אלקטרודינמיקה

מרצה: יוסי אברון

26 בפברואר 2010

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של פרופ' יוסי אברון. המחברת עלולה להכיל חוסרים וטעויות. **אין הטכניון או מי מטעמו ־ ובפרט, הפקולטה לפיזיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.**

הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.tehcnion.ac.il

סיכומים של חלק מההרצאות מאת פרופסור יוסי אברון מתפרסמים באתר הקורס ובאתר האישי של פרפ' אברון (http://physics.technion.ac.il/~avron/). גרסא מעודכנת של רשימות אלו תפורסם ב־ http://www.technion.ac.il/~ronen .

תוכן עניינים

חלק I
יחסות ומשוואות מקסוול

1 טנזורים

מוטיבציה רוצים לכתוב משוואות בלי להתחייב מראש על בחירת מערכת קואורדינטות.

1.1 אנליזה וקטורית

בוחרים מערכת צירים אורתוגונליים $x-y$, ומסתכלים על וקטור $\mathbf{v}$ במערכת. לוקטור יש היטל, רכיב, על ציר x , ועל ציר y, ולכן, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

נסתכל בוקטורים במערכות צירים לינאריות, לא אורתוגונליות (נקרא לצירים בכל זאת, x, y) . כייצד נייצג את $\mathbf{v}$?

יש לנו שתי אפשרויות: האחת, להעביר מקבילים לצירים העוברים דרך ה"קצה" של $\mathbf{v}$, ולהשתמש באורכם של המקבילים (עד החיתוך עם הצירים) לייצוג הוקטור, והאפשרות השניה, להוריד אנכים לצירים ולבחור את אורכם.

- הרכיבים ה**קונטראוריאנטים** הם הרכיבים הנוצרים באמצעות בחירת מקבילים. $\mathbf{v}=\left(v^1,v^2\right)$
- הרכיבים ה**קווריאנטים**, יהיו הרכיבים שנקבעו על ידי בחירת אנכים לצירים $\mathbf{v}=\left(v_1,v_2\right)$

מספיק לדעת זוג אחד בשביל צייר את הוקטור.

איך קובעים אורך של וקטור, מרכיביו? במערכת אורתוגונלית,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\left(v_x\right)^2+\left(v_y\right)^2$$

ובמערכת לא אורתוגונלית, כיצד מכלילים את המשוואה?

בהצגה קונטראוריאנטית, נחשב את האורך באמצעות משפט הקוסינוסים. יש לחשב א תהיתר של המשולש שיוצרים הצירים עם הרכיב עם $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}&=\left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2-2v^1v^2\cos\left(\pi-\theta\right)\\&=\left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2+2v^1v^2\cos\left(\theta\right)\end{aligned}$$

כאשר θ היא זווית החיתוך של v^1 עם ציר 2.

הגדרה 1.1 טנזור מטרי, g_{ij}, $i,j=1,2$, כך שהאורך נמדד:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\sum_{i,j}g_{ij}v^iv^j$$

כאשר g_{ij} הם מספרים קבועים

$$g_{ij}=\begin{cases}g_{11}=1=g_{22}\\g_{12}=\cos\theta=g_{21}\end{cases}$$

או, כמטריצה,

$$g=\begin{pmatrix}1&\cos\theta\\\cos\theta&1\end{pmatrix}$$

הטנזור המטרי מאפשר למדוד, כרגע, א תהאורך, בהנתן הרכיבים הקונטרוואריאנטים. אבל לפני שנמשיך..

כלל הסכימה של איינשטיין ביטוי מהצורה

$$y^jx_j=\sum_j y^jx_j$$

אם בביטוי מופיע אינדקס קונטרה ואותו אינדקס, קו, אזי מסכמים על האינדקס. לכן, למשל, על y^jx_k לא מסכמים, אבל על y^jx_j, כן מסכמים. אם מקבלים סכימה עם אינדקס עם מופע קו וקונטרה שלא צריך לסכם עליו, כנראה יש טעות.

הקשר בין רכיבי קו לקונטרה נקבע גם הוא על ידי הטנסור המטרי,

$$\begin{aligned}v_1&=v^1+v^2\cos\theta\\v_2&=v^2+v^1\cos\theta\end{aligned}$$

לכן, מתקיימת המשוואה הבאה :

$$\boxed{v_j=g_{jk}v^k}$$

אזי, אורך של וקטור הוא

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=g_{ij}v^iv^j=v_iv^i$$

כלומר, אורך של וקטור הוא מכפלת הרכיבים הקו־וריאנטים והקונטרה־וריאנטים, בלי רכיבים מעורבים.
נגדיר g עם אינדקס למעלה:

$$v^j = \left(g^{jk}\right) v_k$$

מה הקשר בין g^{jk} ל־g_{jk}? $g^{\#} = \left(g_{\#}\right)^{-1}$, ולכן, $g^{ij} = \frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix}$.
מכאן, נובע היחס:

$$g^{ij}g_{jk} = \eta^i{}_k = \delta_{ik}$$

אובייקט ללא אינדקסים נקרא סקאלר. אובייקט עם אינדקס אחד הוא וקטור. אובייקט עם 2 אינדקסים, נקרא טנזור מסדר 2.

כשכותבים g ללא אינדקסים, זוהי המטריצה g עם האינדקסים למטה

g מאפשר לחשב גם נפחים[1]: רכיבים $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ עם הזווית θ בינהם, מגדירים מקבילית.

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}V) &= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\sin\theta\right) \\ \det g &= 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta\end{aligned}$$

ולכן,

$$\mathrm{d}V = \left(\sqrt{\det g}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.2 טרנספורמציות לינאריות

יש לנו מערכת צירים אורתוגונלית, x^1, x^2 , ומערכת צירים לא אורתוגונלית, y^1, y^2 .

$$y^j = A^j{}_k x^k$$

כאשר $A^j{}_k$ מטריצה של מספרים. ציר y^1 נתון במשוואה

$$0 = y^2 = A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 = 0$$

אזי,

$$A^j{}_k = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A^j{}_\ell x^\ell\right) = A^j{}_\ell\frac{\partial x^\ell}{\partial x^k} = A^j{}_\ell\delta^\ell{}_k = A^j{}_k$$

בהמשך, נסמן,

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \partial_k y^j$$

המטריצה $A^j{}_k$ מעבירה קוארדינטות ממערכת אחת למערכת שניה. היא מעבירה רכיבים קונטרה וריאנטים של וקטור בין שתי המערכות.
מה קרה לטנזור המטרי תחת הטרנספורמציה A? הטנזורים המטריים יהיו:

$$\begin{aligned}g\left(x\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ g\left(y\right) &= \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

---

[1] 20/10/2009

האורך של הוקטור, $(\ell)^2$, צריך להשמר:

$$\begin{aligned}(\ell)^2 &= g_{ij}(x)\,x^i x^j = g_{ij}(y)\,y^i y^j \\ &= g_{ij}(y)\left(A^i{}_k x^k\right)\left(A^j{}_\ell x^\ell\right)\end{aligned}$$

לכן, מתקיים

$$\begin{aligned}g_{ij}(x)\,x^i x^j &= g_{ij}(y)\,A^i{}_k A^j{}_\ell x^k x^\ell \\ &= g_{k\ell}(x)\,x^k x^\ell\end{aligned}$$

נעביר אגפים במשוואה, ונקבל,

$$0 = \left(g_{ij}(y)\,A^i{}_k A^j{}_\ell - g_{k\ell}(x)\right) x^k x^\ell$$

כדי שהמשוואה תתקיים לכל x^k, x^ℓ , הסוגריים צריכים להתאפס, ולכן, חוק הטרנספורמציה של g הוא

$$\boxed{g_{ij}(y)\,A^i{}_k A^j{}_\ell = g_{k\ell}(x)}$$

וחוק הטרנספורמציה של הקוארדינטות:

$$\boxed{y^j = A^j{}_k x^k}$$

טנסור

- נטסור מסדר 0 הוא סקלר – אובייקט ללא אינדקסים.
- וקטור הוא אוביקט, עם אינדקס יחיד, v^j , שיש לו התכונה, שתחת טרנספורמציית קוארדינטות $x^j \to A^j{}_k x^k$, אז $v^j \to A^j{}_{k v^k}$.

  ברכיבים הקו־ואריאנטים, $x_j \to A_j{}^k x_k$, כאשר המטריצה $A_j{}^k$ היא ההופכית של $A^j{}_k$: $A_j{}^k A^j{}_\ell = \delta^k{}_\ell$. אזי, $v_j \to A_j{}^k v_k$.
- טנסור מסדר 2 הוא אובייקט עם שני אינדקסים, אז t^{ij} יעשה טרנספורמציה כאילו מדובר ב־$x^i x^j$:

$$x^i x^j \to A^i{}_k x^j A^j{}_\ell x^k x^\ell$$

ולכן,

$$t^{ij} \to A^i{}_k A^j{}_\ell t^{k\ell}$$

פסאודוטנסור מקיים טרנספורמציה באותה צורה כמו טנסור, עד כדי סימן: עבור טרנספורמציות המשקפות את מערכת הצירים, מוסיפים בפסאודוטנסורים ועד מינוס.

לדוגמא, פסאודוקטור

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

נסתכל על חלקי שעושה מסלול נגד כיוון השעול על מישור $x-y$, כיוון התנע הזוויתי הוא בכיוון $\hat{z}$. תחת שיקוף, התנע הזוויתי יצביע לאותו הכיוון.

1.3 טרנספורמציות סיבוב

יש לנו מערכת אורתוגונלית $x-y$, ונסתל על טרנספורמציית סיבוב עליה, למערכת אורתוגונלית $x'-y'$, המסובבת בזווית θ.

$$R(\theta)=\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

כאשר $c=\cos\theta$ ו־$s=\sin\theta$.

וקטורים וטנזורים מתנהגים תחת סיבוב לפי החוקים שהגדרנו. זהו מקרה פרטי של טרנספורמציה לינארית. אבל,

$$g(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\to g(x')=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

טרנספורמציה של סיבבו מיוחדת בזה שהיא טרנספורמציה לינארית ששומרת על הצורה הפונקציונאלית של הטנזור המטרי :

$$g_{ij}(x)=g_{ij}(x')$$

או, באופן כללי,

$$g_{ij}{R^i}_a{R^j}_b=g_{ab}$$

נסתכל במקרה המיוחד של מערכת אורתוגונלית:

$$g_{ab}=\delta_{ab}$$

$$\begin{aligned} \delta_{ig}{R^i}_a{R^j}_b&=\delta_{ab} \\ {R^j}_a{R^j}_b&=\delta_{ab} \end{aligned}$$

אם ${R^i}_a$ מיוצג על ידי המטריצה R, לכן,

$$R\cdot R^t=I$$

לכן, $R^t=R^{-1}$, והמטריצה R היא אורתוגונלית.

1.3.1 אינוורינטים

אילו טנסורים נראים אותו דבר בכל מערכת קוארדינטות כאשר אני דן רק בטרנספורמציות של סיבוב.

- סקאלרים
- הוקטור היחידי שהוא אינוורינטי לסיבובים הוא וקטור האפס.
- מסדר 2, הטנזור המטרי אינווירנטי לסיבובים.

טנזור נוסף שאינוורינטי לסיבובים הוא הטנזור של לוי־צ'ויטה (Levi-Civita).
ב־2 מימדים,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{12}&=1=-\varepsilon^{21} \\ \varepsilon^{11}&=\varepsilon^{22}=0 \\ \varepsilon&=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בשלושה מימדים,

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1$$
$$\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$$

וכל האחרים – מתאפסים (עם אינדקס מופיע פעמיים. $\varepsilon^{iij} = 0$)
באופן כללי,

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \begin{cases} 1, & i,j,k \text{ is even permutation} \\ -1 & i,j,k \text{ is odd permutation} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הערה 1.2 תמורה ציקלית יכולה להיות זוגית או אי זוגית, כתלות במספר הממדים.

בשני ממדים, נסתכל בסביב R:

$$\begin{aligned} (\varepsilon')^{12} &= R^1{}_j R^2{}_k \varepsilon^{jk} \\ &= R^1{}_1 R^2{}_2 - R^1{}_2 R^2{}_1 = \det R = 1 = \varepsilon^{12} \end{aligned}$$

ניתן להגדיר

$$\det M = \varepsilon^{ijk,\cdots} M_{1i} M_{2j} M_{3k} \cdots$$

בשני ממדים יש שני טנזורים שהם אינווריינטים לסיבובים: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו־$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
לכן, גם קומבינציות שלהם אינוורינטיות לסיבובים:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{\ell jk} = T^i_\ell$$

2 טרנספורמציות לורנץ[2]

- עקרון היחסות: אין מערכת אינרציאלית מועדפת.
- c, מהירות האור, במשוואות מקסוול הוא קבוע של הטבע.
- יש בטבע מהירות מקסימלית של העברת אינפורמציה, והיא c.

2.1 קונוס אור

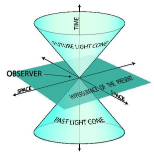
הגדרה 2.1 מאורע: יש קוארדינטות במרחב־זמן, שמציינות אותו.
נסמן למאורע A את הקוארדינטות: x^μ_A, $\mu = 0,1,2,3$, ו־$x^0 = ct$.

מנקודה בראשית הצירים, על מרחב (x,t) נעביר קווים עם המשוואות $x = ct$, $x = -ct$. בשלושה מימדים:

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

כאשר $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ ו־$t = x^0$.
קונוס האור מתחלק לקונוס אור עתיד (עבור $t > 0$) ולקונוס האור בעבר (עבור $t < 0$). נקודה C שנמצאת מחוץ לקונוס האור של הראשית, אינה יכולה להיות בקשר סיבתי עם הראשית.
נקודה A הנמצאת בקונוס האור בעתיד, יכולה להיות מושפעת מהראשית, ואילו נקודה B הנמצאת בקונוס האור בעבר, יכול להשפיע על מאורע הנמצא בראשית.
למאורע A יש קוארדינטות (X^μ) . במערכת יחוס אחרת, יכולים להיות למערכת A קוארדינטות $(X')^\mu$.
בדרך כלל, $x^\mu \neq x'^\mu$. ניתן להתווכח על מיקומו של מאורע במרחב־זמן, אבל לא על עצם זה שארע, או על סיבתיות של מאורעות.

[2] 25/10/2009



איור 1: קונוס האור, מתוך ויקיפדיה, Public Domain

2.2 האינטרוול

נגדיר אינטרוול:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

כאשר $\mathrm{d}x_\mu$ הוא הפרשי הקוארדינטות בין שני מאורעות. זוהי תכונה של שני מאורעות.
מעבירים אינדקסים באמצעות **הטנזור המטרי של מינקווסקי**:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

לכן,

$$(\mathrm{d}s)^2 = c^2 (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$$

טענות:

- $(\mathrm{d}s)^2 = 0$, מתאר את קונוס האור יחסית לראשית.
- $(\mathrm{d}s)^2 > 0$, ו־$\mathrm{d}t > 0$, מתאר את קונוס האור העתידי לראשית
- $(\mathrm{d}s)^2 > 0$ ו־$\mathrm{d}t < 0$, מתאר את קונוס האור בעבר.
- $(\mathrm{d}s)^2 < 0$, מתאר שני מאורעות שאין בינהם קשר קוזאלי.

שני צופים במערכות לורנץ שונות,

$$\mathrm{d}x \leftrightarrow \mathrm{d}x'$$
$$(\mathrm{d}s)^2 \leftrightarrow (\mathrm{d}s')^2$$

אנחנו לא יודעים מה הקשר בין $\mathrm{d}x$ ל־ $\mathrm{d}x'$, אבל אנחנו יודעים שאם הם בקשר קוזאלי במערכת אחת, הם בקשר קוזאלי בכל מערכת, ואם הם אינם בקשר קוזאלי במערכת אחת, הם אינם בקשר קוזאלי בשום מערכת. לכן, ל־$(\mathrm{d}s)^2$, צריך להיות אותו סימן כמו ל־$(\mathrm{d}s')^2$. לכן, ניתן לכתוב שיוויון,

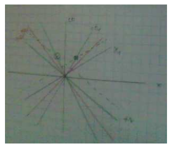
$$(\mathrm{d}s)^2 = A (\mathrm{d}s')^2$$

עבור קדם $A > 0$, כלשהו, כאשר A יכול להיות תלוי במהירות, $A(v)$, כאשר v מהירות יחסית בין שתי המערכות. ברור שמתקיים:

$$A(v) \cdot A(-v) = 1$$

פתרון פשוט שמקיים את כל היחסים הדרושים, הוא $A(v) = 1$.

טענה 2.2 $(\mathrm{d}s)^2$ מקיים: $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}s')^2$, בין כל שתי מערכות אינרציאליות, בתנאי שבשתי המערכות משתמשים באותו סרגל, ובאותם שעונים.



איור 2: שעונים מתפוצצים, באדיבות מירי

2.2.1 קו עולם

קו עולם מתאר את מיקומו של עצם במערכת צירים כלשהו.

קו עולם של צופה במערכת הנתונה, יהיה ישר המקביל לציר t (כלומר, מיקומו x, אינו משתנה). ציר הזמן הוא קו עולם של צופה נח בראשית. קו עולם של צופה נע יהיה קו משופע, העובר דרך הראשית, אך שוכן כולו בקונוס האור.

צופה שנע בתנועה קבועה, יכול להגדיר את המערכת האינרציאלית שלו. במערכת האינרציאלית שלו, קו הזמן שלו מגדיר את ציר הזמן, ct'.

הערה 2.3 בדיאגרמות של מרחב זמן, אין סיבה מיוחדת לבחור צירים אורתוגונלים. לא ניתן להגדיר זווית "בין מרחב לזמן"...

בכל מערכת צירים, קונוס האור חוצה את הזווית בין ציר x לציר ct.

במעכת זו, הציר x' ייצור עם הציר x, אתה אותה זווית שהציר t' יוצר עם הציר t. זה נועד לקיים את התכונה של קונוס האור: הוא חייב להיות חוצה זווית. מהטרנספורמציה הזו נובעת:

$$(x')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\mu}$$

כאשר צופה נח ב־$t = 0$, ומאיץ בתאוצה גבוהה. נסתכל על התנועה שלו בשני גבולות: ב־$t = 0$, הצופה נמצא במנוחה, אז קו העולם שלו מתחיל מקביל לציר ct. כאשר הוא מאיץ ומתקרב למהירות האור, קו העולם שלו נוטה לזווית של $45°$, במקביל לקונוס האור. ד

הגיאומטריה של מרחב מינקוסקי נסתכל על אורכו של וקטור v שנמצא בתוך קונס האור,

$$v^{\mu} v_{\mu} = v^{\mu} \eta_{\mu\nu} v^{\nu} > 0$$

ועל וקטור W הנמצא מחוץ לקונוס האור,

$$w^{\mu} w_{\mu} < 0$$

כאשר וקטור יושב על קונוס האור, אורכו הוא אפס (למרות שהוקטור עצמו אינו וקטור האפס).

בעולם אוקלידי, וקטור **v** מאונך לוקטור **w** אם הזווית בינהם היא $90°$. במרחב מינקוסקי, הוקטור המאונך לוקטור **v** הוא וקטור **w**, כאשר קונוס האור הוא חוצה הזווית בינהם.

2.3 התארכות הזמן, Time Dilatian

(יוסי מסביר בציורים, אז אני אנסה לתאר אותם, אבל זה כנראה לא יהיה זה..)

במערכת צירים, $x - ct$, נסתכל על קונוס האור. במערכת המעבדה נשתמש כדי לבנות מערכות של שני צופים, במערכות אינרציאליות שונות.

הצופה הראשון ינוע ימינה במהירות כלשהי, במערכת האדומה. המערכות שלו תהיה x_1, t_1 (נוותר על ה־c, אבל הוא בעצם שם). הצופה השני נע באותה מהירות, שמאלה, והוא במערכת x_2, t_2 .

במערכת 1, חי שעון, שעובד למשך יחידה אחת, ואז מתפוצץ. גם במערכת 2 יש שעון כזה.

נסתכל בשעון שמתפוצץ במערכת אחת. נסתכל כיצד נראה מאורע זה, עבור צופה במערכת 2. במערכת 2, הצופה יראה כאילו השעון במערכת 1 , מתפוצץ אחרי השעון שחי במערכת שלו. כלומר, הזמן העצמי הוא הכי קטן.

נסתכל על האינטרוול בין שני קליקים של שעון:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= (c\mathrm{d}tt)^2 - (\mathrm{d}\mathbf{x})^2 \\ &= (c\mathrm{d}t)^2\left(1-\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(c\mathrm{d}t)^2}\right)\end{aligned}$$

לכן, $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$. נסתכל במערכת העצמית של השעון:

$$(\mathrm{d}t)_{self} = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$$

במערכת העצמית,

$$(\mathrm{d}s)^2 = (c\mathrm{d}t_{self})^2$$

לכן,

$$\mathrm{d}t = (\mathrm{d}t)_{self}\,\gamma$$

לכן, הזמן העצמי הוא הקצר ביותר,

$$\boxed{\mathrm{d}t \geq (\mathrm{d}t)_{self}}$$

ניתן להשתמש בנוסחא הזו גם עבור v משתנה:

$$\int (\mathrm{d}t)_{self} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(v)}$$

2.4 התקצרות האורך (Length contraction)

לשני הצופים מהסיפור הקודם, יש מקל באורך מטר, לכל אחד מהם.
צופה במערכת 1 רוצה למדוד את אורך המקל שנמצא במערכת 2. כדי למדוד את אורך המקל, הוא צריך למדוד בו זמנית, את ההפרשים בין מיקום הקצה אחד, למיקום הקצה השני. נצייר את קו העולם של שתי קצוות המקל. נמשיך את קו העולם לעבר, עד שהוא יפגוש את מערכת הצירים של צופה 1, ונקבל, שאורכו של המקל, ההפרש בין קווי העולם של הקצוות, נראה קצר יותר במערכת 1.
הנוסחה:

$$\ell_{lab} = \frac{\ell_{self}}{\gamma}$$

2.5 טרנספורמציות לורנץ

$(\mathrm{d}s)^2$ הוא אינווריאנטי בכל שתי מערכות אינרציאליות,

$$(\mathrm{d}s_{AB})^2 = (\mathrm{d}s'_{AB})^2$$

הקשר בין שתי מערכות שקשורות זו בזו, על ידי טרנספורמציית לורנץ הוא טרנספורמציה לינארית

$$(X')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\,(X^\nu)$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ היא טרנספורמציית לורנץ המאפיינת מעבר מקואורדינטה אחת לשניה, כאשר שתיהן אינרציאליות.

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

היא מטריצה 4×4 כלשהי. טרנספורמציית לורנץ היא טרנספורמציה לינארית השומרת על האינטרוול.

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x^\mu)\,\eta_{\mu\nu}\,(\mathrm{d}x^\nu)\\ &= (\mathrm{d}x')^\mu\,\eta'_{\mu\nu}\,(\mathrm{d}x')^\nu\end{aligned}$$

שימור האינטרוול $\iff$ $\eta=\eta'$. חוק הטרנספורמציה של η , לפי הגדרה:

$$(\eta')_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta\eta_{\alpha\beta}$$

הזהות הזו נכונה עבור כל טנזור η . שימור האינטרוול הוא הדרישה :

$$\eta_{\eta\beta} = \begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}$$

מקיימת:

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

לכן, טרנסורמציית לורנץ היא טרנספורמציה Λ המקיימת:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta\eta_{\alpha\beta}}$$

נסתכל על הביטוי ככפל מטריצות:

$$\eta = \Lambda\eta\Lambda^t$$

טרנספורנציות לורנץ שומרות על התבנית:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}\mathbf{x})^2$$

סיבובים:

- למשל, סיבוב בזווית θ סביב ציר z:

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & s & 0\\ 0 & -s & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כאשר $c=\cos\theta$ ו־$s=\sin\theta$. הביטוי שומר על התבנית, מאחר ולא נגענו בחלק הזמני, וסיבוב שומר את האורך, החלק המרחבי. יש שלושה סוגים של סיבובים.

- בוסטים (Boosts) – נסתכל למשל על מעבר בין שתי מערכות שהתנועה בינהן היא תנועה קצובה על ציר x.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix}c & s & 0 & 0\\ s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ננסה למצוא מהם c,s שמקיימים את הדרישות (לאו דווקא $\cos,\sin$..) נצטרך לבדוק ש־ $\eta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, מקיימת:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}c&s\\s&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&s\\s&c\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}c&s\\s&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&s\\-s&-c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}c^2-s^2&cs-sc\\cs-sc&-c^2+s^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אזי, מתקיים, $cs-sc=0$, ו־$c^2-s^2=1$. זה מתקיים עבור

$$\begin{aligned}c&=\cosh\phi\\s&=\sinh\phi\end{aligned}$$

ϕ מכונה Rapidity. זוהי פרמטריזציה של המהירות היחסית בין שתי המערכות, והיא חסרת יחידות, ו־$-\infty<\phi<\infty$. נקשור בין ϕ למהירות היחסית בין שתי המערכות: נסתכל על הראשית במערכת $\prime$:

$$\left(x'\right)^1=0$$

אזי,

$$\begin{aligned}0=\left(x'\right)^1={\Lambda^1}_\mu x^\nu&={\Lambda^1}_0x^0+{\Lambda^1}_1x^1\\&=\left(\sinh\phi\right)\left(ct\right)+\left(\cosh\phi\right)x^1\end{aligned}$$

כלומר, הראשית במערכת המתוייגת מתוארת על ידי המשוואה:

$$\left(\sinh\phi\right)\left(ct\right)+\left(\cosh\phi\right)x=0$$

או, במילים אחרות,

$$\boxed{x=-c\left(\tanh\phi\right)t}$$

לכן,

$$\boxed{v=+c\tanh\phi}$$

- (איפשהו טעינו בסימנים, בסוף צריך להיות +)

3 קינמטיקה ודינמיקה יחסותית

3.1 מהירות

יש חוקי טרנספורמציית לורנץ למהירויות. הם מאוד מסובכים ומאוד שונים מטרנספורמציית לורנץ של קואורדינטות. בשנה א', כשמלמדים יחסות,

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

כלומר, גוזרים את רכיבי $1,2,3$ של המהירות לפי רכיב אפס שלהם.

