מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים ־ תרגול

מתרגל: סרגי לנזט

26 ביוני 2009

מחברת זו נכתבה משמיעה בהרצאות של סרגיי לנזט. מחברת זו מכילה חוסרים וטעויות. **אין הטכניון או מי מטעמו ־ ובפרט, הפקולטה למתמטיקה, על מרציה ומתרגליה, אחראים לתוכנו של מסמך זה.**
הערות והארות, אתם מוזמנים לשלוח ל־ronen@tx.tehcnion.ac.il

תוכן עניינים

1 חזרה על תורת הקבוצות הנאיבית

$f : X \to Y$ העתקה בין קבוצות.

- לכל $A \subseteq X$, התמונה של A $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\} \subseteq Y$.
- לכל $B \subseteq Y$, המקור של B - $f^{-1}(B) \subseteq X$ (f^{-1} הוא סימון בלבד, הוא לא מתייחס לפונקציה הפוכה)

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\} \subseteq X$$

- f נקראת **על** אם $f(X) = Y$ או בצורה שקולה: לכל $y \in Y$, קיים $x \in X$ כך ש-$f(x) = y$.
- f נקראת **חח"ע** אם לכל $x_1 \neq x_2 \in X$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- אם f חח"ע ועל, אזי קיימת פונקציה $g : Y \to X$ כך ש-$f \circ g = id_x$ ו-$g \circ f = id_y$. ל-g קוראים פונקציה **הפוכה** של f, והסימון $g = f^{-1}$.

תרגיל 1.1 יהו $f : X \to Y$ ו-$g : Y \to X$ שתי פונקציות כך ש-$g \circ f = id_x$.
הוכיחו ש-f חח"ע ו-g על.

1.0.1 אפיון של חח"ע ועל

1. f חח"ע $\iff$ לכל $x \in X$, $\{x\} = f^{-1}\left(f\left\{x\right\}\right)$
2. f על $\iff$ לכל $y \in Y$, $\emptyset \neq f^{-1}\left(\{y\}\right)$

משפט 1.2 1. לכל $A \subseteq X$ מתקיים ש-$A \subseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$ והשוויון $\iff$ f חח"ע

2. לכל $B \subseteq Y$ מתקיים ש-$f\left(f^{-1}\left(B\right)\right) \subseteq B$, והשוויון $\iff$ f על

הוכחה: של (1):

$$x \in A \Rightarrow f\left(x\right) \in F\left(A\right) \Rightarrow x \in f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$$

■

1.0.2 יחס שקילות של X

הגדרה 1.3 תת קבוצה $R \subseteq X \times X$ נקראת **יחס שקילות** על X אם:

1. $R \ni (x \in x)$ לכל $x \in X$ (רפלקסיביות)
2. $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$
3. $(x,y) \in R$ וגם $(y,t) \in R \Leftarrow (x,t) \in R$

סימונים: $x \sim_R y$, $x \sim y$, xRy ...

יחס שקילות $\sim$ מגדיר **מחלקות השקילות** כלומר, $\{y \in X | x \sim y\} = [x] \supseteq X$ ואז קבוצת המחלקות $X/\sim = \{[x] | x \in X\}$

דוגמה 1.1 נגדיר $\sim$ על $\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^{\star} : x = \lambda_y y$$

מהן מחלקיות השקילות:

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} | \exists \lambda_y \in \mathbb{R}^{\star} : x = \lambda_y y\}$$

למשל, עבור $x = 0$, $[0] = \{0\}$, $[1] = \mathbb{R}^{\star}$

הגדרה 1.4 נאמר שקבוצה X **שקולה** לקבוצה Y אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : X \to Y$. קיבלנו יחס שקילות. למחלקת שקילות של X נקרא "**עוצמה** של X" ונסמן אותה על ידי $|X|$ (סימונים אחרים - $\mathrm{Card}X$, $\#X$)

הגדרה 1.5

1. קבוצה X נקראת בת־מנייה, אם $|X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
2. קבוצה X נקראת מעוצמת רצף עם $|X| = |\mathbb{R}| = C = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

1.0.3 קבוצות בנות מניה

משפט 1.6

1. תת־קבוצה של קבוצה בת־מניה היא סופית או בת מניה
2. כל קבוצה אינסופית מכילה קבוצה בת מניה.
3. איחוד סופי או בן מניה של קבוצות בת־מניה הוא קבוצה בת מניה.
4. מכפלה ישרה של מספר סופי של קבוצות בנות מניה היא קבוצה בת־מניה

הוכחה: (3) נובע מכך ש־$|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$
אם $A_i=\{a_{i1},a_{i2},\ldots\}$, $\mathbb{N}\ni= i$. כי ניתן להגדיר אותו בצורה חח"ע על ידי זוגות של מספרים טבעיים.
נוכיח ש־ $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$,

$$\begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\ (2,1) & (2,1) & (2,3) & (2,4) & \ldots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \ldots \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4.3) & \\ & \vdots & & & \end{array}$$

נעבור על ה"מטריצה" באלכסונים בהנתן זוג, נמצא את מיקומו:

$$\varphi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$(m,n)\mapsto\binom{m+n-1}{2}+m$$

באלכסון של זוג (m,n), יש $(m+n-1)$ איברים, וזוג (m,n) עומד במקום ה־m. ■

2 תרגול שני

2.1 תרגיל

לכל $1\le p<\infty$

$$\ell_p=\left\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\;\middle|\;x_i\in\mathbb{R},\forall i\in\mathbb{N},\sum_{j=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\right\}$$

הוכיחו של־ℓ_p מרחב וקטורי נורמי ממשי ממימד אינסופי נגדיר פעולות:

- חיבור: $(x_i)_{i=1}^{\infty}+(y_i)_{i=1}^{\infty}=(x_i+y_i)_{i=1}^{\infty}$ נבדוק ש־$x+y\in\ell_p \iff \sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p<\infty$. אכן, לפי אי שוויון מינקווסקי,
  לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: (לפי מינקווסקי)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

ובגבול -

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p}\le\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}+\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p}\right)<\infty$$

- כפל בסקלר: לכל $\lambda\in\mathbb{R}$, ולכן $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$

$$\lambda\cdot x=(\lambda\cdot x_i)_{i=1}^{\infty}$$

נבדוק ש־$\lambda x\in\ell_p$ $\iff$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda x_i|^p\le\infty$$

לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p = |\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

הערה 2.1 עבור $p = \infty$,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| < \infty$$

לכל $i \in \mathbb{N}$,

$$|x_i + y_y| \leq |x_i| + |y_i|$$

הסופרימום שומר על אי השוויון, ולכן

$$\begin{aligned}\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| &\leq \sup\left(|x_i| + |y_i|\right) \\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i|\end{aligned}$$

לגבי כפל:

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\lambda x_i|$$

$$|\lambda x_i| = |\lambda| \, |x_i|$$

המספרים הם אי שליליים ולכן

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\lambda x_i| = |\lambda| \sup |x_i| < \infty$$

השוויון האחרון נכון רק כי λ אי־שלילי.
נראה ש־ℓ_p ממימד ∞.
עבור

$$\begin{aligned}&\varepsilon = \{\ell_i | i \in \mathbb{N}\} \\ &\ell_i = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k = \delta_{ik}\end{aligned}$$

ε קבוצה בת"ל אינסופית.
הנורמה על ℓ_p נתונה על ידי

$$\|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

צריך לוודא שהיא נורמה:

- $\|x\|_p \geq 0$ לכל $x \in \ell_p$ ו־$\|x\|_p = 0 \iff x = 0$
- לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ ולכן $x \in \ell_p$, צריך לוודא ש־

$$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$$

זה חישוב זהה לחישוב שביצענו עבור מכפלה בקבוע.

- אי שוויון המשולש - $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ - עשינו

הוכיחו ש־$\ell_1 \subsetneq \ell_2$ נראה שלכל $x \in \ell_1$, כלומר, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ מתקיים ש־$x \in \ell_2$, כלומר, $\sum |x_i|^2 < \infty$.
נשתמש באי־שוויון קושי־שוורץ: לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)$$

נקח גבול ל־∞ ונקבל

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\right) < \infty$$

הכלה ממש: צריך למצוא $x \in \ell_2$ ו־$x \notin \ell_1$.
נקח $x_i = \frac{1}{i}$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

הוכיחו ש־ℓ_1 אינו תת מרחב מטרי (נורמי) של ℓ_2 למשל,

$$\|e_1 + 2e_2\|_1 = 3 \neq \sqrt{5} = \|e_1 + 2e_2\|_2$$

2.2 תרגיל

יהיו (X, d_x) (Y, d_y) שני מרחבים מטרים. נגדיר $d = d_1 \oplus d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2)$$

הוכחיו ש־d אכן מטריקה על $X \times Y$:

•

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0$$

– אם $d = 0$,

$$d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2) = 0$$

אם כל אחד מהמחוברים הוא אפס

• סימטריות: קל

• אי שוויון המשולש:

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) = d_x(x_1, x_3) + d_y(y_1, y_3)$$
$$\leq \ldots$$

לפי אי שוויון המשולש עבור d_x, d_y

3 תרגול שלישי

3.1 תרגיל

תהא

$$\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\ell_1, \|\|_1)$$

שמתכנסת ל־$x \in \ell_1$.

