \left(\frac{\varphi}{2} - \theta \right) + \theta = \varphi - \theta$$

$$h_\varphi h_\theta = r_{\varphi-\theta}$$

2. יחסי הצמדה - הטרנספורמציה $h_\theta r_\varphi h_\theta^{-1}$ היא סיבוב (det = 1) ומתקיים,

$$h_\theta r_\varphi h_\theta^{-1} = h_\theta r_\varphi h_\theta$$

מאחר ו- $h_\theta = h_\theta^{-1}$. נחשב את הזווית של הסיבוב, ושוב נוכל לחשב את הזווית שבה סובב הוקטור e_1 (נסמן: v_θ את וקטור e_1 מסובב בזווית θ ל- e_1 . e_1 שוכן על ציר x). $v_\theta = h_\theta e_1$. שיקוף של e_1 סביב ציר השיקוף, שהוא $v_{\theta/2}$. את v_θ יש לסובב ב- φ , ולבסוף, לשקף אותו שוב סביב $v_{\theta/2}$. לכן,

$$h_\theta r_\varphi h_\theta \cdot e_1 = r_{-\varphi} e_1 = v_{-\varphi}$$

אזי,

$$\boxed{h_\theta r_\varphi h_\theta^{-1} = r_{-\varphi}}$$

ההצמדה הזו אינה טריוויאלית: סיבוב ושיקוף אינם מתחלפים, והצמדה בשיקוף הופכת את זווית הסיבוב, ללא תלות בציר השיקוף.

נעשה את אותו חישוב בקוארדינטות: השיקוף הכללי ביותר הוא מהצורה

$$h_\theta = r_\alpha \cdot J_2$$

$$h_\theta r_\varphi h_\theta^{-1} = r_\alpha J_2 r_\varphi J_2^{-1} r_\alpha^{-1}$$

$$J_2 r_\varphi J_2^{-1} = r_{-\varphi}$$

ולכן, $h_\theta r_\varphi h_\theta = r_{-\varphi}$ (מאחר וסיבובים במישור מתחלפים)

$$J_2 r_\varphi J_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = r_{-\varphi}$$

3. הטרנספורמציה, $r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1}$ היא שיקוף. נמצא את הציר שלו. לשם כך נתבונן ב- $r_\varphi \varepsilon_1(\theta)$, כאשר $\varepsilon_1(\theta)$ הוא ציר השיקוף של h_θ , ואזי,

$$(r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1})(r_\varphi \varepsilon_1(\theta)) = r_\varphi h_\theta \varepsilon_1(\theta) = r_\varphi \varepsilon_1(\theta)$$

אם כן, $r_\varphi \varepsilon_1(\theta)$ הוא וקטור אינווריאנטי תחת הטרנספורמציה $r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1}$, ומאחר וזו טרנספורמציה שיקוף, נובע כי מצאנו את ציר השיקוף. לכן, ציר השיקוף של $r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1}$ בזווית של $\varphi + \frac{\theta}{2}$, ולכן,

$$r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1} = h_{\theta+2\varphi}$$

הערה 1.11 מצאנו את לוח הכפל של $O_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} h_\varphi h_\theta &= r_{\varphi-\theta} \\ h_\theta r_\varphi h_\theta^{-1} = r_{-\varphi} &\implies h_\theta r_\varphi = r_{-\varphi} h_\theta \\ r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1} = h_{\theta+2\varphi} &\implies r_\varphi h_\theta = h_{\theta+2\varphi} r_\varphi \\ r_\varphi r_\theta &= r_\theta r_\varphi \end{aligned}$$

הערה 1.12 בחישוב הציר של $r_\varphi h_\theta r_\varphi^{-1}$, היתה לנו נקודת שבת של h_θ (ציר הסיבוב) וכדי למצוא נקודת שבת של הטרנספורמציה הצמודה ל- h_θ , הפעלנו את הטרנספורמציה המצמידה של נקודת השבת.

1.1.3 $O_3(\mathbb{R})$

הגדרה 1.13 סיבוב ב- \mathbb{R}^3 היא טרנספורמציה לינארית ששומרת על וקטור יחידה v אינווריאנטי ושומרת גם על המישור הניצב ל- v , שעליו היא פועלת כסיבוב. טרנספורמציה כזו נקראת סיבוב סביב הציר v .

אם כן, כל סוג (v, θ) , $v \in S^2$, $\theta \in (0, 2\pi]$ (ספרת היחידה), קובעת טרנספורמציה סיבוב ב- \mathbb{R}^3 (בזווית θ במישור הניצב ל- V) נשים לב כי (v, θ) קובעים את אותה טרנספורמציה כמו $(-v, -\theta)$. נשים גם לב, כי $(v, 0)$ מייצג את טרנספורמציה הזהות, שאין לה ציר סיבוב.

משפט 1.14 (Euler) כל טרנספורמציה אורתוגונלית ב- \mathbb{R}^3 שהיא בעלת דטרמיננטה 1 היא סיבוב סביב ציר.

הוכחה:

$$1. \det A^t = \det A = 1, \text{ ולכן,}$$

$$A^t(A - I) = A^t A - A^t = I - A^t = (I - A)^t$$

ומכאן,

$$\begin{aligned} \det A^t \det(A - I) &= \det(I - A) \\ &= \det(A - I) = (-1)^3 \det(A - I) \end{aligned}$$

לכן, $\det(A - I) = 0$, לכן 1 ע"ע של A , כלומר, יש וקטור יחידה v עם $Av = v$.

2. נבדוק מה קורה במישור הניצב: כידוע, אם $Av = v$, אזי גם $AV^\perp = V^\perp$, כי A אורתוגונלית.

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 | w \perp v\}$$

אם $w \in V^\perp$, אז נראה כי Aw גם ב- v^\perp (כלומר, v^\perp מרחב אינווריאנטי).

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, A^t v \rangle = \langle w, A^{-1} v \rangle = \langle w, v \rangle = 0$$

שהרי $Av = v$ גורר כמובן כי $A^{-1}v = v$. לכן, $AV^\perp \subseteq V^\perp$ ולכן $AV^\perp = V^\perp$.

הערה 1.15 באופן כללי, אם $U \subseteq V$ תת מרחב וקטורי אינווריאנטי תחת טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית A , אז U^\perp גם כן אינווריאנטי תחת A .

כמובן, ש- A טרנספורמציה לינארית אורתוגונלית במישור V^\perp . $(A|_{V^\perp})$, לכן, $A|_{V^\perp}$ סיבוב או שיקוף, ובעצם, סיבוב, כי בבסיס אורתונורמלי בו v הוקטור הראשון ו- w, u בסיס אורתוגונלי ל- V^\perp ,

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & A|_{V^\perp} \end{array} \right)$$

ולכן,

$$1 = \det A = \det A|_{V^\perp}$$

אם כן,

$$A \sim \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \quad (*)$$

■

מסקנה 1.16 לכל מטריצה עם דטרמיננטה 1 ב- $O_3(\mathbb{R})$, מיוצגת על ידי מטריצה בצורה (*).
אם כן, כל מטריצה עם דטרמיננטה 1 ב- $O_3(\mathbb{R})$ צמודה למטריצה מהצורה (*), בתוך החבורה האורתוגונלית

מסקנה 1.17 נעיון ב-

$$\det : O_3(\mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$SO_3(\mathbb{R}) = \{A \in O_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

כמובן ש- $\ker \det = SO_3(\mathbb{R})$. $SO_3(\mathbb{R})$ מאינדקס 2 ב- $O_3(\mathbb{R})$, כך ש-

$$O_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R}) \sqcup SO_3(\mathbb{R}) \cdot J_3$$

כאשר

$$J_3 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

למעשה, $SU_3(\mathbb{R}) \cdot J_3 = SU_3(\mathbb{R}) \cdot J = J \cdot SU_3(\mathbb{R})$, לכל טרנספורמציה אורתוגונלית J עם דטרמיננטה -1.
עד עתה, ראינו כי מטריצה אורתוגונלית היא סיבוב סביב ציר \iff יש לה דטרמיננטה 1.

טענה 1.18 נניח $\det A = -1$. אזי קיים וקטור יחידה v , כך ש- $Av = -v$.

הוכחה: נחשב:

$$\begin{aligned} A^t(A+I) &= A^tA + A^t = (I+A)^t \\ &= (A+I)^t \end{aligned}$$

לכן,

$$-\det(A+I) = \det A \det(A+I) = \det(A+I)$$

כי $\det A = -1$, לכן,

$$\det(A+I) = 0$$

■

, ולכן, יש ערך עצמי -1.

הערה 1.19 אם $\det A = -1$, לא נובע כי ל- A אין וקטור אינורניטי. למשל,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

למטריצה זו יש וקטור שעובר לנגדי שלו, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ובנוסף, המרחב הנפרש על ידי $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, הוא תת מרחב של וקטורי שבת. בנוסף,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = +1$, ולכן, B היא סיבוב סביב ציר z , בזווית π . דוגמא נוספת היא המטריצה,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\det C = -1$, כאן, ציר z , למשל, עובר ל $-z$, ובמישור $x-y$, מתבצע סיבוב ב $-\pi$.

תרגיל: נעיון ב $-\begin{pmatrix} -1 & & \\ \cos \theta & \sin \theta & \\ \sin \theta & -\cos \theta & \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ \cos \theta & \sin \theta & \\ \sin \theta & -\cos \theta & \end{pmatrix}$, $\det D = 1$, לכן, D סיבוב סביב ציר. מצאו את הציר ואת זווית הסיבוב במישור הניצב.

2 סימטריה

2.1 חברת התנועות הצפידות (איזומטריות) של המישור

אילו תנועות צפידות יש במישור?

1. הזזה, $t_a(v) = v + a$:

2. סיבוב סביב נקודת שבת.

3. שיקוף בציר שיקוף.

4. שיקוף־הזזה בציר שיקוף הזזה.

הסימטריות המתאימות

1. אם r סיבוב סביב p כמרכז.

למשל, סיבוב בזווית $\frac{2\pi}{n}$, ישאיר את המצולע המשוכלל עם n צלעות ומרכז p , אינווריאנטי, ולכן, סיבוב כזה יפעל כסימטריה של המצולע.

2. הזזה, וסימטריה תחת הזזה

אם גוף מורכב ממבנה מחזורי על ציר מסויים במרחק a , זה מזה, אז הגוף ישאר אינווריאנטי להזזה ב $-a$. זוהי סימטריה תחת הזזה

3. שיקוף, וסימטריית שיקוף.

אם נשקף אובייקט, נקבל אובייקט חדש שהוא סימטרי תחת שיקוף.

4. שיקוף הזזה – הרכבה של הזזה לאורך ישר ושיקוף בישר זה כציר שיקוף.

משפט 2.1 כל תנועה צפידה של המישור היא הזזה, סיבוב, שיקוף או שיקוף והזזה.

אורינטציה בהנתן בסיס אורתונורמלי סדור של המישור, $\{e_1, e_2\}$, אזי קיימות שתי אפשרויות:

1. e_2 מתקבל מ- e_1 על ידי סיבוב ב- 90° נגד כיוון השעון.

2. e_2 מתקבל מ- e_1 על ידי סיבוב ב- 90° בכיוון השעון.

כל תנועה צפודה תקח בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי. וקיימת אחת משתי האפשרויות: או ששני הבסיסים הם מאותו סוג, או שהם מסוגים הפוכים.

טרנספורמציות צפידות ששומרות על סוג הבסיס, נקראות טרנספורמציות שומרות אורינטציה, ואלו שהופכות את הסוג, הן הופכות אורינטציה.

ברור כי הזזה וסיבוב הן שומרות אורינטציה, ושיקוף ושיקוף-הזזה הן הופכות אורינטציה. אם כן, האורינטציה ממינת את התנועות, והעתקה

$$\varphi \mapsto \begin{cases} +1 & , \varphi \text{ Preserve oriatnation} \\ -1 & , \varphi \text{ Reverse orientatation} \end{cases}$$

היא הומאומורפיזם $\text{sgn} : \text{Iso}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \pm 1$. $\ker \text{sgn}$ הוא טרנספורמציות שומרות אורינטציה, וטרנספורמציות שומרות אורינטציה הן מאינדקס 2- ב- $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

ייצוג בקוארדינטות:

• הזזה

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_a} \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix}$$

• סיבוב ושיקוף סביב ראשית כמרכז: r_θ, h_θ

$$J_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

עד אתה, ראינו כי כל שיקוף הוא מהצורה $J_2 \cdot r_\theta$, והחבורה כולה,

$$\begin{aligned} \text{Iso}(\mathbb{R}^2) &= \{t_a \circ A \mid a \in \mathbb{R}^2, A \in O_2(\mathbb{R})\} \\ &= \{t_a \circ r_\theta, t_a \circ r_\theta \circ J_2 \mid r_\theta \in SO_2(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

פירוק זה הוא לשתי המחלקות של חבורת הטרנספורמציות שומרות האורינטציה.

במילים אחרות, $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ הוא איחוד זר של מחלקת הטרנספורמציות הופכות האורינטציה וחבורת הטרנספורמציות שומרות האורינטציה.

$$= \{t_a \circ r_\theta \mid a \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi]\} \cup \{t_a \circ r_\theta \circ J_2 \mid a \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

התוכך של המשפט שלנו הוא שבחבורה $\{t_a \circ r_\theta \mid a \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi]\}$ יש רק סיבובים והזזות ובמחלקה $\{t_a \circ r_\theta \circ J_2 \mid a \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi]\}$, יש רק שיקופים ושיקופי-הזזה.

הוכחה: (המשפט)

נתחיל מהחבורה של הטרנספורמציות שומרות האורינטציה. נעיין בהעתקה כזו, שאיננה הזזה. אם כן, עלינו להראות שהיא סיבוב, ולשם כך, עלינו למצוא לה נקודת שבת. לשם כך נציג, $\varphi = t_a \circ r_\theta$, ונניח ש- $\theta \neq 0$. נתאר עתה את המצב. בבנייה הבאה: שבה הבסיס של משולש הוא הוקטור a , וזווית הראש היא θ , השוכנת על הרשית, נקבל את המשולש oqp . נקבל כי

$$r_\theta p = q$$

$$t_a q = t_r r_\theta p = p$$

p נקודת שבת. נטען, מעכשיו, כי $t_a \circ r_\theta$ הוא סיבוב בזווית θ עם p כמרכז. והומנס,

$$t_a r_\theta (x + p) = t_a (r_\theta x + r_\theta p) = r_\theta x + r_\theta p + a = r_\theta x + p$$

עד כאן הראנו שכל טרנספורמציה צפידה שומרת אוריינטציה היא או סיבוב או הזזה. לסיים ההוכחה, עלינו לראות כי כל העתקה הופכת אוריינטציה היא שיקוף או שיקוף-הזזה. ψ כזו היא מן הצורה:

$$\psi = t_a \circ r_\theta \circ J = t_a \circ h_\alpha$$

כאשר h_α , שיקוף בישר דרך הראשית. אם נקח בסיס בו ישר זה הוא ציר x , והניצב הוא ציר y , אזי h_α מיוצג על ידי J_2 , ובקוארדינטות של בסיס זה,

$$\psi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t_a J_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + a_1 \\ a_2 - v \end{pmatrix}$$

לכן, הישר האפייני $\ell = \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix}$ (פרמטר) $- u$, יעבור לעצמו תחת ψ :

$$\psi \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + a_1 \\ \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix}$$

כלומר, ψ פועלת על ישר זה, המקביל לציר השיקוף של h_α , על ידי הזזה. ■

החבורה $\text{Iso}^0(\mathbb{R}^2) = \{t_a \circ r_\theta \mid a \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi]\}$ היא תת חבורה נורמלית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ מאינדקס 2. ראינו גם כי $V = \{t_a \mid a \in \mathbb{R}^2\}$ היא תת חבורה של $\text{Iso}^0(\mathbb{R}^2)$, שאיזומורפית ל- \mathbb{R}^2 .

תתי חבורות נוספות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ לכל נקודה $p \in \mathbb{R}^2$, קבוצת הטרנספורמציות $\{\varphi \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2) \mid \varphi p = p\}$ ששומרות את p במקומה, היא תת חבורה איזומורפית לחבורה שמייצבת את p (שומרת את p במקומו), שהיא החבורה האורתוגונלית, $O_2(\mathbb{R})$. ניתן הוכחה לכך בהמשך.

לוח הכפל בחבורת האיזומטריות: יהיו r_θ, h_θ טרנספורמציות לינאריות אורתוגונליות.

$$r_\alpha \cdot r_\beta = r_{\alpha+\beta}$$

$$h_\theta r_\alpha h_\theta^{-1} = r_{-\alpha}$$

עלינו לבדוק גם את היחס בין הזזה לסיבוב ובין הזזה לשיקוף. תהא t_a הזזה בוקטור a , ונחשב:

$$r_\theta(t_a(v)) = r_\theta(v+a) = r_\theta v + r_\theta a$$

$$= t_{r_\theta a}(r_\theta v) = t_{r_\theta a} \circ r_\theta(v)$$

או,

$$r_\theta \cdot t_a = t_{r_\theta a} \circ r_\theta$$

$$r_\theta \circ t_a \circ r_\theta^{-1} = t_{r_\theta a}$$

למעשה, השתמשנו כאן רק בכך ש- r_θ לינאריות. ביתר כלליות, אם $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ לינארית, t_a הזזה על \mathbb{R}^n בוקטור a , אזי

$$A(t_a(V)) = A(v+a) = Av + Aa = t_{Aa}(Av)$$

כלומר,

$$A \circ t_a = T_{Aa} \circ A$$

במיוחד, זה נכון עבור שיקופים, נניח ב- \mathbb{R}^2 :

$$h_\theta t_a = t_{h_\theta a} \cdot h_\theta$$

נזכר שאנו גים יודעים לכפול כל שני שיקופים (זהו סיבוב בזווית $\frac{1}{2}$ ההפרש). מאחר והאיבר הכללי של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ הוא $r_\theta \circ t_a$, או $t_a \circ r_\theta \circ J_2$, אזי, נוכל לחשב עקרונית כל סידרה של מכפלות. חבורת ההזזות V היא תת חבורה נורמלית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, שהרי כל $\varphi \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, מהצורה $t_a \circ A$, כאשר A לינארית, ואפילו אורתוגונלית, ולכן,

$$\begin{aligned}\varphi t_b \varphi^{-1} &= t_a A \cdot t_b \cdot (t_a A)^{-1} = t_a A t_b A^{-1} t_a^{-1} \\ &= t_a t_{Ab} t_a^{-1} = t_{Ab}\end{aligned}$$

כאשר המעבר הראשון בשורה השניה נובע מיחסי החילוף והמעבר השני, מאבלייות של תת-חבורת ההזזות. לכן, V נשארת במקומה תחת הצמדות.