נסתכל על הוקטור $\mathrm{d}x^\mu$, וקטור המיקום. נרצה להגדיר מהירות על ידי $\mathrm{d}\tau$, מדידת זמן סקאלרית. נגדיר מהירות,

$$\boxed{u^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}}$$

כאשר $\mathrm{d}s$ האינטרוול, $(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu$. u^μ הוא חסר מימד, ומודד את המהירות יחסית ל־c. חוק הטרנספורמציה שלו הוא חוק הטרנספורמציה של ארבע־וקטור:

$$(u')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$$

נסתכל על הסקאלר,

$$\mu_\mu \mu^\mu = \frac{(\mathrm{d}x^\mu)(\mathrm{d}x_\mu)}{(\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s)} = 1$$

לחלקיק במנוחה,

$$\mathrm{d}x^\mu = \begin{cases} c\,(\mathrm{d}t) & ,\mu = 0 \\ 0 & ,\mu = 1,2,3 \end{cases}$$

ואכן, כשהחלקיק במנוחה, יש רק רכיב אפס, ולכן השעון במעבדה, cdt, והשעון של החלקיק, $\mathrm{d}s$, מקבלים אותו ארך - מסונכרנים.
$u^\mu u_\mu = 1$, ולכן וקטור המהירות הוא תמיד וקטור דמוי־זמן. לכן, ניתן בכל רגע לבצע טרנספורמציית לורנץ למערכת בה החלקיק יהיה במנוחה.

3.2 תאוצה

נגדיר,

$$\boxed{a^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}}$$

לכל חלקיק, $u^\mu u_\mu = 1$, נגזור את הביטוי לפי הזמן העצמי, $\mathrm{d}s$

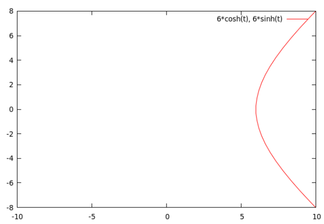
$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} u_\mu + \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu = 0$$
$$a_\mu u^\mu = 0$$

התאוצה "מאונכת" (במובן מינקובסקי) למהירות. לכן, התאוצה היא וקטור דמוי־מרחב בזווית זהה (בכיוון ההפוך) לזווית של המהירות, ביחס לקונוס האור.

דוגמה

$$x^\mu = A(\sinh\phi, \cosh\phi) = C^{-1}(\sinh\phi, \cosh\phi)$$

כאשר $\phi(t)$ היא פונקציה של הזמן העצמי שעדיין לא קבענו, ו־$0 < \phi < \infty$. $-\sinh^2\phi + \cosh^2\phi = 1$, לכן,



מתקיים, $(ct)^2 - x^2 = -A^2$. זוהי משווה של היפרבולה, והגרף:
נחשב נגזרות:

$$u^\mu = A\dot{\phi}(\cosh\phi, \sinh\phi)$$
$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$

ו־$u^\mu u_\mu = 1$, ו־$A^2\phi^2 = 1$, ולכן

$$\boxed{\phi = \frac{1}{A}s}$$

נסתכל בזמנים קצרים, כאשר $s\approx 0$, $\phi=0$:

$$u^{\mu}=A\frac{1}{A}\left(1,\phi\right)=\left(1,\frac{1}{A}s\right)$$

לכן, לזמנים קצרים, $u_{\mu}=\left(1,\frac{s}{A}\right)$. האיבר הראשון מצביע על כך שהשעון על החלקיק והשעון במעבדה הם בערך אותו הדבר, ו־

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{A}$$

נסמן, $C=A^{-1}$, ונקבל: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{C^{-1}}=Ct$, לכן, C הוא התאוצה בזמן $t=0$. נרשום שוב: $u^{\mu}=\left(\cosh\phi,\sinh\phi\right)$ (כי $C\dot{\phi}=1$, כדי לקיים, $u^{\mu}u_{\mu}=1$) ולכן,

$$a^{\mu}=\dot{\phi}\left(\sinh\phi,\cosh\phi\right)=C\left(\sinh\phi,\cosh\phi\right)$$

בזמן $s=0$, נקבל $a^{\mu}=C\left(0,1\right)$. נחשב את הגודל של ה־4־תאוצה,

$$a^{\mu}a_{\mu}=-C^{2}$$

זהו חלקיק בתאוצה קבועה, כי הגודל של התאוצה הוא קבוע.

3.3 לגרנז'יאן של חלקיק חופשי

לא ניתן להפריד בין משוואות לורנץ ליחסות פרטית, ולכן, על מנת לכתוב לגרנז'יאן של חלקיק בשדה אלקטרומגנטי, נקדים ונכתוב לגרנזי'אן לחלקי חופשי יחסותי

3.3.1 לגרנזי'אן של חלקיק חופשי יחסותי

הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי (לא יחסותי) הוא $L=\frac{1}{2}mv^{2}$. נשים לב ש־ v^{2} אינוורינטי לטרנספורמציית גלילי, והלגרנז'יאן משחזר את משוואות ניוטון: $F=ma$.

איך נשנה את L לחלקיק יחסותי? נחפש משוואות תנועה אינוורינטיות תחת טרנספורמציית לורנץ. משוואות התנועה באות מעקרון ואריאציה עבור $\delta s=0$. נקיים את הדרישה הזו אם הפעולה תהיה סקלאר.

סקאלר שאולי יוכל לשמש אותנו הוא (ds), ולכן, נכתוב $S=(\ldots)\int(\mathrm{d}s)$. אבל, ניתן להוסיף קבוע וסימן. מתברר שהסימן הוא (-1) והקבוע הוא (mc) , אזי,

$$S=-\left(mc\right)\int\left(\mathrm{d}s\right)$$

נבדוק ממדים: המימדים של $S=\int L\mathrm{d}t$, ל־$v^{2}\mathrm{d}t$ יש מימדים כמו ל־$v\mathrm{d}x$ ונוסיף m , ולכן המימדים בסדר. נסביר את הסימן, $(-)$: חלקיק במנוחה יעשה מסלול על ציר t . נרצה לעשות מינימזציה למסלול, $S=-\left(mc\right)\int c\mathrm{d}t$. אבל אפשר לבחור מסלול אחר, שהפעולה שלו היא אפס, הוא יושב על שני קווים דמויי אור, ולכן נמצא מסלול לא־פיזיקלי שבו החלקיק אינו במנוחה. לכן, נרצה להוסיף מינוס, כדי שמסלול המנוחה יקבל פעולה שלילית, ונכול לעשות מינימיזציה. את הקבוע מוסיפים על מנת להעניק לפעולה מימדים של $\hbar$, של תנע זוויתי.

חלקיק חופשי ינוע במהירות קבועה. חלקיק שמתחיל במנוחה בראשית, קו העולם שלו יתלכד עם ציר ct. הפעולה, עבור חלקיק נח,

$$S=-mc\int_{\text{real track}}\mathrm{d}s=-mc\int_{0}^{t}c\mathrm{d}t=-mc^{2}T$$

כדי להראות שזה אכן המסלול המינימלי, נראה שאפשר לעשות מסלולים לא־אמיתיים, שיש להם פעולה שערכה גדול יותר.

נבחר מסלול שהולך על קונוס האור: יושב על שני קטעים של קונוס האור. על קונוס האור, $\mathrm{d}s=0$, ולכן,

$$S=-mc\int_{\text{light-cone}}\mathrm{d}s=0$$

אבל $-mc^{2}T<0$, ולכן התנועה על קונוס האור אינה נותנת פעולה מינימלית.

באופן כללי, $S=\int L\mathrm{d}t$, ו־$L\left(q,\dot{q},t\right)$. הכתיבה של $S=\int L\mathrm{d}t$, מכתיבה בחירה מסויימת של t (למשל, במערכת המעבדה). נשווה את שני הביטויים ל־S, ונקבל:

$$
\begin{aligned}
L &= -mc\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{c}{\gamma} \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

נראה את הגזירה:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= c^2\left(\mathrm{d}t\right)^2-\left(\mathrm{d}x\right)^2 \\
\left(\mathrm{d}x\right) &= \left(v\mathrm{d}t\right) \\
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= \left(dt\right)^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \implies \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}
\end{aligned}
$$

לכן, לגרנז'יאן של חלקיק חופשי יחסותי הוא

$$
\boxed{L=-\frac{mc^2}{\gamma\left(v\right)}}
$$

בגבול של חלקיקים איטיים ($\left(\frac{v}{c}\right)^2\ll 1$) נפתח לטור טיילור:

$$
\sqrt{1-x}=\left(1-x\right)^{1/2}=1-\frac{x}{2}+O\left(x^2\right)
$$

אזי, בגבול הלא יחסותי,

$$
\begin{aligned}
L &= -mc^2\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\dots\right) \\
&\approx -mc^2+\frac{1}{2}mv^2
\end{aligned}
$$

וקיבלנו לגרנז'יאן קלאסי: אנגייה קינטית פחות אנרגיית מנוחה, mc^2 הוא קבוע, ואינו משפיע על משוואות התנועה.

התנע של חלקיק יחסותי במכניקה אנליטית, $p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial v}$, אזי,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= -\left(mc^2\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=-\left(mc^2\right)\nabla_{\mathbf{v}}\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/2} \\
&= \gamma m\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

אנרגיה של חלקיק יחסותי האנרגיה היא טרנספורם לג'נדר של הלגרנז'יאן:

$$
E=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L=mc^2\gamma
$$

מה צריכה להיות ההגדרה של אנרגיה? אנחנו יודעים לתת הגדרה שלא ניתן לחלוק עליה של אנרגיה, רק כאשר הלגרנז'יאן לא תלוי בזמן אם הלגרנז'יאן אינו תלוי בזמן, אז יש חוק שימור על הלגרנזי'אן, וחוק שימור זה מכונה "אנרגיה". האנרגיה אינה מוגדרת היטב, מאחר וכל פונקציה שלה הוא שמורה של הלגרנז'יאן. מאחר והגודל $\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L$ הוא שמורה, ניתן להשתמש בו כהגדרה של אנרגיה, והיא פתוחה לביקורת ככל הגדרה אחרת.

3.3.2 ואריאציה על הפעולה

המינימום של הפעולה, או ואריאציה של $\delta s = 0$, ניתן לקבל על ידי משוואות אוליר־לגרנז':

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

כלומר, כאשר התנע קבוע.

3.3.3 חישוב קוווריאנטי

לא נרשום את הלגרנזי'אן ולא נבחר מערכת, ונחשב את $S = -mc\int \mathrm{d}s$.

$$0 = \delta S = \int \delta\left(\mathrm{d}s\right)$$

נסתכל על שני מסלולים במישור $t - x$, ונראה איך משתנה הפעולה בעקבות החלפת מסלול כזה. המסלול הפיזיקאלי יהיה המסלול שבו לנוסע יהיה את הזמן העצמי הארוך ביותר.

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu \\
\left(\mathrm{d}s\right) &= \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu} \\
\delta\left(\mathrm{d}s\right) &= \frac{\delta\left(\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu\right)}{2\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{d}s}\left[\delta\left(\mathrm{d}x_\mu\right)\mathrm{d}x^\mu + \delta\left(\mathrm{d}x^\mu\right)\mathrm{d}x_\mu\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{d}s}\delta\left(\mathrm{d}x_\mu\right)\mathrm{d}x^\mu = u^\mu \cdot \delta\left(\mathrm{d}x_\mu\right)
\end{aligned}$$

(כי $u^\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}$) אזי,

$$\delta\left(\mathrm{d}s\right) = \mathrm{d}\left(u^\mu \delta x_\mu\right) - \left(\mathrm{d}u^\mu\right)\delta x_\mu$$

לכן, לפי המשפט היסודי של הקלקולוס: אז, לאחר אינטגרציה,

$$\int \delta\left(\mathrm{d}s\right) = u^\mu\left(\delta x_\mu\right)\Big|_{start}^{end} - \int \left(\mathrm{d}u\right)^\mu \delta x_\mu = u^\mu\left(\delta x_\mu\right)\Big|_{start}^{end} - \int \frac{\left(\mathrm{d}u\right)^\mu}{\mathrm{d}s}\delta x_\mu \mathrm{d}s$$

בואריאציה, נחזיק את נקודות ההתחלה והסיום קבועות, ולכן, ה־$\delta\left(x_\mu\right)$ בנקודות ההתחלה והסיום, מתאפס, ולכן איבר השפה, האיבר הראשון, מתאפס. לכן, המסלול הפיזיקאלי, הו המסלול שבו

$$0 = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = a^\mu$$

כלומר, המסלול בו המהירות קבועה: אין תאוצה כלל.

הגדרה אחרת של תנע ואנרגיה אם נגזור את הפעולה לפי נקודת הסוף, ונחשב את הפעולה על המסלול הקלאסי, נקבל את התנע

$$\mathbf{p} = \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x_f}\right|_{classical}$$

אם נגזור את הפעולה לפי הזמן, ונחשב אותה על המסלול הקלאסי, נקבל את את האנרגיה:

$$\mathbf{E} = \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{classical}$$

ולכן, מתקיימת המשוואה:

$$p^\mu = mu^\mu$$

נשים לב כי

$$u^\mu = \gamma\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right)$$

ומתקיים, $u^\mu u_\mu = 1$, ואכן,

$$1 = u^\mu u_\mu = \gamma\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\cdot\left(1, -\frac{\mathbf{v}}{c}\right) = \gamma^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = 1$$

הביטוי לתנע, הוא כאמור, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$. נסתכל על

$$p^\mu = mcu^\mu$$

אזי, הרכיבים המרחביים, יתנו לנו $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$.

$$p^0 = mcu^0 = mc\gamma = \frac{E}{c}$$

לכן, ניתן לאחד:

$$mcu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

לכן, נשארנו רק עם הגדרת התנע הקוווריאנטית:

$$\boxed{p^\mu = mcu^\mu}$$

עכשיו, יש לנו סקאלר חדש:

$$p^\mu p_\mu = (mc)^2 u_\mu u^\mu = (mc)^2$$

או, בניסוח אחר,

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2$$

והיא הנוסחא המוכרת לאנרגיה של חלקיק יחסותי:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + c^2m^2c^3$$

כאשר $m = 0$, מקבלים שלחלקיק חסר מסה,

$$\mathbf{E}^2 = c^2p^2 \iff \left(\frac{E}{c}\right)^2 = p^2$$

3.4 כתיבה קוווריאנטית של שדות חשמליים ומגנטיים

עד כה, הרחבנו וקטורים כמו $\mathbf{v}$ ו־$\mathbf{p}$ ל־4־וקטורים כמו u^μ ו־p^μ .
מה נעשה עם השדות המגנטיים והחשמליים? $\mathbf{E}, \mathbf{B}$? הדבר הטריוויאלי שנרצה לנסות: למצוא את הרכיב האפס של $\mathbf{E}, \mathbf{B}$, ויהיה לנו ארבע־וקטור. אבל זה רעיון רע לחשוב על רכיב 0 של $\mathbf{E}$ או $\mathbf{B}$: הכח שפועל על חלקיק טעון הוא (ביחידות cgs)

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$$

לכן, ל־$\mathbf{E}$ ול־$\mathbf{B}$ יש אותם מימדים. בנוסחה זו, הכח בנוי משני רכיבים: רכיב התלוי במהירות ורכיב שאינו תלוי במהירות. שני צופים במערכות יחוס שונות, לא מסכימים על המהירות, כח לורנץ אינו שמור תחת טרנספורמציית גלילי. היות וה־$\mathbf{F}$ הכולל שמור לטרנספורמציית גלילי, החלוקה בין $\mathbf{E}$ ו־$\mathbf{B}$ תלויה במערכת היחוס האינרצאלית.

כלומר, תחת טרנספורמציית לורנץ, נרצה ש־$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ישתנו בהתאם למערכת היחוס. נרצה לבנות אובייט שיכיל את $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ויתנהג "יפה" תחת טרנספורמציית לורנץ. כלומר, צריך אוביקט אחד שיכיל את כל ששת הרכיבים של השדות, ובארבע־וקטור יחיד אין מספיק רכיבים.

ננסה לבנות טנזור, עם שני אינדקסים: $T_{\mu\nu}$. זוהי מטריצה 4×4 ולה 16 רכיבים. כל מטריצה ריבועית ניתן לחלק למטריצה סימטרית ומטריצה אנטי־סימטרית.

מטריצה אנטיסימטרית: $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & z & -y \\ -b & -z & 0 & x \\ -c & y & -x & 0 \end{pmatrix}$, יש לנו שש דרגות חופש, בדיוק מספר המקומות שאנחנו צריכים. אבל כדי שיהיה טעם לעשות את זה, מטריצה אנטיסימטרית צריכה להשאר אנטיסימטרית תחת טרנספורמציית לורנץ. למרות שאנחנו כבר יודעים את זה [3]:

$$(F')_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta} = -\Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta} = -\Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\mu{}^\alpha F_{\beta\alpha} = -F'_{\nu\mu}$$

כדי לדעת באיזה כניסות נשים את E, B, נשתמש בעובדה שבעולם תלת מימדי, $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ הם וקטורים. לכן, הם צריכים להגיב לסיבוב כמו שהם היו מגיבים לסביבו תלת ממדי.

נסתכל על מטריצות לורנץ שהם סיבוב:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & O & T \\ 0 & E & T & I \\ 0 & O & N & M \end{pmatrix}$$

נשתמש בקונבנציה הבאה: אינדקסים יוונים רצים על $0, 1, 2, 3$ ואינדקסים לטיניים ירוצו על $1, 2, 3$.

נקח טנזור אנטי־סימטרי ונסתכל על שורת האפס או עמודת האפס, אז השורה האפס, $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, עוברת טרנספורמציה תחת Λ_R כאילו פעל על הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, סיבוב. נסתכל על השורה, F_{0j}:

$$\begin{aligned} F'_{0j} &= (\Lambda_R)_0{}^\alpha (\Lambda_R)_j{}^\beta F_{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda_R)_j{}^\beta F_{0\beta} \end{aligned}$$

(כאשר $(\Lambda_R)_0{}^\alpha$ טורם רק 1, מאחר שהשורה האפס שלו היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

$$= (\Lambda_R)_j{}^k F_{0k} = R_j{}^k F_{0k}$$

לכן, יש לנו אפשרות אחת: לשים את $\mathbf{E}$ או את $\mathbf{B}$ בשורה הראשונה, ולמקם את הוקטור השני בשלושת הרכיבים, x, y, z שנותרו.

ניתן להראות ש־ $x, -y, z$ מתנהגים תחת טרנספורמציות סיבוב כמו פסאודו־וקטור, ולכן, נמקם ברכיבים אלו את $\mathbf{B}$, וברכיבים a, b, c את $\mathbf{E}$. אזי,

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

החופש של כפל בסקלאר (או סימן) הוא סוג של ניחוש אלגנטי. נצטרך להראות שהשימוש בטנזור הזה באמת עובד. אפשר לזכור את מקומי הרכיבים של B לפי: רכיב k מוגדר על ידי המיקום ה־ij במטריצה (ij מגדירים מישור שהניצב לו הוא k)

[3] כי למדנו את זה באלגברה לינארית ב', קורס נפלא, הוא צריך להיות קורס חובה לפיזיקאים.

כדי לוודא שמדובר במקדם המתאים ל־$\mathbf{B}$, נרצה לגזור מהטנזור את כח לורנץ, $\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$. תחת טרנספורמציות גליליי (במיהורויות נמוכות), $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ לא משתנה. $\mathbf{F}$ הוא אינוורינט־גלילי. אם נזוז מערכת ונסתכל על $\mathbf{F}$, נרצה לקבל,

$$e\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{B}\right)=\mathbf{F}=\mathbf{F}'=e\left(\mathbf{E}'+\frac{(\mathbf{v}+\mathbf{u})}{c}\mathbf{B}'\right)$$

עבור $\mathbf{v}+\mathbf{u}=0$, נקבל, שחוק הטרנספורמציה של $\mathbf{B}$ הוא:

$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}$$
$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{B}}{c}$$

נבדוק: נקט טרנספורמציית לורנץ לבוסט בכיוון $\hat{y}$: $\Lambda=\gamma\begin{pmatrix}1&\beta&0&0\\\beta&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. במהירויות קטנות, $\gamma\approx 1$. לכן, אם נפעיל את Λ כל $F_{\alpha\beta}$, נרצה לקבל:

$$E'_x=E_x+0$$
$$E'_z=E_z+\beta B_y$$

נבדוק שהטרנספורמציה של E_z מתקיימת לפי חוקי הטרנספורמציה של טנזורים:

$$\begin{aligned}E'_z&=(F')_{03}={\Lambda_0}^{\mu}{\Lambda_3}^{\nu}F_{\mu\nu}={\Lambda_3}^{\nu}F_{0\nu}+\beta{\Lambda_0}^{\nu}F_{1\nu}\\&=F_{03}+\beta F_{13}=E_z+\beta B_y\end{aligned}$$

והסימן שבחרנו לרכיבי B בסדר.

3.4.1 פוטנציאלים חשמליים ומגנטיים

נזכר ש־

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

מדירים את השדות על ידי פוטנציאלים. יש לנו פוטנציאל סקאלרי אחד ו־4 רכיבים של הפוטנציאל הוקטורי, ונארגן אותם ב־4־וקטור:

$$A_\mu=(\phi,-\mathbf{A})$$

נשים לב של־ϕ ול־$\mathbf{A}$ יש את אותם יחידות, ולכן ניתן לשים אותם ביחד. גם כאן, יש לנו חופש בבחירת סימן. נבחר את הסימן להיות $(-)$ ברכיבים הקוואריאנטים (אבל $A^\mu=(\phi,\mathbf{A})$ ..) .

איך ניתן לייצר את $F_{\mu\nu}$ מ־A_μ? נסתכל על $\partial_\mu A_\nu$. יש לו שני אינדקסים קווריאנטים, ולכן הוא יהיה טנזור, אבל הוא לא יהיה $F_{\mu\nu}$. נבנה אותו אנטי־סימטרי:

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

נבדוק למה שווה B_1 :

$$\begin{aligned}B_x&=-F_{23}=-\left(\partial_2A_3-\partial_3A_2\right)=-\partial_y\left(-A_z\right)+\partial_z\left(-A_y\right)\\&=\partial_yA_z-\partial_zA_y=\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)_x\end{aligned}$$

והסימן, כמו גם הרכיב, מתאימים. נבדוק גם את ערכו של השדה החשמלי:

$$E_x=F_{01}=\left(\partial_0A_1-\partial_1A_0\right)=\frac{1}{c\partial t}\left(-A_x\right)-\frac{\partial}{\partial x}\phi=-\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)_x-\frac{1}{c}\left(\partial_t\mathbf{A}\right)_x$$

3.4.2 אינוורינטיות לכיול

את השדות $\mathbf{B},\mathbf{E}$ ניתן למדוד, אלו הם גדלים אובייקטיביים. הפוטנציאלים הם כלי עזר, ואין מכשיר שמודד אותם. ל־$\mathbf{A},\phi$ אין קיום אמיתי.

הערה 3.1 וולטמטר לכאורה בודק פוטנציאל חשמלי. הוא נותן תוצאה רק כאשר אין שינויים זמניים. לכן, $\mathbf{E}=\boldsymbol{\nabla}\phi$, לכן השדה החשמלי מגדיר את ϕ עד כדי קבוע, ולכן ניתן למדוד הפרש פוטנציאלים.

אם נמיר את

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\Lambda\\
&\mathbf{B}\to\mathbf{B}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Lambda)=\mathbf{B}
\end{aligned}$$

כלומר, ל־$\mathbf{A}$ ניתן להוסיף כל פונקציה שהיא גרדיאנט.

טענה 3.2 נקח $\Lambda(x,t)$, פונקציית כיול, כלשהי. טרנספורמציה לפוטנציאל, $A_\mu\to X_\mu+\partial_\mu\Lambda$, שומרת על השדות: $F_{\mu\nu}\to F_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\\
&=\partial_\mu\left(A'_\nu-\partial_\nu\Lambda\right)-\partial_\nu\left(A'_\mu-\partial_\mu\Lambda\right)\\
&=\left(\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu\right)+\cancel{\left(\partial_\mu\partial_\nu\Lambda-\partial_\nu\partial_\mu\Lambda\right)}
\end{aligned}$$

תחת ההמרה[4], $\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\Lambda$, $\mathbf{B}\to\mathbf{B}$. בנוסף, תחת ההמרה, $\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\Lambda$ ו־$\phi\to\phi-\frac{1}{c}\dot{\Lambda}$, אזי $\mathbf{E}\to E-\left(-\frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\dot{\Lambda}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\Lambda\right)=\mathbf{E}$.

סקאלרים נרצה לשאול אילו סקאלרים ניתן לבנות מ־F ומ־A?
הדבר הטריוויאלי לעשות הוא להתסכל על הגודל של הארבע־פוטנציאל: $A_\mu A^\mu$. זהו סקאלר לא מעניין ולא פיזיקאלי (כי הוא תלוי בכיול..)
נסתכל על הסקאלר: $F_\mu{}^\mu=F_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=0$ זוהי העקבה של הטנזור, וגם היא לא ממש מעניינת.
לכן, אין לנו סקאלרים מעניינים כשמסתכלים על פעולה לינארית.

- נסתכל על

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}g^{\nu\beta}g^{\alpha\mu}F_{\alpha\beta}$$

זהו סקאלר לורנץ. אלו הן מכפלות של $\mathbf{E}$ ו־$\mathbf{B}$, והוא אינוורינטי־לורנץ.

$$\begin{aligned}
&=F_{0\nu}F^{0\nu}+F_{\mu0}F^{\mu0}+F_{ij}F^{ij}\\
&=2F_{0\nu}F^{0\nu}+F_{ij}F^{ij}\\
&=2F_{0j}F^{0j}+F_{ij}F^{ij}
\end{aligned}$$

נסתכל על האיבר הראשון: $F_{0j}=E_j$. $F^{0j}=-E_j$. לכן, $F_{0j}F^{0j}=-\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)=-\left(E\right)^2$.

האיבר השני, $F_{ij}F^{ij}$. $F_{ij}=-B_k$, ו־$F^{ij}=-B_k$. אזי, $F_{ij}F^{ij}=2\left(B\right)^2$ לכן,

$$\boxed{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2\left(B^2-E^2\right)}$$

– השלכות: לחלקיק נקודתי יש רק שדה חשמלי, לכן, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}<0$. לכן, בכל מערכת לורנץ, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}<0$, כלומר, $B^2<E^2$.

[4] 10/11/2009

- נשתמש בטנזור לוי־צ'יויטה, ונגדיר: $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\beta\gamma}$. הוא לא מתאפס, בגלל שתחת החלפת $\alpha\leftrightarrow\beta$, גם ε וגם F מחליפים סימן.