- הוכיחו שלכל $k \in n$,

$$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|_1} x_k$$

התכנסות ב־ℓ_1 : $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\ell_1} x \iff \mathrm{d}_{\ell_1}\left(x^{(n)} - x\right)_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| \to 0$$

הסכום כולו שואף לאפס, צריך להוכיח שאם כך כל אחד מהמחוברים שואפים לאפס. כל אחד מהמחוברים חסום על ידי הטור, לכל n נתון. כל אחד מהמחוברים הוא אי שלילי, ולפי כלל הסנדוויץ:.
לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \le \left|x_k^{(n)} - x_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{n_k}^{(n)} - x_k\right| = \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| \to 0$$

ולכן גם $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| \to 0$.

- נניח ש־$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|_1} x_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$. האם הסדרה $\left(x^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ מתכנסת ב־ℓ_1?

לא.

דוגמאת נגד:

$$x^{(n)} = e_n$$

כאשר e_n איבר הבסיס ה־nי. לכל $n \in \mathbb{N}$, קיים $K_n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x_k^{(n)} = 0$ לכל $k \ge K_n$ץ לכן

$$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|_1}$$

אבל $\left(x^{(n} \in \ell_n\right)_{n=\mathbb{N}}$ לכ מתכנס ב־ℓ_1, כי אם היא היתה מתכנסת, הגבול היה חיב להיות אפס.
אבל, זה לא אפשרי כי $\mathrm{d}\left(x^{(n)}, 0\right) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

דוגמה שניה

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \\
x^{(2)} &= e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots\right) \\
x^{(3)} &= e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3 \\
x^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k
\end{aligned}$$

לכל $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k^{(n)}$, אבל הוקטור

$$\ell_1 \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$$

אינו מתכנס (כי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$)

3.2 תת מרחב

הגדרה 3.1 (X, d) מרחב מטרי. $\phi \neq A \subseteq X$.
הזוג (A, d_A) כאשר $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}|_{A\times A}$ נקרא **תת־מרחב** מטרי של (X, d)

3.2.1 תרגיל

הוכיחו שלכל $a \in A$ ולכל $r > 0$, $B_{\mathrm{d}_A}(a,r) = B_{\mathrm{d}}(a,r)(a,r) \cap A$ **הוכחה:**

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{d}_A}(a,r) &= \{b \in A | \mathrm{d}_A(a,b) < r\} \\ &= \{b \in X | \mathrm{d}(a,b) < r \wedge b \in A\} \\ &= \{b \in X | \mathrm{d}_A(a,b) < r\} \cap A \\ &= B_{\mathrm{d}}(a,r) \cap A \end{aligned}$$

■

3.2.2 דוגמה

$$(X = [0,2], \|\|)$$

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

נחשב

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{d}_A}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) &= B_{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap A \\ &= [0,2) \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

3.3 נקודות הצטברות

הגדרה 3.2 (X, d) מרחב מטרי, $\emptyset \neq A \subset X$

1. $a \in A$ נקראת **נקודה פנימית**. קיים $r > 0$ כך ש־ $B_{\mathrm{d}}(a,r) \subseteq A$

2. $a \in X$ נקראת נקודת **סגור** של A או נקודת **גבול** של A אם לכל $r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \phi$

(א) שקול לכך שקיימת סדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ כך ש־ $a \xleftarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} a_n$ (סימון לאוסף נקודות הגבול: $\bar{A}$)

3. $a \in X$ נקראת נקודת הצטברות, אם לכל $r > 0$,

$$(B_{\mathrm{d}}(a,r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

קבוצת נקודות ההצטברות מסומנת ב־A'

3.3.1 תרגיל

הוכיחו ש־$A' \subseteq \bar{A}$. האם יש תמיש שוויון?

ההכלה – ברורה מהגדרה.
לא תמיד יש שוויון – לדוגמא, נקודה מבודדת נמצאת בסגור אבל אינה נקודת הצטברות

$$(X = \mathbb{R}, \|\|) , A = [0,1] \cup \{5\}$$

כאן, $5 \in \bar{A}$ (יש סדרה קבועה, $x_n = 5$). $5 \notin A'$, כי $B_{\mathrm{d}}(5,2) \setminus \{5\} \cap A = \emptyset$.

3.3.2 תרגיל

נסמן ב־A'' את $(A')'$.
הוכיחו ש־$A'' \subseteq A'$, ויש מקרים של הכלמה ממש. **הוכחה:**

$$\begin{aligned} & a \in A'' \\ \iff & \forall r > 0, A' \cap B_d(a,r) \setminus \{a\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

צריך להוכיח ש־$\forall r > 0, A \cap (B_{\mathrm{d}}(a,r) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.
נקח

$$b \in A' \cap (B_{\mathrm{d}}(a,r) \setminus \{a\})$$

ניקח $0 < s = \frac{\min(\mathrm{d}(a,b), r - \mathrm{d}(a,b))}{2^{10}}$. אזי

$$B_{\mathrm{d}}(b,s) \subseteq B_{\mathrm{d}}(a,r) \setminus \{a\}$$

אבל $b \in A'$ ולכן $\exists c \in A \cap (B_{\mathrm{d}}(b,s) \setminus \{b\}) \neq \emptyset$.

$$c \in A \cap (B(a,r) \setminus \{a\}) \supset A \cap (B(b,s) \setminus \{b\})$$

■

דוגמה

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$A' = \{0\}$, $\{0\}' = \emptyset$.

4 והפעם – שעתיים תרגול!

4.1 (X, d) מרחב מטרי, (A, d_A) תת מרחב של X ו־$C \subseteq A$

נסמן את הסגור של C ב־A: $cl_A(C)$, אוסף נקודות הסגור של C בתת מרחב (A, d_A)
נסמן $int_A(C)$, אוסף הנקודות הפנימיות של C בתת מרחב (A, d_A).

א. הוכיחו ש־$cl_A(C) = A \cap \bar{C}$

$$\begin{aligned} cl_A(C) &= \{x \in A | \forall r > 0 : B_{\mathrm{d}_A}(x,r) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in A | \forall r > 0 : B_{\mathrm{d}_A}(x,r) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in A | \forall r > 0 : (B_{\mathrm{d}}(x,r) \cap A) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in A | \forall r > 0 : B_{\mathrm{d}}(x,r) \cap (A \cap C) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in A | \forall r > 0 : B_{\mathrm{d}}(x,r) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= A \cap \bar{C} \end{aligned}$$

ב. הוכיחו ש־$int_A(C)?A\cap int_X(C)$

$$\begin{aligned} int_A(C) &= \{x\in C | \exists r>0 : B_{\mathrm{d}_A}(x,r)\subseteq C\} \\ &= \{x\in C | \exists r>0 : B_{\mathrm{d}}(x,r)\cap A\subseteq C\} \end{aligned}$$

בבירור מתקיים: $int_A(C)\supseteq A\cap int_X(C)$, השאלההיא האם יש הכלה הפוכה?
לכל $x\in A\cap int(C)$

$$\begin{aligned} &\iff x\in A \,\text{and}\, \exists r>0 : B_d(x,r)\subseteq C \\ &\Rightarrow(1)\, x\in B_{\mathrm{d}}(x,r)\cap A = B_{\mathrm{d}_A}(x,r) \\ &\quad (2)\; B_{\mathrm{d}}(x,r)\cap A\subseteq C\cap A = 0 \\ &\Rightarrow x\in int_A(c) \end{aligned}$$

דוגמה לכך להכלה ממש:

$$C=[1,2] \quad A=[0,2], \quad X=(\mathbb{R},\mathrm{d}_n)$$

$$\begin{aligned} int(C) &= (1,2) \\ A\cap int(C) &= (1,2) \\ int_A(C) &= (1,2] \end{aligned}$$

נסביר למה הקטע סגור בשתיים: לכל $x\in(1,2)$, קיים $0<r$, כך ש־

$$(x-r,x+r)\subseteq(1,2)\subset(1,2]$$

אנחנו טוענים שגם 2 היא נקודה פנימית ביחס ל־A: הכדורים הפתוחים

$$B_{\mathrm{d}_A}(2,r) = (2-r,2]$$

4.2 תרגיל

(X,d) מרחב מטרי, $A,B\subseteq X$.

