גירסה 1.00 — 11.3.2002

מתמטיקה דיסקרטית (בדידה)
חלק שני

מסמך זה הוא השני בסדרת מסמכים הבאים להציג לקורא את עקרונות הקומבינטוריקה ותורת הקבוצות, כפי שהם מתוארים בקורס "מתמטיקה דיסקרטית".
מסמך זה ממשיך מהנקודה בה הסתיים המסמך הראשון.
מסמך זה מסיים את נושא הקומבינטוריקה.
הנושאים הנדונים במסמך זה הם עקרון ההכלה וההפרדה, הפרות סדר, רקורסיה, וסיכום קומבינטוריקה – הבעיה הבסיסית של הקומבינטוריקה.

ידע קודם הנדרש להבנת המסמך הוא לפחות מתמטיקה בהיקף של בגרות 5 יחידות, וכן הבנה של החומר מהמסמך הראשון בסידרה זו.
אנא שלחו הערות, תיקונים והצעות אל המחבר.

Nir Adar
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

עקרון ההכלה וההפרדה

דוגמא א'

בכיתה 100 סטודנטים.. 43 מעשנים, 72 מרכיבים משקפים ו35 סטודנטים מעשנים ומרכיבים משקפיים.
כמה סטודנטים לא מעשנים ולא מרכיבים משקפיים?
X = 100-(72+43)+35=20 סטודנטים

הבעיה הכללית

נתונים A אלמנטים שונים זה מזה. מגדירים t תכונות המסומנות $p_1, p_2, ..., p_t$. כל אלמנט מקיים בין 0 לt תכונות.
נגדיר:
$w(p_i)$ - מספר האלמנטים המקיימים את התכונה p_i (ואולי גם תכונות נוספות).
$w(p_i, p_j)$ - מספר האלמנטים המקיימים את התכונה p_i וגם את התכונה p_j (ואולי גם תכונות נוספות).
$w(p_1, p_2, ..., p_t)$ - מספר האלמנטים המקיימים את כל התכונות.
E(0) – מספר האלמנטים שאינם מקיימים אף תכונה.

סימונים:

w(0)=n

$$w(1) = w(p_1) + w(p_2) + ... + w(p_t) = \sum_{i=1}^{t} w(p_i)$$

לw(1) אין משמעות קומבינטורית. בפרט זהו לא מספר האלמנטים שמקיימים תכונה אחת או לפחות אחת. W(1) זהו רק כתיב מקוצר ל $\sum_{i=1}^{t} w(p_i)$.

דוגמא:

בכיתה 100 סטודנטים.. 43 מעשנים, 72 מרכיבים משקפים ו35 סטודנטים מעשנים ומרכיבים משקפיים.
$w(1) = w(p_1) + w(p_2) = 43 + 72 = 115$

בפרט w(1) יכול להיות גדול ממספר האלמנטים בn.

$$w(2) = w(p_1, p_2) + w(p_{1,} p_3) + ... + w(p_1, p_t) + ... + w(p_t, p_t) = \sum_{1 \le i < j \le t} w(p_i, p_j)$$

ובאופן דומה, נגדיר w כללי:

$$w(r) = \sum_{1 < i_1 < i_2 < ... < i_r} w(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_t})$$

כעת נוכל להגדיר נוסחה לחישוב E(0):
עבור t=1: E(0)=w(0)-w(1)
עבור t=2: E(0)=w(0)-w(1)+w(2)
עבור t כלשהו:

$$E(0) = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i w(i)$$

<u>דוגמא 1:</u>

כמה מספרים יש בין 1 ל120 שלא מתחלקים לא ב2, לא ב3, ולא ב5?

האלמנטים: {1, 2, ..., 120} סה"כ: n=120.

תכונות:

p_1 : האיבר מתחלק ב2
p_2 : האיבר מתחלק ב3
p_3 : האיבר מתחלק ב5

נרצה למצוא את E(0).

$$w(p_1)=\frac{120}{2}=60$$
$$w(p_2)=\frac{120}{3}=40$$
$$w(p_3)=\frac{120}{5}=24$$
$$\Rightarrow w(1)=124$$

$$w(p_1,p_2)=\frac{120}{2\cdot 3}=20$$
$$w(p_1,p_3)=\frac{120}{2\cdot 5}=12$$
$$w(p_2,p_3)=\frac{120}{3\cdot 5}=8$$
$$\Rightarrow w(2)=40$$

$$w(3)=4$$
$$E(0)=w(0)-w(1)+w(2)-w(3)=32$$

דוגמא: פונקצית אוילר

לכל מספר שלם חיובי קיים פירוק יחיד למכפלת גורמים ראשונים מהצורה:

$$R = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_t^{a_t}$$

המקיים $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ ראשוניים.