נגדיר את הטנזור הדואלי של F: $(F^{\star})^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$. היחס בין $F^{\star}$ ל־F: $E\to -B$. נסתכל על

$$
\begin{aligned}
(F^{\star})^{01} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{01\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23}+\frac{1}{2}\varepsilon^{0132}F_{32}=F_{23}=-B_x\\
(F^{\star})^{12} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{12\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03}+\frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30}=F_{03}=E_z
\end{aligned}
$$

לכן,

$$
(F^{\star})^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B \\ B & \begin{pmatrix}0 & E_z & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}
$$

לכן, נחשב את הסקאלר השני הוא

$$
\begin{aligned}
(F^{\star})^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2\,(F^{\star})^{0j}F_j+(F^{\star})^{jk}F_{jk}\\
&= -2B_jE_j-2B_jE_j=-4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

3.5 משוואות מקסוול ההומוגניות

המשוואות הן:

1. $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ (אין מונופולים מגנטיים)
2. $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B}=0$. זוהי גרסא של חוק פארדיי. אם נכתוב את המשוואה באינטגרל על לולאה, ונשים לב ש־ $\int\nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}s=\oint\mathbf{E}\mathrm{d}\ell$ ו־$\int B\cdot\mathrm{d}S=\Phi$, אז נותן לכתוב אותה בצורה: $\oint\mathbf{E}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=-\frac{\dot{\Phi}}{c}$.

שתי המשוואות הללו הן משוואות ללא מקורות: לא מופיע צפיפות מטען וצפיפות זרם. אלו הן ארבע משוואות: משוואה אחת סקאלרית ומשווה וקטורית (משוואה לשלושה רכיבים). אלו הן משוואת דיפרנציאליות חלקיות מסדר ראשון.

נרצה לקבל מטנזור ארבע משוואות: $\partial_\mu F^{\mu\nu}$. אלו הן ארבע משוואות , משום שיש סכימה על אינדקס אחד, ונותר לנו אינדקס נוסף. אבל המשוואות הנכונות הם

$$
\boxed{\boxed{\partial_\mu\,(F^{\star})^{\nu\mu}=0}}
$$

נבדוק שהמשוואות אכן מתקבלות:

- עבור $\nu=0$,

$$
\partial_\mu\,(F^{\star})^{0\mu}=\partial_j\,(F^{\star})^{0j}=\left(\overset{?}{\pm}\right)(\partial_jB_j)=\nabla\cdot\mathbf{B}
$$

טענה 3.3 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta\partial_\gamma A_\delta=0^\alpha$

הוכחה: מאחר ו־$\partial_\beta\partial_\gamma=\partial_\gamma\partial_\beta$, וה־ε גורם לכך שהסימן שלהם הפוך:

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\partial_\beta\partial_\gamma+\partial_\gamma\partial_\beta\right)A_\delta=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\beta\gamma}+\varepsilon^{\alpha\gamma\beta\delta}\partial_\beta\partial_\gamma\right)A_\delta\\
&=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}+\varepsilon^{\alpha\gamma\beta\delta}\right)\left(\partial_{\beta\gamma}A_\delta\right)=0
\end{aligned}
$$

■

אם הטענה הזו נכוונה, אז גם $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta\left(\partial_\delta A_\gamma\right)=0$. לכן

$$0=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta\underbrace{\left(\partial_\gamma A_\delta-\partial_\gamma A_\delta\right)}_{F_{\gamma\delta}}=\partial_\beta\left(F^\star\right)^{\alpha\beta}$$

משוואות מקסוול ההומוגניות שקולות לקיום פוטנציאלים אלקטרומגנטיים. היות ו־$F_{\mu\nu}$ נבנה על ידי פוטנציאלים, עצם זה שכתבנו אותו כך, גורר את משוואות מקסוול ההומוגניות.

3.6 דינמיקה יחסותית של חלקיק טעון

אנחנו רוצים לראות שחלקיק טעון, בהשפעת השדות שפיתחנו עד כה, מתנהג כמו חלקיק טעון תחת שדות חשמליים ומגנטיים (ואז, אכן נכון לקרוא להם שדות חשמליים ומגנטיים) .

3.6.1 פעולה לחלקיק טעון

איך נכתוב פעולה לחלקיק טעון?

- הפעולה חייבת להיות סקלר לורנץ, כדי שהיא לא תהיה תלויה בבחירת מערכת יחוס.
- נרצה שלפעולה יהיו מימדים של $\hbar$.
- הלגרנז'יאן תלוי בפוטנציאלים ולא בשדות.
  - נדרוש אינווריטיות לכיול

הפעולה של חלקיק טעון צריכה להיות מרוכבת פעולה של חלקיק חופשי, ופעולה הקשורה לשדה:

$$S=S_{\text{free particle}}+S_{\text{interaction with fields}}$$

את הפעולה של חלקיק חופשי כבר כתבנו:

$$S_{free}=-mc\int\mathrm{d}s$$

כאשר $\mathrm{d}s$ הוא האינטרוול. עבור פעולה של חלקיק חופשי, כל תנאים שדרשנו מתקיימים.
זה צריך להיות אינטגרל כלשהו שתלוי במסלול.

$$S_{interaction}\propto\int A_\mu\mathrm{d}x^\mu=\int A_\mu u^\mu\mathrm{d}s$$

נדאג ליחידות על ידי קביעת קבוע:

$$S_{interaction}=\frac{e}{c}\int A_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

ואכן,

$$\frac{e}{c}\left[A\right]\left[\mathrm{d}x\right]=e\left[A\right]\left[\mathrm{d}t\right]=\left[\hbar\right]$$

נותר לבדוק שהפעולה אינה תלויה בכיול.

טענה 3.4 תחת טרנספורמציית כיול. קבוע $S\to S+const$, קבוע שאינו תלוי במסלול החלקיק, אבל כן תלוי בנקודות הקצה. הקבוע אינו משפיע על הואריאציה, ולכן לא משפיע על משוואות התנועה.
משוואות אוילר לגרנז', שעבורן מתקיים $\delta S=0$, הן

$$\boxed{\boxed{mc\dot{u}_\mu=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu}}$$

אלו הן ארבע משוואות, כאשר $\mu = 0,1,2,3$. כאשר $\dot{u}_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s}$, כלומר התאוצה. כלומר, המשוואות הן משוואות דיפרנציאליות לתאוצה: יש להן את האופי של משוואות ניוטון לפיה בצד שמאל מופיעה התאוצה. התלות במיקום נובעת מהשדה $F_{\mu\nu}\left(x^\alpha\left(s\right)\right)$. לכן, בהנתן המהירות והמיקום של החלקיק נותנת לנו את הכח, או, המסה כפול התאוצה.

$$x^\mu\left(s\right) \to u^\mu\left(s\right)\mathrm{d}s$$
$$u^\mu\left(s\right) \to a^\mu\left(s\right)\mathrm{d}s$$

לכן, זוהי משוואת תנועה.

ברור לעין שהמשוואה נכונה בכל מערכת לורנץ: אם נעביר אגפים

$$mcu_\mu - \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\mu = V_\mu = 0$$

והיות והטרנספורמציה לינארית, האפס נשמר תחת טרנספורמציה זו.

המשוואה קונסיסטנטית עם הטענה שלכל חלקיק, אורך המהירות, $u^\mu u_\mu = 1$, ולכן, $a_\mu u^\mu = 0$. נראה שהמשוואה מספקת את תנאי, $a_\mu u^\mu = 0$, נכפיל את המשוואה ב־$\underline{u^\mu}$, ונקבל,

$$mc\dot{u}_\mu u^\mu = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

מאחר ו־$F_{\mu\nu}$, אנטיסימטרית,

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= F_{\mu\nu}u^\nu u^\mu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\left(u^\mu u^\nu + u^\nu u^\mu\right) = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + F_{\nu\mu}u^\mu u^\nu\right)\\ &= \frac{1}{2}\cancel{\left(F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}\right)}u^\mu u^\nu = 0\end{aligned}$$

ולכן,

$$mc\dot{u}_\mu u^\mu = mca^\mu u_\mu = 0$$

נראה שבגבול הלא יחסותי, נקבל את משוואות ניטון: עבור חלקיק איטי, נרצה לקבל,

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

נכתוב את הרכיבים המרחביים של המשוואה:

$$mc\dot{u}_j = \frac{e}{c}F_{j0}u^0 + \frac{e}{c}F_{jk}u^k$$

לחלקיק איטי, $u^\mu = \left(1,\frac{v_j}{c}\right)$ ו־$u_\mu = \left(1,-\frac{v_j}{c}\right)$. כשהחלקיק איטי, לגזור לפי $\mathrm{d}s$ זה כמו לגזור לפי $\mathrm{d}t$, עד כדי מקדם c. לכן,

$$\dot{u}_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} \approx \frac{\mathrm{d}u_\mu}{c\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\left(0,-\frac{a_j}{c}\right)$$

לכן, עבור הרכיבים המרחביים,

$$-mc\frac{1}{c}\frac{a_j}{c} = \frac{e}{c}F_{j0} + \frac{e}{c}F_{jk}\frac{v_k}{c}$$

לכן, נכפול ב־c ונקבל

$$ma_j = -eF_{j0} - eF_{jk}\frac{v_k}{c}$$

כאשר $F_{j0} = -eE_j$ וקיבלנו

$$ma_j = eE_j - eF_{jk}\frac{v_k}{c}$$

3.6.2 גזירת המשוואה

עקרונות

1. S סקלר לורנץ
2. ל־S מימדים של פעולה – $[s]=[\hbar]$.
3. נרצה של־S יהיה מינימום
4. יתן משוואות תנועה שיורדות למשוואות קלאסיות לחלקיק איטי.

הפעולה תהיה

$$S=S_{free\,particle}+S_{interaction}$$

כלומר, המסלול הפיזיקאלי הוא כאשר

$$\delta S=\delta S_f+\delta S_{int}=0$$

אנחנו יודעים ש־ $S_f=-mc\int\mathrm{d}s$. עבור S_{int} נרשום

$$S_{int}=-\frac{e}{c}\int A_\mu\left(x\right)\mathrm{d}x^\mu$$

כבר בדקנו שיש לו את הקבועים המתאימים.
מה קורה לפעולה, S_{int} אם נשנה כיול: $A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda$. אזי,

$$S_{int}\to S_{int}+\frac{e}{c}\int\left(\partial_\mu\Lambda\right)\mathrm{d}x^\mu$$

אבל,

$$\left(\partial_\mu\Lambda\right)\mathrm{d}x^\mu=\mathrm{d}\Lambda$$

ולכן, האיבר האחרון באינטגרל הוא

$$\frac{e}{c}\int_a^b\mathrm{d}\Lambda=\frac{e}{c}\left(\Lambda\left(b\right)-\Lambda\left(a\right)\right)$$

כלומר, השינוי בפעולה, בהחלפת הפוטנציאל, הוא איבר שתלוי בנקודות הקצה. אבל כשעושים ואריאציה על הפעולה, לא משנים את נקודות הקצה, ולכן, האיבר הנוסף לא משפיע על מיקומו של המינימום של הפעולה. לכן, המסלול הפיזיקאלי לא תלוי בכיול, ולכן, יתכן ומשוואות התנועה תלויות בשדות בלבד, ולא בפוטנציאלים.
נחשב את הואריאציה של החלקיק החופשי, פעם נוספת (הואריאציה של האינטרוול בפעולה חופשית)

$$\begin{aligned}\delta\left(\mathrm{d}s\right)&=\delta\left(\sqrt{\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\nu}\right)\\&=\frac{\left(\mathrm{d}x_\mu\right)\delta\left(\mathrm{d}x^\mu\right)}{\mathrm{d}s}=u_\mu\delta\left(\mathrm{d}x^\mu\right)=\mathrm{d}\left(u_\mu\delta x^\mu\right)-\left(\mathrm{d}u_\mu\delta x^\mu\right)\\&=\mathrm{d}\left(u_\mu\delta x^\mu\right)-\dot{u}_\mu\mathrm{d}s\left(\delta x^\mu\right)\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}\int S_f'&=-mc\left(\cancel{u_\nu\delta x^{nu}|_a^b}-\int\left(\frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s\delta x^\nu\right)\\&=-mc\int\left(\dot{u}_\nu\mathrm{d}s\right)\left(\delta x^\nu\right)\end{aligned}$$

איבר האינטראקציה הוא

$$S_{int}=-\frac{e}{c}\int A_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

אזי, נחשב את הואריאציה של האינטגרנד,

$$\begin{aligned}\delta\left(A_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\right) &= \left(\delta A_{\mu}\right)\mathrm{d}x^{\mu}+A_{\mu}\left(\delta\mathrm{d}x^{\mu}\right)\\ \left(\delta A_{\mu}\right) &= \left(\partial_{\nu}A_{\mu}\right)\delta x^{\nu}\end{aligned}$$

נשים לב שהואריאציה $\delta A_{\mu}\left(x\right)$, אינה ואריאציה בשדה הזה, כי אם ואריאציה על מיקומו של החלקיק, וכפועל יוצא מכך, שינוי של השדה הפועל על החלקיק.

נציב את הוראירציה על השדה באיבר הראשון ונחליף את אינדקסי הסמכימה. באיבר השני, נעשה אינטגרציה בחלקים,

$$\delta\left(A_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\right)=\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)\left(\delta x^{\mu}\right)\left(\mathrm{d}x^{\nu}\right)+\mathrm{d}\left(A_{\mu}\delta x^{\mu}\right)-\left(\mathrm{d}A_{\mu}\right)\delta x^{\mu}$$

נציב את $\mathrm{d}A_{\mu}=\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)\mathrm{d}x^{\nu}$ ונקבל איבר שפה (לא מעניין) ועוד שני איברים כן מענייינים:

$$=\mathrm{d}\left(A_{\mu}\delta x^{\mu}\right)+\underbrace{\left(\partial_{\mu}A_{\mu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)}_{F_{\mu\nu}}\mathrm{d}x^{\nu}\mathrm{d}x^{\mu}$$

את $\mathrm{d}x^{\nu}$ נרשום בצורה $\mathrm{d}x^{\nu}=\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=u^{\nu}\mathrm{d}s$, ולכן,

$$\boxed{\delta\left(A_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\right)=\mathrm{d}\left(A_{\mu}\delta x^{\mu}\right)+F_{\mu\nu}u^{\nu}\left(\delta x^{\mu}\right)\mathrm{d}s}$$

ולכן[5],

$$\delta S_{int}=-\frac{e}{c}\cancel{\left(A_{\mu}\delta x^{\mu}\big|_{a}^{b}\right)}+F_{\nu\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\delta x^{\nu}$$

ונקבל,

$$\boxed{\delta S_{int}=-\frac{e}{c}\int F_{\nu\mu}\mathrm{d}x^{\mu}\delta x^{\nu}}$$

משוואת התנועה צריכה לבוא מהדרישה, שסכום הואריאציות, של חלקיק חופשי ושל אינטראקציה עם השדה, יתאפס. נסכום את הוראיאציות ונוציא δx^{ν} מהסוגריים, ונקבל,

$$0=\int\mathrm{d}s\left(mc\dot{u}_{\nu}-\frac{e}{c}F_{\nu\mu}u^{\mu}\right)\delta x^{\nu}$$

כאשר הביטוי שבסוגריים הוא פונקציה על מרחב־זמן, ואחרי הסוגריים, יש פונקציה אחרת על מרחב זמן (קטנה). לא חשוב איזה פונקציה נשים מאחורי הסוגריים, δx^{ν}, נרצה לאפס את הביטוי שבסוגריים. היות ואנחנו דנים בחלקיקים הנעים במהירות הנמוכה ממהירות, האור, $\mathrm{d}s>0$.

דרישת ההתאפסות לכן גוררת את המשוואה

$$\boxed{\boxed{mc\dot{u}_{\nu}=\frac{e}{c}F_{\nu\mu}u^{\mu}}}$$

3.7 זרמים

מוטיבציה משוואות מקסוול מתחלקות לשני חלקים: משוואות מקסוול ההומוגניות

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}&=0\\ \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}&=0\end{aligned}$$

[5] 17/11/2009

ומשוואות מקסוול הלא הומגניות,

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$$
$$\nabla\times\mathbf{B}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

כלומר, ניתן לייצר שדה חשמלי ממטענים, ולייצר שדה מגנטי מזרמים. את משוואות מקסוול ההומוגניות קיבלנו כבר מהביטוי, $\partial_\mu\left(F^{\star}\right)^{\mu\nu}=0$. עתה, נרצה לקבל את המשוואות הלא־הומוגניות. נצפה שמשוואות מקסוול הלא הומגניות יהיו מהצורה

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j^\mu$$

עבור j^μ כלשהו. נראה ש־ $j^\mu=(c\rho,\mathbf{J})$. האוביקט j^μ הוא אכן ארבע־וקטור כשר.

3.7.1 צפיפות זרם בעולם 4־מימדי מינקובסקי

נרצה לדבר על הנפח בארבעה מימדים ועל פונקציות δ של דיראק בארבע מימדים.
נסמן ב־$\mathrm{d}\Omega=(c\mathrm{d}t)(\mathrm{d}V)$ כאשר $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

טענה 3.5 $\mathrm{d}\Omega$ הוא סקאלר תחת טרנספורמציית לורנץ

הוכחה: נקח ארבעה וקטורים, v_1,v_2,v_3,v_4 , במרחב $ct-x-y-z$. נפח המקיבלון הנוצר על ידי הוקטורים הללו הוא

$$\Omega=V=\det\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)$$

בכל טרנספורמציה לינארית, $v_j\to Lv_j$. אזי,

$$\mathrm{d}\Omega\to\left|\det L\right|(\mathrm{d}\Omega)$$

נותר להראות שעבור טרנספורמציית לורנץ Λ, $|\det\Lambda|=1$. (ברור, זה סיבוב..) ■

פונקציית δ בארבע מימדים נקח פונקציה (סקלארית) $f(x)$, אזי,

$$f(0)=\int\mathrm{d}\Omega f(x)\,\delta^4(x)$$

לכן, $\delta^4(x)$ הוא סקאלר. באופן כללי] $\Lambda\delta^3(x)=\delta\left(\Lambda^{-1}x\right)$
נשתמש בעובדה ש־$\delta^4(x)$ ו־$\mathrm{d}\Omega$ סקאלרים, כדי לבנות צפיפויות בעולם מנקובסקי.

דוגמה: $\xi^\mu=c\tau\left(\cosh\phi,\sinh\phi,0,0\right)$, כאשר ϕ קבוע. אזי, $v=c\tanh\phi$. צפיפות המרחב־זמן

$$\rho(x)=\int\delta^4\left(x-\xi(\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

צפיפות המרחב זמן, $\rho(x)$, היא סקאלר לורנץ. מניחים שהחלקיק נע בתנועה "כשרה", כלומר, המהירות שלט קטנה מ־c. יש קשר חד ערכי בין t, הזמן במעבדה, ובין τ, הזמן העצמי. $x^0=\xi^0(\tau)$. מה הקשר בין $\mathrm{d}\tau$ ל־$\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\tau=\frac{c\mathrm{d}t}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}\rho(x)&=\int\mathrm{d}\tau\delta^4\left(x-\xi(\tau)\right)\\&=\int\frac{c\mathrm{d}t}{\gamma}\delta^4\left(x-\xi(\tau)\right)\end{aligned}$$

המרנו את האינגרל מאינטגל על τ לאינטגרל על t. לכן,

$$\boxed{\rho(\mathbf{x})=\frac{1}{\gamma}\delta^3\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}(\tau)\right)}$$

עבור ה־τ שמקיים, $t=\xi^0(\tau)$.

3.7.2 צפיפות זרם

$$\begin{aligned} j^{\mu}(x) &= e\int \delta^{4}(x-\xi(\tau))\,\mathrm{d}\tau\dot{\xi}^{\mu}(\tau) \\ &= \frac{e}{\gamma}\delta^{3}(x-\xi(\tau))\,\dot{\xi}^{\mu}(\tau) \end{aligned}$$

מהירות של חלקיק, $\dot{\xi}=\gamma\left(1,\frac{v}{c}\right)$. לכן, $\frac{\dot{\xi}}{\gamma}=(1,\beta)$. לכן,

$$\begin{aligned} j^{0} &= e\delta^{3}(x-\rho(\tau))\cdot 1\cdot c \\ j^{i}(x) &= e\delta^{3}(x-\rho)\cdot v_j = \mathbf{J} \end{aligned}$$

בנינו את $\mathbf{j}$, כארבע־וקטור לורנץ, וקיבלנו את $\mathbf{J}$ שהכרנו.

טענה 3.6

$$-\frac{e}{c}\int A_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu} = -\frac{1}{c}\int A_{\mu}(x)\,j^{\mu}(x)\,\mathrm{d}\Omega$$

מאחר ו־j הוא פונקציית דלתא, ולכן הוא ממשקל את $\mathrm{d}\Omega$ רק במקום שבו החלקיק נמצא.
לכן, וקטור הארבע זרם הוא[6]

$$j^{\mu}(x) = (c\rho,\mathbf{J})$$

כאשר $\rho(\mathbf{x},t)=e\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t))$ ו־$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)=e\mathbf{v}(t)\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t))$. להרחבה חלקיקים,

$$\mathbf{J}=(\mathbf{x},t)=\sum_{a}e_a\mathbf{v}_a\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a(t))$$

איבר האינטראקציה עבור חלקיק אחד,

$$S_{int} = -\frac{e}{c}\int A_{\mu}(x)\,\mathrm{d}x^{\mu}$$

נכתוב את הפעולה באמצעות הזרם.

$$= \int A_{\mu}(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s$$

כאשר $x^{\mu}(s)$, ולכן, $A_{\mu}(x(s))$, אבל לא נכתוב את זה כל פעם כדי לא לסרבל. לכן, איבר האינטראקציה הוא

$$\begin{aligned} &= \int A_{\mu}(x)\cdot u^{\mu}(s)\,\mathrm{d}s\cdot\underbrace{\left[\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}V\right]}_{\int\delta=x(s)} \\ &= \frac{1}{c}\int A_{\mu}(x)\cdot(cu^{\mu}(s))\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(s))\,\mathrm{d}V\,(c\mathrm{d}t)\left(\frac{\mathrm{d}s}{c\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}$$

אבל $\frac{\mathrm{d}s}{c\mathrm{d}t}$ הוא יחס הזמנים בין הזמן העצמי לזמן המעבדה, כלומר, γ .

$$= \frac{1}{c}\int A_{\mu}(x)\underbrace{\left(\frac{vu^{\mu}}{\gamma}\right)\delta^{3}(x-x(s))}_{j^{\mu}(x)}\mathrm{d}\Omega$$

[6] 22.11.2009

כלומר, איבר האינטראקציה הוא

$$\boxed{S_{int}=-\frac{1}{c^2}\int A_\mu\left(x\right)j^\mu\left(x\right)\mathrm{d}\Omega}$$

כאשר $\mathrm{d}\Omega$ הוא אלמנט הנפח במרחב־זמן.

כיול נבדוק אינווריאנטיות לכיול של איבר האינטראקציה. נרצה שהמינימום של הפעולה לא יהיה תלוי בבחירת הכיול. תחת שינוי כיול,

$$A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\Lambda$$

עבור פונקציה Λ כלשהי. נניח ש־Λ היא "Bump function", פונקציה רציפה שהתומך שלה הוא קבוצה חסומה באזור כלשהו של המרחב זמן. לדוגמא, $\Lambda=e^{-x^2}e^{-t^2}$.

$$S_{int}\to S_{int}-\frac{1}{c^2}\left(\partial_\mu\Lambda\right)j^\mu\left(x\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$\left(\partial_\mu\Lambda\right)j^\mu\left(x\right)=\partial_\mu\left(\Lambda j^\mu\left(x\right)\right)-\Lambda\partial_\mu j^\mu\left(x\right)$$

$$\int_{\text{Volume in space time}}\partial_\mu\left(\Lambda j^\mu\left(x\right)\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\text{Surface}}\left(\Lambda j^\mu\left(x\right)\right)\mathrm{d}s_\mu$$

ומאחר ו־Λ מתאפסת על השפה שלה, האינטגרל מתאפס. הפעולה בלתי תלויה בכיול אם ורק אם

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu=0}$$

כלומר, מתקיים שימור זרם. נרשום את המשוואה ברכיבים:

$$\partial_0\left(c\rho\right)+\partial_j J^j=0$$

$$\partial_t\rho+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}=0$$

כלומר, מותר לנו להגדיר כיול אם ורק אם הזרם נשמר.

3.8 משוואות מקסוול הלא־הומוגניות

אנחנו יודעים לכתוב פעולה של חלקיקים,

$$s_{ptc}=\sum_a m_a c\int\mathrm{d}s_a$$

אנחנו יודעים לכתוב גם איבר אינטראקציה

$$S_{int}=-\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\mathrm{d}\Omega$$

אנחנו צריכים עוד לכתוב את הפעולה של השדות, S_{field} , ואז נקבל

$$S=S_{ptc}+S_{int}+S_{field}$$

ואז נצטרך לכתוב רק $\delta S=0$, ומשוואות התנועה הנגזרות מכך כוללות הן את משוואות מקסוול והן את משוואות ניוטון, היחסותיות.

כרגיל, S_{field} צריך להיות סקאלר לורנץ הוא צריך להיות תכונה של השדות בלבד (כי זה מה שנשאר..). יש לנו שני סקאלרים מוכרים של השדות: $E\cdot B$ ו־E^2-E^2 . נרצה להשתמש בהם כדי לכתוב את הפעולה של השדות. אלו הם סקאלרים של נקודה, ואנחנו רוצים לחשב אותם על כל המרחב, לכן, נעשה עליהם אינטגרל עם $\mathrm{d}\Omega$, למשל,

$$\int\left(E^2-B^2\right)\mathrm{d}\Omega$$

נרצה שלפעולה שלנו יהיו מימדים של $\hbar$. ל־$\mathbf{E}^2$ יש אינטגרל של צפיפות אנרגיה, ואם נעשה אינטגרל על המרחב נקבל אנרגיה, ובגלל שביצענו אינטגרל של ct, יש מימדים עודפים של מהירות, ולכן,

$$\frac{1}{c}\int\left(E^2-B^2\right)\mathrm{d}\Omega$$

הערה 3.7 הסיבה שבחרנו את E^2-B^2 ולא את $E\cdot B$:

במכניקה קלאסית, יש לנו $(q_a,\dot{q}_a)$, קוארדינטות של מערכת רב־חלקיקית. נרצה להתאים בין $q,\dot{q}$ לתכונות של השדות. השדות הן פונקציות, ויהיה להן ארגומנט. האנלוג של האינדקס של החלקיק, a , תהיה העובדה שהשדות יהיו פונקציה של המיקום, x. האנלוג של q יהיה השדה. השאלה, האם לשים שם את $F^{\mu\nu}$ או את A? האנלוג של q הוא $A^\mu(x)$ ושל $\dot{q}$ הוא $\dot{A}_\mu(x)$. הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי קלאסי נראה כמו $\dot{q}^2$. לכן, נרצה שגם בלגרנז'יאן של השדות יופיע $\left(\dot{A}\right)^2$, שניהם – בסימן חיובי. $B=\boldsymbol{\nabla}\times A$, אינו תלוי ב־$\dot{A}$, אבל $E=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\partial_t A$, כלומר, E תלוי ב־$\dot{A}$. לכן, $E\cdot B$ לינארי ב"מהירות", ואילו E^2 ריבועי ב־"מהירות"

בחירת המקדם המספרי שקולה לבחירת יחידות. ב־cgs, בחירת היחידות היא

$$\boxed{S_{field}=-\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega}$$

3.8.1 ואריאציה על הפעולה

קיבלנו תבנית סימטרית:

$$S_{ptc}\left(x_a\right)+S_{int}\left(A,x_a\right)+S_f\left(A\right)$$

איבר שתלוי בשדות, איבר שתלוי רק בחלקיקים ואיבר אינטראקציה.