א. $int(A\cap B)?int(A)\cap int(B)$ **- מהו סימן השאלה?**

$$\begin{aligned} x\in int(A\cap B) &\iff \exists r>0 : B_{\mathrm{d}}(x,r)\subseteq A\cap B \\ &\Rightarrow B_{\mathrm{d}}(x,r)\subseteq A\wedge B_{\mathrm{d}}(x,r)\subseteq B \\ &\Rightarrow x\in int(A)\cap int(b) \end{aligned}$$

ננסה להוכיח הכלה מצד שני:

$$\begin{aligned} x\in int(A)\cap int(B) &\implies \exists r_A>0 : B_{\mathrm{d}}(x,r_A)\subseteq A, \exists r_B>0 : B_{\mathrm{d}}(x,r_B)\subseteq B \\ &\implies B_{\mathrm{d}}(x,r_B)\cap B_{\mathrm{d}}(x,r_A)\neq\emptyset \\ &\implies \exists r>0 : B_{\mathrm{d}}(x,r)\subseteq B_{\mathrm{d}}(x,r_B)\cap B_{\mathrm{d}}(x,r_A) \\ &\implies B_{\mathrm{d}}(x,r)\subseteq A\cap B\Rightarrow x\in int(A\cap B) \end{aligned}$$

כלומר, הקבוצות שוות

ב. $int\left(A\cup B\right)?int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$. **מה היחס?** $x\in int\left(A\cap B\right)$, אזי, בלי הגבלת הכלליות, $x\in int\left(A\right)$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\exists r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\subseteq A\subseteq A\cap B\\&\Rightarrow x\in int\left(A\cap B\right)\end{aligned}$$

הצד השני אינו מתקיים.

דוגמה להכלה ממש

$$X=\mathbb{R},A=[0,1),B=[1,2]$$

אזי

$$\begin{aligned}int\left(A\right)&=\left(0,1\right)\\int(B)&=\left(1,2\right)\\int(A)\cup int(B)&=\left(0,1\right)\cup\left(1,2\right)=\left(0,2\right)\setminus\left\{1\right\}\\int\left(a\cap B\right)&=\left(0,2\right)\end{aligned}$$

ג. $\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$

$$\begin{aligned}x\in\overline{A\cap B}&\iff\forall r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\cap\left(A\cap B\right)\neq\emptyset\\&\implies\forall r>0;B_{\mathrm{d}}\left(X,r\right)\cap A\neq\emptyset\wedge B_{\mathrm{d}}\left(X,r\right)\cap B\neq\emptyset\\&\implies x\in\bar{B}\wedge x\in\bar{B}\\&\iff x\in\bar{A}\cap\bar{B}\end{aligned}$$

ומה לגבי הכלה הפוכה? לא מתקיים

דוגמה להכלה ממש:

$$\begin{aligned}X&=\left(\mathbb{R},\mathrm{d}_1\right),A=\left(0,1\right),B=\left(1,2\right)\\\bar{B}&=[1,2]\\\bar{A}&=[0,1]\\\bar{A}\cap\bar{B}&=\{1\}\\A\cap B&=\emptyset\implies\overline{A\cap B}=\emptyset\end{aligned}$$

ד. $A\cup B=\bar{A}\cup\bar{B}$ **- היה בהרצאה**

ה. הוכיחו ש-$int\left(A\right)=X\setminus\left(\overline{X\setminus A}\right)$

$$\begin{aligned}x\in int\left(A\right)&\iff\exists r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\subseteq A\\&\iff\exists r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\cap\left(X\setminus A\right)\neq\emptyset\\&\iff x\notin\overline{X\setminus A}\\&\iff x\in X\setminus\left(\overline{X\setminus A}\right)\end{aligned}$$

מסקנה 4.1

$$\overline{X\setminus A}=X\setminus int\left(A\right)\implies X\setminus int\left(X\setminus A\right)$$

4.3 מרחק בין נקודה לקבוצה

הגדרה 4.2 (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$. המרחק מנקודה x ל־A

$$\boxed{\mathrm{d}\left(x,A\right)=\inf_{a\in A}\mathrm{d}\left(x,a\right)}$$

4.3.1 תרגיל: נגדיר קבוצות

$$\begin{aligned}
&C_1=\bigcap_{\substack{F=\bar{F}\\A\subseteq A}}F\\
&C_2=\left\{x\in X|\forall r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\bigcap A\neq\emptyset\right\}=\bar{A}\\
&C_3=\left\{x\in X|\exists\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in A:a_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}x\right\}\\
&C_4=A\cap A'\\
&C_5=\left\{x\in X|\mathrm{d}\left(x,A\right)=0\right\}
\end{aligned}$$

הוכיחו:

$$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5$$

הוכחה:

- $C_1\subseteq C_2$:

$$\begin{aligned}
x\notin C_2&\iff\exists r>0:B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\cap A=\emptyset\\
&\iff A\subseteq X\setminus B_d\left(x,r\right)
\end{aligned}$$

אבל זוהי קבוצה סגורה שאינה מכילה את x, לכן $x\notin C_1$.

- $C_2=C_3$ ־ מיידי (נקודות סגור הן נקודות גבול)
- $C_3\subseteq C_4$:

$$x\in C_3\iff\exists\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}:a_n\to x$$

יש שני מקרים:

1. $x\neq a_n$ לכל n, ולכן $x\in A'$
2. $\exists n\in\mathbb{N}$: $a_n=x\in A$

בכל מקרה, $x\in A\cup A'$

- $C_4\subseteq C_5$: $x\in A\cup A'$. אם $x\in A$, אין מה להוכיח: $\mathrm{d}\left(x,A\right)=0$. אם $x\in A'$

$$\begin{aligned}
x\in A'&\iff\exists\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{x\}\\
&\implies 0\leq\mathrm{d}\left(x,A\right)\leq\lim\mathrm{d}\left(a_n,A\right)=0
\end{aligned}$$

- $C_5 \subseteq C_1$, נעשה זאת שוב בשלילה:

$$x \notin C_1 \iff \exists F = \bar{F} \wedge A \subseteq F \to x \notin F$$

$\Leftarrow$ קיים $x \in X \setminus F$ ו־$X \setminus F$ קבוצה פתוחה, לכן קיים $r > 0$ כך ש־$B_{\mathrm{d}}(x,r) \subset x \setminus F \subseteq A \setminus F$ ולכן

$$\mathrm{d}(x,A) \geq r > 0$$

ולכן $x \notin C_5$.

■

4.4 שלמות

4.4.1 תרגיל

הוכיחו שלכל $1 \leq p < \infty$, ℓ_p מרחב מטרי שלם.

$$\ell_p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq +\infty \right\}$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$
$$\mathrm{d}_p(x,y) = \|x-y\|_p$$

צריך להראות שכל סדרת קושי - מתכנסת.
תהי $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell_p$, סדרת קושי.

- שלב ראשון - ניחוש הגבול:

לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $r, q \geq N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_p\left(x^{(r)}, x^{(q)}\right) &= \left\|x^{(r)} - x^{(q)}\right\| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n^{(r)} - x_n^{(q)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

לכן,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall r,q \geq N : \left|x_k^{(r)} - x_k^{(q)}\right| \leq \left\|x^{(r)} - x^{(q)}\right\| \leq \varepsilon$$

כלומר, לכל $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

זוהי סדרת קושי, ב־$(\mathbb{R}, d_1)$, שהוא שלם. לכן, מהשלמות, לכל $k \in \mathbb{N}$, קיים $x_k \in \mathbb{R}$, כך ש־$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$. קיבלנו סידרה

$$X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

- שלב שני - להוכיח כי $x \in \ell_p$. כלומר, צריך להוכיח

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$$

לכל $M \in \mathbb{N}$, מממשואה (1),

$$\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(r)} - x_k^{(q)} \right|^p < \varepsilon^p$$

נקבע את r ונקח גבול $q \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(r)} - x_k \right|^p \leq \varepsilon^p \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |X_k|^p &= \sum_{k=1}^{M} \left| x^{(r)} - x_k - x_k^{(r)} \right|^p \\
&\leq \sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(r)} - x_k \right| + \sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(r)} \right|^p \\
&\leq \varepsilon^p + \sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(r)} \right|^p
\end{aligned}$$

עבור $M \to \infty$, $x^{(r)}$ מתכנס כי $x^{(r)} \in \ell^2$, ולכן הכל מתכנס.

- להוכיח כי $x \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_p} x^{(n)}$, כלומר,

$$\mathrm{d}_p \left(x^{(n)}, x \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שקול ל-

$$\left\| x^{(n)} - x \right\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

וזה ברור לפי משוואה (2). זה נכון לכל n סופי, אבל זה מתקיים גם עם נשאיף את M לאינסוף.

נובא שלכל $\varepsilon > 0$, קיים $N = N(\varepsilon)$ף כל שלכל $r \geq N$,

$$\|x_r - x\|_p \leq \varepsilon$$

5 תרגול!

5.1 תרגיל

יהיה (X, d) מרחב מטרי ו- $G \subseteq X$ תת קבוצה פתוחה וצפופה. הוכיחו ש-$X \setminus G$ (סגורה) ודלילה.