הצמדות

הערה 2.2 כל הנקודות במישור הן שקולות תחת חבורת האיזומטריות, כלומר: לכל זוג נקודות, u, v , קיימת איזומטריה φ כך ש- $\varphi(u) = v$ (כמובן: $\varphi^{-1}(v) = u$). אומרים שחבורת האיזומטריות פועלת טרנזיטיבית על המישור. כלומר, בהנתן שתי נקודות, u, v , את φ לעיל ניתן אפילו לקחת כהזזה. למעשה, אפילו תת החבורה V , ההזזות, פועלת טרנזיטיבית על המישור.

מסקנה 2.3 טרנספורמציה של סיבוב סביב נקודה p , היא צמודה בחבורה $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, לסיבוב סביב הראשית באותה זווית, ולכן כל שתי טרנספורמציות סיבוב סביב שתי נקודות כלשהן, באותה זווית סיבוב הן צמודות.

טרנספורמצית הסיבוב סביב p בזווית θ , מקיימת:

$$R_\theta = t_a r_\theta t_a^{-1}$$

באותו אופן,

ביתר כלליות, תת החבורה שמייצבת את המקודה p צמודה לתת החבורה שמייצבת את הנקודה q , לכל p, q . במיוחד, זה נכון גם לשיקוף: כל שיקוף בישר שבת כלשהו במישור, ℓ , צמוד לשיקוף בציר J_2 , x . אם $\varphi p = p$ ו- $tp = q$, אזי $t\varphi t^{-1}(q) = p$, או במילים אחרות, $tG_p t^{-1} \subseteq G_q$, כאשר $G_p = \{\varphi \in \text{Iso} \mid \varphi p = p\}$. למעשה, יש כאן שיויון, כי אם $\psi \in G_q$, אפשר לבדוק בקלות כי $\lambda t^{-1} \psi t = \lambda$ שומרת על p , ולכן ב- G_p וקיים כמובן, $t\lambda t^{-1} = \psi \in G_q$.

לסיום הדין במבנה החבורה, $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, נדון במבנה חבורת המנה, $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)/V$, שהרי V תת חבורה נורמלית.

טענה 2.4 $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)/V$ איזומורפית ל- $O_2(\mathbb{R})$, ולמעשה, ההעתקה $A \xrightarrow{\rho} t_a \circ A$ על $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ היא ההומומורפיזם הקאנוני.

(כל $\varphi \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ הוא מהצורה $\varphi = t_a \cdot A$ ביחידות). ההומומורפיזם הקאנוני, $\pi : G \rightarrow G/N$, הוא $\pi(g) = gN$. **הוכחה:** מדוע ρ הומומורפיזם?

$$\rho(t_a \circ A \circ t_b \circ B) = \rho(t_a t_{Ab} A B) = \rho(t_{a+Ab}(AB)) = \rho(t_a \circ A) \rho(t_b \circ B)$$

כלומר הוא הומומורפיזם.

$$\ker \rho = \{t_a \circ A \mid \rho(t_a \circ A) = I = A\} = V$$

■ זהו אפימורפיזם (הומומורפיזם על), ולכן ρ היא העתקה הקאנונית.

אם כן, ראינו ש- $\mathbb{R}^2 \cong V$ היא תת חבורה נורמלית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ו- $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)/V \cong O_2(\mathbb{R})$. $O_2(\mathbb{R})$ היא כמובן גם תת חבורה של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, וצמצום ρ לתת חבורה זו הוא הזהות. כלומר, סיבוב θ סביב נקודה כלשהי במישור עובר תחת ρ לטרנספורמציה אורתוגונלית r_θ .

2.1.1 תתי חבורות סופיות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$

נתחיל מהחבורה האורתוגונלית.

$$C_n = \left\langle r_{2\pi/n}^k, 0 \leq k \leq n-1 \right\rangle$$

חבורה זו היא חלק מחבורת הסימטריות של מצולע בן n צלעות. למשל, שיקוף בציר x גם שומר על המשושה. אם כן, השיקוף J_2 בציר ה- x הוא חלק מחבורת הסימטריות של המשושה. באופן כללי, נסמן את חבורת הסימטריות של המצולע המשוכלל בן n צלעות ב- D_n . כדי למיין את תתי החבורות הסופיות נלך בשני שלבים.

1. נוכיח כי לכל תת חבורה סופית $G \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, יש נקודת שבת משותפת, p . כלומר, $G \subseteq G_p$, ולכן, G צמודה לתת חבורה סופית של $O_2(\mathbb{R})$, שהיא G_p צמודה ל- $O_2(\mathbb{R})$.

2. נמיין תתי חבורות סופיות ב- $O_2(\mathbb{R})$.

(לטענה 1.) הוכחה:

תהא q נקודה כלשהי במישור. נענין בקבוצת הנקודות $\{gq\}$, כך ש- $g \in G$. כלומר, אם $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ אזי $C = \{g_1q, \dots, g_nq\}$. לקבוצה C יש את התכונה, שהיא אינווריאנטית תחת G , כלומר, $gC = C$, לכל $g \in G$. נראה כי מרכז הכובד של C ,

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i q$$

היא נקודה G -אינווריאנטית. אם $g \in G$ היא טרנספורמציה לינארית, אזי הטענה היא מיידית:

$$gp = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n gg_i q = \frac{1}{n} \sum_j g_j q = p$$

(מאחר כן- $gg_i \in G$, ולכן זו פרמוטציה על אברי החבורה).

ביתר כלליות, אם φ טרנספורמציה צפידה כלשהי, אז φ לוקחת את מרכז הכובד של x_1, \dots, x_n למרכז הכובד של $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$. שהרי אם φ לינארית זה ברור ואם φ הזזה, נניח $\varphi = t_a$, אזי,

$$t_a \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_a(x_i)$$

לכן, גם הרכבות $t_a \circ A$ בעלת תכונה זו, ולכן, כל טרנספורמציה צפידה, ובמיוחד טרנספורמציה צפידה שומרת על קבוצה סופית אינווריאנטית, כי היא בהכרח שומרת על מרכז הכובד שלה במקומו. אנו מסיקים שלכל חבורה סופית של טרנספורמציות צפידות, יש נקודת שבת.

שלב 2: אם נתון ש- g שומרת על הקבוצה הסופית x_1, \dots, x_n אינווריאנטית, כלומר,

$$\{gx_i\}_{i=1}^n = \{x_i\}_{i=1}^n$$

כלומר, g פועלת כתמורה על $\{x_i\}_{i=1}^n$, אז מרכז הכובד של $\{x_i\}_{i=1}^n$ הוא נקודת שבת של g . בהנתן חבורה G , ו- \mathbb{R}^2 כלשהו, אזי $\{gx|g \in G\} = O$, המסלול של x תחת G , היא קבוצה סופית שאינווריאנטית תחת כל $g \in G$. ואכן, $\{(gh)x|h \in G\} = \{hx|h \in G\}$, אז לכן, מאחר ש- O סופית ו- G -אינווריאנטית, אז מרכז הכובד של O הוא נקודת שבת של כל אברי G , כלומר, נקודה g אינווריאנטית. G צמודה לתת חבורה של $O_2(\mathbb{R})$, כי המייצב של מרכז הכובד p צמוד ל- $O_2(\mathbb{R})$. ראינו כי החבורה המייצבת נקודה כלשהי צמודה לחבורה שמייצבת את אפס, כלומר, ל- $O_2(\mathbb{R})$.

מהם תתי החבורות הסופיות של $O_2(\mathbb{R})$?

טענה 2.5 כל תת חבורה סופית של $O_2(\mathbb{R})$ איזומורפית ל- C_n או ל- D_n .

$$C_n = \{ r_{2\pi k/n} \mid 0 \leq k \leq n-1 \}$$

החבורה הציקלית מסדר n , או D_n , החבורה הידהדרית, השומרת מצולע משוכלל בין שני צלעות.

הוכחה:

1. נניח G סופית, ו- $G \subseteq SO_2(\mathbb{R})$, כלומר, כל אברי G הם סיבובים. יהא $r_\theta \in G$ סיבוב בזווית מינימלית. אזי, $G = \langle r_\theta \rangle$. לא ניתן להתקרב לציר x , בזווית קטנה מ- θ , כי אז ניתן היה להפעיל את r_θ , ולקבל זווית קטנה יותר. לו היתה בחבורה נקודה שאינה נוצרת על ידי r_θ , אז היה ניתן להזיזה על ידי r_θ , ולקבל זווית קטנה יותר. $\theta = \frac{2\pi}{n}$ היא כפולה רציונאלית של 2π , ממנימליות θ .

2. תהא G סופית כלשהי, ונניח שאיננה מוכלת ב- $SO_2(\mathbb{R})$, אזי $\det : G \rightarrow \{\pm 1\}$ היא על, ואם כן,

$$\ker \det = C_n$$

היא חבורה ציקלית של סיבובים, ובנוסף, היא מאינדקס 2. אם כן,

$$G = C \amalg Ch$$

(איחוד זר) כאשר k שיקוף בישר מסויים. נגדיר

$$E_n = Cv$$

כלומר, המסלול של הוקטור v תחת חבורת הסיבובים C , ונראה את E_n כמצולע משוכלל, בעל n צלעות. נראה עתה כי h שומר על E_n אינווריאנטי, כאשר בחרנו את v כוקטור יחידה על ישר השבת של h . מאחר ש- C נורמלית (כי היא מאינדקס 2) אז $hCh^{-1} = C$, ולכן,

$$(hCh^{-1}) \cdot v = h(Cv) = Cv$$

(מאחר ו- $v = h^{-1}v$, לפי הבחירה של v). לכן, E_n הוא h -אינווריאנטי.

■

מבנה החבורה הדידהדרית, D_n , באופן מופשט באופן כללי,

$$D_n = C \amalg Ch$$

נוכל לקחת את $x = r_\theta$ ו- $y = h$, אזי,

$$\tilde{D}_n = \langle x, y \mid x^n = e = y^2, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

כאשר היחס האחרון הוא היחס: $hr_\theta h^{-1} = r_{-\theta}$. וביצוג זה, אברי \tilde{D}_n הם $(= C) e, x, x^2, \dots, x^{n-1}, y$ ו- $(= Ch) xy, \dots, x^{n-1}y$.

וב- \tilde{D}_n יש $2n$ איברים. \tilde{D}_n איזומורפית ל- D_n .

הערה 2.6 עקביות: נדרוש למשל, $\langle x \mid x^2 = e = x^3 \rangle = \{e\}$. באופן כללי, אם נגדיר חבורה באמצעות יוצאים ויחסים, קשה מאוד לבדוק האם החבורה היא חבורה טריוויאלית.

2.1.2 חבורות דיסקרטיות

תהא $\Gamma \supseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$. נאמר כי Γ דיסקרטית אם כל סיבוב ב- Γ הוא סיבוב בזווית $\leq \varepsilon$, וכל הזזה ב- Γ היא הזזה למרחק $\leq \varepsilon$ כאשר $\varepsilon > 0$ הוא מספר חיובי קבוע.

דוגמא נניח יש $\gamma \in \Gamma$, שהוא שומר על 0. אזי $\{\gamma^n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \Gamma$. נניח $r_\alpha \in \Gamma$, אזי $r_{n\alpha} \in \Gamma$. כאן, החבורה $\gamma \cup O_2(\mathbb{R})$ דיסקרטית, אם ורק אם α כפולה רציונאלית של 2π .

נכניס שני מושגים:

1. חבורת ההזזות של $\Gamma \cap V$

2. נקרא ל-Point group, החבורה הנקודתית של Γ , שהיא תמונתה של Γ תחת הצמצום ל- Γ של ההומומורפיזם:

$$\begin{aligned} \Pi : \text{Iso}(\mathbb{R}^2) &\rightarrow O_2(\mathbb{R}) \\ t_a \circ A &\mapsto A \quad A \in O_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

היא הומומורפיזם אם גרעין שהוא V , חבורת ההזזות.

החבורה הנקודתית היא חבורת מנה של Γ , ולמעשה, איזומורפית ל- $\Gamma/\Gamma \cap V$.

אנו מעוניינים להבין תתי החבורות הדיסקרטיות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$. ראינו כי תתי החבורות הדיסקרטיות של $O_2(\mathbb{R})$, הן בדיוק החבורות הסופיות, ונמצא עתה את תתי החבורות הדיסקרטיות של חבורת ההזזות $\mathbb{R}^2 \cong V$.

טענה 2.7 תהא L תת חבורה דיסקרטית של \mathbb{R}^2 או V אזי,

1. $L = \{0\}$

2. $L = \{na_0 | n \in \mathbb{Z}\}$, כל הכפולות של וקטור $a_0 \neq 0$

3. קיימים שני וקטורים בלתי תלויים לינארית, a_0 ו- b_0 כך ש- $L = \{na_0 + mb_0 | (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$

למשל, $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ תת חבורה דיסקרטית. אם a_0, b_0 הם בלתי תלויים לינארית, אזי $\{na_0 + mb_0 | (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ היא תת חבורה דיסקרטית של \mathbb{R}^2 , הנקראת סריג, ואבריה מייצרים ריצוף המישור על ידי מקבילית.

אם כך, הטענה אומרת שכל תת חבורה דיסקרטית של \mathbb{R}^2 , שאיננה מוכלת בישר, היא סריג. **הוכחה:** נניח $L \ni a \neq 0$, נסתכל על $\ell = \mathbb{R}a$, ויהא a_0 וקטור מאורך מינימלי חיובי ב- ℓ , ויש כזה כי L דיסקרטית. אזי, או ש- $L = \mathbb{Z} \cdot a_0$, או שיש וקטור נוסף $v \in L$ מחוץ ל- ℓ , כי אם אין וקטור נוסף, b כזה, אזי $L \subseteq \ell$, ואזי אם יש וקטור $c \in \ell \setminus \mathbb{Z}a_0$, אזי ל- $ca_0 - c$ יהיה אורך קטן מ- a_0 , וזו סתירה.

נתון עתה זוג, a_0 , שהוא בעל אורך מינימלי בישר ℓ שהוא פורש, חיתוך עם L , ווקטור נוסף, b , בלתי תלוי. נעניין במקבילית P שנפרשת על ידי a_0, b ובה יש מספר סופי בלבד של אברי L .

הערה 2.8 למעשה, בכל קבוצה קומפקטית K של \mathbb{R}^2 , יש מספר סופי מאברי L . אחרת, אם $x_n \in K \cap L$, ולכן האיברים $x_n - x_m$, כאשר $n \neq m$, הם שונים מאפס ויש להם תת-סידרה שמתכנסת ל-0, אבל תת סידרה זו היא ב- L . זאת סתירה לדיסקרטיות של L .

מתוך הקבוצה האינסופית $L \cap P$, נבחר איבר b_0 , שמרחקו מהישר $\ell = \mathbb{R}a_0$ הוא מינימלי. המלבן P_0 שנפרש על ידי b_0 ו- a_0 אינו מכיל שום איבר נוסף של L . כדי לראות זאת, נשים לב כי נקודה ב- L שהיא ב- P_0 , הגובה שלה מעל הישר ℓ חייב להיות הגובה של b_0 , וזאת משום ש- b_0 נבחר להיות בעל הגובה המינימלי. ולכן, בין אם הנקודה ב- Q' ובין אם היא ב- Q' (הקטעים יחסית למקביל ל- b שיוצא מ- a_0), הגובה שלה חייב להתלכד עם הגובה של b_0 . אם היא ב- Q' , נשתמש בהזזה ב- $-a_0$. לכן הנקודה חייבת להיות על $[0, a_0]$ או על $[b_0, b_0 + a_0]$, ושני המקרים יובילו לכך שמצאנו על $[0, a_0]$ נקודה שקרובה ל-0 יותר מ- a_0 , וזו סתירה לבחירת a_0 .

לכן, הנקודה היא בהכרח $a_0 + b_0$.

כדי לסיים את הוכחת הטענה, נוכיח:

טענה 2.9 יהא L סריג, $a_0, b_0 \in L$, וקטורים בלתי תלויים. אם במקבילית P_0 הבנויה על a_0 ו- b_0 אין איבר נוסף של L , אזי,

$$L = \{na_0 + mb_0 | (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

הוכחה: באנלוגיה למימד אחד: אם $v \in L$, אזי $v = na_0 + mb_0 + \alpha a_0 + \beta b_0$, כי v צירוף לינארי של a_0 ו- b_0 , ונוכל להניח ש- $0 \leq \alpha, \beta < 1$. לכן,

$$\begin{aligned} v - (na_0 + mb_0) &\in L \\ &= \alpha a_0 + \beta b_0 \in L \cap P_0 \end{aligned}$$

■ על כן, על פי ההנחה על P_0 , זהו קודקוד האפס.