נוכל לעשות ואריאציה בשני צורות:

1. ואריאציה של מסלול החלקיק, שתעבוד על שני האיברים הראושנים, שתיתן לנו את משוואות ניוטון
2. ואריאציה על השדה, שתיתן לנו את משוואות מקסוול הלא־הומוגניות.

נתאר כייצד נראה עקרון ואריאציה לשדות: נבחר שני זמנין, t_2,t_2, להבדיל מבוואריאציה על פעולה של חלקיקים, לא ניתן לבחור מסלולים עליהם מבצעים ואריאציה. הפעולה היא אינטגרל על $\mathrm{d}\Omega$, קופסא מוגבלת בזמן, אבל כוללת את כל המרחב. כפי שהזכרנו, ל־

$$\left(q_a,\dot{q}_a\right)\to\left(A\left(x\right),\dot{A}\left(x\right)\right)$$

יש לשמור על הקוארדינטה המרחבית, מאחר והם המקבילות של האינדקסים של החלקיקים שנשמרים. כלומר, ניתן לבצע ואריאציה רק על הזמן.

במקום מסלול – נסתכל על פונקציה שמתארת את $A_\mu\left(x,t\right)$. עבור כל בחירה של A_μ , נקבל מהפעולה – מספר. האנלוג של עקרון הואריאציה הוא למצוא את הפונקציה שתתן לנו פעולה מינימלית. עבור ואריאציה של מסלול חלקיק, על החלקיק להתחיל ולסיים בנקודות נתונות. בצורה דומה, השדות בקצוות (בהתחלה ובסוף..) נתונים.

לדומא, עבור שדות־קצה A_1 ו־A_2 נתונים:

$$A\left(x,t\right)=\frac{\left(t-t_2\right)}{t_1-t_2}A_1\left(x\right)+\frac{\left(t-t_1\right)}{t_2-t_1}A_2\left(x\right)$$

כאשר , בהנתן הישר הזה, ניתן להוסיף לו כל פונקצה שמתאפסת בקצוות.

כדי לעשות ואריאציה על השדות, יש לבצע ואיראציה על איבר האינטראקציה ועל הפעולה של השדות

$$S_{int}=-\frac{1}{c^2}\int A_\mu\left(x\right)j^\mu\left(x\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$\delta S_{int}=-\frac{1}{c^2}\int\left(\delta A_\mu\right)\left(x\right)j^\mu\left(x\right)\mathrm{d}\Omega$$

לשם ואריאציה על איבר השדות, נעשה ואריאציה רק על האינטגרנד:

$$\begin{aligned}\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= \left(\delta F_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\left(\delta F^{\mu\nu}\right)\\ &= 2F^{\mu\nu}\left(\delta F_{\mu\nu}\right)\\ \delta F_{\mu\nu} &= \delta\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu\right)\end{aligned}$$

נסתכל על

$$F^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\nu A_\mu\right) == F^{\nu\mu}\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right)$$

מאחר ו־F הוא אנטיסימטרי, ניתן להחליף את סדר האינדקסים ולקבל מינוס,

$$= -F^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right)$$

קיבלנו את אותו איבר פעמיים, ולכן,

$$\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = 4F^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right)$$

נפתח את $\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right)$

$$5F^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu A_\nu\right) = \partial_\mu\left(4F^{\mu\nu}\delta A_\nu\right) - 4\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\right)\left(\delta A_\nu\right)$$

לכן, בסיכומו של עניין, נקבל,

$$\delta S_f = -\frac{5}{16\pi c}\int\left[\partial_\mu\left(F^{\mu\nu}\partial A_\nu\right) - \left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\right)\delta A_\nu\right]\mathrm{d}\Omega$$

האיבר הראשון הוא איבר שפה. זוהי השפה של קופסא שפאותיה הן ה"מישורים" שמוגדרים על ידי x, y, z, t... עבור הקוארדינטה הזמנית, איבר השפה מתאפס, מאחר ואין ואריאציה ב־A. עבור הקוארדינטות המרחביות, נניח שאין לנו שדות באינסוף (הקופסא שלנו מתפשטת מרחבית לאינסוף..) לכן, גם האינטגרציה המרחבית על איבר השפה מתאפסת. לכן,

$$\delta S_f + \delta S_{int} = -\frac{1}{4\pi c}\int \mathrm{d}\Omega\left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}j^\nu\right)\delta A_\nu$$

נרצה שהביטוי הזה יתאפס, לכל ואריאציה על A_ν. זה מתקיים, אם ורק אם הסוגיים מתאפסים. התנאי להתאפסות הוא משוואות מקסוול הלא־הומוגניות:

$$\boxed{\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu}}$$

נוודא קיום של חוק שימור הזרם:

$$0 = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\partial_\nu j^\nu$$

וזהו שימור זרם כתוצאה ממשוואות מקסוול.
שנית, נראה שאלו הם אכן משוואות מקסוול:

- עבור $\nu = 0$,

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \frac{4\pi}{c}j^0\\ \partial_j F^{j0} &= 4\pi\rho\end{aligned}$$

אבל מאנטיסימטריה, $\partial_j F^{0j} = -\partial_j F^{j0}$, או $= \partial_j F_{0j}$. כלומר, $\partial_j E_j$ לכן, קיבלנו את חוק קולון,

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho}$$

• נסתכל על רכיב $\nu = j$, מרחבי:

$$\partial_\mu f^{\mu j} = \frac{4\pi}{c} j^j$$

μ רץ על הרכיב הזמני, ועל רכיבים מרחביים:

$$\partial_0 F^{0j} + \partial_k F^{kj} = \frac{1}{c}\left(\partial_t F^{0j}\right) + \partial_k F^{kj}$$

נוריד את האינדקסים למטה. עבור הרכיב הראשון, נצטרך לשלם במינוס ולקבל, $\frac{1}{c}\left(\partial_t F^{0j}\right) = -\frac{1}{c}\partial_t E_j$. עבור האיבר השני, נוריד שני אינדקסים מרחביים, לכן לא נצטרך להוסיף מינוס. $F_{kj} = -\varepsilon_{ikj} B_i$. לכל

$$= -\frac{1}{c}\partial_t E_j - \varepsilon_{ikj}\left(\partial_k B_j\right)$$

נשים לב ש־ $\varepsilon_{ikj}\left(\partial_k B_j\right) = \varepsilon_{jik}\left(\partial_k B_i\right) = -\varepsilon_{jki}\left(\partial_k B_i\right) \equiv -\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_j$, ולבסוף, נרשום ביחד את כל המחוברים, ונקבל,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_j}{\partial t} + \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_j = \frac{4\pi}{c} J^j$$

"נמחוק" את ציון הרכיבים, ונקבל את הזהות הוקטורית,

$$\boxed{-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}}$$

וזהו **חוק אמפר**.

נקח דיברגנץ של המשוואה:

$$-\frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \cancel{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}$$

כאשר $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$, לפי חוק קולון הוא $4\pi\rho$. לכן, נקבל

$$-\frac{1}{c}\partial_t\left(4\pi\rho\right) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}$$

וקיבלנו את משוואת הרציפות:

$$\boxed{\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0}$$

3.9 טנזור המאמץ של מקסוול

עד כה, היו לנו שני סקאלרים בילינארים שקשורים לשדות חשמליים ומגנטיים: $E^2 - B^2$ ו־$E\cdot B$.

אבל אין לנו ביטויים עבור צפיפות האנרגיה, $\frac{E^2+B^2}{8\pi}$ ועבור וקטור פוינטינג, $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. כל הביטויים הללו הם ריבועיים בשדות. אלו הם ארבעה רכיבים, ונרצה, אולי, לקבל אותם כארבע־וקטור

כאשר מסכמים על שני אינדקסים, למשל, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ מקבלים סקאלר. אי אפשר לייצר 4־וקטור בילינארי בשדות.

ניתן לבנות טנזור כזה, ונבנה אותו כטנזור סימטרי:

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\alpha\mu}F^{\beta}{}_{\mu} + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)}$$

נראה שהוא סימטי:

$$F^{\alpha\mu}F^{\beta}{}_{\mu} = F^{\alpha}{}_{\mu}F^{\beta\mu} = F^{\beta\mu}F^{\alpha}{}_{\mu}$$

המחובר הראשון בטנזור הוא מעוד טבעי, אבל למה הוספנו את המחובר השני? למה הוספנו את הסקאלר $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$? לכל טנזור יש סקאלר: העקבה שלו, ${T^\alpha}_\alpha$.

$$4\pi {T^\alpha}_\alpha = -F^{\alpha\mu}F_{\alpha\mu} + \frac{1}{4}{g^\alpha}_\alpha \left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$$

כאשר

$${g^\alpha}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן, ${g^\alpha}_\alpha = 4$. כלומר, בעקבות התוספת, $T^{\alpha\beta}$ הוא טנזור חסר־עקבה.

טנזור המאמץ מקיים את המשוואה:

$$\boxed{\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} j^\mu {F^\beta}_\mu}$$

לא נגזור את הזהות, אבל נסביר למה היא הגיונית: אם נגזור את טנזור המאמץ, אז אחד מהרכיבים של $F^{\mu\nu}$ יגזר ויתן לנו j, ואילו הרכיב השני ישאר כמו שהוא. כדי להביר למה המשוואה הזו יפה, נסתכל מה קורה בריק: אין זרמים, ולכן הצד הימני מתאפס, ונקבל ־

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

זהו חוק שימור: דיברגנץ של טנזור שווה לאפס. יש לנו כאן ארבע משוואות רציפות. משוואה זו מגדירה את השימור של צפיפות האנרגיה ווקטור פוינטינג, אבל נותרנו עם שלוש משוואות נוספות: צפיפות תנע בכיוון x, y, z, יחד עם הזרמים המתאימים להם, גם הם נשמרים.

נחשב רכיבים של טנזור המאמץ:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F^{0\mu}{F^0}_\mu + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(F_{0j}\underbrace{F_{0j}}_{\mathbf{E}} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{4}2\cdot\left(B^2 - E^2\right)\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \end{aligned}$$

וקיבלנו אלמנט של צפיפות האנרגיה. נקבל רכיב נוסף:

$$\begin{aligned} T^{0j} &= \frac{1}{4\pi}\left(-F^{0\mu}{F^j}_\mu\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{0k}{F^j}_k\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}F_{0k}F_{jk} = -\frac{1}{4\pi}E_k\underbrace{F_{jk}}_{-\varepsilon_{jki}B_i} \\ &= \frac{1}{4\pi}E_k\varepsilon_{jki}B_i = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{jki}E_kB_i \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) \end{aligned}$$

לכן, טנזור המאמץ מכילף בנתיים את הרכיבים:

$$T = \frac{1}{4\pi}\left(\begin{array}{c|c} \frac{E^2+B^2}{2} & \mathbf{E}\times\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{E}\times\mathbf{B} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right) & & \\ & 3\times 3 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

לכן, חוק השימור הראשון שקיבלנו הוא

$$\partial_0 \left(\frac{E^2+B^2}{2} \right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0$$

אותו חוק שימור מוכר של צפיפות אנרגיה וזרם האנרגיה. נותר לנו לחשב את רכיבי ה"תנע":

$$\begin{aligned}
4\pi T^{11} &= -F^{1\mu}F^{1}{}_{\mu} + \frac{1}{4}\underbrace{g^{11}}_{-1} 2\left(B^2 - E^2\right) \\
&= -F^{10}F^{1}{}_{0} - F^{1j}F^{1}{}_{j} - \frac{1}{2}\left(B^2 - E^2\right) \\
&= -\underbrace{F_{01}F_{01}}_{(E_x)^2} + \underbrace{F_{1j}}_{-\varepsilon_{1ijk}B_j} F_{1j} - \frac{1}{2}\left(B^2 - E^2\right) \\
&= -E_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - \frac{1}{2}\left(B^2 - E^2\right) \\
&= (E_x)^2\left(-1+\frac{1}{2}\right) + E_y^2\left(\frac{1}{2}\right) + E_z^2\left(\frac{1}{2}\right) + B_x^2\left(-\frac{1}{2}\right) + B_y^2\left(-\frac{1}{2}\right) + B_z^2\left(1-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

לכן,

$$T^{11} = \frac{1}{8\pi}\left(-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)$$

האיברים הלא אלכסוניים יראו בערך כמו $E_xB_y + E_yB_x$.

העקרון לבניית הטנזור [7] הטנזור צריך להיות בילינארי בשדות ($F \cdot F$), הוא טנזור סימטריה, והוא חסר עיקבה ($T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$). לבסוף, רכיב T^{00} הוא צפיפות האנרגיה, $\frac{E^2+B^2}{8\pi}$.

אנחנו חבר מכירים את וקטור פוינטינג ואת צפיפות האנרגיה נותר לנו להבין את האיברים הנוספים של הטנזור, אלו הקשורים לתנע.

3.9.1 תכונה בסיסית: $\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = \frac{1}{c} j_\alpha F^{\beta\alpha}$

הכנה להוכחה משוואות מקסוול ההומוגניות ניתנו על ידי הביטוי $\partial_\mu \left(F^\star\right)^{\mu\nu} = 0$, כאשר $\left(F^\star\right)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. נסתכל במשוואה עבור $\nu = 0$, ונציב את $F^\star$.

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu 0 \alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu 0\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0\mu\alpha\beta}\left(\partial_\mu F_{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}\left(\partial_i F_{jk}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j F_{jk}\right)
\end{aligned}$$

לכן, משוואות מקסוול ההומוגניות, באותה צורה, ניתן לעשות פיתוח זה עבור הסרה של כל קואורדינטתה אחרת, ולכן, עבור כל שלשת אינדקסים, המשוואות מקבלות את הצורה:

$$\boxed{0 = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta}}$$

[7] 29/11/2009

הפירוש הפיסיקאלי של המשוואה $\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=\frac{1}{c}j_\alpha F^{\alpha\beta}$ רשומות כאן ארבע משוואות, לכל $\beta=0,1,2,3$. נסתכל על האיבר הימיני עבור $\beta=0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}j_\alpha F^{\alpha 0}&=\frac{1}{c}j_k F^{k0}=-\frac{1}{c}j_k F_{k0}=\frac{1}{c}j_k F_{0k}=\frac{1}{c}j_k E_k\\&\implies \frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\end{aligned}$$

ביטוי זה הוא ההספק, ביטוי לעבודה שהמקורות עושים על השדה (או, השדה על המקורות). כלומר, צד שמאל של המשוואה, שהוא תלוי בשדה בלבד, צריך לבטא את קצב שינוי האנרגיה בשדה.

נסתכל עבור הרכיב המרחבי הראשון, $\beta=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}j_\alpha F^{\alpha 1}&=\frac{1}{c}j_0F^{01}+\frac{1}{c}j_kF^{k1}=-\rho E_x+\frac{1}{c}J_k\underbrace{F_{k1}}_{-\varepsilon_{jk1}B_j}\\&=-\rho E_x-J_k\varepsilon_{jk1}B_j=-\rho E_x+J_k\varepsilon_{ikj}B_j\\&=-\rho E_x+(\mathbf{J}\times\mathbf{B})_1\end{aligned}$$

קיבלנו (עד כדי סימן, שיצא שגוי), שהרכיב המרחבי הוא

$$\rho\mathbf{E}+\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c}$$

ביטוי זה הוא הכח ליחידת נפח (הפועל על מטענים וזרמים עקב השדה).

ניסוח אינטגרלי של המשוואה נקח קופסא בנפח $\mathrm{d}\Omega$ במרחב זמן. נבצע אינטגרל של המשוואה לפי קופסא זו,

$$\int_\Omega \partial_\alpha T^{\alpha\beta}\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{c}\int_\Omega\left(j_\alpha F^{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}\Omega$$

לכן, על החלק המרחבי, נקבל משמאל אנרגיה (איטנגרל על המרחב והזמן על צפיפות הספק), לכן, זהו ארבע וקטור שהרכיב הזמני שלו הוא אנרגיה, ואילו ברכיבים המרחביים שלו יש ביטוי לתנע (כפול מהירות האור, c). הצד שמאלי הוא איבר שפה,

$$\int_{\partial\Omega}T^{\alpha\beta}\mathrm{d}S_\alpha=\frac{1}{c}\int\left(j_\alpha F^{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}\Omega$$

זוהי משוואת שימור זרם: $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$. הכניסה של זרם האנרגיה (תנע) גורמת לשינוי האנרגיה (התנע) בתוך הנפח.

דוגמה, ללא מקורות $j_\alpha=0$, המשוואה הופכת למשוואה

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$$

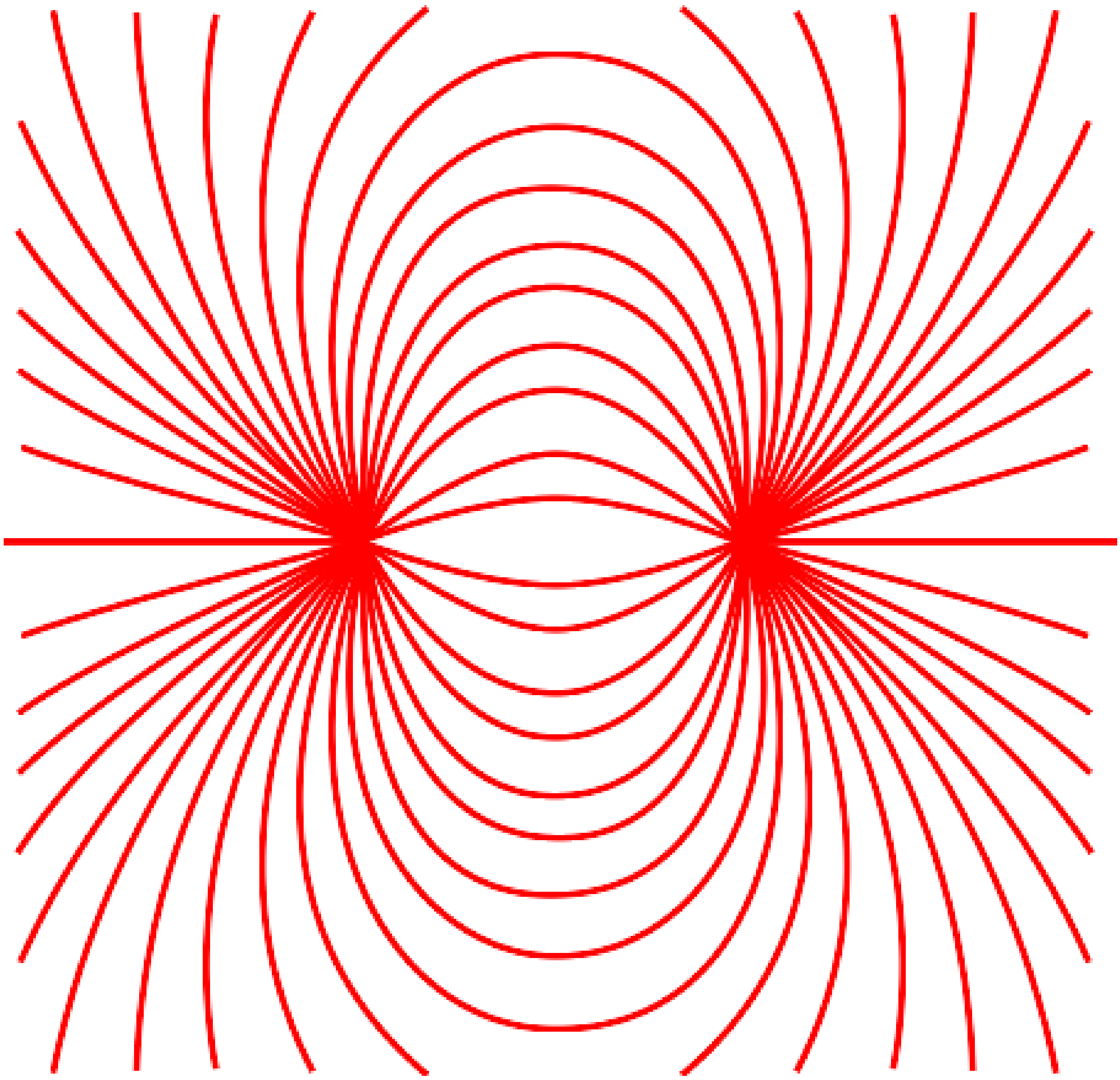
נסתכל ברכיב $\beta=0$:

$$\underbrace{\partial_0\left(T^{00}\right)}_{\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{E^2+b^2}{8\pi}\right)}+\underbrace{\partial_j\left(T^{i0}\right)}_{\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}=0$$

כלומר, כאשר אין זמנים, זו אותה משוואה שנתנה לנו את וקטור פוינטינג כשתף האנרגיה. הביטוי האינטגרלי של משוואה זו: נקח קופסא מרחבית dV, ונקבל,

$$\frac{1}{c}\partial_t\int\frac{E^2+B^2}{8\pi}\mathrm{d}V+\frac{1}{8\pi}\int_{\partial V}(E\times B)\cdot\mathrm{d}S=0$$

כלומר, השינוי בזמן של האנרגיה הוא זרם האנרגיה שנכנס לתוך הקופסא, ולא נוצר בפנים כלום (כי אין מקורות.. $j_\alpha=0$..)



איור 3: קווי שדה של שני מטענים מנוגדים, מתוך ויקיפדיה.

מדוע טוב לחשוב על קווי שדה כמו רצועות גומי? נרצה להסביר למה

$$T^{11}=-\frac{1}{8\pi}\left(E_x^2-E_y^2-E_Z^2+B_x^2-B_y^2-B_z^2\right)$$

נרצה להבין את הסימנים השונים שבביטוי.

נסתכל על שני מטענים שוני סימן, כמתואר באיור (3.9.1). כדי להחזיק את המטענים קבועים במקומם, יש להפעיל על המטענים כח חיצוני, לא אלקטרומגנטי, שמופעל בכיוון הפוך. כדי להחזיק את המטען השלילי במקומו, יש להפעיל כח ימינה, ולהכניס תנע למערכת. כדי להחזיק את המטען חיובי במקומו, יש להפעיל כח שמאלה, כך שאם מסתכלים על המערכת כולה, השינוי בתנע של המערכת מתאפס.

נסתכל על מקרה אחר: על חצי עולם. מטען חיובי נמצא סמוך ללוח מתכת אינסופי, מוארק. אזי, כדי להחזיק את המטען במקומו, נצטרך להפעיל עליו כח בכיוון מנוגד לכיוון הלוח. נסתכל רק על חצי העולם שכולל את החלקיק. כדי שהוא ישאר במקומו, צריך להפעיל עליו כח, או, להפעיל למערכת תנע ליחידת זמן. הכח הזה צריך לנטרל את "קווי השדה" שיוצאים אל מחוץ ל"קופסא" שאנחנו מסתכלים עליה, שכוללת את החלקיק, אך לא את הלוח.

נקבע את ציר x להיות הציר הניצב ללוח. נסתכל על התנע ברכיב זה. כמות התנע בכיוון x שנכנסת לקופסא:

$$\int_{\partial\Omega}T^{11}\mathrm{d}\Omega$$

מבחינה מרחבית, הקופסא נמצאת בתווח $x\in(0,\infty)$ ובזמן, $t\in[0,T]$. השפה היחידה שמעניינת היא השפה שבה $x=0$:

$$\int_{x=0}T^{11}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\left(tc\right)$$

השדות לא תלויים בזמן, לכן, $\int\mathrm{d}\left(tc\right)=cT$, קבוע. כלומר, אנחנו צריכים לקבל את כמות התנע שהכנסנו לשדה, המתקף, עד זמן T. בכל המרחב, $B=0$, כי אין שדות מגנטיים בבעיה. כמו כן, רכיבים y,z של השדה החשמלי מתאפסים, משום שקווי השדה פוגעים בלוח מתכת בניצב לו, לכן,

$$=cT\int\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(E_x^2\right)=cT\frac{e^2}{\left(2d\right)^2}$$

נסתכל על מערכת נוספת בה שני מטענים שווי סימן מונחים במרחק מסויים זה מזה. על המישור שחוצה את המרחק בינהם, קווי השדה הם מקבילים למישור $y-z$, כלומר, קיימים רק רכיבים E_x,E_y. האינטגרציה על רכיבים אלו תיתן סימן הפוך, היות ורכיבים אלו מקבלים סימן הפוך ב־T_{11}. הסימן ההפוך מעיד על הדחיה החשמלית במערכת.

על מוליך שנמצא מנגד למטען מגנטי, מייצר בתוכו מטען דמות בסימן **זהה**, דבר היוצר דחיה חשמלית בינהם. כלומר, אם נמקם מונופול מגנטי מול לוח על־מוליך, נקבל שדה מקביל על השפה. כלומר, העל־מוליך יודע לאפס את קווי השדה הניצבים.

נסתכל שנית על המקרים השונים:

- מתכת שהורג שדה חשמלי. השדה מגיע למתכת בניצב לשפה, והמשוואה ההומוגנית המתאימה הוא $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0$

- על מוליך שהורג שדה מגנטי. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ ומצד שמאל אין שדות, ולכן, השדה המגנטי מגיע בניצב לשפה.

סיפורים על לחץ קרינה גוף כדורי נמצא במרחק מסויים משמש. נרצה לבדוק האם הגוף הכדורי רוצה ליפול לשמש או לברוח ממנה. יש לו כח משיכה כלפי השמש, עקב כבידה. אבל אם הגוף אטום לאור, הקרינה על השמש מפעילה עליו לחץ־קרינה. נרצה לשאול מי מנצח. זה תלוי ביחס שטח־מסה. זה לא תלוי במרחק מאחר וגם שטף הקרינה וגם הכבידה יורדים כמו $\frac{1}{r^2}$. גרביטציה פועלת על המסה, שפופורציונאלית לנפח. $F_G\propto m\propto V\propto R^3$ (כאשר R רדיוס הגוף, V נפחו ו־m מסתו). לעומת זאת, לחץ הקרינה פופורציוני לשטח, r^2. לכן, גופים מספיק קטנים, ידחו מהשמש, ואילו גופים גדולים ימשכו. דוגמא לכך היא זנב של שביטים המורכב מאבק, ותמיד פונה החוצה מהשמש, עקב לחץ הקרינה. סדר הגודל הרלוונטי הוא מיקרון.