הערה 5.1
- אם G לא פתוחה,, $X \setminus G$ לא בהכרח דלילה. $(G = \mathbb{Q}, X = \mathbb{R})$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- $A \subseteq (X, \mathrm{d})$ דלילה $\iff$ $\bar{A}$ דלילדה

- A דלילה $\iff int\left(\bar{A}\right)=\emptyset \iff int\left(\bar{\bar{A}}\right)=\emptyset \iff$ A דלילה
הוכחה: צ"ל

$$int\left(\overline{X\setminus G}\right)=_{X\setminus G=\overline{X\setminus G}} int\left(X\setminus G\right)=\emptyset$$

ו־

$$int\left(X\setminus G\right)=X\setminus\left(\overline{X\setminus\left(X\setminus G\right)}\right)=\emptyset$$

■

5.2 משפט בר

משפט 5.2 (Baire) מרחב מטרי שלם (X,d) לא ניתן להציג כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

5.2.1 תרגיל

יהיה (X,d) שלם, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אוסף בן מניה ש לקבוצות פתוחות וצפופות ב־(X,d)

- הוכיחו ש־$U=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\neq\emptyset$

נניח בשלילה ש־$U=\emptyset$,

$$\implies X=X\setminus\emptyset=X\setminus U=X\setminus\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)$$

ולפי דה־מורגן

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X\setminus U_n\right)$$

$X\setminus U_n$ קבוצה (סגורה) ודלילה לפי התרגיל הקודם, לכן קיבלנו שמרחב מטרי שלם (X,d) ניתן להצגה כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות, בסתירה למשפט Baire.

- תרגיל עזר: יהיה (X,d) מרחב מטרי, ו־$A\subseteq X$ תת קבוצה צפופה ב־(X,d). הוכיחו שלכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים: $\overline{U\cap A}=\bar{U}$

$$U\cap A\subset U \implies \overline{U\cap A}\subseteq\bar{U}$$

הכלה הפוכה: $x\in\bar{U}'$ לכל $r>0$, נקח

$$\emptyset\neq B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\cap U$$

A צפורה ב־X ו־$U\cap B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)$ קבוצה פתוחה לא ריקה ב־X ולכן .

$$A\cap\left(B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right)\cap U\right)\neq\emptyset$$

$$=\left(A\cap U\right)\cap B_{\mathrm{d}}\left(x,r\right) \implies x\in\overline{A\cap U}$$

- הוכיחו ש־U מוסעיף א' צפופה ב־X.

נניח בשלילה ש־U לא צפופה. לכן, קיימת קבוצה פתוחה $V \neq \emptyset$ כך ש־$U \cap V = \emptyset$

$$\emptyset = U \cap V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(U_n \cap V\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \qquad (\star)$$

W_n פתוחה ב־ $\left(\bar{V}, \mathrm{d}_{\bar{V}}\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$, לפי ב'

$$\bar{W}_n = \overline{U_n \cap V} = \bar{V}$$

לכן ,

1. $\bar{V} \setminus W_n$ קבוצה דלילה ב־$\left(\bar{V}, \mathrm{d}_{\bar{V}}\right)$.
2. מ־$(\star)$,

$$\bar{V} = U_{n=1}^{\infty} \left(\bar{V} \setminus W_n\right)$$

3. $\bar{V}$ סגורה ב־(X, d) ו־(X, d) מרחב מטרי שלם, ולכן $\left(\bar{V}, \mathrm{d}_{\bar{V}}\right)$ שלם.

5.3 תרגיל

הוכיחו שלא קיימת פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא רציפה בדיוק על $\mathbb{Q}$.
לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר

$$U_n = \left\{ (a, b) \subseteq \mathbb{R} \middle| \left|f(x) - f(y)\right| < \frac{1}{n}, \forall x, y \in (a, b) \right\}$$

נסמן:

$$C_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

טענה 5.3 C_f היא קבוצת נקודות הרציפות של f.

נניח שקיימת f כך ש־$C_f = \mathbb{Q}$.
U_n קבוצה פתוחה, לכל n, בנוסף, U_n צפופה לכל $n \in \mathbb{N}$ (כי $U_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{Q}$) . קיבלנו משפחה בת־מניה של קבוצות פתוחות וצפופות.
נרשום

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$$

ונגדיר

$$V_n = (-\infty, r_n) \bigcup (r_n, \infty)$$

$$\left(\bigcap U_n\right) \bigcap \left(\bigcap V_n\right) = \emptyset$$

כי זהו חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות וצפופות, וחיתוך כזה אינו ריק, הוא צפוף, וזו סתירה.

6 תרגול

6.1 השלמה מתרגול קודם

$$\begin{aligned} &f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &U_n=\bigcup\left\{(a,b)\in\mathbb{R}\,|f(x)-f(y)|<\frac{1}{n},\forall x,y\in(a,b)\right\}\\ &c_f=\bigcap_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

טענה 6.1 c_f היא קבוצת נקודות הרציפות של f

הוכחה: לכל $x_0\in c_f$ ולכל $\varepsilon>0$. קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n}<\varepsilon$ ו־

$$\exists\,(a,b)\subseteq Y_n:x_0\in(a,b)$$

נבחר

$$\delta=\frac{\min\left\{|a-x_0|\,,|b-x_0|\right\}}{2}>0$$

אזי, לכל x:

$$\begin{aligned}|x-x_0|<\delta &\implies x,x_0\in(a,b)\\ &\implies |f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

בכיוון ההפוך: נניח f רציפה ב־x_0, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $\delta>0$ כך ש־

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2n}$$

לכל x כך ש־ $|x-x_0|<\delta$. נקח את $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, ולכן לכל $x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(y)-(x_0)|<\frac{1}{n}$$

■

6.2 תרגיל

יהיה (x,d) מרחב מטרי בן מניה. נניח של־(x,d) אין נקודות מבודדות, והוכיחו כי (x,d) אינו שלם.
(כל יחידון הוא קבוצה דילדה ולא ניתן להציג מרחב שלם כאיחוד בן מניה של קבוצות דלילות)

6.3 תרגיל

(x,d) שלם, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ משפחה בת מניה של קבוצות סגורות ודלילות ב־(X,d). הוכיחו ש־

$$int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\emptyset$$

הוכחה: נסמן $G_n=X\setminus F_n$ פתוחה וצפופה לכל $n\in\mathbb{N}$. ולכן,

$$\begin{aligned}X&=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n}=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}(X\setminus F_n)}\\ &=\overline{X\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)}=X\setminus int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\end{aligned}$$

(לפי $int\left(A\right)=X\setminus\left(\overline{X\setminus A}\right)$) ∎

מסקנה 6.2 אם $\left\{F_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ דלילות בלבד, אז

$$int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\subseteq int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{F}_n\right)=\emptyset$$

מסקנה 6.3 במרחב מטרי שלם, $\left(X,\mathrm{d}\right)$ כל קבוצה פתוחה לא ריקה לא ניתנת להצגה כאיחוד בן מניה של קבוצות (סגורות) ודלילות.

6.4 שאלה נפוצה מבחינות

$\left(X,\mathrm{d}\right)$ שלם, $\left\{F_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ משפחה בת מניה של קבוצות סגורות, כך ש־$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$.
הוכיחו שהקבוצה $F=\bigcup\left(int\,F_n\right)$ צפופה ב־$\left(X,\mathrm{d}\right)$.

פתרון: נראה שכל קבוצה פתוחה, לא ריקה, $U\subseteq X$ חותכת את F. נבחן את $U\cap F$.

$$U=U_nX=U_n\left(\bigcup F_n\right)=\bigcup\left(U\cap F_n\right)$$

ולכן, לא כל הקבוצות $U\cap F_n$, כי את U פתוחה אי אפשר לחסות על ידי קבוצות דלילות. לכן, קיים n_0 כך ש־$int\left(\overline{U\cap F_{n_0}}\right)\neq\emptyset$.
ולכן, $U\cap F_{n_0}\neq\emptyset$.

6.5 הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$, שאינה מונותונית על אף קטע חלקי של $\left[0,1\right]$.

נתבונן ב־ $X=\left(C\left[0,1\right],\mathrm{d}_{\infty}\right)$, הוא שלם. אם נוכיח את הטענה עבור הקטעים עם קצוות רציונלים, זה יוכיח את הטענה הכללית, כי לכל קטע יש תת קטע עם קצוות רציונאליים. קבוצה בת תמניה $\left\{I_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$F_n=\left\{f\in X|f\left(x\right)>f\left(y\right)\forall\left(x>y\right)\in I_n\right\}$$

1. F_n סגורה ב־X, לכל $n\in\mathbb{N}$.
הוכחה: נראה ש־$X\setminus F_n$ פתוחה: נקח פונקציה שאינה מונותונית של I_n, כלומר, קיימות בקטע שלוש נקודות $x<y<z$ כך ש־$f\left(x\right)>f\left(y\right)$ ו־$f\left(y\right)<f\left(z\right)$. נמצא סביבה לפונקציה שבה אין אף פונקציה מונותונית. נקח סביבה בגודל $\frac{\min\left(|x-y|,|y-z|\right)}{3}$. בסביבה זו אין אף פונקציה מונותונית.