הגדרה

שני מספרים נקראים זרים אם אין להם אף גורם ראשוני משותף.
gcd(n,m) מסמן את המחלק המשותף הגדול ביותר של n ו-m. gcd של מספרים זרים הוא 1.

הגדרה
עבור מספר שלם וחיובי n מסמנים ב $\phi(n)$ את מספר השלמים הקטנים או שווים לn הזרים לו.
הפונקציה $\phi()$ נקראית פונקציית אוילר.

n	זרים לn	$\phi(n)$
2	1	1
3	1,2	2
4	1,3	2
5	1,2,3,4	4
6	1,5	2
7	1,2,3,4,5,6	6

המטרה שלנו: למצוא נוסחה כללית עבור $\phi(n)$.

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_t^{a_t}$$

האלמנטים הם : {1, 2, ..., n}, ומכאן W(0)=n
התכונה Pi: המספר מתחלק בגורם הראשוני Pi.
אנחנו מחפשים את E(0), מס' המספרים הקטנים או שווים לn ולא מקיימים את התכונה, כלומר זרים.
ומכאן: E(0)=$\phi(n)$.

$$w(0) = n$$

$$w(1) = w(p_1) + w(p_2) + \dots + w(p_t) = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_t} = \sum_{i=1}^{t} \frac{n}{p_i}$$

$$w(2) = \sum_{1 \le i < j \le t} \frac{n}{p_i p_j}$$

$$w(t) = \sum_{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_r} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}} = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

and after calculations we will get :

$$\phi = \mathrm{E}(0) = \mathrm{n} \cdot \Pi(1 - \frac{1}{\mathrm{p_i}})$$

הפרות סדר

תמורה של n אלמנטים היא סידור של n האלמנטים. ראינו שיש !n תמורות בת n אלמנטים. הפרת סדר היא תמורה של המספרים 1 עד n כך שאף מספר לא נמצא במקומו הטיבעי.
נרצה למצוא את מספר הפרות הסדר עבור n.
D(n) – מספר הפרות הסדר בת n אלמנטים.
לדוגמא: D(3)=2, D(2)=1, D(1)=0.

המטרה: למצוא נוסחה כללית עבור D(n):
האלמנטים: התמורות בת n אלמנטים: !n אלמנטים.

P1: המספר ה1 במקום ה1
P2: המספר ה2 במקום ה2
Pn: המספר הn במקום הn

אנחנו מחפשים את E(0).

$$w(0 = n!$$

$$w(1) = \sum_{i=1}^{n} w(p_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)!$$

$$w(2) = n \cdot (n-2)!$$

$$w(r) = n \cdot (n-r)!$$

$$D(n) = E(0) = \binom{n}{0} \cdot n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (n-n)! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!}$$

$$D(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!}$$

<u>דרך להבנת וזכירת הנוסחה:</u>

נביט בתכונה אחת, $w(p_i)$, האומרת כי האיבר הi נשאר במקומו.
מכאן, $w(p_i) = (n-1)!$ ישנן !(n-1) אפשרויות לסדר את שאר האיברים. (כי כבר מיקמנו אחד).
נביט עכשיו על $w(p_i, p_j)$. $w(p_i, p_j) = (n-2)!$
עכשיו נביט בw(1): $w(1) = \binom{n}{1} \cdot (n-1)!$: כל האפשרויות לבחור את האיבר שיישאר במקומו כפול מספר האפשרויות לסדר את השאר. בדרך דומה נבנה גם את כל שאר הw(i) וכך נוכל לזכור את נוסחת הפרת הסדר בדרך יותר אינטואיטיבית.

דוגמא

נתונות הספרות: 1,1,1,2,2,2,3,3,3. כמה סדרות ניתן לבנות מהן כך שאין 3 ספרות זהות רצופות?

n הוא מספר הסדרות האפשריות. תמורות עם חזרות: $\frac{9!}{3!3!3!}$.

Pi – המספר i מופיע 3 פעמים ברצף.