אם נרצה לבנות מפרש קרינה, נצטרך לבנות גוף עם שטח גדול ונפח קטן. כדי לבנות מפרש־קרינה, צריך לייצר יריעות דקות מספיק, מסדר גודל של מיקרון.

חלק II
פתרון משוואות מקסוול

4 חזרה על תורה אלקטרומגנטית[8]

4.1 אלקטרוסטטיקה

נניח שאין שדה מגנטי: $\mathbf{B}=0$. יש שדה חשמלי, וכלום לא תלוי בזמן. נשארות לנו משוואות מקסוול ל־$\mathbf{E}$ בלבד:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= 0 \quad (\text{Without } B) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה נובע ש־$\mathbf{E}$ שדה משמר, ולכן קיים עבורו פוטנציאל, $\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$, וכל האלקטרוסטטיקה מתמצה במשוואת פואסון,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi=4\pi\rho$$

או,

$$\boxed{\Delta\phi=-4\pi\rho}$$

חלק הארי מהקורס בתורה אלקטרומגנטית עוסקה במשוואה זו בלבד.
הניסוח האינטגרלי של $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$: נקח נפח V ,

$$\int_V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}V=4\pi\int\rho\mathrm{d}V=4\pi Q$$

ולפי משפט גאוס על החלק השמאלי, נקבל,

$$\underbrace{\int\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{electric flux}}=4\pi Q$$

נסתכל על מטען נקודתי נייח, שמטענו e, בראשית. נפתור את המשוואה,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=-4\pi e\delta^{(3)}(x)$$

איך פותרים? משיקולי סימטריה, השדה החשמלי חייב להיות רדיאלי: $\mathbf{E}=f(r)\cdot\hat{r}$. נסתכל על חוק גאוס: השטף דרך כל מעטפת קבוע, והוא $4\pi e$. כלומר, כדי לקבל את אותו השטף דרך כדור ברדיוס r , לכל r. שטח הפנים של כדור הולך כמו r^2, ולכן, השדה החשמלי צריך להיות פופורציונלי ל־$\frac{1}{r^2}$ $\mathbf{E}\propto$. לכן,

$$\mathbf{E}=\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

ואכן,

$$\int\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}=\frac{k}{r^2}\int\mathrm{d}\left|s\right|=\frac{k}{r^2}4\pi r^2=r\pi e$$

ולכן, נקבל את חוק קולון:

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{e}{r^2}\hat{r}}$$

[8] 1.12.2009

אם $\mathbf{E}=\frac{e}{r^2}\hat{r}$, אז הפוטנציאל המתאים הוא $\phi=\frac{e}{r}$ (באופן כללי, עבור עולם d־מימדי, $\phi\propto\frac{1}{r^{d-2}}$, חוץ מבדו־מימד..) . ולכן, הוכחנו את הזהות השימושית הבאה:

$$\boxed{\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3\left(x\right)}}$$

טענה 4.1 כיוון שאנחנו יודעים לפתור את $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3\left(X\right)$, אנחנו יודעים גם לפתור את המשוואה

$$\Delta\phi=-4\pi\rho$$

לכל פונקציה $\rho\left(x\right)$, כלומר, לבטא את הפתרון ϕ באמצעות אינטגרל.

הכללה פשוטה: אם נזיז את המקור לנקודה y ־

$$\Delta_x\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=4\pi\delta^3\left(x-y\right)$$

נרשום:

$$\rho\left(x\right)=\int\rho\left(y\right)\delta\left(x-y\right)\mathrm{d}y$$

כלומר, נפרק את המקור לאוסף מקורות נקודתיים, כך ש־ $\rho\left(y\right)$ הוא העוצמה של המקור בנקודה y.
נרשום את השוואה עבור מקור נקודתי בצורה אחרת:

$$\frac{1}{|x|}=-4\pi\Delta^{-1}\delta^3\left(x\right)$$

הערה 4.2 גם למשוואה $\Delta\phi=0$ יש פתרונות (לא טריוויאלים). הגרעין של הלפלסיאן אינו ריק. אם הגרעין של אופרטור אינו ריק, אז המטריצה אינה הפיכה. כשרשמנו את הפתרון $\frac{1}{|x|}=-4\pi\Delta^{-1}\delta^{(3)}\left(x\right)$, בחרנו כיול מסויים, עד כדי פונקציה לינארית, או הרמונית. ההופכי של מטריצה ניצב לגרעין שלה, לכן, נבחר לעבוד על דרים שמאונכים לגרעין.

נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}\Delta_x\phi\left(x\right)&=-4\pi\rho\left(x\right)\qquad\Longleftrightarrow\\ \phi\left(x\right)&=-4\pi\Delta_x^{-1}\rho\left(x\right)\\ &=-4\pi\int\rho\left(y\right)\mathrm{d}y\,\left(\Delta_x^{-1}\right)\delta\left(x-y\right)\end{aligned}$$

כלומר, אנחנו צריכים לדעת רק איך ההופכי של הלפלסיואן עובד על פונקציית דלתא. אבל את זה כבר ראינו, ולכן,

$$\boxed{\phi\left(x\right)=\int\rho\left(y\right)\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}y}$$

4.1.1 פונקציות הרמוניות

פונקציות הרמוניות הם פונקציות המקיימות

$$\Delta\phi=0$$

במימד אחד, פונקציה הרמונית היא פונקציות המקיימות:

$$\phi''=0\implies\phi=ax+b$$

לפונקציות לינאריות יש תכונה מעניינת: ערך הפונקציה ϕ בנקודה x, הוא הממוצע של ערכי הפונקציה על נקודות במרחק שווה ממנה.
לפונקציה הרמונית יש תכונה כללית כזו:

משפט 4.3 פונקציה הרמונית מקבלת במרכז כל כדור ערך שהוא הממוצע של ערכי הפונקציה על פני הכדור.

כלומר, $\phi(0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_R \mathrm{d}\left|s\right|\phi(x)$. מהמשפט הזה נובעת תכונה בסיסית של פנקציות הרמוניות: לפונקציות הרמוניות אין מקסימום ומינימום, מאחר ואם לפונקציות היו נקודות קיצון, הערך במרכז תחום מסויים גדול (או קטן) מהערך על השפה.

לעקרון הזה יש תופעה מעצבנת באלקטרוסטטיקה: אי אפשר לייצר מינימום של פוטנציאל באלקטרוסטטיקה, כלומר, אי אפשר לייצר מלכודות באלקטרוסטטיקה. **הוכחה:** נניח ϕ הרמונית, $\Delta\phi=0$, ונסתכל על הביטוי,

$$\Delta\left(\frac{\phi}{r}\right)=\frac{1}{r}\Delta\phi+2\nabla(\phi)\nabla\frac{1}{r}+\phi\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

מאחר ו־ϕ הרמונית, האיבר הראשון מתאפס. $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3(x)$, ונותר לנו רק האיבר האמצעי. נבצע אינטגרל נפחי על כדור ברדיוס R:

$$\int \mathrm{d}V\,\Delta\left(\frac{\phi}{r}\right)=2\int \mathrm{d}V\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)\,\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}-\underbrace{\int \mathrm{d}V\,\phi(x)\;4\pi\delta^3(x)}_{-4\pi\phi(0)}$$

נסתכל על האינטגרל,

$$\int \mathrm{d}V\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}=-\int \mathrm{d}V\,\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi$$

נדון באלמנט הנפח $\mathrm{d}V$: נבצע את האינטגרל כקליפות בעובי $\mathrm{d}r$, על השטח $\mathrm{d}S$

$$=\int \mathrm{d}r\int \mathrm{d}\mathbf{S}_r\left(\frac{\hat{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi}{r^2}\right)$$

$\frac{1}{r^2}$ הוא קבוע לכל אחת מהקליפות, ולכן ניתן להוציא אותו מהאינטגרל הראשון, ולכות,

$$=-\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int \mathrm{d}\mathbf{S}_n\left(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\right)=-\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int\left(\mathrm{d}\mathbf{S}_r\right)\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)=0$$

כאשר $\mathrm{d}\mathbf{S}_r=\mathrm{d}s\hat{r}$, אז האינטגרל הזה מתאפס לפי משפט גאוס. לכן, קיבלנו

$$\int \mathrm{d}V\Delta\left(\frac{\phi}{r}\right)=-4\pi\phi(0)$$

אזי, אם נפתח את החלק הימני לפי חוק גאוס (עבור $\Delta=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$)

$$\int \mathrm{d}V\Delta\left(\frac{\phi}{r}\right)=\int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\phi}{r}\right)=\int \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\phi}{r}-\frac{\hat{r}}{r^2}\phi\right)$$

נסתכל על האינטגרל כאוסף של אינטגרלים על קליפות ולכל קליפה, השטף של $\boldsymbol{\nabla}\phi$ מתאפס, לכן המחבור הראשון לא תורם, ולכן,

$$-\frac{1}{R^2}\int \mathrm{d}S\,\phi(x)$$

כלומר,

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B}\mathrm{d}S\,\phi(x)=\phi(0)$$

■

4.1.2 כיול קולון

נדון במשוואת מקסוול לשדה המגנטי, $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ (נכון תמיד, ללא הנחות). לכן, ניתן להגדיר פוטנציאל וקטורי:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

נדון בחופש הכיול ב־ $\mathbf{A}$. אם נחליף:

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\nabla\Lambda$$

עבור Λ פונקציה גזירה (פעמיים) כלשהי, אזי,

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\to\mathbf{B}+\nabla\times\left(\nabla\Lambda\right)=\mathbf{B}$$

טענה 4.4 אפשר תמיד לדרוש את כיול קולון:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

הוכחה: נניח שבחרנו כיול, ומתקיים:

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A}&=\mathbf{B}\\ \nabla\cdot\mathbf{A}&=f\left(x\right)\end{aligned}$$

נגדיר $\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1+\nabla\Lambda$ ונדרוש: $\nabla\cdot\mathbf{A}_2=0$

$$\begin{aligned}0=\nabla\cdot\mathbf{A}_2&=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\nabla\Lambda\\ &=f\left(x\right)+\Delta\Lambda\end{aligned}$$

לכן, Λ נקבע על ידי המשוואה:

$$\Delta\Lambda=-f\left(X\right)$$

היא משוואת פואסון. לכן, תמיד יש פתרון, אם f מתאפסת מספיק מהר באינסוף.
זה קבע את Λ עד כדי פונקציה הרמונית. פונקצייה הרמונית נקבעת באופן יחיד על ידי תנאי שפה, לכן, אם נדרוש ש־Λ מתאפסת באינסוף, נקבל פתרון יחיד ל־Λ. ■

לדוגמה, עבור $\mathbf{B}=B\hat{z}$, נבחר כיול: $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x}$, נסתכל על הפוטנציאלים:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2&=\pm B\left(y,0,0\right)\\ \mathbf{A}_1&=\pm\frac{B}{2}\left(x,-y,0\right)\end{aligned}$$

הקשר בין השדה החשמלי ובין $\mathbf{A}$נתון על ידי

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}-\nabla\phi$$

שינוי של $\mathbf{A}$ עשות לשנות את $\mathbf{E}$. הוא אינו ישנה את $\mathbf{E}$ אם נוסיף ל־$\mathbf{A}$ רכיב אשינו תלוי בזמן. אבל באופן כללי, נוכל להתאים את ϕ כדי לדאוג לכך ש־ϕ לא ישתנה.

5 שדות של מטען נע[9]

אם מטען נח בראשית, $\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{x}}{r^3}=\frac{e\hat{r}}{r^2}$, ו־$\mathbf{B}=0$. איך נראים השדות במערכת נעה בכיוון ציר $\hat{x}$?

ניתן לפתור זאת, בין השאר, על ידי ביצוע טרנספורמציית לורנץ למערכת נעה, עבור שדה נח.

טרנספורמציית לורנץ למערכת נעה, נתונה על ידי,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}C & s & & \\ s & C & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

כאשר

$$C=\cosh\phi=\gamma$$
$$C=\sinh\phi=\beta\gamma$$

חוקי המשחק:

$$F'_{\mu\nu}\left(x'^{\delta}\right)=\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}F_{\alpha\beta}\left(\Lambda^{\gamma}{}_{\delta}x^{\delta}\right)$$

כלומר, לא רק השדות עוברות טרנספורמציה, אלא הם נמדדים בקוארדינטות אחרות.

כאשר החלקיק נע, השדה אינו איזוטרופי, אבל הוא רדיאלי.

במערכת המעבדה, נסמן את השדות החשמליים והמגנטיים ב־$\mathbf{E}'$ וב־$\mathbf{B}'$. בגלל סקלר לורנץ, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, ומאחר ובמערכת המנוחה של החלקיק $\mathbf{B}=0$, אז $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ בכל מערכת בה לא אחד מהם מתאפס.

x^{μ} הם במערכת החלקיק, ו־$(x')^{\mu}$ במערכת המעבדה (הנמצאת בתנועה יחסית לחלקיק).

הנוסחאות $\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{x}}{r^3},\mathbf{B}=0$ נכונות לכל זמן t. במערכת המעבדה, השדות תלויים בזמן. נחשב את B' ו־E' בזמן $t'=0$.

$$(x')^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

ו־$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix}C & s & & \\ s & C & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$. נרצה לראות מה התמונה של x' במערכת x:

$$\begin{pmatrix}ct\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Lambda^{-1}\begin{pmatrix}0\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & -s & & \\ -s & C & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

ולכן, הקשר בין הקוארדינטות של אותו מאורע הוא

$$x=Cx'$$
$$y=y'$$
$$z=z'$$

חוקי המשחק:

$$(F')_{\mu\nu}(E)=\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\mu}{}^{\beta}F_{\alpha\beta}F(E)$$

מחושבים לאותו מאורע E (בקוארדינטות אחרות). נחשב את

$$\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}=\begin{pmatrix}C & -s & & \\ -s & C & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

[9] 6.12.2009

נתחיל בלמצוא את $(E')_x$:

$$\begin{aligned}(E')_x &= (F')_{01} = {\Lambda_0}^{\alpha}{\Lambda_1}^{\beta}F_{\alpha\beta}\\ &= -\left({\Lambda_0}^{1}{\Lambda_1}^{0} - {\Lambda_0}^{1}{\Lambda_1}^{1}\right)F_{01}\\ &= -\left(C^2 - S^2\right)F_{01} = F_{01} = E_x\end{aligned}$$

אבל

$$(E')_x = E_x = e\frac{x}{r^3}$$

נצטרך לבטא את x', r' .

$$= eC\frac{x'}{r^3}$$

ולכן,

$$\boxed{(E'_x) = e\gamma\frac{x'}{r^3}}$$

נותר לנו לבטא את r^3, במערכת המתוייגת.

$$\begin{aligned}\left(r^2\right) &= x^2 + y^2 + z^2\\ &= C^2\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2\\ &= C^2\left(x'\right)^2 + \left(C^2 - s^2\right)\left(\left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2\right)\\ &= C^2\left(r'\right)^2 - s^2\underbrace{\left(\left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2\right)}_{(r')^2(\sin^2\theta')}\\ &= \left(r'\right)^2\left(C^2 - s^2\sin^2\theta'\right)\end{aligned}$$

כאשר הזווית θ' היא הזווית בין r' להיטל האורתוגונלי שלו על ציר $\hat{x}$.

למשל, על מעגל $r' = 1$, הוא מעגל פחוס, שרחב יותר על ציר x . אבל מה שמעניין אותנו זה $\frac{1}{r}$, שצר יותר על ציר x...

נמשיך עם טרנספרמציות השדות:

$$\begin{aligned}(E')_y &= (F')_{02} = {\Lambda_0}^{2}{\Lambda_2}^{\beta}F_{\alpha\beta} = {\Lambda_0}^{\alpha}F_{\alpha 2}\\ &= {\Lambda_0}^{0}F_{02} + {\Lambda_0}^{1}F_{12} = CE_y = eC\frac{y'}{r^3}\\ &= e\gamma\frac{y}{r^3}\end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו אותה נוסחא: $E'_x = e\gamma\frac{x'}{r^3}$ ו־ $E'_y = e\gamma\frac{y'}{r^3}$. בכיוון y השדה עבר טרנספורמציה ולקוארדינטה לא קרה כלום. בכיוון x השדה לא עבר טרנספורמציה, והקוארדינטה כן. ביחד, השדה בשני הצירים עבר את אותה הטרנספורמציה, לכן,

$$\frac{E'_y}{E'_x} = \left(\frac{y'}{x'}\right)$$

כלומר, השדה נותר רדיאלי בכל מערכת לורנץ.

למה זה לא היה צריך להיות ככה? במערכת המנוחה של החלקיק, השדה הוא רדיאלי. היינו מצפים שאם החלקיק במנוחה, נראה שדה שיוצא רדיאלי, ושמרכזו לא איפה שהחלקיק נמצא עכשיו, אלא איפה שהחלקיק היה כדי שהאינפורמציה על מיקומו של החלקיק תגיע אלינו אחרי $t = \frac{r}{c}$. אבל זה לא כך. השדה הוא רדיאלי סביב המיקום שבו החלקיק נמצא עכשיו. זה לא מפר קוזאליות, בגלל ההנחות של החישוב: שהחלקיק נע בתנועה קצובה "מתחילת הזמן" ועד סופו.

חישוב השדה המגנטי

טענה 5.1 $\mathbf{B}'=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}'$.

נסתכל על רכיבים:

$$\begin{aligned}(B')_x &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}F'_{jk}\\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}{\Lambda_j}^{\alpha}{\Lambda_k}^{\beta}F_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

j,k רצים על 2 ו־3. זי,

$$= -\frac{1}{2}\left({\Lambda_2}^{\alpha}{\Lambda_3}^{\beta}F_{\alpha\beta}-{\Lambda_3}^{\alpha}{\Lambda_2}^{\beta}F_{\alpha\beta}\right)$$

לכן, נוכל להפתר מכפל האיברים על חשבון החצי, ונקבל

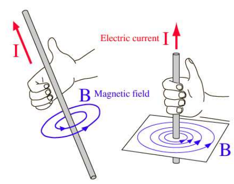
$$\begin{aligned}(B')_x &= -{\Lambda_2}^{\alpha}{\Lambda_3}^{\beta}F_{\alpha\beta}\\ &= -F_{23}=B_x=0\end{aligned}$$

את רכיב y צריך לבדוק בבית.

5.1 שדות וקטוריים

שדה חשמלי של מטען הוא שדה משמר, שיש לו מקור[10]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}&=0\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}&\neq 0\end{aligned}$$



לעומץ זאת , שדה מגנטי מכיל מערבולות, אך לא מקורות:
כאשר

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}&\neq 0\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}&=0\end{aligned}$$

באופן כללי, שדה הוא חסר מקורות אם $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}=0$, ושדה הוא חסר מערבולתיות אם $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}=0$

משפט 5.2 כל שדה וקטורי $\mathbf{V}$ ניתן לפירוק יחיד מהצורה

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_{rot}+\mathbf{V}_{source}+\mathbf{h}$$

כאשר

[10] הציורים הם מתוך hyperphysics

1. $\mathbf{V}_{rot}$ הוא שדה עם מערבולות, וללא מקורות: $\nabla\cdot\mathbf{V}_{rot}=0$ (נסמן גם ב־$\mathbf{B}$)
2. $\mathbf{V}_{source}$ הוא שדה עם מקורות, וללא מערבולות, $\nabla\times\mathbf{V}_{source}=0$ (נסמן גם ב־$\mathbf{E}$)
3. $\mathbf{h}$ הוא פונקציה הרמונית: $\Delta\mathbf{h}=0$

הוכחה:

$$\nabla\times\mathbf{E}=0\quad\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$$

אזי ρ קובע את $\mathbf{E}$: יש פוטנציאל, $\mathbf{E}=-\nabla\phi$, ולכן

$$\Delta\phi=-4\pi\rho$$

לכן,

$$\phi=\int\frac{\rho\left(y\right)}{\left|x-y\right|}\mathrm{d}y+\mathrm{harmonic}$$

כלומר, אם קיבלנו מקור לשדה שאינו רוטציוני, קבענו את ϕ ולכן גם את $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}=-\int\frac{\rho\left(y\right)}{\left(x-y\right)^{3}}\left(x-y\right)\mathrm{d}y$$

נקח שדה חסר מקורות: $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, אבל נקצה מקור למערבולתיות:

$$\nabla\times\mathbf{B}=4\pi\mathbf{J}$$

האם המקור $4\pi\mathbf{J}$ קובע את השדה $\mathbf{B}$ חד ערכית?

טענה 5.3 $\mathbf{J}$ קובע את $\mathbf{B}$ עד כדי פוקנציה הרמונית.

מאחר ו־$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ ו־

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=4\pi\mathbf{J}$$
$$-\Delta\mathbf{A}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)=4\pi\mathbf{J}$$

נבחר $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. (מאחר ו־ $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{B}=0$, חייב להתקיים: $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$, כדי לקיים את המשוואה $\nabla\times\mathbf{B}=4\pi\mathbf{J}$) אנחנו יכולים לבחור כך את $\mathbf{A}$ מאחר ו־$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$. אזי,

$$-\Delta\mathbf{A}=4\pi\mathbf{J}$$

ו־

$$\mathbf{A}\left(x\right)=\int\frac{\mathbf{J}}{\left(x-y\right)}\mathrm{d}y\implies$$
$$\mathbf{B}\left(x\right)=\nabla_{x}\times\left(\int\frac{\mathbf{J}\left(y\right)}{\left|x-y\right|}\mathrm{d}y\right)$$
$$=\int\left(\nabla_{x}\frac{1}{\left|x-y\right|}\right)\times\mathbf{J}\left(y\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int\frac{\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)\times J\left(y\right)}{\left(x-y\right)^{3}}\mathrm{d}y$$

(את המקורות של שדה כללי $\mathbf{V}$ נגדיר על ידי $\nabla\times\mathbf{V}=4\pi\mathbf{J}$ ו־$\nabla\cdot\mathbf{V}=4\pi\rho$, ואז נוכל לשחזר ממנו שדה "חשמלי" ושדה "מגנטי" על סמך המקורות הנ"ל) ∎

5.1.1 אפליקציה לכיול קולון

טענה 5.4 ניתן תמיד לבחור פוטנציאל וקטורי $\mathbf{A}$ וסקאלרי ϕ כך ש־

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}&=0\\ -\Delta\phi&=4\pi\rho\end{aligned}$$

כלומר, תמיד נוכל לבחור את הפוטנציאל הסקאלרי **כאילו הוא פותר בעיה באלקטרוסטטיקה!** **הוכחה:** מהגדרת הפוטנציאלים:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E}&=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}-\boldsymbol{\nabla}\phi\end{aligned}$$

אם נדרוש ש־$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$ ו־$\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, זה קובע את $\mathbf{A}$, חד־ערכית, על סמך $\mathbf{B}$.

$$4\pi\rho=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\dot{\mathbf{A}}\right)-\Delta\phi$$

אבל $\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\dot{\mathbf{A}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}}_{=0}$ ולכן,

$$\Delta\phi=-4\pi\rho$$

כלומר, הפוטנציאל הסקאלרי מקיים את חוק קולון האלקטרוסטטי. ■

התוצאה מכך: הפוטנציאלים "מעודכנים" ישירות לכל המרחב אודות מיקומו הנוכחי של החלקיק. אבל הפוטנציאל אינו גודל פיזיקאלי... אז זה לא מפר קוזאליות.

6 משוואת הגלים

משוואות מקסוול ההומוגניות מסופקות על ידי הפוטנציאלים A^{μ}. נותרו לנו משוואות מקסוול הלא־הומוגניות:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j^{\nu}$$

ניתן לפתור את המושואות הלא הומגניות על ידי הצגת פונציאלים:

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$$

ניתן להציב ולכתוב את כל משוואות מקסוול בצורה:

$$\partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}$$

או,

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}\right)A_{\mu}-\partial_{\nu}\left(\partial^{\mu}A_{\mu}\right)=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}$$

נטיל תנאי כיול של לורנץ: $\partial_{\mu}A^{\mu}=0$. לכן, האיבר השני נופל, וכל משוואות מקסוול מצתמצמות ל־

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}A_{\mu}=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}$$

כאשר $\Box=\partial^{\mu}\partial_{\mu}$, הדלמברטאין, וקיבלנו

$$\boxed{\Box A_{\nu}=\frac{4\pi}{c}j_{\mu}}$$

אם נדע להפוך את הדלמברטיאן, נוכל לפתור את המשוואה הזו באופן כללי.

6.1 משוואות מקסוול בריק

בריק, כאשר אין זרמים/מטענים, נקבל את המשוואות,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left(F^\star\right)^{\mu\nu} &= 0\\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu = 0\end{aligned}$$

אזי, פתרון אחד של המשוואות הנ"ל הוא $F^{\mu\nu}$ קבוע.
אם נרשום: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, אזי, מהמשוואה הלא־הומוגנית,

$$\begin{aligned}0 &= \partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\\ &= \boxed{\left(\partial^\mu \partial_\mu\right) A_\nu - \partial_\mu \left(\partial^\mu A_\mu\right) = 0}\end{aligned}$$

נותר לנו להטיל דרישות על A.
נוכל לדון בכיון קולון:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0\\ \Delta\phi &= -4\pi\rho = 0\end{aligned}$$

כאשר אין מקורות, הפתרון הוא $\phi = 0$, ולכן

$$A_\mu = (0, \mathbf{A})$$

במקרה זה, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, שקול ל־ $\partial^\mu A_\mu = 0$. (כיול מקובל אחר באלקטרודינמיקה הוא $\partial_\mu A^\mu = 0$, והוא כיול לורנץ, במקרה שלנו, שני הכיולים מתלכדים). במקרה שלנו, נשארנו אם

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0$$

היות ו־ϕ מתאפס, נשארנו אם

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu\right) A_j = 0$$

כאשר $\Box = \left(\partial_\mu \partial^\mu\right)$, הדלמברטיאן, וזוהי משוואת הגלים.