2. F_n דלילה: נראה ש־$X\setminus F_n$ צפופה, כלומר, לכל $f\in X$, ולכל $x>0$, $B_{\mathrm{d}\infty}\left(f,r\right)\cap\left(X\setminus F_n\right)\neq\emptyset,\forall n\in$ n.
מספיק לבדוק עבור $f\in F_n$. (ציור). לכל קטע $\left(a,b\right)\in I$, קיים אפסילון כך ש־:

$$f\left(\frac{b-a}{2}\right)+\varepsilon>f\left(b\right)$$

7 תרגול

7.1 תרגיל

הוכיחו שלכל פונקציה $g\in C\left[0,1\right]$, קיימת פונקציה יחידה $f\in C\left[0,1\right]$ המקיימת

$$f\left(t\right)+\int_0^1\left(t-s\right)f\left(s\right)\mathrm{d}s=g\left(t\right)$$

לכל $t\in\left[0,1\right]$.

פתרון: נרצה להשתמש במשפט Banach על נקודת שבת.

נרצה להוכיח שהביטוי $\int_0^1 (t-s) f(s)\,\mathrm{d}s$ הוא כיווץ של f.

נגדיר

$$T:(C[0,1],\mathrm{d}_\infty) \circlearrowleft$$
$$T(f)=\int_0^1 (t-s) f(s)\,\mathrm{d}s$$

- נראה ש־$T(f)\in C[0,1]$:

$$\begin{aligned}|T(f)(t_1)-T(f)(t_2)| &= \left|\int_0^1 [(t_1-s) f(s)-(t_2-s) f(s)]\right| \\ &= \left|\int_0^1 (t_1-t_2) f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le (t_1-t_2)\cdot\int_0^1 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

אינטגרל על פונקציה רציפה על קטע הוא סופי, ומכאן נובע רציפות, כי עבור $t_2\to t_2$, הביטוי שואף ל־0.

- נראה ש־T הוא כיווץ:

$$\mathrm{d}_\infty(T(f_1),T(f_2))\le K\mathrm{d}_\infty(f_1,f_2)$$

ו־$0\le K<1$., לכל $f_!, f_2\in C[0,1]$, קיים $K\in(0,1)$ כך ש־

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\infty(T(f_1),T(f_2)) &= \sup_{0\le t\le 1}|T(f_1)(t)-T(f_2)(t)| \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 (t-s) f_1(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^1 (t-s) f_2(s)\,\mathrm{d}s\right| \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 (t-s)(f_1(s)-f_2(s))\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \sup_{0\le t\le 1}\left(\int_0^t |t-s|\,\mathrm{d}s\right)\cdot\sup_{0\le s<1}|f_1(s)-f_2(s)| \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left(\int_0^1 |t-s|\,\mathrm{d}s\right)\cdot\mathrm{d}_\infty(f_1,f_2)\end{aligned}$$

צריך לראות ש־$\sup_{0\le t\le 1}\left(\int_0^1 |t-s|\,\mathrm{d}s\right)=K<1$:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 1}\left(\int_0^1 |t-s|\,\mathrm{d}s\right) &= \int_0^t |t-s|\,\mathrm{d}s=\sup_{0\le t\le 1}\left(\int_0^t (t-s)\,\mathrm{d}s+\int_t^1 (s-t)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left(\frac{1}{2}-t(1-t)\right)\le\frac{1}{2}\end{aligned}$$

הגענו ל־$K\le\frac{1}{2}$, ולכן ההעתקה T היא מכווצת, ויש נקודת שבת יחידה.

- $(C[0,1],\mathrm{d}_\infty)$ שלם, ולכן, לפי בנך, ל־T יש נקודת שבת יחידה.

השאלה המקורית שקולה לקיום של פתרון $f=g-T(f)$. כלומר, זה שקול לקיום של נקודת שבת עבור $\tilde{T}:C[0,1]\to C[0,1]$ המוגדר כ־

$$\tilde{T}(f)(t)=g(t)-T(f)(t)$$

מספיק להראות ש־$\tilde{T}$ כיווץ.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\infty\left(\tilde{T}(f_1),\tilde{T}(f_2)\right) &= \sup_{0\le t\le 1}\left|\tilde{T}(t_1)(t)-\tilde{T}(f_2)(t)\right| \\ &= \sup_{0\le t\le 1}|T(t_1)(t)-T(f_2)(t)|=\mathrm{d}_\infty(T(f_1),T(f_2))\end{aligned}$$

וכבר הראנו ש־T מכווץ.

7.2 רציפות

הגדרה 7.1 העתקה $f:(X,\mathrm{d}_x)\to(Y,\mathrm{d}_y)$ נקראת **רציפה** אם לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ כך שאם $x'\in B_{\mathrm{d}_X}(x,\delta)$ אזי $f(x')\in B_{\mathrm{d}_Y}(f(x,\varepsilon))$
$\iff f(B_{\mathrm{d}_X}(x,\delta))\subseteq B_{\mathrm{d}_Y}(f(x),\varepsilon)\iff B_{\mathrm{d}_x}(x,\delta)\subseteq f^{-1}(B_{\mathrm{d}_Y}(f(x),\varepsilon))$

7.2.1 תרגיל

יהיה (X,d) מרחב מטרי. $\emptyset\neq A\subseteq X$. הוכיחו שההעתקה

$$f_1:(x,\mathrm{d})\to(\mathbb{R},\mathrm{d}_1)$$

המוגדרת על ידי

$$f(x)=\mathrm{d}(x,A)=\inf_{a\in A}\mathrm{d}(x,a)$$

רציפה. **הוכחה:** לכל $x,y\in X$,

$$|f(x)-f(y)|=|\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)|$$

לכל $a\in A$,

$$\mathrm{d}(x,a)+\mathrm{d}(y,a)\geq\mathrm{d}(x,y)$$

נקח $\inf_{a\in A}$ ונקבל

$$\mathrm{d}(x,A)+\mathrm{d}(y,A)\geq\mathrm{d}(x,y)$$

נעביר אגפים, ונקבל

$$\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)\geq-\mathrm{d}(x,y)$$

לכן,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&=|\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)|\\&\leq\mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$

■

8 תרגול

8.1 תיקון מתרגול קודם

רצינו להוכיח ש־

$$|\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)|\leq\mathrm{d}(x,y)$$

לכל $a\in A$,

$$\mathrm{d}(x,a)-\mathrm{d}(y,a)\leq\mathrm{d}(x,y)\iff\mathrm{d}(x,a)\leq\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,a)$$

נקח אינפימום (**אסור לקחת אינפימום על הפרש!**)

$$\Longrightarrow\mathrm{d}(x,A)\leq\mathrm{d}(x,y)+\inf_{a\in A}\mathrm{d}(y,a)=\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,A)$$

8.2 מרחבים טופולוגיים כלליים

תזכורת: X קבוצה, $\mathcal{B} \subseteq 2^x$ (כאשר $2^X = P(X)$ הוא אוסף של כל תתי הקבוצות של X) . $\mathcal{B}$ נקרא **"בסיס לטופולוגיה על X"** אם

- $$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{B}$$
  כלומר $\mathcal{B}$ כיסוי של X: $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

- $$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge \forall x \in B_1 \cap B_2 \implies \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

משפט 8.1 אם $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ הוא בסיס לטופולוגיה על X, נגדיר

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha | B_\alpha \in \mathcal{B} \forall \alpha \in A, \forall A \in 2^{|\mathcal{B}|} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

כלומר, τ הוא כל האיחודים האפשריים של אברי $\mathcal{B}$. אז τ מהווה טופולוגיה על X.
לטופולוגיה $\tau_{\mathcal{B}}$ יש בסיס "מיוחד" $\mathcal{B}$.

8.3 תרגיל

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה לינארית.

הגדרה 8.2 $(X, \leq)$ סדורה לינארית אם:

- $$\forall a \in X : a \leq a$$

- $$\forall a, b \in X : a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$$

- $$\forall a, b, c \in X : a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$$

- לינאריות:
  $$\forall a, b \in X \implies a \leq b \vee b \leq c$$

נגדיר אוסף של תת קבוצות של X:

$$\mathcal{B} = \{ \ (a, b) \mid a, b \in X, a \leq b, a \neq b \ \} \cup \{ \ (a, \infty) \mid a \in X \ \} \cup \{ \ (-\infty, b) \mid b \in X \ \}$$

כאשר

$$(a, b) = \{x \in X | x > a \wedge x < b\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in X | x > a\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in X | x < b\}$$

הוכיחו: $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X

1. צריך לבדוק שלכל $a \in X$, קיים $B \in \mathcal{B}$ כך ש־$a \in B$. לפי לינאריות של הסדר, קיים $b \in X$ כך ש־$b \le a$ או $a \le b$. אם $|X| \ge 2$, אז קיים $b \in X$ כך ש־ $a < b$ או $b < a$.

   אם $a > b$, נקח $a \in (b, \infty)$, ואם $a < b$, נקח את $(-\infty, b)$

2. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, עבור חיתוך שאינו זר (כי $x \in B_1 \wedge x \in B_2$). לכן,

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} = B_3$$

$\tau_{\mathcal{B}}$ במקרה זה נקראת **טופולוגיית הסדר**, ומסומנת לפעמים גם ב־$\tau_{\le}$.
קיבלנו מרחב טופולוגי $(X, \tau_{\le})$

הוכיחו: $(X, \tau_{\le})$ הוא מרחב האוסדורף, Hausdorff.