■ מצאנו את תת החבורות הדיסקרטיות של $O_2(\mathbb{R})$ ושל V . בהנתן תת חבורה דיסקרטית $\Gamma \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, $\Gamma \cap V$ היא תת חבורה דיסקרטית של V . בנוסף, יש לנו את $\Gamma/\Gamma \cap V$, החבורה הנקודתית, והיינו רוצים להבין כיצד Γ נבנית משני החלקים הללו.

טענה 2.10 אם Γ דיסקרטית, אזי גם תמונתה תחת Π , החבורה הנקודתית, היא דיסקרטית ב- $O_2(\mathbb{R})$.

ביתר פירוט, כל $\gamma \in \Gamma$, מהצורה $\gamma = t_a \cdot r_\theta \cdot h$, ואוסף הטרנספורמציות האורתוגונליות, $r_\theta \cdot h$ היא תת חבורה סופית של $O_2(\mathbb{R})$. **הוכחה:** ראינו כל טרנספורמציה $t_a r_\theta$ היא סיבוב סביב נקודת שבת p , בזווית θ (כאשר $\theta \neq 0$). אם כן, הנחת הדיסקרטיות על γ , אומרת כי כל ה- r_θ המתקבלים, הם בזווית $\theta \geq \varepsilon$ ולכן, זו חבורה סופית של סיבובים, ולכן החבורה הנקודתית של γ היא סופית.

חבורת סיבובים סריגיים

טענה 2.11 תהא Γ תת חבורה דיסקרטית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$. נסמן ב- $G/\Gamma \cap V = G$ החבורה הנקודתית. נזהה אותה עם חבורה סופית של טרנספורמציות אורתוגונליות, תת חבורה של $O_2(\mathbb{R})$. חבורה זו פועלת על המישור, ובמישור מופיעה תת-החבורה הדיסקרטית, $L = \Gamma \cap V$.

קיים L אינווריאנטית תחת G : לכל $g \in G$ ו- $v \in L$ כיים $gv \in L$.

הוכחה: יהא $v \in L$, כלומר, $t_v \in \Gamma \cap V$. אם $g \in G$, אזי קיים $\tilde{g} \in \Gamma$, שהיא מקור שלה תחת ההומומורפיזם הקאנוני. נרשום:

$$\tilde{g} = t_b \circ g$$

ואזי, קיים, מאחר ו- $\Gamma \cap V$ נורמלית ב- Γ , ולכן

$$\tilde{g} t_v \tilde{g}^{-1} = t_b g t_v g^{-1} t_b^{-1} = t_b t_{gv} t_b^{-1} = t_{gv} \in \Gamma \cap V = L$$

■ כלומר, הסריג שלנו הוא אינווריאנטי תחת הצמדות.

טענה 2.12 תהא Γ תת חבורה דיסקרטית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, כך ש- $\Gamma \cap V$ סריג. אזי, החבורה הנקודתית של Γ , שנסמן ב- G , היא,

$$\begin{aligned} \{e\}, C_2, C_3, C_4, C_6 \\ D_4, D_3, D_4, D_6 \end{aligned}$$

וזהו! ³

במיוחד, סדרי האיברים האפשריים בחבורה הנקודתית הם 1, 2, 3, 4, 6. **הוכחה:** יהא a וקטור בעל אורך מינימלי ($\neq 0$) בסריג $\Gamma \cap V = L$. תהא θ זווית הסיבוב המינימלית ($\neq 0$) בחבורה הנקודתית, G . אזי, $t_a \in L$ ו- $r_\theta \in G$, ולכן, $r_\theta a \in L$ כי L הוא G -אינווריאנט. לכן, הוקטור $r_\theta a - a$, גם בסריג L . אם כן, $\|r_\theta a - a\| \geq \|a\|$, כי $\|a\|$ מינימלית בסריג, ולכן, במשולש שווה השוקיים עם זווית ראש θ , ושוקיים $a, r_\theta a$, נקבל כי $\theta \geq 60^\circ$. אם כן, מבחינת סדרי האיברים ב- G , נוכל לקבל רק סדרים ≥ 6 .

³19/11/2009²

³ראה הצהרה כזו במצב מוצק

נותר לנו לפסול תתי חבורות מסדר 5. נסתכל על הוקטור a , ונסובבו ב- $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$, ופרם נוספת, לקבלת $r_{2\theta}a$. אבל גם $-a$ הוא בסריג, ואילו הזווית בין $r_{2\theta}a$ ו- $-a$ הוא 36° ! במשולש עם צלעות $r_{2\pi/5}^2 a$ ו- $-a$, הוקטור $r_{2\pi/5}^2 a - (-a)$ הוא בסריג, כי הסריג הוא $r_{2\pi/5}$ אינווריאנטי, ואורכו קטן מאורך a . איסור זה מכונה Forbidden 5-fold symmetry. ■

טענה 2.13 יש בדיוק 17 תתי-חבורות דיסקרטיות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, שחבורת ההזזות שלהן היא סריג. (עד כדי שקילות)

2.2 פעולות של חבורות

הגדרה 2.14 תהא G חבורה כלשהי ו- X מרחב כלשהו. **פעולה** של G על X היא התאמה מ- $G \times X \rightarrow X$, המסומנת $(g, x) \mapsto gx = y$ ומקיימת:

$$1. (e, x) \rightarrow x$$

$$2. (g_1 g_2, x) \rightarrow g_1 (g_2 x)$$

במילים אחרות: לכל $g \in G$, אנו מתאימים פונקציה $\varphi_g : X \rightarrow X$, על ידי $\varphi_g(x) = gx$. התכונות 1 ו-2 גוררות כי:

$$1. \text{ כל } \varphi_g \text{ היא פונקציה חח"ע ועל, ו-} \varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$$

2. ההעתקה מ- $\varphi_g \mapsto g$ הוא הומומורפיזם מ- G ל- $S(X)$, כאשר $S(X)$ היא חבורת התמורות על X .

ואכן, $g(g^{-1}x) = ex = x = g^{-1}gx$ על פי ההנחות על הפעולה, ולכן, $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. לכן, הטרכנספורמציה $g \mapsto \varphi_g$ היא הפיכה, עם הופכי $\varphi_{g^{-1}}$.

ובנוסף, $g_1(g_2x) = (g_1 g_2)x$, ומשוואה זו גוררת כי $\varphi_{g_1 g_2}(x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} g_2(x)$, כלומר, $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$, כלומר, $g \mapsto \varphi_g$ היא הומומורפיזם.

דוגמאות

1. $X = \mathbb{R}^2$, $G = GL_2(\mathbb{R})$. נגדיר

$$G \times X \rightarrow X \\ (A, v) \mapsto Av$$

כמובן, לכל $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, נתון, A היא העתקה הפיכה, φ_A , וקיים: $\varphi_{AB} = \varphi_A \varphi_B$ (אסוציאטיביות של כפל מטריצות), כלומר, $(AB)v = A(Bv)$.

2. $G = S_n$, חבורת התמורות על n עצמים, ו- $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$G \times X \rightarrow X \\ (\sigma, i) \mapsto \sigma i$$

כלומר, הפעלת התמורה על האיבר i של S_n פועלת ב- $\{1, \dots, n\}$. כאן, ההומומורפיזם $\varphi : S_n \rightarrow S(\{1, \dots, n\})$ הוא הזהות.

3. $X = \{(x, y) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, אפשר לקחת גם את $X' = \{(i, j) \in X \mid i \neq j\}$. S_n פועלת ב- X וב- X' על ידי:

$$(\sigma, (i, j)) = (\sigma i, \sigma j)$$

זוהי העתקה, $\varphi_\sigma : X \rightarrow X$ או $\varphi_\sigma : X' \rightarrow X'$, וכאן, $\varphi : S_n \rightarrow S(X')$.

4. $X = \mathbb{R}^2$ ו- $G = \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$. $(T, v) \mapsto Tv$. כל $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ הוא תמורה, ו- $(T_1 T_2)v = T_1(T_2 v)$.

5. $D_n \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, ו- E_n הוא מצולע משוכלל בן n צלעות עם מרכז בראשית, אז E_n הוא אינווריאנטי ו- D_n פועלת על E_n .

למשל, אם X היא קבוצת קודקודי E_n , אז D_n פועלת ב- X .

הערה 2.15 המושג של פעולה של G על X שקול למושג של הומומורפיזם $\varphi: G \rightarrow S(X)$, חבורת התמורות על X , שהרי, בהנתן הומומורפיזם φ כזה, נגדיר $t: G \times X \rightarrow X$, על ידי

$$t(g, x) = \varphi_g(x)$$

וקיים: $t(e, x) = x$, מאחר וכל הומומורפיזם לוקח את היחידה לאחד, $\varphi_e = I$, ו- $t(g_1, t(g_2, x)) = t(g_1, g_2, x)$

$$\begin{aligned} t(g_1 g_2, x) &= \varphi_{g_1 g_2}(x) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x) \\ &= \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = t(g_1, t(g_2, x)) \end{aligned}$$

ולהפך, כמו שראינו, אם $t: G \times X \rightarrow X$ מקיימת את (1) ו-(2), אזי φ_g היא העתקה $\varphi_g: X \rightarrow X$ חח"ע ועל עם הופכי $\varphi_{g^{-1}}$ וקיים $g \mapsto \varphi_g$ הומומורפיזם $\varphi: G \rightarrow S(X)$.

הגדרה 2.16 מסלולים של פעולה של חבורה

1. המסלול של איבר $x \in X$ הוא $\{gx | g \in G\}$. יסומן ב- $O(x)$ או ב- $G(x)$, המסלול של x תחת G .
2. תת קבוצה $Y \subseteq X$ נקראת G -אינווריאנטית אם $gY = Y$ לכל $g \in G$. כלומר, לכל $y \in Y$ ו- $g \in G$ מתקיים: $gy \in Y$.
כמובן שמסלול הוא תת קבוצה אינווריאנטית: ההעתקה $g \mapsto hg$ היא תמורה על g , ולכן, $\{gX | g \in G\} = \{hgX | g \in G\} = h\{gX | g \in G\}$. או, $hO_x = O_x$, המסלול h -אינווריאנטי לכל $h \in G$.
 $O(x)$ היא הקבוצה ה- G אינווריאנטית המינימלית המכילה את x .
3. יהא $x \in X$. החבורה המייצבת את x , היא $St_G(x) = \{g \in G | gx = x\}$. (Stability group of x).
כלומר, המייצב של x ב- G , היא תת החבורה ששומרת על x במקומו, כלומר, כל הטרנספורמציות ב- G , ש- x היא נקודת שבת שלהן.

טענה 2.17 היחס על X לפי $X \sim_G y \iff x \sim y$ הם באותו מסלול. מחלקות השקילות הם מסלולי G ב- X . כל מחלקת שקילות לכן היא G -אינווריאנטית וקבוצה $Y \subseteq X$ היא G אינווריאנטית \iff היא איחוד של מסלולים, או מחלקות שקילות.

הוכחה: $x \sim y \iff$ קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$. זהו יחס רפלקסיבי וסימטרי וטרנזיטיבי כי אם $gx = y$ ו- $hy = z$ אזי $hgx = z$.

הוכחה: (למשפט לגרנ' מתורת החבורות)

$G = X$ חבורה סופית, $G \subseteq G$ תת חבורה, H פועלת ב- G , על ידי הזה, $(h, g) = gh$.

$$(h_1 h_2, g) = h_1 h_2 g = h_1 (h_2 g)$$

המסלול של g תחת H הוא Hg . כל מסלול הוא בן ואתו מספר איברים בדיוק. לכן,

$$G = \coprod_{i=1}^N H h_i$$

ולכן,

$$|G| = |H| N = H \cdot \# [G : H]$$

■

תהא G חבורה, ו- X קבוצה⁴. אז G פועלת על X . היחס $x \sim_G y \iff O_x = O_y \iff x \sim y$ כי $gx = y \iff$ יש $h \in G$ כך ש- $hy = x$ הוא יחס שקילות, G אינווריאנטי. כלומר, $x \sim_G y$ הוא יחס טרנזיטיבי, סימטרי ורפלקסיבי. מרחב המנה,

$$\{O_x | x \in X\} = X/G = X/\bar{c}$$

ומרחב X מתפרק ליחוד זר של מסלולים, שהם קבוצות G אינווריאנטיות מינמליות.

⁴26.11.2009, הושלם באמצעות יבגני גרישין ועמרי

דוגמאות

1. $G = \mathbb{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = r_\theta$. המסלולים של \mathbb{T} ב- \mathbb{R}^2 הם מעגלים, והמייצב של 0 תחת T הוא $\text{St}(0) = \mathbb{T}$. אבל, אם $v \neq 0$, אז $\text{St}(v) = \{1\}$.

2. $\mathbb{R} \cong \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \leq SL_2(\mathbb{R})$. פועלת במישור. נמצא מסלול של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ לפי D :

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

כלומר, המסלול

$$O_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(u, v) \mid uv = 1\}$$

כלומר, זו היפרבולה. אזי, מחלקות השקילות הם כל ההיפרבולות. על הצירים:

$$\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

החלקים החיוביים והשליליים של הצירים אינווריאנטים תחת החבורה. הצירים מתחלקים לחיובי ושלילי

$$O_D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \{(x, y) \mid x > 0, y = 0\}$$

לכל חבורה יש שלוש פעולות מיידיות:

1. הזזה שמאלית

2. הזזה ימנית

3. הצמדה

הזזה שמאלית לכל $g \in G$, נגדיר $\ell_g, \ell_g x = gx$ היא מונומורפיזם (כלומר, הגרעין שלה טריוויאלי) מ- G ל- $S(G)$ (החבורה הסימטרית על G). נסתכל על הרכבה:

$$\ell_g \circ \ell_h(x) = \ell_g(hx) = ghx = \ell_{gh}(x)$$

הזזה ימנית באותו אופן, ההעתקה $r_g : G \rightarrow G$, פועלת כמו

$$r_g(x) = xg^{-1}$$

היא תמורה. למעשה, לשום איבר פרט ל- e , אין אף נקובת שבת, שהרי $\ell_g(x) = x$ גורר $gx = x$, ומחוק הצמצום, אם מתקיים

$$gx = x \implies g = e$$

הצמדה $J : G \rightarrow S(G)$, כאשר $J_g = J_g \circ J_h^{-1}, J_g^{-1} = J_{g^{-1}}$, כלומר, $J_g(x) = gxg^{-1}$.

2.18 הערה 1. אם G אבלית, אז $J_j = id$, לכל g .

2.

$$\ker J = \{g \in G \mid gxg^{-1}x \iff gx = xg, \forall x\} = Z_G$$

3. מתקיימים ש-

$$J_g(x_1x_2) = gx_1x_2g^{-1} = gx_1g^{-1}gx_2g^{-1} = J_g(x_1)J_g(x_2)$$

ולכן, כל J_g הוא אוטומורפיזם של G . כלומר,

$$J : G \rightarrow \text{Aut}(G) \subseteq S(G)$$

(א) אם G אבלית, אז $\ell_{g^{-1}}(x) = xg^{-1} = g^{-1}x = \ell_g(x)$, נגדיר $r = \hat{\ell}$, כאשר $\hat{\ell}_g(x) = g^{-1}x$. אם G אינה אבלית, אז $r_g \neq \ell_g$, בצורה מהותית.

(ב) בדר"כ r שונה מ- ℓ . כלומר, אילו שתי תתי חבורות שונות של טרנספורמציות על G , לפעמים קורה כי $r(G) \cap \ell(G) = \{e\}$.

לדוגמה $G = \mathbb{Z}_6$, אז $\ell_1(x) = (x+1) \pmod{6}$, בחבורה אבלית, $g \mapsto g^{-1}$ הוא אוטומורפיזם.

2.19 הגדרה חבורה נקראת **טרנזיטיבית** אם יש בה רק מסלול אחד.

באופן שקול, $O_x = X$ לכל $x \in X$.

2.20 טענה נניח כי G פעולת ב- X , ו- $x \in X$, אזי קיימת העתקה חד-חד-ערכית ועל, בין המחלקות של המייצב של G - X , $\text{St}_G(x)$, לבין אברי המסלול O_x .

הוכחה: היא $g \in \text{St}_G(x)$, ונעיין במשוואה $gx = x$. ברור כי $ghx = x$, ברור כי $ghx = x$ לכל $h \in \text{St}_G(x)$. כלומר, ניתן לרשון, $g \cdot \text{St}_G(x) = x$.

ביתר כלליות, אם $gx = y$, אזי עדין $g \cdot \text{St}_G(x) = y$, כלומר, המחלקה $g \cdot \text{St}_G(x)$ מורכבת מטרנספורמציות שלוקחות את x אל $gx = y$. האם אלו כל הטרנספורמציות בעלות תכונה זו? נניח כי $ux = vx = y$, אזי $u^{-1}v \in \text{St}_G(x)$. כלומר, כל הטרנספורמציות בעלות התכונה: $ux = vx = y$, הן המחלקה של g , כלומר ב- $\text{St}_G(x)$, כן, ההעתקה $g \cdot \text{St}_G(x) \rightarrow gx$, היא מוגדרת היטב וברור שהיא על O_x , ההעתקה הזו היא גם חד-חד-ערכית, כי אם $gx = wx$, אז אם $g \cdot \text{St}_G(x) = w \cdot \text{St}_G(x)$, שהרי $w^{-1}gx = x$ ולכן $w^{-1}g \in \text{St}_G(x)$. ■

2.21 מסקנה 1. ניזכר כי הגודל של G/H מוגדר להיות האינדקס של H ב- G , מספר מחלקות H ב- G . אם כן, גודל המסלול הוא אינדקס של המייצב.

2. המסלול של x תחת G סופי, \iff המייצב של x מאינדקס סופי

3. נניח כי G סופית, ו- X סופית, אזי X מתפרק לאיחוד זר של מסלולים, ונניח כי $S \subset X$ היא קבוצה שמכילה נציג אחד בדיוק מכל מסלול,

$$|X| = \sum_{s \in S} |O_s| = \sum_{s \in S} [G : \text{St}_G(s)]$$

שהרי,

$$[G : \text{St}_G(s)] = \frac{|G|}{|\text{St}_G(s)|} = |O_s|$$

במיוחד, אם ב- X מסלול יחיד, אזי $|X| = [G : H]$, יש מחלקה אחת ובמיוחד, אז הגודל של $|X|$ מחלק את הגודל של G .