6.2 גלים מישוריים

נסמן ב־$x \cdot k$ את המכפלה $x^\mu k_\mu$, כאשר k_μ הוא 4־וקטור קבוע, ו־x^μ נקודה במרחב־זמן. אז

$$\partial_\mu \left(x \cdot k\right) = \partial_\nu \left(x^\mu \cdot k_\mu\right) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right) k_\mu = k_\mu$$

עבור פונקציה כללי,

$$\partial_\mu \left(x \cdot k\right) = f' \left(x \cdot k\right) \partial_\mu \left(x \cdot k\right) = f' \left(x \cdot k\right) k_\mu$$

והדלמברטיאן:

$$\begin{aligned}\partial^\mu \partial_\mu f \left(x \cdot k\right) &= \partial^\mu \left(f' \left(x \cdot k\right) k_\mu\right)\\ &= f'' \left(x \cdot k\right) \left(k_\mu k^\mu\right)\end{aligned}$$

נרצה לפתור את משוואת הגלים:

$$\partial_\mu \partial^\mu f = 0$$

לכן, קיבלנו,

$$f'' \left(x \cdot k\right) k_\mu k^\mu = 0$$

אם f'' אינה זהותית אפס, אז קיימת x שבה $f''(x) \neq 0$. אבל נוכל להניח שזה כך בכל x, ולכן, נוכל לחלק ב־f'' ולקבל,

$$\boxed{k_\mu k^\mu = 0}$$

כלומר, עבור k דמוי־אור, כל פונקציה f היא פתרון של משוואת הגלים.
פתרון אחד של המשוואה הוא גל מישורי:

$$A_j e^{ik\cdot x}$$

אזי, כדי ש־$\mathbf{k}$ יהיה דמוי אור, הוא צריך להיות מהצורה

$$k = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \qquad \frac{\omega}{c} = |\mathbf{k}|$$

6.2.1 אפקט דופלר

נסתכל על $k \cdot x$. זהו סקאלר־לורנץ, לכן הוא נשמר תחת טרנספורמציית לורנץ, אזי

$$k \cdot x = k' \cdot x' \qquad x' = \Lambda x$$

כמו כן, גל שהוא פתרון של משוואת הגלים במערכת אחת, יהיה גל גם אחרי טרנספורמציית לורנץ:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} C & S & & \\ S & C & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

אותו חוק טרנספורמציה גם יעביר את k:

$$(k')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu$$

נניח כי $\mathbf{k} = k\hat{x}$. אזי, $k = (k, k, 0, 0)$. מה קורה כשעושים טרנספורמציות לורנץ לוקטור דמוי אור?

$$(k')^0 = C(k)^0 + S(k)^1 = k(C+S)$$

עבור $C = \gamma$ ו־$S = \beta\gamma$

$$(k')^0 = \gamma(1+\beta)k$$

לכן,

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta)\frac{\omega}{c}$$

ונקבל את חוק דופלר:

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega}$$

במהירויות קטנות: $\sqrt{1+\beta} \sim 1 + \frac{1}{2}\beta$, ולכן, $\omega' \approx (1+\beta)\omega$.

שימוש מודרני לדופלר: קירור לייזר ניתן לקרר אטומים לטמפרטורות נמוכות למדי באמצעות קירור לייזר. לאטום יש שתי רמות, ומקרינים מימין אור שאינו מספיק לעורר בין שני הרמות הללו, והאטום שקוף לאור הנ"ל. מקרינים אור גם מצדד שני, באותה התדירות. כאשר האטום במנוחה, זהו כבר אטום "קר" אז סיימנו.

אם האטום נע שמאלה במהירות v, נסתכל על הבעיה ממערכת שצמודה לאטום. ממערכת שצמודה לאטום, יש לנו קרני אור משני כיוונים סופים במהירות שונה: מצד שמאל, $\omega + \delta\omega$ ומצד שמאל, $\omega - \delta\omega$, כאשר $\delta\omega$ נוצר עקב אפקט דופלר. אם מהירות האטומים מספיק גדולה, אז האטום שקוף לפוטון מצד ימין ובולע קרינה מצד ימין. האטום בולע קרינה מצד שמאל, שלה יש תדירות גבוהה יותר, ולכן מקטין את מהירותו. אבל! אחרי שאטום בולע את הקרינה, הוא פולט אותה, אבל הפליטה אחידה לכל הכיוונים, לכן, בממוצע ,הוא בכל מקרה יאיט.

6.2.2 סופרפוזיציה

יש לנו פתרון של משוואת הגלים אם אמפליטודה כלשהי:

$$A_j e^{ik\cdot x}$$

ניתן לקחת פתרונות שונים עבור k שונים, ולחבר אותם:

$$\int A_j\left(k\right)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}k$$

כל עוד נדרוש: $k\cdot k=0$. ואז נקבל

$$A_j\left(x\right)=\int\hat{A}_j\left(k\right)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}k$$

השדה הוא וקטור, ומבצע טרנספורמציית לורנץ כמו וקטור. כאשר כותבים סופרפוזיציה, צריך להקפיד לא לקלקל את תכונות הרטנספורמציה. לכן, אי אפשר לרשום $\int A_j\left(k\right)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}^3k$, כי נפח של קוביה תלת מימדית משתנה תחת טרנספורמציית לורנץ, לכן חשבון כזה לא יצלח. לכן, נכתוב,

$$A_j\left(x\right)=\int\delta^{(4)}\left(k\cdot k\right)\hat{A}_j\left(k\right)e^{ik\cdot x}\mathrm{d}^4k$$

פונקציית הדלתא־הארבעה מימדית מתאפסת בכל המרחב מלבד קונוסי האור. לכן, אפשר לבצע, בקלות, אינטגרל על $\mathrm{d}k^0$. אינטגרל זה לא־יתאפס על שתי נקודות זמניות, לכל נקודה מרחבית, אחת על קונוס העבר, נכנה אותה A_-, ואחת על קונוס העתיד, נכנה אותה A_+. הארגומנט של הדלתא אינו k ,כי אם k^2, לכן, $f\left(x\right)\delta\left(g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=f\left(x_0\right)\frac{1}{|g'\left(x_0\right)|}$, כאשר $g\left(x_0\right)=0$. במקרה שלנו, $g=k\cdot k$, ולכן $g'\left(k_0\right)=|2k_0|$, אבל $k_0=\pm|k|$, ולכן

$$\boxed{A_j\left(x\right)=\int A_+\left(\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\frac{\mathrm{d}^3k}{2\left|k\right|}+\int A_i\left(\mathbf{k}\right)e^{-i|\omega t-\mathbf{k}\mathbf{x}|}\frac{\mathrm{d}^3k}{2\left|k\right|}}$$

יש לנו כאן גל שמגיע מהעבר וגל שמגיע מהעתיד.

6.2.3 שדות חשמליים ומגנטיים

הפתרונות של משוואת הגלים החופשית היא מהצורה

$$\mathbf{A}=\int\hat{A}\left(k\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\mathrm{d}^3k$$

כאשר נבלע את $\frac{1}{2|k|}$ להגדרה של $\mathbf{A}$. זהו פתרון מאוחר עבור $\omega>0$, ופתרון מאוחר עבור $\omega<0$.
משוואת מקסוול מתלכדת אם משואת הגלים כאשר הוטל עליה כיול קולון. לכן, הפתרון הנ"ל הוא פתרון של משוואת מקסוול, בתנאי שהוא מקיים את כיול קולון : $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$. בגלים מישוריים:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=-i\int\hat{A}\left(k\right)\cdot\mathbf{k}\,e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\mathrm{d}^3k$$

כלומר, $\hat{\mathbf{A}}\left(k\right)\cdot\mathbf{k}$, או: $\mathbf{A}\left(k\right)\perp\mathbf{k}$, ואז זה הוא אכן פתרון של משוואת מקסוול בריק.

השדה החשמלי: $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\hat{A}}$ היות ו־$\mathbf{E}$ ו־$\mathbf{A}$ חלים באותו מישור, הוא המישור הניצב ל־$\mathbf{k}$, ולכן $\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$.

השדה המגנטי: כאשר $\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}=i\int\hat{A}\left(k\right)\times\mathbf{k}e^{i()}\mathrm{d}k$$

כלומר, $\mathbf{B}$ בנוי ממכפלה וקטורית של $\mathbf{A}$ו־$\mathbf{k}$, לכן, $\mathbf{B}$הוא סכום של וקטורים מאונכים ל־$\mathbf{k}$.

6.2.4 גלים מונוכרומתיים

מחפשים פתרון של משוואת הגלים מהצורה $\phi(x,t)=e^{i\omega t}\phi(x)$. ואז, משוואת הגלים מקבלת את הצורה:

$$\Delta\phi(x)=-\frac{\omega^2}{c^2}\phi(x)$$

אזי, עבור פתרון $\phi(x)=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ צריך להתקיים: $(\mathbf{k})^2=\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)$, כלומר, בהקבע ω, $\mathbf{k}$ מגדיר מעגל. אם k_x הוא ממשי ו־k_y הוא מרוכב, המשוואה תראה כמו

$$k_x^2-k_y^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

, והפתרון של המשוואה הוא היפרבולות. כאשר y מדומה, יש לגל כיוון: בכיוון y שלילי הפונקציה מתפוצצת, ובכיוון y שלילי, הפונקציה מתכנסת לאפס. אם נסתכל רק על חצי העולם, $y>0$, אפשר להסתכל על גלים כאלו.
במקרים כאלו, נקבל שאורך הגל מתקצר יחסית לתדירות, והגל דועך עם הזמן.

6.2.5 פולריזציה

נניח גל מישורי בכיוון ציר z. אז גל מישורי עם $z\|k$, הוא מהצורה:

$$\hat{x}E_xe^{i(kz)}+E_y\hat{y}e^{ikz}$$

(ב־$t=0$, $\omega t=0$, ולכן לא נרשום אותו). כאשר הגל נע לכיוון $\hat{z}$, E נמצא במישור $x-y$, ולכן הגל מתואר על ידי (E_x,E_y), שתי משרעות, לכיוון x ו־y. כל אחת מהמשרעות, יכולה להיות מספר מרוכב. נרצה להבין איזה פיזיקה מסתתרת בארבעת המספרים הללו.

כשכותבים פתרון מרוכב למשוואה לינארית ממשית, מתכוונים בעצם לחלק הממשי, אבל את החלק הממשי צריך לקחת רק בסוף החישוב. לכן, על Ae^{ikz} , כאשר A מרוכב: $A=|A|\,e^{i\alpha}$, צריך להסתכל כמו ועל $\cos(kz+\alpha)$. ב־A יש שני מספרים: האמפליטודה של A, והזזת־הפאזה.

- אם נקח $(E_x,E_y)\to\lambda(E_x,E_y)$, כאשר λ מספר חיובי (ממשי..) אז הגדלנו פי λ את האמפליטודה של כל הגל
- אם λ הוא מרוכב, $\lambda=e^{i\alpha}$, הזזנו את הגל בפאזה α.

אמפליטודה+פאזה, שני פרמטרים, מגדירים לנו מישור.
שני הפרמטרים הנוספים, ביחד, יתארו לנו פני־כדור. כדור זה מכונה כדור בלוך או כדור פואנקרה. נסביר מה מבטאות נקודות על פני הכדור:

- בקוטב הצפוני, השדה החשמלי השקול מסתובב על פני מעגל, נגד כיוון השעון. בקוטב הדרומי – לכיוון ההפוך
- על קו המשווה, תהיה פולריזציה לינארית לכיוון כלשהו, כאשר הנקודה הנגדית לנקודה על קו המשווה תתן כדור מאונך לה
- בכל שאר הכדור, יש קיטוב אליפטי כלשהו

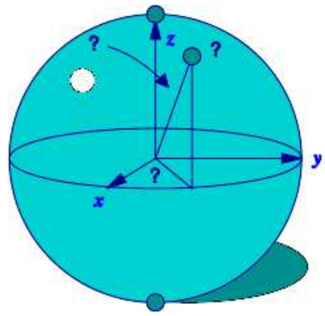
חישוב מקדים בשדות ממשיים[11] השדה החשמלי יהיה מהצורה:

$$\mathbf{E}=(\cos\theta\cos(\phi-\beta))\,\hat{x}+(\sin\theta\cos(\phi+\beta))\,\hat{y}$$

כאשר $\phi=kz-\omega t$. התוספת של $\cos(\phi+..)$ מבטיח שהשדה $\mathbf{E}$ הוא פתרון של משוואת הגלים, ו־θ מחלקת את השדה במישור $x-y$. יש פאזה 2β בין רכיבי x ו־y.

טענה 6.1 אם נסתכל בגל ב־$t=0$ (או ב־$z=0$), תמי נראה שהשדה $\mathbf{E}$ רץ על אליפסה (כולל אליפסות מנוונות, מעגל וקו).

[11] 20.12.2009



איור 4: כדור בלוך, ויקיפדיה

$$E_x = \cos\theta\left(\cos\phi\cos\beta + \sin\left(\phi\right)\sin\beta\right)$$
$$E_y = \sin\theta\left(\cos\phi\cos\beta - \sin\phi\sin\beta\right)$$

נחלק ב־ $\cos \setminus \sin$

$$\frac{E_x}{\cos\theta} = \cos\phi\cos\beta + \sin\left(\phi\right)\sin\beta$$
$$\frac{E_y}{\sin\theta} = \cos\phi\cos\beta - \sin\phi\sin\beta$$

נכתוב את הביטוי במטריצה:

$$\begin{pmatrix}\frac{E_x}{\cos\theta}\\ \frac{E_y}{\sin\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \cos\beta & -\sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

הדטרמיננט של המטריצה הוא $-2\cos\beta\sin\beta$, ולכן, המטריצה הפוכה עבור $\cos\beta\sin\beta$, ולכן,

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \cos\beta & -\sin\beta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{E_x}{\cos\theta}\\ \frac{E_y}{\sin\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

מאחר ו־$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, אבל אלו הם פונקציות לינאריות של E_x, E_y , לכן, תהיה לנו תבנית בילינארית ב־E_x, E_y. תהיה לנו פונקציה ממעלה שניה ב־E_x, E_y , מהצורה $AE_x^2 + BE_y^2 + CE_xE_y$,

$$Q\left(E_x, E_y\right) = 1$$

תבנית בילינארית ששווה ל־1, יכולה לתאר מעגל, אליפסה או היפרבולה. אבל A, B חיוביים וגדולים מ־C, ולכן זוהי איננה היפרבולה. הפתרון הכללי הוא אליפסה או מעגל.

למה היחס בין הצירים, בתוספת לזווית, מתאר כדור? יש לנו $\left(E_x, E_y\right)$ מרוכבים. נבחר כי $\left|E_x\right|^2 + \left|E_y\right|^2 = 1$. באותה מידה, ניתם לכתוב $\left(\psi_\uparrow, \psi_\downarrow\right)$, פונקציות גל של ספין, שמנורמלות ל־1. אבל ממכניקה קוונטית, אתחנו יודעים ש־ $\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}$ ו־$\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix} e^{i\alpha}$, הם זהים, כלומר, הכפלה כללית בפאזה אינה משנה את המצב. כל הספינים האפשריים בשלושה מימדים, יוצרים כדור.

מה הכיוון $\hat{n}$ ב־3 מימדים שמתאים לספין $\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}$? נכתוב את $\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \psi_\downarrow\end{pmatrix}$. נתעניין בפונקציית הגל עד כדי פאזה, לכן, נוכל להסתכל על מטריצת הצפיפות $\rho = \left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|$. מטריצת הצפיפות שמורה תחת החלפת מופע, $\left|\psi\right\rangle \to e^{i\alpha}\left|\psi\right\rangle$. לכן, אם נחזור לכתיב בשדות,

$$\rho = \begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{E}_x & \bar{E}_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left|E_x\right|^2 & E_x\bar{E}_y\\ \bar{E}_xE_y & \left|E_y\right|^2\end{pmatrix}$$

מטריצת הצפיפות של השדות החשמליים, ו־$\det\rho=0$, ו־$\mathrm{tr}\rho=1$.

נסתכל במטריצות פאולי: $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}\right)$ אלו הן מטריצות חסרות עקבה והרמיטיות, ולכן ניתן לכתוב את ρ באמצעות מטריצת היחיד בתוספת ל־I , לכן,

$$\rho=\frac{1}{2}\left(c\cdot I+n_x\sigma_x+n_y\sigma_y+n_z\sigma_z\right)$$

קל לקבוע את המקדם c, מאחר ו־$\mathrm{Tr}\rho=1$, והעקבה של $\frac{1}{2}cI$ היא גם 1, ולכן, $c=1$. כמו כן, בצורת הכתיבה הזו,

$$\det\rho=\det\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+n_z&n_x+in_y\\n_x-in_y&1-n_z\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(1-n_z^2-n_x^2-n_y^2\right)$$

לכן, מהדרישה, $\rho=0$, נקבל כי $n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$. לכן, $\hat{n}$ וקטור יחידה על כדור. לכן,

$$n_x=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\rho\sigma_x\right)$$
$$n_y=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\rho\sigma_y\right)$$
$$n_z=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\rho\sigma_z\right)$$

אני לא בטוח שהמקדם $\frac{1}{2}$ צריך להיות כאן. - רונן.

לכן, בהנתן ρ, נוכל לבנות את הכיוון המתאים של הוקטור $\hat{n}$.

בתוך הכדור יש אור מקוטב חלקית (Partialy polerized). נניח ונסתכל על חבילת גלים, שמורכבת מצירוף לינארי של גלים שונים עם k,ω שונים. נניח ויש לנו גל שבנוי מחבילת גלים, ואנחנו ממצעים על הגל, $\rho=\begin{pmatrix}\left\langle|E_x|^2\right\rangle&\left\langle E_x\bar{E}_y\right\rangle\\\left\langle\bar{E}_xE_y\right\rangle&\left\langle|E_y|^2\right\rangle\end{pmatrix}$, ולכן, שדות שונים עם קיטוב שונה ־ אבל גם תדירות שונה, ולכן השדה הכולל הוא מקוטב חלקית.

6.2.6 פולריזציה – דוגמאות

עבור גל

$$\mathbf{E}\left(z,t\right)=\left(\hat{x}E_x+\hat{y}E_y\right)e^{i(kz-\omega t)}$$

כאשר E_x ו־E_y הם מספרים מרוכבים

- האמפליטודה הכללית, $\sqrt{|E_x|^2+|E_y|^2}$
- הפאזה הכללית, $\left(e^{i\alpha}E_x,e^{i\alpha}E_y\right)$

לכן, נקבע את הגודל שלהם ונסתכל עליהם כד דדי פאזה. במכניקה קוונטית, מסתכלים על מספרים מרוכבים עד כדי פאזה כוללת.

$$\left|\psi\right\rangle\cong e^{i\alpha}\left|psi\right\rangle$$

נסתכל על מטריצת הצפיפות

$$\rho=\frac{1}{|E_x|^2+|E_y|^2}\begin{pmatrix}|E_x|^2&E_x\bar{E}_y\\\bar{E}_xE_y&|E_y|^2\end{pmatrix}$$

לכן, אפשר לכתוב את $\rho=\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\right)$, כאשר $\boldsymbol{\sigma}$ הן מטריצות פאולי, ו־$\hat{n}$ וקטור יחידה.
בחירה אפשרית של מטריצות פאולי,

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix},\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},i\sigma_y=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

לכן,

$$\rho = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x + in_y \\ n_x - in_y & -n_z \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_x + in_y \\ n_x - in_y & 1-n_z \end{pmatrix}$$

ו־

$$\det\rho = \frac{1}{4}\left(1 - n_z^2 - \left(n_x^2 + n_y^2\right)\right)$$

אז, כדי לחלץ ממטריצת הצפיפות את הכיוון,

$$n_j = \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left(\rho\sigma_j\right)$$

דוגמה

$$(E_x, E_y) = (1, i)$$

ולכן, פונקציית הגל תהיה

$$\mathbf{E} = (\hat{x} + i\hat{y})\, e^{i(kz-\omega t)}$$
$$= \hat{x}\cos\phi - \sin\phi \qquad (\phi = kz - \omega t)$$

זהו שדה מעגלי שמסתובב נגדר כיוון השעון (עם הזמן)

נחשב את הרכיבים n_xמודד את החלקים הממשיים מחוץ לאלכסון,

$$n_x = 0$$

n_z מודד את ההפרש בין אברי האלכסון. אבל הם שווים, ולכן

$$n_z = 0$$

ואילו n_y מודד את החלקים המדומים מחוץ לאלכסון. לכן,

$$n_y = +1$$

לכן, נמקם את הנקודה שמתאימה לקיטוב מעגלי כזה, תתאים לקוטב הצפוני, לכן, נכוון את ציר y החיובי בכיוון הקוטב הצפוני.

קיטוב כמו $(E_x, E_y) = (\cos(\theta), \sin\theta)$ יושב על קו המשווה, והוא

$$\mathbf{E} = (\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)\cos\phi$$

והוא קיטוב לינארי.

6.3 פתרון משוואות מכסוול למקור נתון

כאן, נפתור את משוואות מקסוול בהנתן המקורות – כלומר, מספר חלקיקים שנעים (או נחים.. במרחב)

אם נתונים המסלולים של כל החלקיקים, אז אנו יודעים את צפיפות הזרם, J^μ.

כאן, נתונים לנו הזרמים, J^μ, (כך ש־ $\partial_\mu J^\mu = 0$) , ונרציה לפתור את המשוואות ולדעת אילו שדות $F^{\mu\nu}$ יוצרים המקורות הנתונים.

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$
$$\partial^\mu \left(F^\star\right)_{\mu\nu} = 0 \implies F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

אם מציבים את הביטוי עבור פוטנציאל,

$$\partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}$$

לכן, קיבלנו משוואה אחת:

$$\boxed{\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}\right)A_{\nu}-\partial_{\nu}\left(\partial^{\mu}A_{\mu}\right)=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}}$$

נבחר כיול לורנץ: $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$, ונקבל את המשוואה:

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}\right)A_{\nu}=\frac{4\pi}{c}j_{\nu}$$

כלומר, אנחנו רוצים לדעת לפתור את המשוואה

$$\Box\phi=f$$

כאשר f נתונה, ו־ϕ נעלם.
אנחנו רוצים למצוא את האופרטור ההפוך לדלמרטיאן, $\Box$, ולמצוא

$$\phi=\left(\Box^{-1}\right)f$$

מפתרון משוואת פואסון, אנחנו יודעים שאם נפתור משוואה כאשר המקור היא δ, נדע לפתור את המשוואה. לכן, נרצה, ראשית כל, לפתור את המשוואה,

$$\boxed{\Box G=4\pi\delta^{4}\left(x\right)}$$

כלומר, לפתור את המשוואה עבור מטען נקודתי שמופיע ונעלם לרגע. מטען זה אינו מקיים את משוואת שימור הזרם. אם נדע לפתור את המשוואה הזו, נדע למצוא את השדות של מקורות "חוקיים" לפי עקרון הסופרפוזיציה.

6.3.1 פונקציית גרין מאוחרת למשוואת הגלים

נרצה לפתור את המשוואה:

$$\Box G_{>}\left(x\right)=4\pi\delta^{4}\left(x\right)$$

כאשר $x^{\mu}\implies x$. אזי,

$$\boxed{G_{>}\left(x\right)=2\Theta\left(t\right)\delta\left(s\right)}\qquad s=x_{\mu}x^{\mu}$$

כאשר $\Theta\left(t\right)=\begin{cases}1 & ,t>0\\0 & ,t<0\end{cases}$. כלומר, המקור מייצר שדות רק בעתיד ,לכן היא מכונה "פונקציית גרין המאוחרת".
$\delta\left(s\right)\neq0$ כאשר $s=0$, כלומר, על קונוס האור. לכן, הפתרון של המשוואה חי על קונוס־אור־עתיד.
נתעקב מעט על $\delta\left(s\right)$ –

$$s=x_{\mu}x^{\mu}=\left(ct\right)^{2}-r^{2}$$

$$\delta\left(f\left(r\right)\right)=\frac{\delta\left(r^{\star}\right)}{\left|f'\left(r^{\star}\right)\right|}$$

s מתאפס כאשר $ct=r$ ו־$cr=-r$. r הוא תמיד חיובי, ובגלל ה־Θ, אנחנו דנים רק בזמנים חיוביים. לכן, רק עבור $ct=r$

$$\delta\left(s\right)=\delta\left(\left(ct-r\right)\left(ct+r\right)\right)$$

ומאחר והמוכפל השני לא מתאפס אף פעם, נקבל

$$
\begin{aligned}
&= \delta\left((ct-r)\cdot 2r\right) \\
&= \frac{\delta\left(ct-r\right)}{2r}
\end{aligned}
$$

או, במילים אחרות,

$$
\boxed{G_{>} = \Theta\left(t\right)\frac{\delta\left(t-r\right)}{r}}
$$

זהו פתרון יפה יותר, כי הוא מתאר דעיכה של $\frac{1}{r}$, שמאפיינת קרינה.

לדוגמא נקח חלקיק שמאיץ, ונרציה לחשב את השדה בנקודה מסויימת. נרצה לתאר את החלקיק הזה כאוסף של מקורות מנצנצים. כל ניצנוץ שנמצא על מסלולו של החלקיק, ייצור קונוס־אור של שדה. אם נבחן את השדה בנקודה מסויימת, אז הנקודה תושפע רק מהנקודה שבה קונוס האור האחורי של הנקודה, פוגשת את מסלולו של החלקיק. כלומר, רואים את המקור בנקודה שבו היה כשהחלקיק יצא ממנו.

הוכחת הנוסחה על מנת להוכיח את הנוסחא בקלות יחסית, נניח כמה הנחות שיפשטו את הפיתוח, בדומה לצורה שבה מצאנו את פונקציית גרין לשדות חשמליים. למקור אין מבנה, ולכן הוא איזוטרופי במרחב ובזמן, לכן, נחפש פונקציה $f\left(s\right)$, כאשר $s = x_{\mu}x^{\mu}$. בנוסף, נדרוש שהפתרון יהיה מאוחר, כלומר, רק בעתיד של המקור, ולכן, $G_{>} = \Theta\left(t\right)f\left(s\right)$. עם ההנחות הללו, נרצה למצוא את $f\left(s\right)$.