הגדרה 8.3 מרחב האוסדורף הוא מרחב המקיים: לכל $x \neq y \in X$, קיימות קבוצות פתוחות $U_x, U_y \in \tau_{\le}$, כך ש־

1. $x \in U_x$ ו־$y \in U_y$
2. $U_x \cap U_y = \emptyset$

נקח $x \neq y \in X$, ובלי הגבלת הכלליות, $x < y$.

- מקרה א': קיימת $z \in X$, כך ש־$x < z < y$. נקח

$$u_x = (-\infty, z)$$
$$y_y = (z, \infty)$$

  והן זרות

- מקרה ב': לא קיים y כזה: $(x, y) = \emptyset$, אזי נקח

$$U_y = (x, \infty)$$
$$U_x = (-\infty, y)$$

הערה 8.4 בכל מקרה, קיבלנו ש־"$U_x < U_y$" (כלומר, כל נקודה ב־U_x קיימת מכל נקודה ב־U_y)

$$\forall a \in U_x, \forall b \in U_y \implies a < b$$

תהא $\varnothing \neq Y \in \mathbb{R}$. נקח סדר רגיל על Y, המושרה מ־" $\le$ " הסטדנרטי על $\mathbb{R}$. נקבל $(Y, \tau_{\le})$ ו־(Y, τ_{d_1}), הטופולוגיה המושרית מ־d_1. הוכח/הפרך: $\tau_{d_1} = \tau_{\le}$ הטענה אינה נכונה. דוגמה:

$$y = (0,1) \cup \{5\}$$

טענה 8.5 הקבוצה $\{5\} \in \tau_{d_1}$ אבל אינה ב־$\tau_{\le}$.
$\{5\} \in \tau_{d_1}$. נקח את הקבוצה ב־$\mathbb{R}$ $(4,6)$. אזי $5 = \{5\} \cap (4,6)$.
$\{5\} \in \tau_{\le} \iff \exists B \in \mathcal{B}_{\le} \ \forall x \in \{5\}$ כך ש־ $x \in B \subseteq \{5\}$. $\iff \{5\} \in \mathcal{B}_{\le}$
אבל, כל איבר $B \in \mathcal{B}_{\le}$ שמכיל את $\{5\}$ הוא מהצורה $\{(a, \infty) \,|a < 5\}$.

9 תרגול[1]

9.1 תרגיל

(X,τ_1), (X,τ_2) מרחבים טופולוגיים.
$\mathcal{B}_1$ בסיס של τ_1 ו־$\mathcal{B}_2$ ביסיס של τ_2.
הוכיחו כי $\tau_1=\tau_2 \iff \mathcal{B}_1\subseteq\tau_2$ ו־$\mathcal{B}_2\subseteq\tau_1$ **הוכחה:** בכיוון אחד: אם $\tau_1=\tau_2$, הטענה ברורה:

$$\mathcal{B}_1\subseteq\tau_1=\tau_2$$
$$\mathcal{B}_2\subseteq\tau_2=\tau_1$$

בכיוון שני: נניח $B_1\subseteq\tau_2$ ו־$B_2\subseteq\tau_1$.
נקחב קבוצה $U\in\tau_1$ פתוחה. אזי,

$$U=\bigcup_{s\in S}B_s$$

כאשר, לכל s, $B_S\in\mathcal{B}_1$.
$\mathcal{B}_1\subseteq\tau_2$, לכן $B_s\in\tau_2$, לכל s, ולכן, לפי סגירות לאיחודים,

$$U=\bigcup_{s\in S}B_s\subseteq\tau_2$$

■

שימושים: למשל, $(\mathbb{R}^n,\mathrm{d}_p)$, . d_p מוגדירה אותה טופולוגיה על $\mathbb{R}^n$ כי כדורים לפי d_{p_1} פתוחים לפי d_{p_2} לכל $1\leq p_1,p_2\leq\infty$.

9.2 תרגיל

יהא (Z,τ) מרחב טופולוגי. תהא $(X,\leq)$ קבוצה סדורה לינארית. $(X,\tau_{\leq})$ הוא מרחב טופולוגי עם טופולוגיית הסדר.
הוכיחו כי אם

$$f,g:(Z,\tau)\to(X,\tau_{\leq})$$

העתקות רציפות, אז הקבוצה

$$\{z\in Z|\}\,f(z)\leq g(z)$$

סגורה ב־(Z,τ).

פתרון: נראה כי המשלים פתוח, כלומר,

$$U=\{z\in Z|g(x)<f(z)\}\in\tau$$

לכל $z\in U$, $(X,\tau_{\leq})\in\tau_z$

$$g(z)<f(z)\implies g(z)\neq f(Z)$$

לכן, קיימות סביבות פתוחות,

$$g(z)\in U_{g(z)}\in\tau_{\leq}$$
$$f(z)\in U_{f(z)}\in\tau_{\leq}$$

[1] הושלם באדיבות עמי פז

ו־ $U_g \cap U_f = \varnothing$.
וגם, $U_g \subset U_f$, (כי כל נקודה קטנה מכל נקודה). f, g רציפות ולכן

$$A = g^{-1}\left(U_g\right)$$
$$B = f^{-1}\left(U_f\right)$$

ו־$A, B \in \tau$. אז, $z \in A \cap B \in \tau$.

טענה 9.1 $A \cap B \subseteq U$:

הוכחה: לכל $y \in A \cap B$, $f\left(g\right) \in U_f$, $g\left(y\right) \in U_g$.
אבל $U_g < U_f$, לכן $g\left(y\right) < f\left(y\right)$ ו־$y \in U$.
לכל נקודה ב־U פנימית, ולכן $int\left(U\right) = U$ ו־U פתוחה. ■

9.3 תרגיל

(X, d) מרחב מטרי. תהא $A \subseteq C\left(X, \mathbb{R}\right)$ (אוסף הפונקציות הרציפות מ־X ל־$\mathbb{R}$)
A מקיימת:

1. לכל $f, g \in A$, $f \cdot g, f + g \in A$
2. לכל $f \in A$ ו־$\lambda \in \mathbb{R}'$ $\lambda f \in A$
3. לכל $x \in X$ קיימת $f \in A$ כך ש־$f\left(X\right) \neq 0$

(אלגברה של פונקציות רציפות)

סימון: לכל $f \in A$ נגדיר:

$$Z\left(f\right) = \left\{z \in X | f\left(x\right) = 0\right\}$$
$$U\left(f\right) = X \backslash Z\left(f\right)$$

הוכיחו שהקבוצה:

$$\mathcal{B}_A = \left\{U\left(f\right) | f \in A\right\}$$

בסיס לטופולוגיה על X.

10 תרגול

10.1 סיום תרגיל משיעור שעבר

(X, d) מרחב מטרי ו־ $A \subseteq (X, \mathbb{R})$ תת־אלגברה, של פונקציות רציפות על X. נגדיר,

$$Z\left(f\right) = \left\{x \in X | f\left(x\right) = 0\right\}, V\left(f\right) = X \backslash Z\left(f\right)$$

אזי,

$$\mathcal{B}_A = \left\{V\left(f\right) | f \in A\right\}$$

בסיס לטופולוגיה (הוכחנו בשיעור הקודם). τ_A היא הטופולוגיה על X הנוצרת על ידי $\mathcal{B}_A$.
לכן, על X יש לנו 2 טופולוגיות, (X, τ_A) ו־(X, τ_{d}).
הראנו ש־$\tau_A \subset \tau_{\mathrm{d}}$,

דוגמה 1.10 (לכך ש־ $\tau_{\mathrm{d}} \not\subset \tau_A$)
$X = \mathbb{R}$, (X, d) מרחב סטנדרטי וכאלגברה, נבחר פולינומים:

$$A = \mathbb{R}\left[X\right]$$

לכל $f \in \mathbb{R}\left[x\right]$,

$$\left|Z\left(f\right)\right| < \infty$$

כי מספר האפסים של פולינום הוא סופי.

סעיף ג: אם $A=C\left(X,\mathbb{R}\right)$ **, האם** $\tau_{\mathrm{d}}\subseteq\tau_{A}$**?** לכל $U\in\tau_{\mathrm{d}}$, האם קיימת $f\subset A$ כך ש־ $U=V\left(f\right)$?
שקול לכך ש־ $X\backslash U=Z\left(f\right)$. היות והקבוצה סגורה, הפונקציה $f\left(x\right)=\mathrm{d}\left(x,X\backslash U\right)$, מתאפסת לכל $x\in X\backslash U$ ורק שם, והיא רציפה.
לכן, $\tau_{\mathrm{d}}=\tau_{C(x)}$

למה 10.1 (למת אוריסון, Urysson)
יהיו $\left(X,\mathrm{d}\right)$ מרחב מטרי, ו־$A,B\subseteq X$ תת קבוצות סגורות וזרות, אזי קיימת פונקציה רציפה

$$f:X\to\left[0,1\right]$$

כך ש־

$$A=\left\{x\in X|f\left(x\right)=0\right\}$$
$$B=\left\{x\in X|f\left(x\right)=1\right\}$$

הערה 10.2 זה נכון במקרה של מרחב טופולוגי־נורמלי כללי.