הערה 2.22 נניח כי $gx = y$ היא באותו המסלול כמו x . אזי, המייצב של y היא תת חבורה צמודה למייצב של x , וקיים:

$$\text{St}_G(y) = g\text{St}_G(x)g^{-1}$$

הוכחה: קודם כל, אם $h \in \text{St}_G(x)$, אזי

$$ghg^{-1}y = ghx = gx = y$$

ולכן, $ghg^{-1} \in \text{St}_G(y)$, כלומר,

$$g\text{St}_G(x)g^{-1} \subseteq \text{St}_G(y)$$

ולהפיד, אם $uy = y$, אז נסתכל על $g^{-1}ug$, ונראה כי היא מייצבת את x :

$$g^{-1}ugx = g^{-1}yg = g^{-1}y = x$$

ולכן, $w = g^{-1}ug \in \text{St}_G(x)$, ולכן

$$u = gwg^{-1} \in g\text{St}_G(x)g^{-1}$$

□

$$\text{St}_G(y) \subseteq g\text{St}_G(x)g^{-1}$$

■

2.3 עקרונות ספירה לפעולות על קבוצות סופיות

דוגמה תהא G סופית ונעיין בפעולות ההצמדה של G על G . יהא $x \in G$, ונסתכל מהוא המייצב של x בפעולה זו:

$$\text{St}_G(x) = \{g \in G \mid J_G(x) = x\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

החבורה $\{g \in G \mid gx = xg\}$ נקראת **המרכז** (בשווא, קמץ וצירה על מרכז) של x ב- G , ומסומנת גם $C_G(x)$. מהו המסלול של x תחת פעולת ההצמדה? אוסף כל האיברים הצמודים ל- x

$$O_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} = C(x)$$

היא מחלקת הצמידות של x .

מספר צמודי x הוא האינדקס של המרכז של x , כלומר,

$$G/C_G(x) \approx C(x), \quad |C(x)| \cdot |C_G(x)| = |G|$$

$$gC_g(x) \mapsto gxg^{-1}J_g(x)$$

כמובן, G מתפצלת לאיחוד זר של מחלקות צמידות, ולכן אם s_1, \dots, s_r הם נציגים של מחלקות הצמידות השונות, אז

$$|G| = \sum_{i=1}^r |O_{s_i}| = \sum_{i=1}^r \frac{|G|}{|C_G(s_i)|}$$

מסקנה 2.23 תהא G חבורה סופית⁵ הפועלת על קבוצה סופית X . לכל $g \in G$, נסמן: $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$. קבוצת נקודות השבת של g ב- X .

3.12.2009⁵

משפט 2.24 סכום גודלי קבוצות נקודות השבת של כל אברי g , $|X^g| = \sum_{g \in G} |X^g|$, כאשר r הוא מספר מסלולי G -ב- X .

הוכחה: נעייך במטריצה מגודל $|X| \times |G|$ שנתונה על ידי

$$a_{x,g} = \begin{cases} 1 & , gx = x \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

קבוצת נקודות השבת של g ,

$$|X^g| = \sum_{x \in X} a_{x,g}$$

אנחנו מעוניינים בביטוי

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} a_{x,g} = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} a_{x,g} \\ &= \sum_{x \in X} |\text{St}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O(x)|} \end{aligned}$$

$$(|G| = |O(x)| \cdot |\text{St}_G(x)| = |G/H| \cdot |H| \text{ לפי המשוואה})$$

$$= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O(x)|} = r |G|$$

בשויון האחרון, עוברים על כל אברי החבורה, ולכל אבר משייכים את הגו, דל של אחד חלקי המסלול שלו. אם קבע מסלול מסויים, כל מסלול יתן תרומה של 1, ולכן הסכום כולו הוא מספר המסלולים ■

משפט 2.25 נסכום על נקודות השבת לא כולל נקודות השבת של הזהות. תהא G חבורה סופית הפועלת בקבוצה סופי X , ותהא S חתך של אוסף המסלולים, כלומר, S נחתכת באיבר יחיד עם כל מסלול, אזי

$$\sum_{s \in S} |O(s)| (|\text{St}_G(s)| - 1) = \sum_{g \neq e} |X^g| = \sum_{s \in S} \frac{|G|}{|\text{St}_G(s)|} |\text{St}_G(s)| - 1$$

הוכחה: נחזור על ההוכחה הקודמת, בהשמטת האיבר e , כלומר, נגדיר את $Y = \{(x, g) | gx = x, g \neq e\}$ הביטוי שאנו מעוניינים בו הוא

$$\begin{aligned} |Y| &= \sum_{g \neq e} |X^g| = \sum_{g \neq e} \sum_{x \in X} a_{x,g} \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{g \neq e} a_{x,g} = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{gx=x \\ g \neq e}} 1 = \sum_{x \in X} |\text{St}_G(x)| - 1 \end{aligned}$$

כאשר $a_{x,g}$ היא אותה המטריצה שהוגדרה בהוכחה הקודמת. עתה, נחזור על סוף ההוכחה הקודמת. עבור מסלול נתון, $|\text{St}_G(x)|$ הוא קבוע, מאחר ולאברים באותו המסלול, המייצבים צמודים זה לזה. לכן,

$$\begin{aligned} &= \sum_{s \in S} |O(s)| (|\text{St}_G(s)| - 1) \\ &= \sum_{s \in S} \frac{|G|}{|\text{St}_G(s)|} (|\text{St}_G(s)| - 1) \end{aligned}$$

■

2.4 תתי חבורות סופיות של $SO_3(\mathbb{R})$

השגנו מיון מלא של תתי החבורות הסופיות של $O_2(\mathbb{R})$. נשאל את עצמנו מהם תתי החבורות הסופיות של החבורה האורתוגונלית התלת מימדית.

• המקרה הקודם: ברגע שנבחר ציר, הוא מגדיר את החבורה האורתוגונלית הדו-מימדית הפועלת במישור הניצב לציר הזה.

• סימטריות של גופים משוכללים בתלת מימדף הטרהדרון, הקוביה, אוקטהדרון, דודקהדרון ואיקוסהדרון. כבר ליוונים היה ידוע שאין יותר גופים משוכללים בשלושה מימדים. כשאנחנו לוקחים גוף סימטריהו מסתכלים על אוסף כל הפעולות שמייצבות אותו, נקבל חבורה. לכן, לכאורה, יש לנו חמש חבורות – חבורה לכל גוף.

בגופים המשוכללים, ניתן לבצע כל מני פעולות שישנו את הגופים, והם כבר לא יהיו משוכללים, אבל ישמור את חבורת הסימטריה. למשל ניסור קצוות הטראדר, ישמור על חבורת הסימטריה שלו.

משפט 2.26 כל תת-חבורה סופית של $SO_3(\mathbb{R})$ היא אחת מהנ"ל:

1. C_k , החבורה הציקלית של סביבו בזווית רציונלית, $2\pi/k$ סביב ישר.
2. D_k , החבורה דיהדרית של פוליגון מסדר k במישור מסויים.
3. T – חבורת הסימטריות של טטרהדרון, מסדר 12.
4. C – חבורת הסימטריות של האוקטהדרון, מסדר 24.
5. Ic – חבורת הסימטריות של האיקוסהדרון, מסדר 60.

הערה 2.27 O_3 , אנחנו לא מצפים לשינוי דרמטי, אבל לכל חבורה ב- O_3 , יש תת חבורה מאינדקס 2 ב- $SO_3(\mathbb{R})$. אבל מיון מלא של כל תת החבורות ב- $O_3(\mathbb{R})$ הוא מורכב יותר.

תהא G תת-חבורה סופית של $SO_3(\mathbb{R})$. אזי, לכל $g \neq e$ יש ציר סיבוב, ולכן **בדיוק** 2 נקודות שבת על הספרה. תהא P קבוצת נקודות השבת על הספרה, של איברים שונים מ- e . אז P קבוצה סופית. P היא קבוצה G -אינווריאנטית, כלומר, אם $v \in P$, אזי גם $ghg^{-1}v \in P$. ברור שגם gv הוא נקודת שבת של ghg^{-1} , שערי $ghg^{-1}gv = gv$ אם $v \in P$, אזי $hv = v$, לאיזשהו $h \neq e$. ברור שגם gv הוא נקודת שבת של ghg^{-1} , שערי $ghg^{-1}gv = gv$ אם $ghv = gv$. לכן, P היא G -אינווריאנטית ואנו מעוניינים בפעולת G הקבוצה הסופית P . הקבוצה P מקיימת את הזהות שהוכחנו,

$$\sum_{g \neq e} |P^g| = \sum_{s \in S} |O(s)| (|\text{St}_G(s)| - 1)$$

כאשר S קבוצת החתך של מסלולי G ב- P . כמובן, $|P^g| = 2$, ולכן,

$$2(|G| - 1) = \sum_{s \in S} \frac{|G|}{|\text{St}_G(s)|} (|\text{St}_G(s)| - 1)$$

ואם נרשום כי $s = \{s_1, \dots, s_r\}$, כלומר, יש r מסלולים, והמייצב של s_i הוא בגודל n_i , $|G| = n$,

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{i=1}^r \frac{n}{n_i} (n_i - 1) \\ 2 - \frac{2}{n} &= \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \\ &= r - \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} \end{aligned}$$

קיבלנו את המשוואה,

$$\boxed{2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i}} \quad (*)$$

נתח את המשוואה (*)

צעד ראשון על פי ההגדרה, $2 \leq n_i$ (כי $\{e\} \neq \text{St}_G(s_i)$) ולכן,

$$2 > 2 - \frac{2}{n} = r - \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} \geq r - \frac{r}{2}$$

נסיק כי $r < 4$, כלומר, יש לכל היותר 3 מסלולים!

צעד שני

1. נניח שיש מסלול יחיד, $r = 1$. נחזור ל- $(*)$, ונקבל כי

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{n_1}$$

צד ימין הוא קטן מ-1, וצד שמאל, הוא $1 \leq$.

2. נניח ויש שני מסלולים, $r = 2$, ומ- $(*)$, נקבל ש-

$$2 - \frac{2}{n} = 2 - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

או,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

כמובן, $n \geq n_1, n_2$, שהרי n_1 ו- n_2 סדרי תתי-חבורות, ולכן מחלקים של n . לכן, $n = n_1 = n_2$, כלומר, יש שני מסלולים בקבוצת נקודות השבת, ולכל אחד מהם יש מייצב מלא, כלומר - כל החבורה.

תהא p נקודת שבת, נניח, בלי הגבלת הכלליות, נניח כי p היא הקוטב הצפוני (אחרת, ניתן להצמיד את החבורה כך ש- p תהיה נקודה זו). גם הקוטב הדרומי הוא נקודת שבת, משום שזהו הנקודה השניה על ציר הסיבוב. במצבנו הנוכחי, לכל $s \in P$ מתקיים, $\text{St}_G(s) = G$, ולכן, המסלול של s הוא נקודה יחידה, ולכן, s נקודת שבת של כל החבורה G .

אם כן, G שומרת על הקוטב הצפוני, ולכן על הקוטב הדרומי, ולכן, G שומרת על מישור המשווה, הוא המישור הניצב לציר הסיבוב שלה, ולכן - G פועלת כחבורה אורתוגונלית על המישור הזה, ולמעשה, כחבורת סיבובים מסדר n . שהרי, G חלקית ל- $SO_3(\mathbb{R})$, ושומרת וקטור במקומו

3. נוכל להניח $r = 3$, ולסמן $n_1 \leq n_2 \leq n_3$.

(א) אם $n_1 \geq 3$, אזי, על פי $(*)$,

$$2 - \frac{2}{n} = 3 - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \right)$$

ונקבל שתירה, כי צד ימין הוא גדול או שווה מ-2, וצד שמאל הוא קטן מ-2, ולכן, $n_1 = 2$.

לכן, $n_1 = 2$

(ב) נעניין ב- n_2 . אם $4 \leq n_2$, כלומר, גם $n_3 \geq 4$, נקבל מ- $(*)$,

$$2 - \frac{2}{n} = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3}$$

ושוב נקבל את אותה הסתירה, צד ימין $2 \leq$, וצד שמאל $2 \geq$.

לכן, $n_2 = 2, 3$

4. קיבלנו $n_1 = 2$, ונניח עתה כי $n_2 = 2$. לפי $(*)$,

$$2 - \frac{2}{n} = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n_3}$$

כלומר,

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_3} \implies n = 2n_3$$

זאת אומרת, בפעולת G על P , יש שלושה מסלולים: מסלול אחד, המייצב שלו מסדר n_3 , הוא מסדר $\frac{|G|}{2}$.

קיבלנו כי סדרי המייצבים כאן הם $(2, 2, k)$, ו- k שרירותי. בהמשך, נראה שזוהי ריאליזציה של החבורה D_k הדיהדריות, D_k .

5. קיבלנו כי $n_1 = 2$ ונניח כי $n_2 = 3$, אזי,

$$2 - \frac{2}{n} = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n_3}$$

ולכן, $\frac{2}{n} = \frac{1}{n_3} - \frac{1}{6}$, או,

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} = \frac{1 + \frac{12}{n}}{6}$$

אם כן, $\frac{1}{n_3} > \frac{1}{6}$ ו- $n_3 = 3, 4, 5$.

נותרנו אם האפשרויות הבאות:

(א) סדרי המייצבים הם $(2, 3, 3)$, וסדר החבורה הוא 12. $(\frac{1}{3} = \frac{1 + \frac{12}{n}}{6} \implies n = 12)$

(ב) סדרי המייצבים הם $(2, 3, 4)$, וסדר החבורה הוא 24.

(ג) סדרי המייצבים הם $(2, 3, 5)$, וסדר החבורה הוא 60.

נתאים את החבורות הנ"ל לגופים המשוכללים:

1. T - תת החבורה עם מייצבים מסדרים $(2, 3, 3)$ היא חבורת הסימטריות של הטרהדרון. ניתן להעביר אנך לכל אחת מהפאות דרך הקודקוד הנגדי, ולסובב 3 פעמים סביב כל אנך כזה, וקיבלנו 12 אברים. כלומר, חבורת הסימטריות של הטרהדרון היא יפוש של חבורת הסימטריה הזו, ונותר להוכיח שזהו המימוש היחיד.

2. C - תת החבורה עם מייצבים מסדרים $(2, 3, 4)$, היא חבורת הסימטריות של האוקטהדרון והקוביה.

3. Ic - תת החבורה עם מייצבים מסדר $(2, 3, 5)$, היא חבורת הסימטריות של הדודקהדרון והאיקוסהדרון.

2.4.1 איזומורפיזם של החבורות האפלטוניות

הן החבורות השומרות את הגופים האפלטוניים:

$$|T| = 12$$

$$|C| = 24$$

$$|Ic| = 60$$

אנחנו רוצים לתאר איזומורפיזמים ביניהם לחבורות שאנחנו מכירים. זה גם קשור לדיון שלנו בפעולות של חבורות:

1. חבורת האיזומטריות של הטראדר, T , פועלת כחבורת תמורות על קודקודי הטראדר, ולכן יש הומומורפיזם $\varphi: T \rightarrow \text{Sym}(V_T)$, כאשר V_T קודקודי הטראדר. לכן,

$$\varphi: T \rightarrow S_4$$

קודם כל, φ חד-חד-ערכית, קי ברור של- φ אין גרעין (כלומר, אלמנט שפועל טריוויאליים על הטראדר: מייצב את כל ארבעת הקודקודים, והיחיד שעושה את זה הוא היחידה), וכמובן, $\text{Im} \varphi = A_4$.

2. C פועלת על הקוביה. היות ו- $|S_4| = 24 = |C|$, נחפש קבוצה בת ארבע איברים שהיא פעולת עליו. C פועלת על הקוביה, ופועלת על 8 הקודקודים, 6 הפאות וארבעת האלכסונים. אם כן יש הומומורפיזם $\varphi: C \rightarrow \{\text{diagonals}\}$, כלומר, $\varphi: C \rightarrow S_4$, $\ker \varphi = e$. ולכן, זהו איזומורפיזם.

הצגה נוספת: נשים את המרכז של הקוביה ב- 0 , ואז הקוביה ניתנת על ידי $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, שמונת הקודקודים. ברור שחבורת התמורות המסומנות, היא חבורה של טרנספורמציות אורתוגונליות ששומרות על קבוצת שמונה הקודקודים, ולכן על הקוביה. (תמורות מסומנות היא חבורת תמורות המיוצגת כמטריצה, שמלבד חילוף מיקום של אברים, יכולה גם להחליף את הסימן שלהם). חבורת התמורות המסומנות על שלושה עצמים, גודלה הוא $3! \cdot 2^3 = 48$. אם כן, C היא $\ker \det$, כלומר, חבורת התמורות המסומנות עם דטרמיננטה 1.

3. Ic פועלת על האיסקוסהדרון, ו- $|A_5| = 60 = |C|$. $Ic \cong A_5$, ופועלת בתמורות על חמש קוביות שניתן לסרטט בדווקהדרון.

2.5 סדרים של איברים בחבורות קריסטלוגרפיות

תזכורת אם L ריצוף של \mathbb{R}^3 , תהא Γ החבורה הקריסטלוגרפית שלו, כלומר - חבורת התנועות הצפידות של \mathbb{R}^3 , ששומרות על הריצוף במקומו. כלומר, שהריצוף אינווריאנטי תחת הפעלתן. Γ היא תת-חבורה דיסקרטית של $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$, ולכן, ל- Γ יש תת-חבורת הזזות, $\Gamma \cap V$, וחבורה נקודתית, $\Gamma/\Gamma \cap V$. נניח כי $\Gamma \cap V$ סריג של $V = \mathbb{R}^3$, ותהא $G = \Gamma/\Gamma \cap V$, החבורה הנקודתית. האיזומטריות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^3) = \{\varphi_{A,a} | A \in O_3, a \in V\}$ ויש אפימורפיזם $\tau: \text{Iso}(\mathbb{R}^3) \rightarrow O_3(\mathbb{R})$.