ראשית, נפתור את המשוואה בעבר, עבור $t<0$.

$$
G_{>}\left(t<0\right) = 0
$$

לכן, $\delta^{4}\left(x\right) = 0$, כאשר x בעבר. גם בעתיד, $\delta^{(4)}\left(x\right) = 0$,

$$
\Box\left(\Theta\left(s\right)f\left(s\right)\right) = 0
$$

אבל בזמנים חיוביים, $\Theta = 1$, ולכן, נפתור פשוט

$$
\begin{aligned}
\Box f\left(s\right) &= 0 \\
\partial^{\mu}\partial_{\mu}f\left(s\right) &= 0
\end{aligned}
$$

נגזור פעם ראשונה:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}f\left(s\right) &= f'\left(s\right)\frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} \\
\frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial\left(x_{\nu}x^{\nu}\right)}{\partial x^{\mu}} = 2x_{\mu}
\end{aligned}
$$

ולכן,

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}f\left(s\right) &= 2x_{\mu}f'\left(s\right) \\
\partial^{\mu}\partial_{\mu}f\left(s\right) &= \partial^{\mu}\left(2x_{\mu}f'\left(s\right)\right) \\
&= 2\underbrace{\left(\partial^{\mu}x_{\mu}\right)}_{=4}f'\left(s\right) + \left(2x_{\mu}\right)\left(\partial^{\mu}f'\left(s\right)\right) \\
&= 8f'\left(s\right) + 2x_{\mu}f''\left(s\right)\underbrace{\left(\partial^{\mu}s\right)}_{2x^{\mu}} \\
&= 8f'\left(s\right) + 4\underbrace{x_{\mu}x^{\mu}}_{s}f''\left(s\right) \\
&= 8f'\left(s\right) + 4sf''\left(s\right) \\
&= 4\left(sf\right)''
\end{aligned}
$$

לכן, המשוואה $\Box f(s)=0$, שקולה ל -

$$\cancel{4}(sf)''=0$$

לכן,

$$\begin{aligned}(sf)'&=c_1\\ sf&=c_1s+c_2\end{aligned}$$

אז מצאנו את f: היינו רוצים לחלק ב־s, אבל אפשר לעשות את זה רק עבור $s\neq 0$. ניתן לקבוע ד־

$$f=\frac{c_1}{s}+c_2\qquad(s\neq 0)$$

ולקוות (לשווא) שזה יעבוד. נסתכל על המשוואה,

$$sf=c_1s+c_2+0$$

טענה 6.2 $s\delta(s)=0$

מאחר ו־$\int s\delta(s)=s|_{s=0}=0$. לכן, נוכל לכתוב

$$sf=c_1s+c_2+\lambda s\delta(s)$$

הערה 6.3 חוקי המשחק של פונקציית δ: מותר לעשות לה אינטגרל רק כנגד פונקציות חלקות וממוקמות.

לכן,

$$\boxed{f(s)=\frac{c_2}{s}+c_1+\lambda\delta(s)}$$

לכן, פתרנו את המשוואה,

$$\Box G=\Box\delta(s)=0\qquad t>0,t<0$$

עד כדי בחירה של קבועים. נותר להראות ש־$c_1=c_2=0$.

אם $c_1\neq 0$, אז הפתרון הוא קבוע, ולכן חי גם מחוץ לקונוס האור. אם $c_1\neq 0$, אז הפתרון דועך אל מחוץ לקונוס האור. כלומר, אם הקבועים הללו לא מתאפסים, אנחנו מקבלים פתרונות לא פיזיקאליים.

לכן, מצאנו שבעתיד,

$$G_>=\Theta(t)\lambda\delta(s)$$

נותר לנו לקבוע את מחוק גאוס. נותר לנו לפתור את המשוואה רק ב־$t=0$.

נעביר קופסא ארבע־מימדית Ω, שמכילה את הראשית, וקונוס האור "חותך" את השפה המרחבית שלה. [12]

בכל מקום על הקופסא, $G=0$, חוץ מאשר בשתי נקודות החיתוך עם קונוס האור. מחוק גאוס,

$$\int_\Omega\Box G_>\mathrm{d}\Omega=\int 4\pi\delta^4(x)\,\mathrm{d}\Omega=4\pi$$

מצד שמאל, נקבל,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Box G_>\mathrm{d}\Omega&=\int(\partial_0G_>)\,\mathrm{d}s^0\\ &=\lambda\int(2x_0)\,\delta'(s)\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

[12] תיקון לחישוב... 29.12.2009, ערוך ומבולגן

כאשר $x_0 = cT$, כאשר T הוא גובה הקופסא. לכן, קיבלנו את המשוואה:

$$2\lambda cT \int \delta'(s)\,\mathrm{d}v = 4\pi \qquad (\star)$$

נרצה להראות ש־ $\lambda = 2$, על ידי חישוב האינטגרל

$$\begin{aligned}
\int \delta'(s)\,\mathrm{d}V &= 4\pi r^2 \mathrm{d}r \delta'(s) \qquad \left(s = (ct)^2 - r^2\right)\\
&= 4\pi \frac{1}{2} \mathrm{d}\left(r^2 r \delta'\left((cT)^2 - r^2\right)\right)\\
&= 2\pi \int \mathrm{d}\left(r^2\right)\left(\sqrt{r^2}\right)\delta'\left((cT)^2 - r^2\right)\\
\left(r^2 = \rho\right) \qquad &= 2\pi \int \mathrm{d}\rho\,\sqrt{\rho}\delta'\left((cT)^2 - \rho\right)
\end{aligned}$$

כדי לחשב אינטגרל של δ' , נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
&= -2\pi \int \mathrm{d}\rho \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\rho}\right)}{\mathrm{d}(-\rho)} \delta\left((cT)^2 - \rho\right)\\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{2\sqrt{\rho}} \delta\left((cT)^2 - \rho\right)\\
&= \frac{\pi}{cT}
\end{aligned}$$

לכן, בסך הכל, נציב ב־ $(\star)$ ונקבל:

$$2\lambda cT \frac{\pi}{cT} = 4\pi \implies \lambda = 2$$

רוצים לקבוע את המקדם λ, כך שיתן את עוצמת המקור $4\pi\delta^4(x)$. נקח קופסא ארבע מימדית המכילה את המקור, Ω , ונבצע אינטגרציה על שני האגפים על הקופסא:

$$\int_\Omega \Box G_> \mathrm{d}\Omega = \int 4\pi\delta^4(x)\,\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

לפי משפט גאוס על אגף שמאל,

$$\int_\Omega \Box G_> \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \partial_\mu G \mathrm{d}S^\mu$$

יש לנו כאן אינטגרל על מעטפת של קופסא ארבע־מימדית. על משט העבר, ועל שני משטחים שמקבילים ל־ct, הפונקציה אינה תורמת דבר. רק בנקודות בהם המשטח חותך את קונוס האור, יש תרומה מסויימת. נקודות החיתוך עם קונוס האור, יושבות בעצם במרחב על שפת כדור.

$$= \int_{\text{given } cT} \left(\partial_0 G\right)\mathrm{d}S^0$$

כאשר

$$\begin{aligned}
\partial_0 G &= \partial_0\left(\lambda\Theta(t)\,\delta(s)\right) = \partial_0\left(\lambda\delta(s)\right)\\
&= \lambda\delta'(s)\frac{\partial S}{\partial x^0} = \lambda\delta'(s)\cdot 2 \underbrace{x_0}_{ct\,\text{on surface}}\\
&= \lambda\delta'(s)\,cT
\end{aligned}$$

לכן, האינטגרל שלנו הוא

$$\int_\Omega \Box G_> \mathrm{d}\Omega = 2\lambda cT \int \delta'\left(c^2T^2 - r^2\right)\mathrm{d}V$$

כאשר נעבור בקואורדינטות כדוריות, לכן $\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$.

$$\int_0^\infty \underbrace{\delta'\left((cT)^2-r^2\right)}_{\delta'((cT-r)(cT+r))}4\pi r^2\mathrm{d}r$$

האינטגרציה היא מ־0 , ולכן הביטוי $cT+r$ לא יתאפס, ולכן התרומה של הדלתא היא כאשר $cT=r$, לכן,

$$\to\delta'\left[(cT-r)(2cT)\right]=\frac{1}{ct}\delta'(cT-r)$$

אזי,

$$\int_\Omega \Box G_>\mathrm{d}\Omega\propto\int\frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{2cT}\delta'(cT-r)=\int\frac{4\pi}{2ct}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\right)\delta(cT-r)$$

כאשר העברנו את הנגזרת לפי r

$$\begin{aligned}&=\frac{2\pi}{cT}\left.(2r)\right|_{r=cT}\\&=4\pi\end{aligned}$$

משהו בפיתוח הזה שגוי. ברשימות של יוסי זה בסדר. התוצאה הסופית היא נכונה

ולכן, הביטוי כולו הוא

$$\int_\Omega\Box G_>\mathrm{d}\Omega=\frac{2\lambda(cT)(4\pi)}{2cT}=4\pi\lambda$$

$$G_>=2\Theta(t)\,\delta(s)$$

או, לחלקיק שמנצנץ בראשית,

$$\boxed{G_>=\Theta(t)\,\frac{\delta(ct-r)}{r}}$$

6.3.2 פוטנציאל של חלקיק נע

נפתור את המשוואה:

$$\Box\phi(x)=4\pi\rho(x)$$

כאשר

$$\rho(x,t)=e\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{z}(t))$$

כלומר, נתון קו עולם של מטען שנתון על ידי $z^\mu(\tau)$, כאשר τ זמן־עצמי, ו־t הזמן במעבדה, ו־$z^\mu(t)$ תנועה במעבדה.

טענה 6.4 מצאנו את $G_>(x)$ עבור מקור שיושב בראשית. נסמן ב־ $G_>(x,y)$ הוא שדה בנקודה x של מקור בנקודה y:

$$G_>(x,y)=\Theta\left(x^0-y^0\right)\frac{\delta\left(\left(x^0-y^0\right)-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

לכן, השדה הסקאלרי ϕ בנקודה x, עבור מקור נקודתי בנקודה y, נתון על ידי המשוואה:

$$\Box G_{>}(x,y)=4\pi\delta(x-y)$$

ועבור פונקציה כלשהי ρ,

$$\Box\phi_{\rho}(x)=4\pi\rho(x)$$

נוכל, לפי עקרון הסופרפוזיציה, להסתכל על המקור בתור $\rho(x)=\int\rho(y)\,\delta(x-y)\,\mathrm{d}y$. לכן, נוכל לכתוב את תהפתרון:

$$\phi_{\rho}(x)=\int\rho(y)\,G_{>}(x,y)\,\mathrm{d}^{4}y$$

טענה 6.5 ניתן תמיד לדרוש תנאי־כיול לורנץ, על A_μ: $\partial^{\mu}A_{\mu}=0$

הוכחה: נניח ש־ $(\partial^{\mu}A_{\mu})(x)=\rho(x)$, פונקציה סקאלרית שאינה אפס. תחת טרנספורמציית כיול,

$$A'_{\mu}=A_{\mu}-\partial_{\mu}\Lambda$$

נגזור:

$$\partial^{\mu}A'_{\mu}=(\partial^{\mu}A_{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda)=\rho(x)-\Box\Lambda$$

אז, נדרוש ש־ $\rho(x)-\Box\Lambda=0$, כלומר, נצטרך לפתור את המשוואה $\Box\Lambda=\rho(x)$, אותה אנחנו יודעים לפתור.
■

נרצה להוכיח את המשוואה:

$$\boxed{\phi(x)=\frac{\gamma}{R\cdot u}}\tag{1}$$

היא הפתרון של המשוואה

$$\Box\phi=4\pi\rho=4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}(t))$$

נתון מסלול החלקיק,

$$z^{\mu}(t)=(ct,\mathbf{z}(t))$$

כפונקציה של הזמן במעבדה. לפעמים נרצה לחשוב על $z^{\mu}(\tau)$, כפונקציה של הזמן העצמי. עבור חלקיק נקודתי, $\rho(x)$ מגדיר פונקצית־דלתא תלת־מימדית לכל נקודה בזמן.

$$\rho(x)=\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{z}(t))$$

אזי,

$$\begin{aligned}\phi_{\rho}(x)&=\int\mathrm{d}^{4}y\,\delta^{3}(\mathbf{y}-\mathbf{z}(t))\,G_{>}(x,y)\\&=\int\mathrm{d}y^{0}G_{>}(x,z)\end{aligned}$$

נגדיר: $R^{\mu}=x^{\mu}-z^{\mu}$, ונציב את פונקצית־גרין.

$$\begin{aligned}&=2\int\mathrm{d}y^{0}\,\delta(R\cdot R)\,\theta\left(x^{0}-y^{0}\right)\\&=2\int\mathrm{d}\tau\frac{\mathrm{d}(tc)}{\mathrm{d}\tau}\delta(R\cdot R)\,\Theta\end{aligned}$$

לפי, $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$,

$$= 2c \int \mathrm{d}\tau \gamma \delta \left(R \cdot R\right) \Theta$$

הדלתא מתאפסת בדיוק על קונוס האור. אנחנו עשויים להיות מוטרדים מכך שיתקבלו שני זמנים מהדלתא ־ גם על קונוס האור הקדמי, וגם על האחורי. נסמן ב־$\tau^\star$ את זמן המפגש עם קונוס האור.

$$= \frac{2c\gamma\left(\tau^\star\right)}{\left|\frac{\mathrm{d}(R\cdot R)}{\mathrm{d}\tau}\right|}$$

נסתכל על הנגזרת $\frac{\mathrm{d}(R\cdot R)}{\mathrm{d}\tau} = 2\left(R \cdot \dot{R}\right) = 2R \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(x - z\right) = -2R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = -2R \cdot u \cdot c$ אזי,

$$= \frac{2c\gamma\left(\tau^\star\right)}{2\left(R \cdot u\right)c} = \frac{\gamma\left(\tau^\star\right)}{\left(R \cdot u\right)}$$

נשים לב ש־ $R \cdot u$ הוא תמיד גודל חיובי.

הסבר המשוואה $\phi\left(c\right) = \frac{\gamma}{R\cdot u}$ נרצה לחשב את השדה ϕ בנקודה $\mathbf{x}$. נקח את הנקודה $\mathbf{x}$, ונוציא ממנה קונוס־אור־אחורי. קונוס האור האחורי של הנקודה יפגוש את החלקיק שיצר את השדה בנקודה z. נחשב את γ בנקודה:

$$\gamma = \left.\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right|_z$$

וזוהי ה־γ שמציבים במשוואה. גם את המהירות של החלקיק,

$$u^\mu = \left.\frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}s}\right|_z$$

נחשב בנקודה z. כלומר, כדי לדעת את ϕ בנקודה $\mathbf{x}$ נחשב שני גדלים, u^μ ו־γ בנקודה z. לבסוף, נסתכל על וקטור המרחק בין הנקודות,

$$R^\mu = x^\mu - z^\mu$$

קונוס האור בהכרח יפגוש את החלקיק פעם אחת בדיוק:

- קונוס האור פוגש את החלקיק רק אם החלקיק נע מהר יותר ממהירות האור
- קונוסי אור שיוצאים מנקודה אחת כל הזמן מכסים את כל המרחב זמן – ולכן, בכיוון השני, אם החלקיק קיים כל הזמן, קונוס האור האחורי של $\mathbf{x}$ בהכרח יפגוש אותו.

6.3.3 משוואות מקסוול בכיול לורנץ

משוואות מקסוול בכיול לורנץ הן:

$$\Box A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu$$

אם מציבים בה את המשוואה ההומוגנית: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_{|mu}$, נקבל

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu\right) A_\nu - \partial_\nu \left(\partial^\mu A_\mu\right) = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

ואם דורשים כיול לורנץ, $\partial^\mu A_\nu = 0$.

הפעם, מחפשים פתרון שהוא 4־וקטור, והמקור הוא גם כן 4־וקטור. כלומר, בפתרון הקודם, נרצה להרחיב את הפתרון ל־4־וקטור.

$$A_\mu\left(x\right)=e\frac{u_\mu}{\left(R\cdot u\right)}$$

כאשר גם כאן, u_μ מחושב עבור החלקיק על קונוס האור האחורי, ו־R הוא המרחק בינהם. זהו חוק־קולון בכתיב קו־ואריאנטית.

נסתכל, למשל על חלקיק, אשר בנקודה z שלו – ברגע המפגש עם קונוס האור האחורי, החלקיק נמצא במנוחה. במערכת הזו,

$$u=\left(1,0,0,0\right)$$

כלומר, ל־A_μ יש רק רכיב 0 – הפוטנציאל הסקאלרי. הוקטור R^μ הוא דמוי אור, לכן, $R^\mu R_\mu=0$. לכן, $R_\mu=\left(\left|\mathbf{r}\right|,\mathbf{r}\right)$. ל־$u$ יש רכיב זמני, ולכן $\left(R\cdot u\right)=\left|\mathbf{r}\right|$

$$A_0=\frac{e}{\left(R\cdot u\right)}=\frac{e}{\left|\mathbf{r}\right|}$$

והנוסחא היא אכן חוק קולון.

הוכחת הפתרון המטען הוא נקודתי, לכן,

$$j_\mu\left(x\right)=e\delta^{(3)}\left(x-z\left(t\right)\right)v_\mu$$

בחרנו להכפיל ב־v_μ כי אנחנו רוצים לקבל 4־וקטור אמיתי. אם היינו מכפילים $\delta^{(3)}$ ב־4־וקטור, u_μ, לא היינו מקבלים 4־וקטור באגף ימין של המשוואה. אם נכפיל $\delta^{(3)}$ ב־4־וקטור, נקבל 4־וקטרו תקין. אזי, נציב,

$$v_\mu=\left(c,\mathbf{v}\right)$$

אבל בכל זאת נרצה לכתוב את המשוואה באמצעות u_μ. נשתמש בזהות: $\gamma v_\mu=cu_\mu$, כאשר u_μ הוא ה־4־מהירות במערכת החלקיק. לכן

$$j_\mu\left(x\right)=e\delta^{(3)}\left(x-z\right)\frac{cu_\mu}{\gamma}$$

מהנוסחא הזו נובע:

$$\begin{aligned}\Box A_\mu\left(x\right)&=\frac{4\pi}{c}\frac{ec}{\gamma}\delta^{(3)}\left(x-z\right)u_\mu\left(\tau\right)\\&=\left(\frac{4\pi e}{\gamma}u_\mu\left(\tau\right)\right)\delta^{(3)}\left(x-z\right)\end{aligned}$$

לכן, מהפתרון לפוטנציאל סקאלרי במשוואת הגלים, נוסחא (1) , מתקבל,

$$A_\mu\left(x\right)=\frac{\gamma\left(\tau\right)}{\left(R\cdot u\right)}\frac{e}{\gamma}u_\mu=\frac{eu_\mu}{\left(R\cdot u\right)}$$

יחידות הפתרון פתרון זה אינו יחיד. ראשית כל, קיימים גם פתרונות מוקדמים. פתרון זה הוא יחיד אם נניח שאנחנו מסתכלים רק על הפתרונות המאוחרים של השדות, וזהו.

תנאי־כיול לורנץ יש לוודא שהפתרון מקיים את תנאי כיול לורנץ.

$$\partial^\mu A_\mu=0$$

נבדוק את התנאי במערכת בה החלקיק בזמן τ נמצא במנוחה, $\partial^0A_0=0$.

החלקיק נמצא במנוחה בנקודה z, ואנחנו נסתכל על השדה בנקודה x במרחק דמוי־זמן ממנה. נסתכל על $A_0\left(x\right)$, ונשאל כיצד ישתנה A_0 אם נזיז את הזמן. בנקודה $x+\left(\mathrm{d}t,0,0,0\right)$, נקבל שדה שנוצר על ידי החלקיק בזמן $z+\left(\mathrm{d}t,0,0,0\right)$. אם החלקיק במנוחה, המרחק, R^μ בין x ו־z ובין $x+\mathrm{d}t$ ו־$z+\mathrm{d}t$ הוא שווה, ולכן הנגזרת של A , ∂^0A_0, מתאפסת.

6.3.4 חישוב השדות

לפי הנוסחא

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

לכן, הנוסחא למציאת השדות של חלקיק בתנועה היא

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{e}{c}\left(\frac{R_{[\mu}\dot{u}_{\nu]}}{(R\cdot u)^2} - \frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}\cdot R\cdot\dot{u}\right) + e\frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}}$$

כאשר נגדיר את הסימון: $A_{[\mu}B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$.

השימוש במשוואה דומה: כדי לחשב את השדות $F_{\mu\nu}$ בנקודה x, נעביר מהנקודה x קונוס־אור אחורי, שפוגש את מסלול החלקיק בנקודה אחת, z. גם כאן, $R^\mu = x^\mu - z^\mu$. u^μ היא מהירות החלקיק בנקודה z, ו־$\dot{u}^\mu$ היא תאוצת החלקיק באותה נקודה.

מה נכנס לחישוב השדה?

- 4־וקטורים:

  – $R_\mu = x_\mu - z_\mu$, u_μ , $\dot{u}_\mu$

- סקאלרים:

  – $(R\cdot u)$, $(R\cdot\dot{u})$.

לכאורה, עשויים להופיע גם $R\cdot R$ אבל הוא מתאפס (דמוי אור) ו־$u\cdot u = 1$ ו־$u\cdot\dot{u} = 0$. סקאלר נוסף שלא מופיע במשוואה ויש לו ערך הוא $u\cdot u$, שלא יכול להופיע כי גזרנו רק פעם אחת.

איך אפשר לנחש את הנוסחה משיקולי מימדים? $F_{\mu\nu}$ הוא טנזור אנטי־סימטרי. לכן, אנחנו צריכים להרכיב אותו מקומוטטור של ארבע־וקטורים, $V_{[\mu}W_{\nu]}$. למשל, נסתכל על $R_{[\mu}u_{\nu]}$, והוא אכן מופיע עד כדי כפל בסקאלר. גם $R_{[\mu}\dot{u}_{\mu]}$. בעקרון, אפשר לבנות גם את $u_{[\mu}\dot{u}_{\nu]}$, שלא מופיע.

משיקולי ממדים:

$$[F] = \frac{[r]}{[R]^2}$$

מהשיקולים הללו, ניתן לבחור את הסקאלרים שכופלים כל אחד מהאיברים במשוואה.

נוסחאת הגזירה בעקרון, זה תרגיל פשוט:

$$A_\mu = \frac{eu_\mu}{(R\cdot u)}$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\mu = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$$

אבל זה לא כזה פשוט: נסתכל על השדה x , הנמצא במרחק דמוי־אור מנקודה z, בה נמצא חלקיק במהירות u
.

כדי לגזור את $\partial_\mu A_\mu$, נרצה להזיז את נקודה x בארבעה מימדים ולבחון את השינוי בשדה. אבל חישוב השדה בנקודות שונות, דורש העברת־קונוס־אור מנקודות שונות, ולכן גם תכונות הנקודה z משתנות, לדוגמא, הזמן העצמי של החלקיק, τ. לכן, צריך להניח ש־ $\tau(x)$. לכן, כשכותבים ∂_μ בעצם, מתכוונים ל־..

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}$$

כאשר בשני הנגזרות $\frac{\partial}{\partial\tau}$ ו־$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, τ ו־x הם בלתי תלויים.

נרצה לחשב את הביטוי $\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}$. נמצא את הקשר בין x ו־τ. נרצה להסתכל על המסלול דמוי־האור בין הנקודה x לנקודה $z\left(\tau\right)$. עבור הוקטור $R^\mu = x^\mu - z^\mu\left(\tau\right)$, הוא וקטור דמוי־אור, ולכן מתקיים

$$R\cdot R = R^\mu R_\mu = 0$$

כאשר R הוא ההפרש בין כל שתי נקודות על המסלול. זו המשוואה שקובעת את τ בהנתן x. נגזור את $R\cdot R$, כדי לקבל משוואה לינארית, לכן,

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(R\cdot R\right) &= 0\\ 0 = \partial_\mu\left(R\cdot R\right) &= 2\left(\partial_\mu R\right)\cdot R\end{aligned}$$

אנחנו רוצים להשתמש במשוואת הגזירה:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}$$

ונחשב את $\partial_\mu R^\nu$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu R^\mu &= \partial_\mu\left(x^\nu - z^\nu\right) = \left(\partial_\mu x^\mu\right) - \left(\partial_\mu z^\mu\right)\\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} - \left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial z^\mu}{\partial\tau}\right)\\ &= \delta^\nu{}_\mu - \left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\left(cu^\mu\right)\end{aligned}$$

אבל ראינו ש־ $\left(\partial_\mu R\right)\cdot R = 0$, לכן,

$$0 = \left(\delta^\nu_\mu - c\left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)u^\nu\right)R_\nu = R_\mu - c\left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\left(u\cdot R\right)$$

ולכן,

$$R_\mu = c\left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right)\left(u\cdot R\right) \implies \boxed{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}\right) = \frac{1}{c}\frac{R_\mu}{\left(R\cdot u\right)}}$$

נציב אותה, ונקבל

$$\boxed{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c}\frac{R_\mu}{\left(R\cdot u\right)}\frac{\partial}{\partial\tau}}$$

הוכחת הנוסחא עבור שדות מאוחרים נחשב את $\partial_\mu A_\nu$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c}\frac{R_\mu}{\left(R\cdot u\right)}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{eu_\nu}{\left(R\cdot u\right)}\right)\\ &= -\frac{eu_\nu}{\left(R\cdot u\right)^2}\frac{\partial\left(R\cdot u\right)}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c}\frac{R_\mu}{\left(R\cdot u\right)}\left(\frac{\dot{u}_\nu}{\left(R\cdot u\right)} - \frac{u_\nu}{\left(R\cdot u\right)^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(R\cdot u\right)\right)\end{aligned}$$

נגזור את האיברים:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(R\cdot u\right)}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(x^\nu - z^\nu\right)u_\nu = \delta^\nu_\mu u_\nu = u_\mu\\ \frac{\partial}{\partial\tau}\left(R\cdot u\right) &= \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}\right)u^\mu + R_\mu\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial\tau}\right) = \frac{\partial\left(x_\mu - z_\mu\right)}{\partial\tau}u^\mu + R_\mu\dot{u}^\mu\\ &= -c\underbrace{u_\mu u^\mu}_{=1} + \left(R\cdot\dot{u}\right) = -c + \left(R\cdot\dot{u}\right)\end{aligned}$$

לכן,

$$\partial_\mu A_\nu = \frac{eu_\nu}{(R\cdot u)^2}u_\mu + \frac{e}{c}\frac{R_\mu}{(R\cdot u)}\left(\frac{\dot u_\nu}{(R\cdot u)} - \frac{u_\nu}{(R\cdot u)^2}\left(-c+(R\cdot \dot u)\right)\right)$$

נפריד לאיברים שתלויים ב־c ושלא תלויים בו:

$$= e\left(-\frac{u_\mu u_\nu}{(R\cdot u)^2} + \frac{R_\mu u_\nu}{(R\cdot u)^3}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{R_\mu \dot u_\nu}{(R\cdot u)^2} - \frac{R_\mu u_\nu}{(R\cdot u)^3}(R\cdot \dot u)\right)$$

נחשב את טנזור השדה:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_{[\mu}A_{\nu]} \\ &= e\left(\cancel{-\frac{u_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^2}} + \frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{R_{[\mu}\dot u_{\nu]}}{(R\cdot u)^2} - \frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}(R\cdot \dot u)\right)\end{aligned}$$

אבל $0 = u_{[\mu}u_{\nu]}$. לכן, נשאר אחד שלא תלוי ב־c, והוא $\frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}$. האיברים שתלויים ב־$c$ הם: $\frac{R_{[\mu}\dot u_{\nu]}}{(R\cdot u)^2}$ ו־$-\frac{R_{[\mu}u_{\nu]}}{(R\cdot u)^3}R\cdot \dot u$, כנדרש.