הוכחה:

$$f\left(x\right)=\frac{\mathrm{d}\left(x,A\right)}{\mathrm{d}\left(x,A\right)+\mathrm{d}\left(x,B\right)}$$

■

10.2 תרגיל

הוכיחו שאם $\left(X,\tau\right)\in T_{2}$ (מרחב האוסדורף) אזי לכל $\overline{\left\{x\right\}}=\left\{x\right\}$ לכל $x\in X$

פתרון: נראה ש־ $X\backslash\left\{x\right\}\in\tau$.
לכל $y\in X\backslash\left\{x\right\}$, בפרט, נובע כי $x\neq y$. מאחר והמרחב הוא T_{2} , קיימות $U_{x}\in\tau$, $y\in U_{y}\in\tau$ כך ש־ $U_{x}\cap U_{y}\neq\varnothing$.
לכן, $x\notin U_{y}$, ולכן, $U_{y}\subseteq X\backslash\left\{x\right\}$.

10.3 אפיון

$\left(X,\tau\right)\in T_{2}$ $\iff$ האלכסון $\Delta_{x}=\left\{\left(x,x\right)\in X\times X\right\}$ הוא קבוצה סגורה ב־$\left(X\times X,\tau_{prod}\right)$.

פתרון: $\left(x,\tau\right)\in T_{2}$, נראה ש־ $X\times X\backslash\Delta_{x}\in\tau_{prod}$.

$$\forall\left(x,y\right)\in X\times X\backslash\Delta_{x}\implies x\neq y$$

מאחר והמרחב הוא ההאוסדורף,

$$\forall U_{x}\in\tau,U_{y}\in\tau,U_{x}\cap U_{y}=\varnothing$$

לכן,

$$\left(x,y\right)\in U_{x}\times U_{y}\in\tau_{prod}$$

לכן,

$$\left(U_{x}\times U_{y}\right)\cap\Delta_{x}\xleftrightarrow{1:1}U_{x}\cap U_{y}=\varnothing$$

ולכן, $U_{x}\times U_{y}\subseteq X\times X\backslash\Delta_{X}$.

בכיוון השני, נניח $\Delta_x = \bar{\Delta}_x$. יהיו $x \neq y$, נקודות ב־X. לכן,

$$(x, y) \in X \times X / \Delta_X$$

$(X \times X) \setminus \Delta_x$ קבוצה פתוחה ב־ $(X \times X, \tau_{prod})$, לכן קיימת $U_x \times U_y \in \tau_{prod}$,

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \setminus \Delta_x$$

ולכן, $U_x \cap U_y = \varnothing$.

10.4 תרגיל 3

נניח $f, g : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$, רציפות $Y \in T_2$־.
הוכיחו שהקבוצה $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ היא קבוצה סגורה ב־(X, τ_x).

פתרון: נגדיר,

$$\begin{aligned} f\Delta g\,(X, \tau_x) &\to (Y \times Y, \tau_{prod}) \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

רציפה. לכן,

$$\Delta_{f,g} = (f\Delta g)^{-1} (\Delta_y)$$

ולפי התרגיל הקודם, סיימנו.

דרך ב': נראה ש־$X \setminus \Delta_{fg}$ פתוחה:

$$\begin{aligned} \forall x \in X \setminus \Delta_{fg} &\implies f(x) \neq g(x) \\ &\implies \exists V_{g(x)}, V_{f(x)} \end{aligned}$$

פתוחות וזרות,

$$\implies U = g^{-1}\left(V_{g(x)}\right) \cap f^{-1}\left(V_{f(x)}\right)$$

לכל $y \in U$, $f(y) \in V_{f()}$, זרות ו־

$$g(y) \in V_g(x)$$

10.5 הערה בקשר לשיעורי בית

$$\tau_{prod} = \prod_{i=1}^{n} \tau_{x_i} = \{U_1 \times \dots U_n | U_i \in \tau_{x_i}\}$$

אינו טופולוגיה, כי אם בסיס לטופולוגיה.

11 תרגול

11.1 תרגיל טכני

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, ו־Y קומפקטי. נניח ש־$x_0 \in X$, ו־$\{x_0\} \times Y \subseteq N \subseteq X \times Y$ כאשר N קבוצה פתוחה ב־τ_{prod}.
הוכיחו שקיים "צינור" סביב $\{x_0\} \times Y$, כלומר, קיימת קבוצה פתוחה W של x_0 כך ש־$\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$. [$W \times Y$ הוא צינור].

פתרון: $\{x_0\}\times Y$ תת קבוצה קומפקטית ב־$X\times Y$ כי היא תמונה (הומאומורפית)/(רציפה) של מרחב קומפקטי Y:

$$\begin{aligned} Y &\to X\times Y \\ y &\mapsto (x_0,y) \end{aligned}.$$

היות ו־N קבוצה פתוחה שמכילה את הסיב, אז לכל נקודה של הסיב, יש איבר בבסיס של הטופולוגיה, $(x_0,y)\in U_y\times V_y$, שמוכל כולו ב־N ומכיל את הנקודה. קיבלנו כיסוי פתוח של Y, ומקומפקטיות, קיים תת כיסוי סופי, $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$.

נקח $W=\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$.

מסקנה 11.1 מכפלה ישרה סופית של מרחבים קומפקטיים, היא מרחב קומפקטי בטופולגיית המכפלה.

הערה 11.2 **תמיד** חייבים לציין באיזה טופולוגיה עובדים.

הוכחה: יהיו X,Y קומפקטיים. נראה ש־ $X\times Y$ קומפקטיים ב־τ_{prod}.

יהיה $V=\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של $X\times Y$.

לכל $x\in X$, קיימים $v_{\lambda_n(x),x}\in V$ כך ש־

$$\{x\}\times Y\subseteq N_x:=\bigcup_{i=1}^{n(x)}V_{\lambda_i(x)}$$

לפי התרגיל, קיית $x\in W_x\subseteq X$ פתוחה, כך ש־

$$W=\{W_x|x\in X\}$$

כיסוי פתוח של X.

יש ל־W תת כיסוי סופי$\{W_{y_i}\}_{i=1}^k$, אז

$$\bigcup_{i=1}^k W_{x_i}\times Y=X\times Y$$

ולכן,

$$\bigcup_{j=1}^k\bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i x_j}=X\times Y$$

■

מסקנה 11.3 לכל $n\in\mathbb{N}$, I^n קומפקט עבור כל $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$.

הוכחה: $n=1$: משפט היינה־לבג־בורל.

עבור $n\geq 2$, $I^n=I\times\ldots\times I$. ■

11.2 תרגיל

הוכיחו ש־$K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקט $\iff$ K סגורה וחסומה. **הוכחה:** נניח ש־$K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקט.

K חסומה, כי עבור $k\in K$ וכיסוי $\{B(k,r)\}_{r\in\mathbb{N}}$, ניתן למצוא תת כיסוי סופי $\{B(k,r_n)\}_{k=1}^n$, אזי K חסומה על ידי $B(k,r_n)$, אז K חסומה. K סגורה כי $\mathbb{R}^n\in T_2$.

בכיוון השני: נניח $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה. לכן, קיימת קוביה סגורה I^n כך ש־ $K\subseteq I^n$, K סגורה מוכלת בתוך I^n קומפקטית, ולכן K קומפקטית. ■

11.3 תרגיל

$$X = Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$$
$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^tA)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

אזי $\left(\mathbb{R}^{n^2}, \|\|_2\right) \cong (X, \|\|)$.

- האם הקבוצה $K = GL_n(\mathbb{R})$ קומפקטית?

לא. כי K לא סגורה [פתוחה..], וגם לא חסומה.
K פתוחה: $\det$ העתקה רציפה, ו־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ רציפה

- $K = SL_n(\mathbb{R})$

היא סגורה ($\det^{-1}(\{1\})$) , אבל היא לא חסומה.. $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$.

- $O(n)$?
-

$$A^tA = I \iff \left\{f_{ij}^{-1}(\delta_{ij})\right\}_{i,j=1}^{n}$$

כאשר

$$f_{ij}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

ו־$f_{ij} : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

12 תרגול! (לפני האחרון שאני אהיה בו)

12.1 לשאלה מהבוחן

$$f(X, \mathrm{d}) \to (X, \mathrm{d})$$

רציפה. לכל $n\in\mathbb{N}$, קיים $L_n > 0$ כך ש־

1. $\sum L_n > \infty$
2. $\mathrm{d}(f^n(x), f^n(y)) < L_n \mathrm{d}(x,y)$ לכל $x, y \in X$

X שלם

האם ל־f יש נקודות שבת, וכמה? יש נקודה אחת.
לפי (1), $L_n \to 0$.
קיים N , כך ש־ $L_N < 1$. f^N מכווצת, לכן ל־f^N יש נקות שבת יחידה, x_f .
כלומר, $f^N(x_f) = x_f$. נפעיל את f: $f(f^N(x_f)) = f(x_f)$ כלומר, $= f^{N+1}(x_f) = f^N(f(x_f))$, $f(x_f)$, ולכן $f(x_f) = x_f$, וזו נקודת שבת f .
למה ל־f אין יותר נקודות שבת? כל נקודת שבת של f היא נקודת שבת של כל איטרציה, ובפרט של f^N
,אבל יש רק אחת כזו.