טענה 2.28 החבורה $G \subseteq O_3(\mathbb{R})$, כשנראה אותה כתת-חבורה של $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$, משאירה את הסריג $\Gamma \cap V$ אינווריאנטי.

הוכחה: אם $g \in G$, אז יש איזומטריה $\varphi_{g,a} \in \Gamma$, שהיא L הוא בדיוק כל המקורות של g תחת ההומומורפיזם τ . מאחר שהחבורה $\Gamma \cap V$ נורמלית ב- Γ , אז לכל $\varphi_{e,v} \in \Gamma \cap V$, נקבל ש-

$$\varphi_{g,a} \varphi_{e,v} \varphi_{g,a}^{-1} \in \Gamma \cap V$$

אבל לפי לוח-הכפל ב- $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$, מתקיים:

$$\varphi_{g,a} \varphi_{e,v} \varphi_{g,a}^{-1} = \varphi_{e,gv}$$

אם כן, החבורה הנקודתית G שומרת על הסריג אינווריאנטי. הסריג $\Gamma \cap V$ הוא (איזומורפי) לחבורה

$$\{mv_1 + nv_2 + kv_3 | m, n, k \in \mathbb{Z}\}$$

כאשר v_1, v_2, v_3 בלתי תלויים לינארית.

$$g: L \rightarrow L$$

פועלת כאוטומורפיזם של הסריג. שהיא g ו- g^{-1} שומרות על הסריג במקומו. נייצג את g כמטריצה בבסיס v_1, v_2, v_3

$$g = (a_{ij})$$

כאשר $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$. כלומר,

$$gv_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \in L$$

מאחר ו- $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ שלמים. אם כן, g טרנספורמציה אורתוגונלית של \mathbb{R}^3 , והיא בעלת מטריצה עם מקדמים שלמים, בבסיס $\{v_1, v_2, v_3\}$. נסיק שתי מסקנות:

$$1. \text{trace} g \in \mathbb{Z}$$

2. נניח עכשיו כי $\det g = 1$, ולכן, לפי משפט אוילר, g היא סבוב סביב ציר, ולכן, g צמודה ל-

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \\ \sin \theta & \cos \theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $\text{trace} g = 2 \cos \theta + 1$, ומכאן נובע ש- $2 \cos \theta$ הוא שלם!

מהמסקנות הללו, $2 \cos \theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. אם כן, $\cos \theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, ולכן,

$$\theta \in \left\{ 0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3} \right\}$$

לכן, לא ניתן לסובב ב- 72° . כלומר, החבורה של האיזוסטרוף אינה נכללת בחבורות הסימטריה של הסריג. ■

מסקנה 2.29 1. הסדרים של סיבובים בחבורה הנקודתית של חבורה קריסטלוגרפית, הם $\{1, 2, 4, 3, 6\}$ בלבד.

2. מתוך המיון של חבורות סופיות של SO_3 , תנאי (1) משאיר 11 חבורות.

3. ניתוח מלא של כל החבורות שפעולות על סריג, הוא אפשרי, ונותן בסך הכל 230 ריצופים על המרחב.

4. ב- (3) , הרשימה כוללת את כל האפשרויות עבור תתי חבורות דיסקרטיות של $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$, (והסריגים האינורניטים המתאימים).

5. ב- $O_3(\mathbb{R})$ יש 32 תתי חבורות בסך הכל, והן פועלות כסימטריות על סריגים מתאימים.

קוואזי-גבישים בניסוי פיזור משריג שנעשה ב-1984, בין השאר בפקולטה להנדסת חומרים בטכניון, נתגלו גבישים עם סימטריה מסדר 10, סימטריה שאינה אפשרית לפי החוקים המתמטיים, עבור שריג מחזורי. זהו שריג ללא סימטריה להזזה במרחב כלל. שריג כזה מכונה קוואזי-גביש. קיימת תורה מתמטית המתארת גבישים כאלו, שהיתה קיימת עוד קודם. דוגמא יפה לריצוף לא-מחזורי של המישור הוא ריצוף של פנרוז, המורכב משני אריכים בלבד, וממלא את המישור בצורה לא-מחזורית. דוגמא לריצוף כזה ניתן לראות, בין השאר, באולם הכניסה של הפקולטה לפיזיקה, בטכניון.

2.6 נוסחאת אוילר⁶

2.6.1 אמפיריקה

עבור הגופים האפלטוניים:

קודקודים (V)	צלעות (E)	פאות (F)	צורת פאות	
4	6	4		טטראדר
8	12	6		קוביה
6	12	8		אוקטהדרון
20	30	12	מחומשות	דוקהדרון
12	30	20	משולשות	איקוסהדרון

אז בכל הגופים, מתקיים,

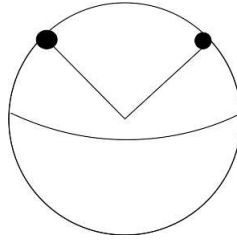
$$V - E + F = 2 \quad (2)$$

זה יכול להראות כמקריית, אך הנוסחא הזו יציבה למדי. אנחנו יכולים לבצע הרבה מאוד פעולות על הפאונים, ולקבל כי הנוסחא נשמרת.

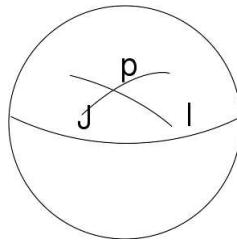
למשל, נקח את הקוביה וננסר אחת מפינותיה. נקבל פאה אחת נוספת, ביטלנו קודקוד אחד, אבל הוספנו שלושה קודקודים חדשים, ושלוש צלעות חדשות, והנוסחא נשמרת. עבור כל פעולת ניסור שכזו (או רצף של פעולות כאלו), עבור כל אחד מהגופים, הנוסחא עדין תתקיים. הנוסחא (2) מכונה "נוסחאת אוילר". אוילר הבין שהנוסחא הזו היא נוסחא כללית לגמרי: הנוסחא הזו נכונה לכל פאון קפוי. נוסחאת אוילר היא הדוגמה הראשונה למה שמכונה היום "ואריאנט טופולוגי".

נרצה להוכיח את נוסחאת אוילר, באמצעות דיון בגיאומטריה ספרית.

⁶24.12.2009



איור 1: שתי נקודות על שפת כדור



איור 2: שני קטעים על המעגל

2.6.2 מרחב שפת-כדור

נדון בגיאומטריה על שפת כדור. אם יש לנו נקודה v ונקודה w על הספירה. אם $v \neq w$ על הספירה, אזי הם פורשים מישור (דרך מרכז הספירה). חיתוך המישור הוא מעגל שנקרא מעגל גזול, v ו- w על המעגל, והמרחק d ביניהם יוגדר כאורך הקשת הקצרה ביניהן. הגדרה זו אכן נותנת מרחק, כלומר, מטריקה, כלומר, מתקיים אי-שוויון המשולש:

$$d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$$

בנוסף, קשת המעגל הגדול בין v ל- w , היא קו-ישר בגיאומטריה זו. קו ישר פירושו "גיאודז" כלומר, עקומה גזירה שהאורך שלה הוא המינימום האפשרי מבין כל העקומות על הפסירה שמחברות בין v ל- w . על הספירה, קיים גיאודז יחיד בין כל שתי נקודות, לא אנטיפודיות.

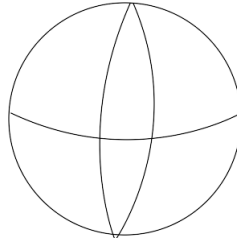
זוויות נניח שני גיאודזים, I ו- J . כדי להגדיר את הזווית ביניהן, נעייין במשיר I בנקודה p ובמשיק ל- J בנקודה p . שני משיקים אלו יוצרים מישור, המישור המשיק לספירה בנקודה p . נגדיר $\angle_p(I, J)$ את הזווית בין I ל- J בנקודה p , כאזוית בין הוקטורים המשיקים במישור המשיק. משולש הוא 3 נקודות שמחוברות על ידי קטעים גאודזיים.

דוגמה - דיגון על הספירה יש מצולע עם שתי צלעות. הדיגון נקבע (עד כדי טרנספורמציה אורתוגונלית) על ידי הזווית θ בין צלעותיו. ניתן להגדיר שטח על הספירה. שטח הדיגון נקבע על ידי הזווית θ : עבור $\theta = \pi$, שטח הדיגון הוא $\frac{1}{2}$ שטח הספירה, S^2 . אם $\theta = \frac{\pi}{2}$, שטח הדיגון הוא $\frac{1}{4}$ משטח S^2 . אם S^2 היא ספירת היחידה, אזי יש לה שטח 4π , ולכן שטח הדיגון D_θ הוא 2θ .

משפט 2.30 יהא T משולש (גיאודזי) על הספירה. יהיו α, β, γ הזוויות שלו. אזי שטח המשולש T הוא

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

הוכחה: נקח את המשולש ABC , ונסתכל על המעגלים הגדולים עליהם מונחים צלעותיו. מכל אחד מהקודקודים, נבנה דיגון שקודקודו האחד הוא קודקוד המשולש, וצלעותיו הן המשך צלעות המשולש, והוא זר למשולש.



איור 3: דיגון: מצולע בין שתי צלעות שמוגדר על ידי הזווית θ ביניהן.

שלוש הדיגונים הללו נחתכים במשולש T' , שהוא המשולש האנטיפודי ל- T . נחשב א תסכום השטחים של שלושה הדיגונים הללו, בתוספת שלושת הדיגונים בקודקודים A, B, C עם זוויות ראש α, β, γ , שמכילים את T .

$$4\pi = \text{Sphere area} = \text{Sum of area of 6 digons} - 4|T| = 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4|T|$$

ולכן,

$$|T| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

■

2.6.3 הוכחה של נוסחת אוילר

הוכחה: (נוסחת אוילר)

יהא P פיאון קמור, ונקח נקודה p בפנים שלו. נניח בלי הגבלת הכלליות שהפיאון נמצא ממש בפנים של כדור היחידה. נשרטט ספירת יחידה ש- p מרכזה, ונבצה הטלה רדיאלית מ- p . ומכאן, נובע כי לכל צלע בפיאון P , עברה לקטע גיאודזי על הספירה.

נקבל כך חלוקה של הספירה על ידי קטעים גיאודזיים. נוכל להניח, בלי הגבלת הכלליות, כי כל פאה של הפיאון היא משולש. ואכן, אם לא, נוכל לחלק כל פאה של P מראש למשולשים, וזה לא ישנה את נוסחת אוילר (הוספת קו מוסיפה הן פאה והן צלע, ולא משנה את מספר הקודקודים, ולכן הפרמטרים בנוסחת אוילר נשמרים). כלומר, קיבלנו חלוקה של הספירה למשולשים גיאודזיים.

אנו נשתמש בנוסחת השטח, ובנוסף, בעובדה הבאה: אם נסמן $e = |E|$, $f = |F|$, $v = |V|$ (מספרי הצלעות, הפאות והקודקודים בהתאמה), מאחר שכל פאה היא משולש, מספר כל הצלעות שמופיעות במעבר על כל הפאות, הוא $3f$. ומספר זה הוא $2e$, כי כל צלע שמופיעה, מופיעה בדיוק בשני משולשים. אם כן, $3f = 2e$. נחשב את השטחים: שטח הספירה כולו,

$$4\pi = \sum_{T \in \Delta} |T|$$

כאשר $|T|$ הוא השטח של T , ו- Δ היא קבוצת הפאות, כלומר, קבוצת המשולשים.

$$\begin{aligned} &= \sum_{T \in \Delta} ((\alpha_T + \beta_T + \gamma_T) - \pi) \\ &= \sum_{T \in \Delta} (\alpha_T + \beta_T + \gamma_T) - f \cdot \pi \end{aligned}$$

הסכום הוא סכום כל הזוויות על כל המשולשים, והוא שווה לסכום על כל הקודקודים, של סכום כל הזוויות שזהו קודקודן. כלומר,

$$\sum_{T \in \Delta} (\alpha_T + \beta_T + \gamma_T) = 2\pi \cdot v$$

מאחר וסכום כל הזוויות בקודקוד מסויים הוא 2π . לכן, קיבלנו את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4\pi = 2\pi v - f\pi \\ 3f = 2e \end{cases}$$

לכן,

$$\begin{cases} 4 = 2v - f \\ 3f = 2e \end{cases} \implies 4 = 2v - 2e + 2f$$

וקיבלנו את נוסחאת אוילר.

2.6.4 הקשר בין מספר הפאות ומספר הצלעות של פאון קמור

טענה 2.31 יהא P פאון קמור, שבו לכל קודקוד יש 3 צלעות. אזי, אם f_n מסמן את מספר הפיאות בנות n צלעות, מתקיים:

$$\sum_n (6 - n) f_n = 12$$

הוכחה: קודם נספור את כל הצלעות שיוצאות מכל הקודקודים. נקבל $3v$. מצד שני, ביטוי זה הוא בדיוק $2e$, כי כל צלע מתקבלת מבדיוק שני קודקודים.

משוואה נוספת היא כי מספר הצלעות e שווה למחצית $\sum_n n f_n$. שוב, משום שכל צלע שייכת בדיוק לשני פאוניים: $2e = \sum_n n f_n$. נחזור לנוסחאת אוילר, ונקבל,

$$\begin{aligned} 2 = v - e + f &= \frac{2}{3}e - e + \sum f_n \\ &= -\frac{1}{3}e + \sum f_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum n f_n + \sum f_n \end{aligned}$$

אם כן,

$$12 = \sum_n (6 - n) f_n$$

הערה 2.32 1. בקוביה, מכל קודקוד יש 3 צלעות. יש רק פאה מסוג אחד, והיא ריבוע, ונקבל,

$$12 = (6 - 4) \cdot 6$$

2. לטטראדר גם 3 צלעות מכל קודקוד, ופאה מסוג אחד, משולש, ונקבל,

$$12 = (6 - 3) \cdot 4$$

3. **מסקנה:** נניח כי P פאון קמור המורכב מפאות שהן מחומשים ומשושים בלבד. בפאון כזה, בהכרח יש בדיוק 12 מחומשים.

2.6.5 פולרן

בשנת 1985, שלושה כימאים, הצליחו לבצע הפרדה כימית, סינטזה ומיקרוסקופיה, ומצאו מולקולה שמורכבת מ-60 אטומי פחמן, המסודרים בצורה של כדורגל. זו היתה הפתעה גדולה למד. המולקולה נקראת $C - 60$. היו כמה צורות קודמות של פחמן, אך שום אינדקציה להתכנות של הדבר. המבנה של המולקולה הוא מבנה של איקוסהדרון, כאשר כל קודקוד מנוסה והופך למחומש - ונתקבל מבנה בין 12 מחומשים, המתאימים ל-12 הקודקודים של האיקוסהדרון.

המבנה הבזה מופעי בטבע, אפילו באפר של מדורה. אבל הצורה הספציפית הזו של פחמן מופיעה בצורה שגרתית למדי.

המולקולה קרויה על שם אדריכל בשם Buckminster Fuller, שתכנן, בין השאר, כיפה גיאודזית, שהיא חלק של איקוסהדרון. המולקולה קרויה פולרן, על שם פולר. הפולרן $C - 60$, זכה גם לכינוי Bucky-ball, גם כן, על שם אותו אדריכל. מתברר שיש המון צורות דומות של מולקולות פחמן, ובנוסף ל- $C - 60$, יש גם $C - 70$ ועוד מולקולות עם אטומי פחמן רבים שמסודרים בפאון המכונה "פולרן". כולם פאונים קמורים עשויים מחומשים ומשושים. גם הוולנטיות של הגרף (מספר הקשתות בכל קודקוד) וגם של הפחמן הם 3. לכן, נוסחאת אוילר מבטיחה שבכל הפולרנים יש בדיוק 12 מחומשים.

מהפולרנים, ניתן לייצר Nano-Tubes, הם יכולים להסתדר בתור צינור שגודלו - מולקולה אחת. המולקולה $C - 60$ נחקרה היטב מכל בחינה.

3 החבורה $SU_2(\mathbb{C})$

$$U_2(\mathbb{C}) = \{ A \mid A^* A = I \}$$

$$SU_2(\mathbb{C}) = \{ A \in U_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \}$$

עבור מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

המטריצה ההופכית לה,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

ולכן, אם $\det A = 1$, אז

$$\bar{a} = d, \bar{b} = -c$$

ולכן,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

היא הצורה הכללית של מטריצה אוניטרית, 2×2 , עם דטרמיננטה 1, כאשר $\det A = |a|^2 + |b|^2 = 1$.

מסקנה 3.1 ההעתקה $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ היא העתקה חד-חד-ערכית ועל מ- S^3 , ספרת היחידה ב- \mathbb{R}^4 , על SU_2 .

במילים אחרות, הספרה S^3 הומאומורפית/דיפאומורפית ל- SU_2 .

הערה 3.2 אם כן, על S^1 , יש מבנה של חבורה, ועל S^3 יש מבנה של חבורה. האם על S^2 יש מבנה של חבורה?