הערות כדי לפתור את המשוואה, צריך למצוא את τ , באמצעות המשווה $R\cdot R=0$, עבור x נתון. זה לא תמיד כל כך מעשיות. אנחנו רוצים להתימק מלפתור $R\cdot R=0$. במקרים מסויימים אפשר לקבל נוסחאות מפורשות:

1. החלקיק נע לאט יחסית למהירות האור
2. צופה מרוחק יחסית לגודל המקור (מרחק R, אורך מקור L, $\frac{L}{R}\ll 1$)

6.3.5 קרינת דיפול

נסתכל בנוסחא הכללית במקרה מיוחד: המקרה האידיאלי של חלקיק שנע לאט הוא חלקיק נייח, והמקרה האידאלי עבור צופה מרוחק הוא חלקיק נקודתי בראשית.

$$u_\tau = (1,0,0,0)$$

נסתכל בשדה המגנטי:

$$\begin{aligned} -B_k &= F_{ij} \\ &= \frac{e}{c}\left(\frac{R_{[i}\dot u_{j]}}{(R\cdot u)} - \frac{R_{[i}u_{j]}}{(R\cdot u)^3} + c\frac{R_{[i}u_{j]}}{(R\cdot u)^3}\right)\end{aligned}$$

u מופיע רק אם אינדקסים מרחביים, שהם מתאפסים, לכן, שני המחוברים האחרונים מתאפסים.

$$= \frac{R_{[i}\dot u_{j]}}{(R\cdot u)^2}$$

כאשר $(R\cdot u)^2 = r^2$ לכן,

$$-B_k = \frac{R_{[i}\dot u_{j]}}{r^2}$$

כאשר $R_i = -\mathbf{x}_i$ ו־ $\dot u_j = (-a_j/c)$ לכן,

$$= -\frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{x}_{[i}\mathbf{a}_{j]}}{r^2} = -\frac{e}{c^2}\frac{(\mathbf{x}\times\mathbf{a})_k}{r^2}$$

לכן,

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{x}}{r^2}}$$

ונוסחא דומה לשדה החשמלי. כאשר

1. נרצה לחשב את $\mathbf{B}\left(\mathbf{x},t\right)$. אנחנו צריכים להיות מודאגים מהזמן שבו מחשיבם את התאוצה, $\mathbf{a}\left(t\right)$. צריך לחשב $\mathbf{a}\left(t-\frac{r}{c}\right)$. התאוצה מחושבת לזמן המוקדם המתאים.
2. $\mathbf{B}\propto\frac{1}{r}$: קרינה דועכת לאט.
3. $\mathbf{B}\perp\mathbf{a}$ ו־$\mathbf{B}\perp\mathbf{x}$.
4. אם $\mathbf{a}\|\mathbf{x}$, אז $\mathbf{B}=0$.

נחשב את $\mathbf{E}$: גם כאן, האיברים עם u_j תורמים רק מהרכיב האפס שלהם. אם $u=\left(1,0,0,0\right)$ אז $\dot{u}=\left(0,\frac{\mathbf{a}}{c}\right)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_j=F_{0j}&=\frac{e}{c}\left(\frac{R_{[0}\dot{u}_{j]}}{\left(R\cdot u\right)^2}-R_{[u}u_{j]}\frac{\left(R\cdot\dot{u}\right)}{\left(R\cdot u\right)^3}\right)+\frac{eR_{[0}u_{j]}}{\left(R\cdot u\right)^3}\\&=\frac{e}{c}\left(\frac{R_0\dot{u}_j}{r^2}+R_ju_0\left(\frac{R\cdot\dot{u}}{r^3}\right)\right)-\frac{eR_ju_0}{r^3}\end{aligned}$$

אבל $u_0=1$, ולכן,

$$=\frac{e}{c}\left(\frac{-\frac{1}{c}\mathbf{a}_j}{r}+R_j\frac{\left(R\cdot\dot{u}\right)}{r^3}\right)-\frac{eR_j}{r^3}$$

כאשר $R_j=-x_j$,

$$=-\frac{a_j}{r}+\frac{e}{c}\left(-x_j\frac{\left(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}\right)}{r^3}\right)+\underbrace{\frac{ex_j}{r^3}}_{columb\,law}$$

לכן,

$$\mathbf{E}=+\frac{e}{c^2r}\left(-\mathbf{a}_j+\left(\hat{x}\mathbf{a}\right)\hat{x}_j\right)+\frac{e\mathbf{x}}{r^3}$$

שני האיברים הראשונים נראים כמו:

$$\pm\hat{x}\times\left(\hat{x}\times\mathbf{a}\right)=\hat{x}\left(\hat{x}\cdot\mathbf{a}\right)-\mathbf{a}\left(\hat{x}\cdot\hat{x}\right)$$

מתקנים את המינוסים שיוסי פספס ו־

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{e}{c^2r}\left(\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\mathbf{a}\right)\right)+\frac{e\hat{r}}{r^2}}$$

6.3.6 נוסחא מקורבת

$$\boxed{\mathbf{B}=\frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}\left(t_r\right)\times\hat{x}}{r}}+\left(O\left(\frac{v}{c}\right)+O\left(\frac{\ell}{r}\right)\right)$$
$$\boxed{t_r=t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}}+\left(O\left(\frac{v}{c}\right)+O\left(\frac{\ell}{r}\right)\right)$$

נוסחאות אלו אינן מדוייקות.

גזירת הנוסחאות בשיעור הקודם הוכחנו את הנוסחא:

$$\mathbf{B}=\frac{e}{c^2}\frac{a\left(t_r\right)\times\hat{r}}{r}$$

כנוסחא מוייקת כאשר החלקיק נח בזמן t_r בראשית: $t_r=t-\frac{r}{c}$.

טענה 6.6 אם החלקיק נע במהירות $v\ll c$, הנוסחא עדין נכונה, כאשר

$$\mathbf{B}=\frac{e}{c^2}\frac{a\left(t_r\right)\times\hat{r}}{r}\left(1+O\left(\frac{v}{c}\right)\right)$$

צריך לקחת את הנוסחא עבור $F_{\mu\nu}$, ולהציב במקום $u=(1,0,0,0)$ את $u=\gamma\left(1,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)$. עבור $\frac{v}{c}\ll 1$,

$$u\approx\left(1,\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(1+O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right)$$

לכן, כל האיברים שלא ספרנו במקרה הראשון, יקבלו תוספת ב־$O\left(\frac{v}{c}\right)$.

טענה 6.7 הנוסחא נכונה כנוסחה מקורבת, לחלקיק שלא בהכרח נמצא בראשית, אבל נמצא באזור $|z|<\ell$, כאשר $r\gg|\ell|$. (כאשר $|z|$ הוא מיקום החלקיק, ו־ℓ הוא התחום שבו החלקיק חי ו־r הוא המרחק לנקודת המדידה)

מה קורה אם החלקיק לא בראשית, אלא בנקודה z?
נצטרך להמיר את $|x-z|\to|r|$.

$$r\to|\mathbf{x}-\mathbf{z}|=\sqrt{(x-z)^2}$$
$$(x-z)^2=x^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}+z^2=r^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}+\mathbf{z}^2$$

אזי,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{z}|=r\sqrt{1-\frac{2\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{r^2}+\frac{\mathbf{z}^2}{r^2}}$$

הנחנו ש־ $r\gg\ell\geq|z|$, לכן, $\left(\frac{z}{r}\right)^2\ll 1$, קטן.

$$\approx r\sqrt{1-2\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{r^2}\right)}\approx r\left(1-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{r^2}\right)$$
$$=r-\underbrace{\hat{r}\cdot\mathbf{z}}_{\sim\ell}$$

לכן, יש לנו טעות מסדר גודל של $\frac{\ell}{r}$:

$$\mathbf{B}=\frac{e}{c^2}\frac{a\left(t_r\right)\times\hat{r}}{r}\left(1+O\left(\frac{\ell}{r}\right)\right)$$

לסיכום, קיבלנו נוסחא עבור $\mathbf{B}$ כאשר

- $|v|\ll c$
- וכאשר $r\gg|\ell|$

$$\mathbf{B}=\frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}(t_r)\times\hat{r}}{r}\left(1+O\left(\frac{v}{c}\right)+O\left(\frac{\ell}{r}\right)\right)$$

עדין נותר לנו למצוא את t_r.
המשוואה ל־t_r:

$$t_r=t-\frac{|x-z(t_r)|}{c}$$

זוהי משוואת קונוס־האור.
אבל כבר כתבנו נסחא פשוטה ל־

$$|z-z(t_r)|=r\left(1-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{r^2}\right)$$

וזרקנו איברים מסדר גודל של $\left(\frac{\ell}{r}\right)^2$. לכן,

$$t_r=t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{r}+O\left(\left(\frac{\ell}{r}\right)^2\right)$$

6.4 קרינת דיפול

נניח שלתנועת המטען יש תדירות אופיינית ω (בתנועה הרמונית). לכן, יש לנו סקאלת אורך אופיינית, $\lambda=\frac{c}{\omega}$, אורך הגל של הקרינה.

אנטנה קטנה אם $|\ell|\ll\lambda$. האנטנה פולטת קרינה באורך גל הגדול מאורך האטנטה. למשל, לפלאפון $\omega\sim10^9Hz$ ואז $\lambda\sim\frac{3\cdot10^{10}}{10^9}\sim30cm$. גודל של מכשיר סלולרי הוא כמה סנטימטרים, הרבה יותר קטן. אטום מימן הוא מסדר גודל של אנגסטרם, ופולטה קרינה מסדר גודל של אלפי אנגסטרם.
אם האנטנה קטנה יחסית לאורך הגל, אז $t_r=\left(t-\frac{r}{c}\right)$ הוא קירוב טוב למיקום החלקיק

אנטנה גדולה כאשר גודל האנטנה הוא מסדר גודל של אורך הגל, או גדול יותר. כאן, נקבל:

$$t_r=t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{z}(t-r/c)}{c}$$

t_r נקבע על ידי משוואה סתומה:

$$t_r=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}(t_r)|}{c}$$

ראינו גם שבהנחה ש־$r\gg|\ell|$,

$$|x-z|=r\left(1-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{r^2}\right)+\text{small}$$

לכן, המשוואה עבור t_r שקולה בקירוב למשוואה,

$$t_r=t-\frac{r}{c}\left(1-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{r^2}\right)=t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{rc}(t_R)$$

נסמן: $\frac{\mathbf{x}}{r}=\hat{r}$, ונקבל,

$$\boxed{t_r=t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{c}}$$

זו עדין משווה סתומה. ברור שכדי לפתור את המשוואה בדיוק, אנחנו צריכים את מסלול החלקיק. נרצה לפתור המשוואה באופן מקורב, ונרצה לדעת, באיזה דיוק אנחנו רוצים לדעת את t_r.

מה זה קירוב טוב ל־t_r? הנוסחא לשדה ההמגנטי היתה

$$\mathbf{B}(r,t)=\frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}(t_r)\times\hat{r}}{r}$$

לכן, קירוב טוב ל־t_r תלוי בקצב שינוי התאוצה. לכן, צריך דיוק δt, כך ש־

$$\dot{a}\cdot\delta t\ll a\implies\delta t\ll\frac{a}{\dot{a}}$$

באופן כללי, זו שאלה קשה, שתלויה במסלול, אבל למשל, עבור מקור הרמוני:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=\mathbf{x}_0e^{i\omega t}\\ \mathbf{v}(t)&=i\omega\mathbf{x}\\ \mathbf{a}(t)&=i\omega\mathbf{v}\\ \dot{\mathbf{a}}(t)&=i\omega\mathbf{a}\end{aligned}$$

לכן, נדרוש את התנאי:

$$\frac{c}{\lambda}\delta t=\omega\delta t\ll1$$

נתחיל במקרה הפשוט של אנטנה קטנה

6.4.1 אנטנה קטנה

נדוב שוב בביטוי:

$$t_r=t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{rc}$$

t ו־$\frac{r}{c}$ יכולים להיות גודלים למדי. אבל $O\left(t_r-\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)=O\left(\frac{\ell}{c}\right)$. האיבר השלישי: $\frac{\mathbf{x}}{r}\sim1$, ו־ $\mathbf{z}\sim\frac{\ell}{c}$, לכן, $t_r\sim\frac{\ell}{c}$.

במקרה זה, $\lambda\gg|\ell|$, במקרה זה,

$$-\omega\frac{\hat{r}\cdot\mathbf{z}(t_r)}{c}=(\delta t)\,\omega\leq\delta t\,\ell$$

לכן,

$$\frac{\ell}{\lambda}\ll1$$

וניתן לזרוק את האיבר השלישי מ־t_R, ולקחת

$$t_r=t-\frac{r}{c}$$

6.4.2 אנטנה גדולה

אי אפשר לזרוק את האיבר השלישי, וצריך לפתור משוואה סתומה.

$$\begin{aligned}z(t_r)&=z\left(t_r-\left(t-\frac{r}{c}\right)+\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\\&=z\left(t-\frac{r}{c}\right)+\dot{z}\left(t_r-\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\end{aligned}$$

נראה כי אם $\lambda\frac{c}{V} \ll \ell$ אז ניתן להזניח את האיבר האחרון . נחשב את δt עבור הסדר השני בפיתוח טיילור

$$\omega\delta t = \frac{\hat{r}\cdot\dot{\mathbf{z}}\left(t_r-\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)}{c} = O\left(\frac{\omega}{c}\cdot v\cdot\frac{\ell}{c}\right)$$
$$= O\left(\frac{\ell}{\lambda}\frac{v}{c}\right) \ll 1$$

כלומר, נרצה ש־ $\frac{\ell}{\lambda}\frac{v}{c} \ll 1$, כלומר, $\frac{\lambda}{\beta} \gg \ell$. קיבלנו לכן שאם

$$\frac{v}{c} \ll 1, \frac{\ell}{r} \ll 1$$

ואם

$$\frac{\ell}{\lambda} \ll \frac{c}{v}$$

ניתן לחשב:

$$t_r = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r}\cdot z\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}$$

וזו משוואה מפורשת.

$$v = \omega\ell$$
$$\lambda = \frac{c}{\omega}$$

לכן,

$$\ell \ll \frac{c\lambda}{v} = \frac{c\frac{c}{\omega}}{\omega\ell} = \frac{c^2}{\omega^2\ell}$$
$$\ell^2 \gg \frac{c^2}{\omega^2}$$
$$\frac{\ell^2\omega^2}{c^2} \ll 1$$

6.4.3 חישוב עוצמת הקרינה מדיפול ופילוגה במרחב

$$\mathbf{B}(t,r) = \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}(t_r)\times\hat{r}}{r}$$

נדון במקרה של אנטרנה קטנה: $t_r = t - \frac{r}{c}$. $\mathbf{E} = \mathbf{B}\times\hat{r}$.
נחשב את וקטור פוינטינג:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

$\mathbf{P}$ בכיוון רדיאלי,

$$P = \frac{C}{4\pi}\mathbf{E}^2$$

נניח שהדיפול מכוון על ציר $\hat{z}$:

$$P = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{c^4}\frac{a^2\sin^2\varphi}{r^2}$$

כאשר $\mathbf{a} \times \hat{r} = |a| \sin \varphi$.
הספק הקרינה של הדיפול,

$$\begin{aligned}
\int P \mathrm{d}\,(\text{sphere}) &= \int P r^2 \,(2\pi) \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{4\pi} \frac{a^2 e^2}{c^3} \int_0^\pi \left(\sin^2 \varphi\right) (\sin(\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{4\pi} \frac{a^2 e^2}{c^3} \int_0^\pi \left(\sin^2 \varphi\right) \mathrm{d}\,(\cos \varphi) \\
&= \frac{2\pi}{4\pi} \frac{a^2 e^2}{c^3} \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \varphi\right) \mathrm{d}\,(\cos \varphi) \\
&== \frac{2\pi}{4\pi} \frac{a^2 e^2}{c^3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2
\end{aligned}$$

לכן, הספק הקרינה של חלקיק בתאוצה הוא:

$$\boxed{I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2}$$

הערה 6.8 אם יש המון חלקיקים – סוכמים:

$$\mathbf{B} = \sum \frac{e_j}{c^2} \frac{\hat{r} \times \mathbf{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

אם יש המון חלקיקים, עם $\mathbf{z}_j\,(t)$, אז

$$\mathbf{d}\,(t) = \sum e_j \mathbf{z}_j\,(t)$$

אז,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{d} \times \hat{r}}{r}$$

זהו המומנט הראשון של המטען, או הדיפול.

6.4.4 הקטסטרופה של פיזיקה קלאסית

נניח אלקטרון בתנועה מעגלית סביב הגרעין. ברגע נתון,

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{r}$$

כאשר Z מטען הגרעין. זהו ביטוי לאנרגיה של חלקיק בתנועה קפלרית. התאוצה הרדיאלית:

$$a = \frac{ze^2}{mr^2}$$

החלקיק מאיץ, ולכן הוא פולט קרינה:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{ze^2}{m}\right)^2 \frac{1}{r^4} \\
&= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{ze^2}{m}\right)^2 \left(\frac{2}{ze^2} E\right)^4
\end{aligned}$$

קיבלנו:

$$\dot{E} = -kE^4$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{E^4} = -k\mathrm{d}t$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(E^{-3}\right) = -k\mathrm{d}t$$

לכן,

$$\frac{1}{E^3} - \frac{1}{E_0^3} = (3k)\,(t-t_0)$$
$$E = \left(-\left|\frac{1}{E_0^3}\right| + 3k\,(t-t_0)\right)^{-1/3}$$

לכן, יש קבוע זמן שנתון על ידי

$$\boxed{T = \frac{1}{3k\,|E_0|^3}}$$

מציבים את המספרים, ומגלים, שנותר לנו חלקיק שניה לחיות..

חזרה לאנטנת דיפול ראינו שעבור אנטנת דיפול, גודל האנטה ℓ קטן מאורך הגל: $\ell \ll \lambda = \frac{\omega}{c}$, אזי, קירוב מספיק לזמן המוקדם, $t_r = t - \frac{r}{c}$. משוואת הגלים עם מקור היא בעצם תוצאה של שדות מאוחרים.
נסתכל על מקרה ספציפי: $\mathbf{B}\,(t,x) = \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}(t_r)\times\hat{r}}{r}$. נסתכל במקרה ההרמוני.

$$a\,(t) = \mathbf{a}e^{i\omega t}$$

אזי, השדה

$$\begin{aligned} B\,(t,x) &= \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}\times\hat{r}}{r}e^{i\omega t_r} \\ &= \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}\times\hat{r}}{r}e^{i\left(\omega t - \omega\frac{r}{c}\right)} \qquad \left(\frac{\omega}{c} = k\right) \\ &= \frac{e}{c^2}\frac{\mathbf{a}\times\hat{r}}{r}e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned}$$

כאשר, כידוע, $\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}$ הוא גל כדורי היוצא מהראשית.

כיוון הקרינה של דיפול אם דיפול מתנדנד, אז הוא אינו קורן בשני כיוונים: הכיוונים שבהם נע הדיפול. בכיוונים אלו, וקטור פוינטינג מתאפס.

משפט 6.9 אי אפשר לשדים שדה וקטורי קבוע שמשיק על כדור.
כי אי אפשר לסרק אפרסק.

שתי המשוואות הבסיסיות של הקורס: חוק ניוטון:

$$\boxed{m\dot{u}_\mu = eF_{\mu\nu}}$$

אם נתונים השדות, מה משוואת התנועה של חלקיק בשדות נתונים?
משוואות מקסוול נותנות אינפורמציה הפוכה:

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J_\nu}$$

אלו הן משוואות שקובעות את התפתחות השדות בהנתן מקור של זרמים J_ν נתון.
אנחנו לא ממש יודעים לפתור את המשוואות הללו אנליטית, ביחד. יש שני תרחישים שונים:

- מסתכלים על זרמים רציפים, והם קובעים את השדות, ואז עבור חוק ניוטון, יש המון חלקיקים.

דוגמא לבעיה משולבת – בעיית הדינמו כדור הארץ מסתובב סביב צירו, ויש לו גם שדה מגנטי. איך נוצר השדה המגנטי של כדור הארץ? (או של כל כוכב אחר שמסתובב..) . לא נדבר על הדינמו של כדור הארץ, אלא על דינמו פשוט:

דיסקה ממתכת מסתובבת סביב ציר, באמצעות מניע חיצוני. נוצר זרם, שמעבירים אותו לסליל שיוצר שדה מגנטי שמגביר את הסיבוב ואת הזרם ובלאגנים, ולא לגמרי הבנתי מה הולך שם. לא באמת אפשר לפתור מה הולך שם בדיוק

6.4.5 המחלות של אלקטרודינמיקה

נראה שאלקטרודינמיקה היא תורה לא־קונסיסטנטית.

בנינו את התורה כאסופה של חלקיקים נקודתיים. היינו חייבים לעשות את זה כי יחסות סובלת רק חלקיקים נקודתיים. אבל דברים מתבדרים:

$$E \sim \frac{e}{r^2}$$

$$E^2 \sim \frac{e^2}{r^4}$$

$$\int E^2 \mathrm{d}V = \int_0^1 \frac{e^2}{r^4} r^2 \mathrm{d}r = \infty$$

כלומר, כמות האנרגיה שיושבת סביב החלקיק היא אינסוף.

6.5 הכח של אברהם־לורנץ

6.5.1 חגורה קרינתית

חלקקי טעון נע בתנועה מעגלית קצובה, על מעגל, בהשפעת כח־חיצוני לא אלקטרומגנטי. נחשב כמה החלקיק קורן:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2$$

נניח שמהירות החלקיק איטית, ונחשב חישוב לא יחסותי:

$$\begin{aligned} a^2 = (a \cdot a) = (a \cdot \dot{u}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{a \cdot v}_{\perp,=0}\right) - \dot{a} \cdot v \\ &= -\dot{a}v \end{aligned}$$

לכן,

$$P = -\underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{a}\right)}_{=F} \cdot v$$

לביטוי הראשון שי שמשמעות של כח. נסמן את הכח,

$$F = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}}$$

וננסה לפרש אותו. זהו הכח שפועל על החלקיק בגלל הקרינה. קיבלנו כח שהחלקיק מפעיל על עצמו. הוא מבטאת העובדה שהאנרגיה ככלל, נשמרת. כח זה נקראה הכח של **אברהם־לורנץ:**

$$\boxed{F_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}}}$$

(חסר – 20 דקות מתוך השיעור השני)

$$\boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ext} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}}}$$

איך ניתן לעבוד עם כח אברהם־לורנץ ולקבל תשובות פיזיקאליות? נניח שרוצים לפתור את המשוואה:

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_{ext}+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{a}}$$

כאשר הכח מאוד קטן. ננסה, פתרון הפרעתי. מצפים שהפתרון קרוב לפתרון של

$$m\mathbf{a}=F_{ext}\left(x\right)$$

לכן, ביקרוב, מתקיים:

$$\mathbf{a}=\frac{F_{ext}\left(x\right)}{m}$$
$$\dot{\mathbf{a}}=\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{ext}\left(x\right)=\frac{1}{m}\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)F\left(x\right)$$

לכן, בצורה הפרעתית, נסתכל על המשוואה:

$$\boxed{m\mathbf{a}=F_{ext}\left(x\right)+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{F}_{ext}\left(x\right)}$$

קיבלנו כח נוסף שפופורציוני למהירות. כח שפופורציוני למהירות הוא כח חיכוך.

דוגמא

$$F_{ext}=-kx$$

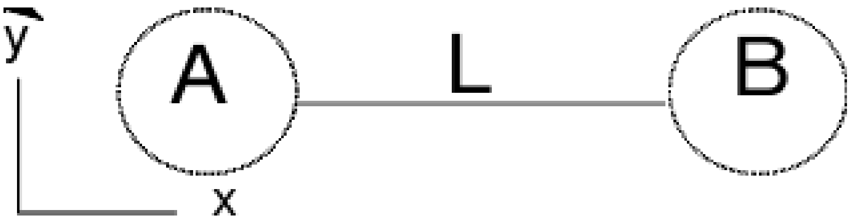
חלקיק בפוטנציאל הרמוני:

$$ma=-kx-\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\right)v$$

כאשר $\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\right)$ הוא מקדם החיכוך.

חישוב קצת מפחיד של כח אברבהם־לורנץ

- ראשית, מתייחסים לאלקטרון כאל חלקיק בגודל סופי, ε. באמצעות כח חיצוני, מאלצים את החלקיק לתנועה מסויימת. אזי, החלקים השונים של האלקטרון זזים. החלקים השונים של האלקטרון מפעילים כח זה על זה. מסתכלים על הכח שפועל על מקטע אחד על ידי מקטעים אחרים של האלקטרון.
- מחשבים את הכוחות שחלקים שונים מפעילים זה על זה. זוהי בעיה בשדות מאוחרים. נשאל את השאלה: איך נראה הכח בגבול שבו $\varepsilon\to 0$.



ועליו שני מטענים שנמצאים במרחק ε אחד מהשני

. מניחים אותם על ציר x , והם במרחק ε זה מזה. המטענים הללו במנוחה, ואנחנו מאיצים אותם יחד, בכיוון ציר $\hat{x}$. ברגע מסויים, החלקיק יראה את השדות שיצאו קודם מהחלקיק השני. אם עושים את החישוב המעצבן הזה, נקבל:

$$F=\left(\frac{e^2}{2\varepsilon c^4}\right)a-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{a}+O\left(\varepsilon\right)$$

מה הפירוש? נשאיף $\varepsilon \to 0$, אז האיברים ב־$O(\varepsilon) \to 0$. האיבר שלא תלול ב־ε הוא כח אברבהם־לורנץ. האיבר הראשון מתבדר. האבר הראשון הוא $F = ma$, כלומר, $m = \left(\frac{e^2}{2\varepsilon c^4}\right)$. אם נתאלם מכך שהאיבר אינסופי, הוא אומר שאולי המקור למסת האלקטרון הוא אלקטרומגנטי טהור. אבל המספר לא יוצא טוב.. אחת הדרכים להתאלם מהאינסוף הזה היא לכתוב את חוק ניוטון, $F = ma$, ו־m נתון. אז האיבר הזה מתחבר הוא מתחסר מ־m. לכן, נוכל לקבל ש־ $m = m_e \pm \frac{e^2}{2\varepsilon c^4}$, אבל זה אומר שהמסה של האלקטרון ללא שדה, היא אפס.