עבור אילו נקודות $x \in X$, הסדרה $\{x_n\} = f^n(x)$ מתכנסת ומהו הגבול?

$$\mathrm{d}(f^n(x), x_f) = \mathrm{d}(f^n(x), f^m(x_f)) \leq L_n \mathrm{d}(x, x_f) \to 0$$

12.2 תרגיל לא ממבחן

הוכיחו ש־$S_{\mathrm{d}_1}\left(\vec{0}, 1\right)$ היא קבוצה קומפקטית ב־$(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$ **הוכחה:** נראה ש־ $S_{\mathrm{d}_1}(0,1)$ קומפקטית ב־$(\mathbb{R}^n, \tau_{prod})$ כאשר $\tau_{d_2} = \tau_{d_\infty}$ על ידי כך שנראה שהיא סגורה וחסומה שם.
החסימות ברורה, כי

$$\mathbb{S}_{d_1}(0,1) \subseteq \overline{B_{\mathrm{d}_2}(0,1)}$$

סגירות: הפונקציה $f_{\|\|_1} : (\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1) \to \left(\mathbb{R}^1, \mathrm{d}_1\right)$ רציפה, לכן

$$S_{\mathrm{d}_1}(0,1) = f^{-1}(\{1\})$$

כאשר $\{1\}$ סגורה ב־$(\mathbb{R}, \mathrm{d}_1)$. לכן הקבוצה של נו קומפקטית. ■

נראה ש־ $id_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \tau_{prod}) \to (\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$ **רציפה.** כלומר, כל קבוצה פתוחה ב־$(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$ הוא קבוצה פתוחה ב־$(\mathbb{R}^n, \tau_{prod})$. באותה צורה, אפשר להראות גם ש־ $id_{\mathbb{R}^n}$ הוא הומואומורפיזם.
מספיק להוכיח שלכל $B_{\mathrm{d}_1}(x;r)$, קיים $S > 0$ כך ש־ $B_{\mathrm{d}_\infty}(x,s) \subseteq B_{\mathrm{d}_1}(x,r)$.

$$B_1(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < r \right\}$$

$$B_\infty\left(x, \frac{r}{n}\right) \subseteq B_1(x,r)$$

נראה שעל $\mathbb{R}^n$, כל שתי נורמות שקולות

הגדרה 12.1 יהיו $\|\|, \|\|'$ שתי נורמות על מרחב X . נאמר שהן שקולות אם קיימים $A, B > 0$ כך ש־

$$A\|x\|' \leq \|x\| \leq B\|x\|'$$

לכל $x \in X$.

נראה שכל נורמה על $\|\|$ שקולה ל־$\|\|_1$.
נסמן על ידי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\|\sum x_i e_i\right\| \leq \sum |x_i| \|e_i\| \\
&\leq \underbrace{\max\{\|e_i\|\}}_{M} \cdot \sum_i |x_i| \\
&= M\|x\|_1
\end{aligned}$$

בכיוון השני: קיבלנו ש־$f_{\|\|} : (R^n, \mathrm{d}_1) \to (\mathbb{R}, \mathrm{d}_1)$ היא ליפשיצית עם קבוע ליפשיץ M.

$$\left|f_{\|\|}(x)\right| \leq M\|x\|_1$$

כאשר,

$$\left|f_{\|\|}(x)\right| = |||x||| = \|x\|$$

בפרט, $f_{\|\|}$ רציפה. לכן, f מקבלת מינימום על $S_{\mathrm{d}_1}(0,1)$ כי S_{d_1} קומפקטי על $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$.

$$m = \min_{x\in S(0,1)} f_{\|\|}(x) = \min_{x\in S(0,1)} \|x\| > 0$$

לכן, על הספרה,

$$\|x\| \geq m$$

לכל $x \neq 0$,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| \leq m$$

ולכן,

$$\|x\| \leq \|x\|_1 m$$

מסקנה 12.2 אם $(X, \|\|)$ מרחב נורמי ממימד סופי, n ו- $\{e_1, \ldots, e_n\}$ בסיס איזשהו על X, נקבל איזומטריה

$$\varphi_{\|\|\varepsilon} : (X, \|\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\|)$$

(הנורמה היא אותו נורמה)

13 תרגול אחרון שאני נמצא בו

13.1 תרגיל

יהיו $(X, \|\|)$מרחב נורמי ו-$W \subseteq X$ תת מרחב וקטורי ממימד סופי. הכיחו ש-W הוא קבוצה סגורה.

פתרון: תהא $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W$ תת סידרה מתכנסת, כלומר, קיים $w \in X$ כך ש-

$$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|} w$$

וצריך להראות ש-$w \in W$. נבחר בסיס ל-W, כלומר,

$$W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots e_k\},\ k = \dim W,\ e_i \in W$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{i=1}^{k} a_{ni} e_i, \qquad a_{ni} \in \mathbb{R}$$

נראה שלכל $1 \leq i \leq k$, הסידרה $\{a_{ni}\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סידרת קושי: לכל $p, q > M$,

$$\begin{aligned} |a_{pi} - a_{qi}| &\leq \sum_{j=1}^{k} |a_{pj} - a_{qj}| \\ &= \|w_p - w_q\|_1 \leq A \cdot \|w_p - w_q\| \to 0 \end{aligned}$$

כשהאי־שוויון האחרון הוא עבור A מסויים, לפי שקילות של נורמות על מרחב וקטורי ממימד סופי. $\{w_n\}$ סידרת קושי, כי היא מתכנס.
לכן, לכל $1 \leq ik$ קיים $a_i \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$a_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$$

נראה ש־$w_n \to \sum a_i e_i$ בנורמה.

$$\begin{aligned} w_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\|} \sum a_i e_i &\iff \left\| w_n \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \right\| \to 0 \\ &\iff \left\| \sum_{i=1}^{k} (a_{ni} - a_i)\, e_i \right\| \leq \max_{1\leq i\leq k} \|e_i\| \sum_{i=1}^{k} |a_{ni} - a_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

מיחידות הגבול, $w_\infty = \sum a_i e_i \in W$.

13.2 תרגיל

יהיה $(X, \|\|)$ מעל $\mathbb{R}$ (או מעל $\mathbb{C}$) , ונגדיר

$$S(X) = \{x \in X |\, \|x\| = 1\}$$

נרצה להוכיח ש־$S(X)$ קומפקטית ב־$(X, \|\|)$, $\iff \dim X < \infty$

הערה 13.1 אפשר להחליף $S_{\|\|}(x)$ ב־$\overline{B_{\|\|}(0,1)}$, כדי לקבל טענה נכונה [לא שקולה..]

אם $\dim X < \infty$, $\Leftarrow$ $S(x)$ קומפקטי. $\|x\|_2 \leq A\|x\| \leq A$, ולכן הכדור חסום.
בכיוון ההפוך, מבוסס על הלמה של Riesz:

למה 13.2 $(X, \|\|)$ מרחב נורמי. אם L תת־מרחב **סגור** של X כך ש־$L \neq X$, אזי לכל $\varepsilon \in (0,1)$, קיים $z_\varepsilon \notin L$ ו־$\|z_\varepsilon\| = 1$, כך ש־

$$\mathrm{d}_{\|\|}(z_\varepsilon, L) \geq 1 - \varepsilon$$

זוהי הכללה של "ניצבות". **הוכחה:** (של הלמה)
$L \neq x$, ולכן קיים $x \in X \backslash L$.

$$\mathrm{d}(x, L) = \inf_{u\in L} \|x - u\| = C > 0$$

(כי L קבוצה סגורה).
לכל $\varepsilon > 0$, קיים $u_\varepsilon \in (0,1)$ כך ש־:

$$C \leq \|u - \varepsilon\| < \frac{C}{1-\varepsilon}$$

נבדוק ש־$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|}$ מתאים.
$z_\varepsilon \notin L$ כי $x \notin L$ ו־$\|z_\varepsilon\| = 1$.
לכל $u \in L$,

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon - u\| &= \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| \\ &= \frac{1}{\|u_\varepsilon - x\|} \cdot \left\| x - \underbrace{(u_\varepsilon - u\,\|u_\varepsilon - x\|)}_{\in L} \right\| \\ &\geq \frac{C}{\|u_\varepsilon - x\|} > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

■

ונחזור לתרגיל:

נבנה סידרה $\{x_n\} \subseteq S(x)$, שאין לה אף תת־סידרה מתכנסת:

$x_1 \in S(X)$, זהו וקטור שונה מאפס, $L_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$ L ממימד סופי, ולכן סגור. לפי ריס, קיים $x_2 \in S(X)$, כך ש־ $\|x_1 - x_2\| > \frac{1}{2}$. נמשיך ככה ונבנה סידרה אינסופית.