3.1 מבנה $SU_2(\mathbb{C})$

נכניס קוארדינטות

$$a = x_1 + ix_2$$

$$b = x_3 + ix_4$$

ונעיין בקבוצה

$$\begin{aligned} C_c &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 - c^2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid x_1 = c\} \end{aligned}$$

עבור $-1 < c < 1$, קבוצות אלו הן ספרות דו-מימדיות, שמשוכנות ב- S^3 , הספרה התלת מימדית. (זה דומה למבט על תת קבוצה של הכדור, S^2 , המקיימת $\{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 = 1 - c^2\}$, אלו הם מעגלים על פני הכדור. זהו סיבוי של הספרה הדו-מימדית על ידי קווי-רוחב).
ב- S^3 , יש לנו סיבוי על ידי ספרות דו-מימדיות. אם כן, נוכל לסמן קבוצות אלו ב- C_c , ונכנה אותן "ספרות רוחב". עבור $c = \pm 1$, נקבל את הנקודה $C_1 = (-1, 0, 0, 0)$ ואת $C_{-1} = (1, 0, 0, 0)$ שני הקטבים.

משפט 3.3 חלוקה זו של $S^3 \cong SU_2(\mathbb{C})$, היא החלוקה למחלקות-צמידות של SU_2 , והיא גם החלוקה לקווי-הגובה של הפונקציה $A \mapsto \frac{1}{2}\text{trace}A$

הוכחה: ההעתקה בין S^3 ל- $SU_2(\mathbb{C})$, נתונה על ידי

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

על סמך ההעתקה הזו,

$$\text{trace}A = 2x_1$$

ומתקיים הקשר:

$$\frac{1}{2}\text{trace}A = c \iff A \in C_c$$

וקווי הגובה של $\frac{1}{2}\text{trace}A$ הן ספרות הרוחב. העקבה של מטריצה היא שמורה של הצמדה, לכן, כל מחלקת צמידות חייבת להיות מוכלת בקו גובה של $\frac{1}{2}\text{trace}A$. אנו טוענים כי קו הגובה, C_c , הוא בדיוק מחלקת הצמידות. באופן שקול: אם $\text{trace}A = \text{trace}B$, אזי A צמודה ל- B , על ידי מטריצה ב- $SU_2(\mathbb{C})$.
 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda' \end{pmatrix}$, אלכסונית (\sim מסמן הצמדה) ו- $B \sim \begin{pmatrix} \mu & \\ & \mu' \end{pmatrix}$, כמו כן, המטריצה ב- SU_2 , ולכן $\lambda' = \bar{\lambda}$ ו- $\mu' = \bar{\mu}$, ולכן,

$$1 = \det A = \det B \implies \mu\bar{\mu} = \lambda\bar{\lambda} = 1$$

נתון $\text{trace}A = \text{trace}B$, ולכן

$$\text{Re}\mu = \text{Re}\lambda$$

לכן, $\lambda = \mu$ או $\lambda = \bar{\mu}$.

• במקרה הראשון, סיימנו, כי אם $\det A = 1$, אזי A צמודה ל- $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ על ידי מטריצה ב- SU_2 , כלומר, בעלת $\det A = 1$. (הוכיחו כתרגיל)

• אחרת, $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ ו- $B \sim \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \\ & \lambda \end{pmatrix}$, אבל $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ צמודה ל- $\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ על ידי המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{\lambda} \\ -i\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

■

תזכורת: לכל איבר g בחבורה G , $C_G(g) = G \iff g \in z(G)$, מחלקת הצמידות של g מכילה רק את g .
 אם כן, $\{\pm I\} = Z(SU_2(\mathbb{C}))$, שתי מחלקות הצמידות שהן בנות נקודה אחת בלבד

3.2 הקשר בין $SO_3(\mathbb{R})$ ל- $SU_2(\mathbb{C})$

אלו הן שתי חבורות מעמידות 3.

משפט 3.4 קיים אפימורפיזם⁷ רציף $\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ עם גרעין $\ker \varphi = \{\pm I\}$.

הוכחה: אנו נגדיר מרחב לינארי-ממשי, תלת מימדי, V , ולכל $g \in SU_2$, נתאים טרנספורמציה לינארית $\varphi(g) : V \rightarrow V$. כלומר, נגדיר הצגה של $SU_2(\mathbb{C})$. בנוסף, נמצא תבנית חיובית לחלוטין על V , שנשמרת תחת כל $\varphi(g)$, ומכך נסיק כי תמונת φ היא בתוך חבורת הטרנספורמציות ששומרות על התבנית, וזו חבורה שאיזומורפית ל- $O_3(\mathbb{R})$.

שלב א' נגדיר את V על ידי: מטריצות אנטי-הרמיטיות עם עקבה 0, ב- $M_2(\mathbb{C})$. אם כן,

$$V = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = -A, \text{trace} A = 0 \}$$

זהו מרחב לינארי ממשי, ניתן לתאר את כל המטריצות ב- V על ידי,

$$= \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

לכן, זהו מרחב תלת-ממדי ממשי.

שלב ב' לכל $g \in SU_2$, נעניין בהעתקה

$$\begin{aligned} \varphi(g) : V &\rightarrow V \\ \varphi(g)(A) &= gAg^* = gAg^{-1} \end{aligned}$$

פעולה של SU_2 על V באמצעות הצמדה. אזי,

$$(gAg^*)^* = gA^*g^* = -gAg^*$$

ול- $gAg^{-1} = gAg^*$ אותה עקבה כמו ל- A , ולכן V תת-מרחב ממשי של $M_2(\mathbb{C})$ שאינו ורינטי תחת $\varphi(g)$. כלומר, לכל $g \in SU_2$, הגדרנו העתקה לינארית $V \rightarrow V$.

שלב ג' $\varphi(g)$ היא הומומורפיזם: $\varphi : SU_2 \rightarrow \text{Aut}(V) \cong GL_3(\mathbb{R})$. ואכן,

$$\begin{aligned} \varphi(gh)(A) &= (gh)A(gh)^* = ghAh^*g^* \\ &= \varphi(g)(\varphi(h)(A)) \end{aligned}$$

ולכן, $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$.

שלב ד' יש תבנית חיובית לחלוטין על V שכל $\varphi(g)$ שומרת עליה:

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} \text{trace} AB$$

$$\langle A + A', B \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A', B \rangle$$

$$\langle A, B + B' \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, B' \rangle$$

$$\langle \alpha A, \beta B \rangle = \alpha\beta \langle A, B \rangle$$

⁷הומומורפיזם על

זוהי תבנית העקבה, תבנית בילינארית על מרחב ממשי. נבדוק:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= -\frac{1}{2} \text{trace} \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\alpha' & \beta' + i\gamma' \\ -\beta' + i\gamma' & -i\alpha' \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace} \begin{pmatrix} -\alpha\alpha' + (\beta + i\gamma)(-\beta' + i\gamma') & \dots \\ \dots & (-\beta + i\gamma)(\beta' + i\gamma') - \alpha\alpha' \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} (-2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' - 2\gamma\gamma') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \end{aligned}$$

כלומר, התבנית שבחרנו היא תבנית חיובית לחלוטין⁸ על V .

שלב ה' $\varphi(g)$ שומר על התבנית:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(g)A, \varphi(g)B \rangle &= -\frac{1}{2} \text{trace}(gAg^*gBg^*) = -\frac{1}{2} \text{trace}(gABg^*) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace}(gABg^{-1}) = -\frac{1}{2} \text{trace}(AB) \end{aligned}$$

לכן, $\varphi: SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O_3(\mathbb{R})$ הוא הומומורפיזם לחבורה שמשמרת את התבנית הריבועית הסטנדרטית.

שלב ו' נמצא את התמונה והגרעין. לגבי הגרעין:

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{g \mid \varphi(g) = I_V\} = \{g \mid \varphi(g)A = A \quad \forall A \in V\} \\ &= \{g \mid gAg^* = A, \forall A \in V\} \\ &= \{g \mid gA^{-1}g = A \quad \forall A \in V\} = \{g \mid gA = Ag, \forall A \in V\} \end{aligned}$$

נובע כי g סקאלר, $g = \lambda I$, ואונטירית, ולכן, $g = \pm 1$, או, $\ker \varphi = \{\pm I\}$. נטען כי תמונת φ היא ב- $SO_3(\mathbb{R})$. ואכן,

$$SU_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} O_3(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\}$$

φ רציפה, ו- $\det \circ \varphi$ רציפה, ו- $SU_2(\mathbb{C}) \cong S^3$ קשיר. על מרחב קשיר, פונקציה רציפה לא יכולה לקבל מספר סופי של ערכים, כי אז המקורות של הערכים הללו ישרו חלוקה על המקור. לכן, לא יתכן שהפונקציה הרציפה $\det \circ \varphi$ היא על. לכן,

$$\varphi: SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$$

נותר להראות ש- φ היא על. זה ינתן כתרגיל. אפשר להוכיח את זה משיקולי מימד: יש סביבה של היחידה שעוברת על סביבה של היחידה, אבל כל סביבה של היחידה תיצור את SO_3 , כי גם היא חבורה קשירה. ■

קיבלנו

$$\begin{array}{ccc} SU_2(\mathbb{C}) & & S^3 \\ \pm I = \ker \varphi & \downarrow \varphi & \downarrow \\ SO_3(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

מבחינה טופולוגית בנינו כיסוי כפול: לכל נקודה ב- SO_3 יש **בדיוק** שני מקורות ב- SU_2 .

שאלות: לאילו מרחבים יש כיסוי כפול? ולאילו חבורות יש כיסוי כפול, כלומר, הומומורפיזם עליהם שהמקור של כל נקודה הוא בן שני איברים?

⁸ כלומר, $\langle A, A \rangle > 0$, לכל $A \neq 0$

מספר הערכות

• **נתחיל מ- S^2** – המרחב P של הזוגות של נקודות אנטיפודיות, S^2 מהווה עבורו כיסוי כפול. למעשה, נוכל לעיין בחבורה $\{\pm I\}$, הפועלת על הספירה, ומסלוליה הן נקודות אנטיפודיות. אם כן, $P = S^2 / \{\pm I\}$ מסומן X/G , והעתקה היא

$$S : S^2 \rightarrow P \\ v \mapsto \pm v = \{\pm 1\} \cdot v$$

אם כן, אם P הוא מרחב הישרים של \mathbb{R}^3 , דרך הראשית, שקול למרחב הזוגות של נקודות אנטיפודיות ב- S^2 .

מרחב הישרים נקרא **המרחב הפרויקטיבי** של \mathbb{R}^3 .

אם כן, $P(\mathbb{R}^3)$ הוא מנה של S^2 תחת $\{\pm I\}$, והספירה היא כיסוי כפול של המרחב הפרויקטיבי.

תזכורת: ב- $SO_3(\mathbb{R})$, כל טרנספורמציה A היא סיבוב סביב ציר, וניתן לסמן אותה באמצעות הזוג (v, θ) , כאשר v הוא ציר הסיבוב ו- $0 < \theta < 2\pi$. עבור $\theta = 0, 2\pi$ איננו מוגדר. כלומר, לטרנספורמציה $A = I$ אין סימון יחיד כזה, ובנוסף, (v, θ) ו- $(-v, -\theta)$ מייצגים את אותה טרנספורמציה. יש לנו את הספירה $S^2 \times (0, 2\pi)$, וניתן ליצור מיפוי

$$\alpha : S^2 \times (0, 2\pi) \rightarrow SO_3(\mathbb{R}) \\ (v, \theta) \mapsto A_{v, \theta}$$

כאשר $A_{v, \theta}$ הוא סיבוב ב- θ סביב הציר v , ואילו $A_{-v, -\theta} = A_{v, \theta}$. וכן העתקה

$$\varphi : SU_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I\} \rightarrow SO^3(\mathbb{R}) \setminus \{I\}$$

אם כן, קיים כיסוי כפול α וכיסוי כפול φ , ושני הכיסויים הללו שקולים.

4 הצגות אוניטריות

הגדרה 4.1 תהא G חבורה. **הצגה אוניטרית** של G היא הומומורפיזם $\varphi : G \rightarrow U_n(\mathbb{C})$ n נקרא דרגת ההצגה או המימד שלה.

אם כן, כאשר נבחר בסיס אורתונורמלי של \mathbb{C}^n , אזי כל האלמנטים $\varphi(g)$, כאשר $g \in G$, יהיו מיוצגים על ידי מטריצות אוניטריות. באופן שקול, הצגה אוניטרית היא הומומורפיזם $\varphi : G \rightarrow GL(V)$, כך שעל V יש תבנית הרמיטית חיובית-לחלוטין, ששמרת תחת כל $\varphi(g)$, לכל $g \in G$.

שקילות אם $\varphi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ ו- $\varphi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ הצגות אוניטריות, נאמר כי הן שקולות אם יש טרנספורמציה הפיכה $T : V_1 \rightarrow V_2$, שמקיימת

$$T \circ \varphi_1(g) = \varphi_2(g) \circ T$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 \\ \varphi_1(g) \downarrow & & \downarrow \varphi_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 \end{array}$$

ו- T שומרת על המכפלות הפנימיות:

$$\langle Tv, Tw \rangle_{V_1} = \langle v, w \rangle_{V_2}$$

מסקנה 4.2 אם קיים $\varphi_1 : G \rightarrow U_n(\mathbb{C})$ ו- $\varphi_2 : G \rightarrow U_n(\mathbb{C})$ הן שקולות \iff יש $U \in U_n(\mathbb{C})$, כך ש-

$$U \varphi_1(g) U^{-1} = \varphi_2(g) \quad \forall g \in G$$

כלומר, החבורות $\varphi_1(g)$ ו- $\varphi_2(g)$ צמודות בחבורה האוניטרית.

4.1 הצגות פריקות

הגדרה 4.3 אם $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ הצגה אוניטרית ביחס למכפלה הפנימית \langle, \rangle , אז תת־מרחב $W \subseteq V$ נקרא G -אינווריאנטי (או $\varphi(G)$ אינווריאנטי) אם

$$\varphi(g)W \subseteq W \quad \forall g \in G$$

נוכל לעיין באוסף הטרנספורמציות $\varphi(g)/W : W \rightarrow W$. זו חבורה, שהיא תמונה של $\varphi(G)$, ולכן של G . ההעתקה:

$$g \mapsto \varphi(g)/W$$

זו חבורה שהיא תנוה של $\varphi(G)$, ולכן

$$g \mapsto \varphi(g)/W$$

היא הומומורפיזם $\psi : G \rightarrow GL(W)$, והיא הצגה אוניטרית ביחס לתבנית שהיא הצמצום של \langle, \rangle_V ל- W . נקראת תת־הצגה של φ . כידוע, אם טרנספורמציה U שומרת על תת־מרחב וקטורי אינווריאנטי, אז U שומרת גם על W^\perp אינווריאנטי: לכן, יש גם הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \sigma : G &\rightarrow GL(W^\perp) \\ \sigma(g) &= \varphi(g)|_{W^\perp} \end{aligned}$$

וזו שוב הצגה אוניטרית.

תזכורת אם $W \subseteq V$, ו- W הוא U -אינווריאנטי, אזי בבסיס $\left\{ \underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\in W}, v_{k+1}, \dots, v_n \right\}$, אז ל- U יש הצגה,

	U_{w_1}	\dots	U_{w_k}	$U_{v_{k+1}}$	\dots	U_{v_n}
w_1						
\vdots			*			*
w						
v_{k+1}						
\vdots			0			*
v_n						

במקרה שלנו, נוכל לקחת תמיד בסיס $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ כך של- U יש הצגה כמטריצת בלוקים.

	W	W^\perp
W	$\psi(g)$	0
W^\perp	0	$\sigma(g)$

לכל איבר g ב- G יש אז הצגה: $\varphi = \psi \otimes \sigma$

הגדרה 4.4 הצגה אוניטרית $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ נקראת **אי־פריקה** אם אין תת־מרחב $\varphi(G)$ אינווריאנטי, פרט כמובן ל- $\{0\}$ ו- V

טענה 4.5 כל הצגה אוניטרית מתפרקת לסכום ישר של הצגות אי־פריקות.

משפט 4.6 (משקלה?)

תהא G חבורה סופית, והיא $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ הומומורפיזם. אזי, קיימת העתה הפיכה $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, כך שכל המטריצות $A\varphi(g)A^{-1}$ הן ב- $U_n(\mathbb{C})$, כלומר, אוניטריות. באופן שקול: לכל חבורה סופית G , אם $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ הומומורפיזם, אזי יש על V תבנית הרמיטית חיובית לא־מנוונת, ו- G -אינווריאנטית.

הוכחה: תהא $\langle \cdot, \cdot \rangle$ תבנית הרמיטית-חיובית לא-מנוונת כלשהי. נגדיר תבנית חדשה:

$$(v, w)_G = \sum_{g \in G} \langle \varphi(g) v, \varphi(g) w \rangle$$

ברור כי קיים $(\varphi(g) v, \varphi(h) w)_G = (v, w)$.

היא תבנית הרמיטית, חיובית, לא מנוונת. ברור כי

$$(v, v)_G = \sum_{g \in G} \langle \varphi(g) v, \varphi(g) v \rangle > 0 \quad v \neq 0$$

והיא הרמיטית. לכן, בבסיס אורתונורמלי של התבנית הזו, המטריצות שמייצגות את $\varphi(g)$ הן אוניטריות. ■

מסקנה 4.7 כל הצגה סוף-מימדית של חבורה סופית מעל \mathbb{C} (כל הומומורפיזם $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$) ניתנת לפירוק לסכום ישר של הצגות אי-פריקות.

הערה 4.8 1. באופן כללי, תתכן הצגה, כלומר, הומומורפיזם $\alpha : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, כך שיש תת-מרחב $\alpha(g)$ -אינווריאנטי משותף לכל $\alpha(g)$, אבל אין לו משלים אינווריאנטי.

דוגמא: $G = \mathbb{Z}$,

$$\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

$$\alpha(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha(n)$, כאשר $n \neq 0$, איננה ניתנת לליכסון, לכן, כל $\alpha(n)$, $n \neq 0$, יש לה וקטור-עצמי שהוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, אבל

אין לה וקטור עצמי נוסף בלתי תלוי, ולכן אין לה תת-מרחב אינווריאנטי משלים ל- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. ניתן כמובן לדון בהצגות $\varphi : G \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$, כלומר, הצגות אורתוגונליות. ברור כשכל הצגה $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ של חבורה סופית, ניתן למצוא תבנית סימטרית חיובית לא-מנוונת, שהיא G -אינווריאנטית (על ידי סכימה על G של תבנית אחת כזו).

גם כאן, כל הצגה אורתוגונלית ניתנת לפירוק לסכום של הצגות אי-פריקות מעל \mathbb{R} וכל הצגה $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ של חבורה סופית, ניתנת לפירוק לסכום ישר של הצגות אי-פריקות.

3. נשים לב לכך שהצגה של חבורה G יכולה להיות אי-פריקה מעל \mathbb{R} , אבל פריקה מעל \mathbb{C} . כלומר, אם $\varphi : G \rightarrow O_n(\mathbb{R}) \subseteq U_n(\mathbb{C})$, אזי ההצגה על \mathbb{R}^n יכולה להיות אי-פריקה, אבל היא תהיה הצגה על \mathbb{C}^n , תהיה פריקה

דוגמא $G = \mathbb{Z}_4$, וההצגה היא סיבוב ב- $\frac{\pi}{2}$ ב- \mathbb{R}^2 , כאשר היוצר u עובר ל-

$$u \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תת-מרחב וקטורי אינווריאנטי ב- \mathbb{R}^2 הוא בעצם וקטור עצמי, אבל ברור שלסיבוב לא טריוויאלי אין ישרים אינווריאנטיים. כלומר ל- \mathbb{Z}_4 יש הצגה אי-פריקה מעל \mathbb{R} , על \mathbb{R}^2 .

אבל $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$, $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U_2(\mathbb{C})$. כל טרנספורמציה אוניטרית ניתנת לליכסון, כלומר, יש ל- u

שני וקטורים עצמיים ל- \mathbb{C}^2 , וההצגה $\mathbb{Z}_4 = \{I, u, u^2, u^3\}$ היא פריקה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

טענה 4.9 תהא G חבורה אבלית. אזי, כל הצגה אוניטרית של G שהיא אי-פריקה היא ממימד אחד.

למה 4.10 לכל קבוצה \mathcal{A} של מטריצות אוניטריות מחלפות יש ליכסון משותף

הוכחה: (של הלמה)

אם כל $A \in \mathcal{A}$ הן סקלאריות, אז סיימנו.

אחרת, תהא $A \in \mathcal{A}$ שאיננה סקאלרית, ויהא λ ערך-עצמי של A . $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, מקיים

$$0 < \dim V_\lambda < \dim V$$

לכל $A' \in \mathcal{A}$, קיים $A'V_\lambda \subseteq V_\lambda$, כי אם $w \in V_\lambda$, אזי

$$A(A'w) = A'(Aw) = A'\lambda w = \lambda(A'w)$$

כלומר, $A'w \in V_\lambda$.

נוכל להניח באינדוקציה כל לכל הטרנספורמציות ב- \mathcal{A} יש ליכסון משותף על V_λ , וגם על V'_λ , משום שהמימדים שלהם יותר קטנים, והמטריצות אוניטריות. ■

משפט 4.11 (הלמה של Schur) תהא $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ הצגה אוניטרית של חבורה

אזי, ההצגה היא אי-פריקה \iff כל אופרטור מתחלף עם כל $\varphi(g)$ כאשר $g \in G$ הוא סקאלר.

הוכחה: \Leftarrow נניח ההצגה היא אי פריקה, ונניח $S\varphi(g) = \varphi(g)S$ לכל $g \in G$. כל S בעל ערך-עצמי λ ובעל וקטור עצמי (מעל \mathbb{C}), ויהא

$$V_\lambda = \ker(S - \lambda I)$$

$\dim V_\lambda > 0$, ו- V_λ הוא $\varphi(G)$ אינווריאנטי, כי אם $w \in V_\lambda$, אזי

$$S\varphi(g)w = \varphi(g)Sw = \varphi(g)\lambda w = \lambda(\varphi(g)w)$$

כלומר, $\varphi(g)w \in V_\lambda$. וזו סתירה לכך ש- φ הצגה אי פריקה, אלא אם כן

$$\dim V = \dim V_\lambda$$

כלומר, $S = \lambda I$.

\Rightarrow נניח שכל אופרטור S שמתחלף עם כל $\varphi(g)$, $g \in G$, הוא סקאלר. נניח בשלילה כי φ פריקה, ואם כן, $V = W \oplus W^\perp$, כאשר כל אחד מהם נותן תת-הצגה של φ . ויהא $S = P_W$ ההטלה הניצבת על W , כלומר,

$$P_W(u, v) = u$$

כאשר $v \in W^\perp, u \in W$. נראה כי ההטלה על תת-מרחב אינווריאנטי מתחלפת עם פעולת החבורה. ואכן,

$$P_W\varphi(g)(u+v) = P_W(\varphi(g)u + \varphi(g)v) = \varphi(g)u$$

בכיוון ההפוך:

$$\varphi(g)P_W(u+v) = \varphi(g)u$$

לכן,

$$P_W\varphi(g) = \varphi(g)P_W$$

אבל P_W סקלר, כך אם הוא 0 או I , וזה לא יתכן אם $V = W \oplus W^\perp$, פירוק לא-טריוויאלי. ■

מסקנה 4.12 אם $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ הצגה אוניטרית אי-פריקה, אזי המרכז (לא $Z(G)$, השני.. עם הסגול ב- m) של G עובר לטרנספורמציה סקאלרית.

4.2 ההצגה המיוחסת לפעולה

תהא G חבורה סופית הפועלת על קבוצה סופית. נגדיר מכך הצגה אוניטרית של G . יהא

$$V = \mathbb{C}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$$

אזי, $\dim V = \#X$.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{x \in X} f_1(x) \overline{f_2(x)}$$

ההצגה

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x)$$

אזי T_g אופרטור לינארי אונטרי:

$$\begin{aligned} \langle T_g f, T_g h \rangle &= \sum_{x \in X} f(g^{-1}x) \overline{h(g^{-1}x)} \\ &= \sum_{y \in X} f(y) \overline{h(y)} = \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

אם כן, $g \mapsto T_g$ הוא הומומורפיזם:

$$T_a T_b f(x) = T_a(T_b f)(x) = (T_b f)(a^{-1}x) = f(b^{-1}a^{-1}x) = f((ab)^{-1}x) = T_{ab} f(x)$$

לכן, $g \mapsto T_g$ הצגה אוניטרית של G במרחב $\ell^2(X) = \mathbb{C}^X$. הפונקציה $f(x) \equiv 1$ היא אינורנטית לכל g .

$$1^\perp = \{f | f \perp 1\} = \left\{ f \mid \sum_{x \in X} f(x) = 0 \right\}$$

4.2.1 דוגמאות

$G = C_n$ ו- $X = C_n$, והפעולה בהזזות:

$$\varphi_i(j) = j + i \pmod{n}$$

קיימת הצגה של C_n על $\ell^2(X)$, ואנו מעוניינים לפרק אותה להצגות אי־פריקות. נצפה לפירוק של ההצגה לסכום ישר של n תתי־מרחבים חד־מימדיים אינורנטיים, כי C_n אבלית. כלומר, לליכסון משותף של כל אופרטורי ההצגה. כאן, כמובן, די ללכסן יוצר של C_n , ולשם כך נענין בבסיס של $\ell^2(X)$, ונציג את היוצר כמטריצה. הבסיס שניקח הוא

$$\delta_{x(y)} = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases} \text{ קיים כמובן } T_g(\delta_x) = \delta_{gx} \text{ שהרי,}$$

$$T_g(\delta_x)(y) = \delta_{x(g^{-1}y)} = \begin{cases} 1, & y = gx \\ 0, & \text{else} \end{cases} = \delta_{gx}$$

נרשום את המטריצה של $A = T_{\varphi_1}$:

	$A(\delta_0)$	$A(\delta_1)$	$A(\delta_2)$	\dots	$A(\delta_{n-1})$
0	0	0	0		1
1	1	0	0		0
2	0	1	0		0
3	0	0	1		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
$n-1$	0	0	0		0

וקיבלנו מטריצה סירקולנטית, שמוזיזה את אברי הבסיס הסטדנרטי ב- $(\text{mod } n)$.
 A אוניטרית, ו- $A^n = I$. 1 הוא ע"ע שמתאים לוקטור עצמי שהוא פונקציה קבועה. הפולינום האופייני הוא $z^n - 1$, והערכים העצמיים הם שורשי יחידה מסדר n , ובמקרה שלנו, מופיעים כל שורשי היחידה מסדר n , כל אחד - פעם אחת.

אם נסמן ב- $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n , נוכל לעיין בפונקציה

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \cdots & \zeta_n^{n-1} & = f_1 \end{array}$$

אזי,

$$T_{\varphi_1} f_1 = A f_1 = \lambda_n f_1$$

אזי, f_1 וקטור-עצמי של A עם וקטור עצמי ζ_n . נסתכל על הפונקציה:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \zeta_n & \zeta_n^2 & \zeta_n^4 & \cdots & \zeta_n^{2(n-1)} & = f_2 \end{array}$$

אזי $f_2 = \zeta_n^2 f_1 = A f_2$. וכן הלאה:

$$f_j(k) = \zeta_n^{jk}$$

אזי, $\{f_j\}_{j=0}^{n-1}$ בסיס אורתונורמלי של A . המטריצה $(e^{2\pi i \frac{jk}{n}})_{i,j=0,\dots,n-1}$ היא מטריצה שהשורות שלה הם וקטורים עצמיים של A . המטריצה הזו היא **טרנספורם-פורייה** של החבורה האבלית. זו המטריצה של הוקטורים העצמיים של ההצגות.

ביתר כלליות אם G לא-דווקא אבלית, אזי

$$\ell_2(X) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

כאשר כל V_i , מרחב G -אינווריאנטי, אי-פריק.

4.3 הצגות של חבורות קומפקטיות

נרצה לכתוב הצגות של חבורות קומפקטיות. נדות בהצגות של החבורה $SU(1)$.

אינטגרל-אינווריאנטי נניח G חבורה קומפקטית ($G = \mathbb{T}, SO_3(\mathbb{R}), O_3(\mathbb{R}), U_2(\mathbb{C})$), ונניח X מרחב-מטרי קומפקטי, שעליו G פועלת, והפעולה רציפה. (למשל, $O_3(\mathbb{R})$, פועלת על S^2 , \mathbb{T} פועלת על עצמה בהזזות..)

הגדרה 4.13 פונקציונאל לינארי λ ממרחב הפונקציות הרציפות הממשיות על X (שנסמן $C(X)$) ל- \mathbb{R} , נקרא **אינטגרל** מנורמל אם הוא מקיים:

$$1. \quad \Lambda(f) \geq 0 \text{ כאשר } f \geq 0$$

$$2. \quad \Lambda(1) = 1$$

$$3. \quad \text{אם } f(x_0) > 0 \text{ , לאיזשהו } x_0 \text{ , ו- } f \geq 0 \text{ , אזי } \Lambda(f) > 0$$

נסמן

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \int_X f \\ \int_X (\alpha f + \beta h) &= \alpha \int_X f + \beta \int_X h \end{aligned}$$

האינטגרל נקראה G -אינווריאנטי, אם

$$\int_X f \circ g = \int_X f$$

דוגמאות

1. G סופית, X סופי, ו-

$$\int_X f = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

2. $G = \mathbb{T}$, $X = \mathbb{T}$, אם פעולה בהזזות.

$$\int_X f = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) d\theta$$

אז האינטגרל מוגדר ומקיים את התכונות, והוא אינווריאנטי. כלומר,

$$\int_{\mathbb{T}} f(\theta + \psi) d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(\theta) d\theta$$

"המידה היא אינווריאנטית תחת פעולת החבורה".

3. $X = S^2$, ו- $G = SO_3(\mathbb{R})$. נרצה לתת לכדור-על-הספרה (מעגל שהוא חיתוך של מישור כלשהו עם הספרה) מידה אינווריאנטית. נרחיב את הפונקציה שלנו f לכדור, כך שהפונקציה מקבלת את אותו הערך על כל הקרן כמו על שפת הכדור. הפונקציה הזו רציפה (מלבד בראשית). עכשיו, יש לנו פונקציה המוגדרת על \mathbb{R}^3 , ונוכל לבצע אינטגרציה על \mathbb{R}^3 . במרחב, אם נפעיל מטריצה הפיכה ולאחר מכן נבצע אינטגרציה, האינטגרל יוכפל בדטרמיננט המטריצה. לכן, אם נצמצם את הדיון לטרנספורמציות אורתוגונליות, עם $\det = 1$ (ששומרות על הספרה), אז הן מנהסותם ישמרו על האינטגרל.

$$\int_{S^2} f(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

כמו בחבורות סופיות, נגדיר:

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x)$$

$$T_g : C(X) \rightarrow C(X)$$

העתקה לינארית מפונקציות רציפות על X לפונקציות רציפות על X . נגדיר:

$$\langle f, h \rangle = \int_X f \bar{h}$$

זו תבנית הרמיטית, $\langle f, h \rangle = \overline{\langle h, f \rangle}$, המקיימת ש- $\langle f, f \rangle > 0$ אלא אם כן $f \equiv 0$. ואכן, $\langle f, f \rangle = \int_X |f|^2$, וזוהי פונקציה ממשית-אי-שלילית, ולכן, על פי ההנחות שלנו, האינטגרל גדול מאפס אלא אם היא אפס זהותית. התבנית הזו היא G -אינווריאנטית. ואכן:

$$\begin{aligned} \langle T_g f, T_g h \rangle &= \int_X f \bar{h}(g^{-1}x) \\ &= \int_X f \bar{h} \circ g = \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

מסקנה 4.14 אם יש על X אינטגרל אינווריאנטי תחת G , אזי יש הצגה של G על המרחב הוקטורי $C(X)$, כך שהצגה זו שומרת על תבנית הרמיטית, חיובית לחלוטין.

במידה אינסופי, כל וקטור הוא גבול של סידרה של וקטורים, לא-דווקא סופית. אנו מעוניינים לפרק הצגה זו. בלב ראשון, נתחיל מהבעיה הפשוטה הבאה:
יהא V מרחב וקטורי סוף ממדי מעל \mathbb{C} , ונניח הצגה

$$\pi : \mathbb{T} \rightarrow GL(V)$$

נניח כי π פונקציה רציפה, כלומר, $\pi(k_\theta) v \mapsto \pi(k_\theta) v$ היא פונקציה רציפה. כלומר, π הצגה רציפה.

טענה 4.15 .1 יש על V תבנית הרמיטית אינווריאנטית תחת \mathbb{T} .

.2 V מתפרק לסכום-ישר של הצגות אי-פריקות של \mathbb{T} , שכל אחת ממימד 1.

.3 האופרטור

$$P_V = \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) v d\theta$$

הוא האופרטור של הטלה ניצבת על מרחב בהצגה π .

הוכחה:

.1 נגדיר

$$\langle v, w \rangle = \int_{\mathbb{T}} [\pi(k_\theta) v, \pi(k_\theta) w] d\theta$$

כאשר $[v, w]$ תבנית הרמיטית חיובית לחלוטין כלשהי. התבנית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ היא תבנית הרמיטית חיובית לחלוטין ואינווריאנטית:

$$\begin{aligned} \langle \pi(k_\alpha) v, \pi(k_\alpha) w \rangle &= \int_{\mathbb{T}} [\pi(k_\theta) \pi(k_\alpha) v, \pi(k_\theta) \pi(k_\alpha) w] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\pi(k_{\theta+\alpha}) v, \pi(k_{\theta+\alpha}) w] d\theta = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

.2 כאשר ההצגה אוניטרית, ברור שיש פירוק לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטיים, אי פריקים. החבורה אבלית, ולכן להצגות אי-פריקות, מימד 1.

.3 (א) נוכיח כי $P = P^*$:

$$\begin{aligned} \langle Pv, w \rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) v d\theta, w \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle \pi(k_\theta) v, w \rangle d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle v, \pi(k_\theta^{-1}) w \rangle d\theta \\ \langle P^*v, w \rangle &= \langle v, Pw \rangle \\ &= \left\langle v, \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) w d\theta \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle v, \pi(k_\theta) w \rangle d\theta \end{aligned}$$

על \mathbb{T} , ההעתקה $i : k_\theta \mapsto k_\theta^{-1}$ היא שומרת מידה, ולכן האינטגרלים שווים. (ב) $P^2 = P$: ואכן,

$$\begin{aligned} \langle P(Pv), w \rangle &= \left\langle P \left(\int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) v d\theta \right), w \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) v d\theta, Pw \right\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle \pi(k_\theta) v, Pw \rangle d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle P\pi(k_\theta) v, w \rangle d\theta = \int_{\mathbb{T}} \left\langle \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\alpha) \pi(k_\theta) v d\alpha, w \right\rangle d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \langle \pi(k_{\theta+\alpha}) v, w \rangle d\alpha \right) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left\langle \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\alpha) v d\alpha, w \right\rangle d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle Pv, w \rangle d\theta = \langle Pv, w \rangle \int_{\mathbb{T}} d\theta = \langle Pv, w \rangle \end{aligned}$$

תרגיל: בחרו G סופית, ו- X סופית, ואת המרחב $\ell^2(X)$. האופרטור $T_g = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} T_g$. הוכיחו כי P היא ההטלה הניצבת על האינוריינטה. (ג) לבסוף, לכל וקטור

$$Pv = \int_{\mathbb{T}} \pi(k_\theta) v d\theta$$

היא אכן אינוריינטה.

■

לכן, יש לנו אנלוגיה מושלמת בין המקרה של סיבוב סופי, על \mathbb{Z}_n , לסיבוב כלשהו על \mathbb{T} , של המעגל על עצמו.

4.4 הצגות של $SO_3(\mathbb{R})$

נדבור בפעולת $G = SO_3(\mathbb{R})$, על הספירה, S^2 .

$$Tgf(v) = f(g^{-1}v) = f(vg)$$

היא הצגה. יהא \mathcal{P}_k מרחב כל הפולינום ההומוגניים מדרגה k , בשלושה משתנים:

$$f \in \mathcal{P}_k \iff f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z)$$

ו- f פולינום. כמובן כל \mathcal{P}_k אינוריינטי תחת כל T , שהרי

$$f(\lambda(g^{-1}v)) = f(g^{-1}(\lambda v))$$

כל \mathcal{P}_k הוא מרחב לינארי, סוף מימדי, אינוריינטי תחת פעולת $SO_3(\mathbb{R})$. נסמן ב- Q_k את צמצום הפונקציות ב- \mathcal{P}_k אל הספירה. העתקת הצמצום היא חד-חד-ערכית, כי פולינום הומוגני נקבע על ידי ערכיו על הספירה.

$$\dim \mathcal{P}_k = \dim Q_k = \binom{k+2}{2}$$

וקיים, $Q_{k-2} \subseteq Q_k$, כי אם $f \in Q_{k-2}$, אז $f \in Q_k$, והם מזדהים על הספירה.

מסקנה 4.16 $Q_{k-2} \subseteq Q_k$, הצגות של $SO_3(\mathbb{R})$.

מסקנה 4.17 התבנית $\langle p_1, p_2 \rangle = \int_{S^2} p_1 \bar{p}_2 dm$, $p_1, p_2 \in Q_k$, היא תבנית הרמיטית, חיובית לחלוטין, $-G$ אינוריינטית על Q_k , כאשר m היא המידה האינוריינטית לסיבובים על S^2 .

נגדיר $Q_k = H_k \oplus Q_{k-2}$, כלומר, H_k המשלים הניצב של Q_{k-2} ב- Q_k . כמובן, H_k מרחב עם הצגה אוניטרית של SO_3 .

משפט 4.18 ההצגה במרחב H_k שמימדו $2k+1$ היא אי פריקה, לכל $0 \leq k$.

טענה 4.19 (טענת עזר להוכחת המשפט)

יהא $V \subseteq C(X)$, תת מרחב סוף-ממדי כלשהו (סגור), שהוא $-G$ אינוריינטי. אזי, מרחב זה מכיל לפחות פונקציה אחת, שהיא אינוריינטית תחת כל הסיבובים מסביב לציר \hat{z} , ואינה 0.

הוכחה: תהא $f \in V$, ותהא $f \neq 0$. בלי הגבלת הכלליות, $f(p) = 1$, שהרי אם $f(x) \neq 0$, יש $G \in SO_3(\mathbb{R})$ כך ש- $g(x_0) = p$, ואזי $f \circ g^{-1}(p) \neq 0$. בנינו את אופרטור ההטלה הניצבת, על מרחב האינוריינטות, בכל הצגה אוניטרית של \mathbb{T} , שהיא איזומורפית לחבורת הסיבובים סביב ציר z . האופרטור שהגדרנו, P , לוקח את V לעצמו.

אם כן,

$$\begin{aligned} Pf(y) &= \int_{\mathbb{T}} T_{k\theta} f(y) d\theta \in V^T(\mathbb{T}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(k_\theta^{-y} y) d\theta \end{aligned}$$

כאשר $V^T(\mathbb{T})$ הוא מרחב האינורניטות של $\pi(\mathbb{T})$ ב- V . Pf היא אינורניטית לסיבובים סביב ציר \hat{z} , וכמו כן, $Pf(p) = 1$. ■

כמו כן, שלכל $g \in O_3(\mathbb{R})$, קיים $T_g P_k = P_k$ ו- $T_g Q_k = Q_k$. ולכן, קיבלנו סידרה של הצגות אוניטריות של $O_3(\mathbb{R})$, כטרנספורמציות על Q_k .
יהא $Q_{k-2} \subseteq Q_k$, ויהא \mathcal{H}_k , המשלים הנציב של Q_{k-2} תחת התבנית. $H_k \oplus Q_{k-2}$. כמו כן H_k הוא אינורניטית תחת כל האופרטורים T_g , $g \in O_3$, ולכן נותן הצגה אוניטרית של $O_3(\mathbb{R})$. כמו כן, $\dim H_k = 2k + 1$. למשל, $H_0 = \{1\}$, $H_1 = \{ax + by + cz \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$, היא הקומפלפיקציה של הצגה הרגילה של $O_3(\mathbb{R})$, על \mathbb{R}_3 . $\dim H_2 = 5$ וזו הצגה חדשה. **הוכחה:** (של המשפט, ועד הפעם) נוכיח בשני שלבים:

- נראה שבכל תת-מרחב של Q_k שהוא אינורניטית תחת T_g , כאשר $g \in SO_3$, קיימת פונקציה יחידה f , $0 \neq f$, שמקיימת, $T_g f(x) = f(x)$ לכל k שמייצבת את הקוטב הצפוני, p , ו- $f(p) = 1$.
- נראה כי ב- \mathcal{H}_k יש פונקציה יחידה כזו.

זה מסיים את הוכחת המשפט, כי אם $\mathcal{H}_k = U \oplus V$, ואלו תתי-מרחבים אינורניטים, לא טריוויאליים, אזי, אחד מהם מכיל פונקציה $\neq 0$, שמקיימת את (1), ופונקציות אלו ניצבות. כלומר, H_k מכיל שתי פונקציות, בסתירה ל-(2).

חלק (1) נתון תת מרחב אינורניטי W , ו- $W \ni f \neq 0$, ובלי הגבלת הכלליות, $f(p) = 1$, ועתה, המייצב ב- $SO_3(\mathbb{R})$ של הקוטב הצפוני, $H = St_{SO_3(\mathbb{R})}(p) \cong \mathbb{T}$, ולכן,

$$Pf(x) = \int_H T_h f(x) dm \in W$$

אזי, Pf היא H -אינורניטית, ו- $Pf(p) = 1$.

חלק (2) לכל פולינום $q(x, y, z) \in Q_k$, נוכל לרשום: $q(x, y, z) = \sum_{j=0}^k q_j(x, y) z^j$. הוא אינורניטית תחת $H \iff q(x, y, z) = \sum_{j=0}^k c_j (x^2 + y^2)^j z^{k-2j}$. ההוכחה כתרגיל. נסיק כי ב- Q_k , יש $[\frac{k}{2}] + 1$ פולינומים שהם H -אינורניטים. ואם כן, ב- Q_{k-2} , יש $[\frac{k-2}{2}] + 1$ פולינומים שהם H -אינורניטים. אבל, $Q_k = Q_{k-2} \oplus \mathcal{H}_k$, וקיים,

$$P(Q_k) = P(Q_{k-2}) \oplus P(\mathcal{H}_k)$$

כי P שומר על כל מרחב H -אינורניטי, ובוודאי על Q_{k-2} ו- \mathcal{H}_k , שהם אפילו SO_3 -אינורניטים. לכן, מרחב האינורניטות של H ב- Q_k , הוא הסכום הישר של מרחב האינורניטות של H ב- Q_{k-2} עם מרחב האינורניטות של H ב- \mathcal{H}_k . ומאחר מ- Q_{k-2} ל- Q_k נוסף רק מימד אחד למרחב האינורניטות, אזי ב- \mathcal{H}_k יש אכן פונקציה H -אינורניטית אחת. ■

4.5 התמרות אינטגרליות

4.5.1 התמרת קרני- X

יש לנו גוף מישורי. אנחנו שולחים קרן, שעוברת דרך הגוף, היא נבלעה במידה חלקית בגוף, ולאחר מכן נקלטה בקולט. אנחנו מודדים בקולט את העוצמה של הקרן אחרי הבליאה בגוף. אם עוצמת האלומה היא I , והחומר הוא הומוגני עם מקדם בליעה ρ אחיד, אזי הקולט שמודד את עוצמת האלומה ביציאה ימדוד את $Ie^{-\rho d}$, כאשר d המרחק שהקרן עברה בתווך.

אם נניח שהגוף מורכב משני סוגים של חומרים, הומוגניים, עם מקדמי בליעה ρ_1, ρ_2 , אזי, נצפה לעוצמה בקולט שהיא $Ie^{-d_1 \rho_1 - d_2 \rho_2}$. מכאן, נסיק שאם נתון חומר כלשהו, ויש לו פונקציה f , שנותנת את מקדם הבליעה

בכל נקודה, אזי, לאחר מעבר הקרן, נמדוד עוצמה שהיא $Ie^{-\int_0^d f}$, כאשר האינטגרל הוא על מסלול הקרן. נרצה לשלוח את האלומה בכל הכיוונים האפשריים, ולקבל קבוצה גדולה של תוצאות. בהנתן משפחה של מדידות כאלו, האם ניתן לשחזר את הפונקציה f ?

מבחינה מתמטית, האם ניתן לשחזר את הפונקציה f , על סמך הידע של האינטגרל על הפונקציה דרך כל ישר החותך אותה. האם כאשר $\int_\ell F dt = \int_\ell G dt$, לכל ישר ℓ שחותך את הגוף D , מתקיים $F = G$, נקראת בעיית היחידות לטרנספורם-קרני- X . נוכל גם לדון בבעיית השיחזור, אם בעיית היחידות נפתרה.

4.5.2 בעיית היחידות שיחזור לגופים קמורים ב- \mathbb{R}^3

יהא C גוף קמור סימטרי סביב 0 ב- \mathbb{R}^3 . לכל מישור L דרך הראשית ב- \mathbb{R}^3 , יהא $A(C \cap L)$ השטח של $C \cap L$. אם נתון גוף נוסף, קמור וסימטרי, D , וקיים $A(C \cap L) = A(D \cap L)$, לכל מישור L , האם $C = D$? נבצע רדוקציה של בעייה זו לבעיה של גיאומטריה אינטגרלית על הספירה. נעניין ב- $C \cap L$ במישור L . לכל $v \in S^2 \cap L$ (שמגדיר כיוון כלשהו על המישור), נעניין בכיוון v קובע, ויהא $r_v = r_\theta$ האורך של הקטע מ-0 עד $\partial(C \cap L)$, בכיוון v . הפונקציה r_v , כאשר $v \in S^2$, קובעת את C ביחידות. אנו מעוניינים בשטח $A(C \cap L)$, ובקואורדינטות פולריות במישור, שבהם $C \cap L = \{(s, \theta) \mid 0 \leq s \leq r(\theta)\}$

$$A(C \cap L) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r_\theta} 1 r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r_\theta^2 d\theta$$

קיבלנו כאן את הטרנספורם האינטגרלי הבא: נתונה פונקציה r_v , $v \in S^2$, כך ש- $r_v = r_{-v}$ (כי הגוף C סימטרי). נבצע את האינטגרציה של הפונקציה על מעגל גדול, שהוא החיתוך של מישור L עם הספירה, $\int_{L \cap S^2} r(\theta)^2 d\theta$. והפתרון של בעיית היחידות לגופים קמורים סימטריים, ינבע אם נוכל להראות כי הטרנספורם האינטגרלים הזה, קובע את הפונקציה r_v , כלומר,

$$\int_{L \cap S^2} R(\theta)^2 d\theta = \int_{L \cap S^2} r(\theta)^2 d\theta$$

לכל L , גורר כי $R = r$. נעניין עתה ב- $C(S^2)$, הפונקציות הרציפות על הספירה, ובאופרטור,

$$J : C(S^2) \rightarrow C(S^2)$$

$$Jf(x) = \int_{L=x^\perp \cap S^2} f(y) dy$$

נוכל לרשום $C(S^2) = C_e(S^2) \oplus C_o(S^2)$, כאשר C_e הן הפונקציות הזוגיות, המקיימות $f(x) = f(-x)$, ופונקציה ב- C_o היא אי-זוגית, אם $h(x) = -h(-x)$.

משפט 4.20 J אופרטור חד-חד-ערכי על $C_e(S^2)$.

הוכחה:

חלק ראשון: האופרטור J הוא אופרטור משלג עבור ההצגה של SO_3 על $C(S^2)$. כלומר,

$$J(T_g f) = T_g(Jf)$$

כלומר, J מתחלף עם כל האופרטורים T_g , כאשר $T_g \in SO_3(\mathbb{R})$. $g \in SO_3(\mathbb{R})$ כמובן ש- J גם שומר על זוגיות של פונקציות.

הוכחת החלק הראשון

$$Jf(x) = \int_{X^\perp \cap S^2} f(y) dy$$

צריך להראות ש-

$$\begin{aligned} T_g(Jf)(x) &= Jf(g^{-1}x) = \int_{(g^{-1}x)^\perp \cap S^2} f = J(T_g f)(x) \\ &= \int_{x^\perp \cap S^2} T_g f = \int_{x^\perp \cap S^2} f(g^{-1}y) dy \end{aligned}$$

בעצם העברנו את המעגל הגדול שלנו למעגל גדול אחר, אז אנחנו עושים אינטגרציה על אותו הדבר.

חלק שני כל אופרטור משלב, ובפרט J , הוא בעל התכונה הבאה: אם U מרחב אינווריאנטי תחת SO_3 , אזי גם JU כזה. ואכן:

$$T_g(JU) = J(T_gU) = JU$$

חלק שלישי נניין במרחב \mathcal{H}_k , שנותן הצגה אי-פריקה של SO_3 . אזי, JH_k גם כן מרחב הצגה אי-פריקה של $SO_3(\mathbb{R})$, וכמובן, שמימדו 0 או $\dim H_k$. זאת משום ש- $\ker J|_{H_k}$ הוא תת-מרחב אינווריאנטי של H_k , ולכן הוא 0 או H_k .

משפט 4.21 (גרסא למשפט פיטר-ווייל, לא נוכיח)

האוסף $\{H_k | k \geq 0\}$ הוא בדיוק אוסף כל ההצגות האוניטריות האי-פריקות של $SO_3(\mathbb{R})$ ב- $C(S^2)$.

שלב רביעי לפי המשפט, $J : H_k \rightarrow H_k$ הוא אופרטור משלב בין H_k לעצמו. כי אם $JH_k = 0$, אז בסדר, ואם לא,

$$\dim JH_k = 2k + 1$$

ו- $J(H_k)$ הצגה אוניטרית אי-פריקה של $SO_3(\mathbb{R})$ מהמימד המתאים, ולכן מתלכדת עם H_k . מאחר ו- J מתחלף עם כל אופרטורי ההצגה, אזי $Jf = \lambda_k f$, לכל $f \in H_k$, כלומר, J סקאלר על H_k , על פי הלמה של Schur.

	C_e	C_o
	H_0	H_{j_1}
C_e	H_0	H_{k_1}
		\dots
C_o		\dots

האופרטור הזה מתלכסן בכל מרחבי ההצגה, ובגלל שהאופרטור משלב, בכל אחד מהמרחבים, האופרטור הוא סקאלר. במילים אחרות, לאופרטור J יש ליכסון על ידי התבוננות במרחבי ההצגה האי-פריקים של SO_3 , כלומר, H_k , כך ש- $k \geq 0$.

שלב חמישי ההוכחה תסתיים כאשר נראה כי $\lambda_k \neq 0$, לכל מרחב H_k , שמקיים $H_k \subseteq C_e(S^2)$. כיצד מוצאים את הספקטרום של J , כלומר, את הערכים העצמיים λ_k של J , במרחבים \mathcal{H}_k ?
 כמובן, שכדי למצוא את λ_k , די לקחת פונקציה אחת L_k ב- \mathcal{H}_k , ולחשב את $JL_k = \lambda_k L_k$, כי J סקאלר. עכשיו, יש פונקציה יחידה $L_k \in \mathcal{H}_k$, כך ש- $L_k(p) = 1$, ו- L_k אינווריאנטית תחת סיבובים סביב ציר z . נחשב את JL_k , ונחשב את JL_k .

שלב שישי L_k כמובן פונקציה של Z בלבד, וקיים

$$L_z(z) = \frac{d^k}{dz^k} (z^2 - 1)^k$$

פולינום לג'נדר k -י. צריך לראות כי פולינום זה הוא ב- Q_k , ויותר מזה, ב- H_k . מאחר ש- H_k המשלים הניצב של Q_{k-2} ב- Q_k , ו- L_k ניצב לכל הפולינומים ממעלה יותר קטנה, זה אכן נכון. (תרגיל)
 אם כן, מרחב האינווריאנטיות של H , המייצב של הקוטב הצפוני ב- H_k , נפרש על ידי L_k . לסיום, נחשב את JL_k .

מצד אחד, האינטגרל של L_k על קו המשווה,

$$JL_k(p) = 2\pi L_k m(0)$$

ומצד שני, $JL_k = \lambda_k L'_k$ ולכן, בקוטב הצפוני, נקבל JL_k הוא $\lambda_k \dots$. קיבלנו

$$2\pi L_k(0) = \lambda_k L_k(1)$$

$$\lambda_k = \frac{2\pi L_k(0)}{L_k(1)}$$

$$L_k(1) = \frac{d^k}{dz^k} \left((z-1)^k (z+1)^k \right) = k! (z+1)^k = z^k k!$$

אינדוקציה, $z = 1$

$$L_k(0) = \begin{cases} 0 & , k \text{ odd} \\ k! \binom{k}{k/2} & , k \text{ even} \end{cases}$$

כמוכן $H_k \subseteq C_e(S^2) \iff k$ זוגי (על סמך הומוגניות)

$$f(\lambda v) = \lambda^k f(v)$$

$$f(-1v) = (-1)^k f(v)$$

ולכן, הערך העצמי של J על $C_2(S^2)$ הם

$$\lambda_k = \frac{\pi \binom{k}{k/2}}{2^{k-1}} \neq 0$$

■

ו- J חד-חד-ערכי, על $C_e(S^2)$ (עבל לא על $C(S^2)$ כולו!)