כדי לחשב את w(Pi) נתייחס לשלושת הספרות הצמודות כאובייקט יחיד ונחלק את השאר.

$$w(p_1) = w(p_2) = w(p_3) = \frac{7!}{3!\cdot 3!}$$

$$w(p_1, p_2) = w(p_1, p_3) = w(p_2, p_3) = \frac{5!}{3!}$$

$$w(p_1, p_2, p_3) = 3!$$

$$w(1) = 3 \cdot \frac{7!}{3!\cdot 3!}$$

$$w(2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{3!}$$

$$E(0) = w(0) - w(1) + w(2) - w(3)$$

דוגמא:

לגברת כהן יש 8 נכדים. יש לה במקפיא 6 ארטיקים בטעם וניל, 3 בטעם שוקולד, 6 בטעם תות ו5 בטעם בננה. כמה אפשרויות יש לבחירת הארטיקים על ידי הנכדים כך שכל אחד יקבל את רצונו? (שלא יבקשו יותר ממה שיש)?

$n = 4^8$ אפשרויות לבחירת ארטיקים.

P1 – יש לפחות 7 בקשות לוניל

P2 – יש לפחות 4 בקשות לשוקולד

P3 – יש לפחות 7 בקשות לתות

P4 – יש לפחות 6 בקשות לבננה

$$w(p_1) = \binom{8}{7} \cdot 3 + \binom{8}{8}$$

כאשר $\binom{8}{8}$ זהו המצב שכולם בחרו וניל ואילו $3 \cdot \binom{8}{7}$ זהו המצב שאחד הילדים בחר ארטיק אחר.

$$w(p_2) = \sum_{i=4}^{8} \binom{8}{i} \cdot 3^{8-i}$$

כאשר i הוא מספר הילדים שבחרו שוקולד.

$$w(p_3) = w(p_1)$$
$$w(p_4) = \sum_{i=6}^{8} \binom{8}{i} \cdot 3^{8-i}$$
$$w(p_i, p_j) = 0 \quad \forall 1 \le i < j \le 4$$
$$w(p_i, p_j, p_k) = 0 \quad \forall 1 \le i < j < k \le 4$$
$$w(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$
$$w(1) = \sum_{i=1}^{4} w(p_i)$$
$$w(2) = w(3) = w(4) = 0$$
$$E(0) = n - w(1)$$

<u>דוגמא</u>

נתונים כדורים בk גדלים שונים. בכל גודל m כדורים הצבועים בm צבעים שונים. את הכדורים יש להכניס לm תאים כך שבכל תא יכנסו k כדורים, כדור מכל גודל.
בכמה דרכים ניתן לבצע זאת כאשר אין תא בו כל הכדורים צבועים באותו צבע?
האלמנטים: כל החלוקות של הכדורים לתאים כל שבכל תא k כדורים בגדלים שונים זה מזה.
תכונות: Pi: בתא הi כל הכדורים הם מאותו הצבע. $1 \le i \le m$.
אנחנו מחפשים את E(0).

$$w(0) = (m!)^k$$
$$w(i) = \binom{m}{i} \cdot p(m,i) \cdot ((m-i)!)^k$$
when $\binom{m}{i}$ is the selection of the cells,

and p(m,i) is the selection of colors with attetion to its order.

$$E(0) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} p(m,i)((m-i)!)^k$$

<u>הגדרה</u>

E(m) – מספר האלמנטים המקיימים בדיוק m תכונות.

$$E(m) = \sum_{r=m}^{t} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} \cdot w(r)$$

רקורסיה

נסמן את מספר האפשרויות לבצע ניסוי קומבינטורי בn אלמנטים על ידי $f(n)$.
נבטא את מספר האפשרויות לבצע את הניסוי בn אלמנטים כפונקציה של מספר האפשרויות לבצע את הניסוי בפחות מn אלמנטים.
נמצא יחס שקושר את $f(n)$ עם אחד הוא יותר מבין הערכים: $f(1),f(2),...,f(n-1)$.
בנוסף נספק תנאי התחלה לצורך תחילת החישוב.

<u>דוגמא</u>

בכמה אפשרויות ניתן לבנות מספר בן n ספרות המורכב מהספרות 1-6?
פיתרון סגור: 6^n.
נסמן ב$f(n)$ את מספר המספר באורך n שניתן לבנות מהספרות 1-6.
מספר באורך n ניתן לבנות ע"י הרחבת מספר באורך n-1 על ידי סיפרה נוספת.
לכן:

$$f(n)=f(n-1)*6$$

תנאי התחלה: $f(1)=6$

כדי לחשוב את $f(4)$ צריך לחשב את $f(3)$ ואת $f(2)$.

$$f(4)=f(3)\cdot 6=f(2)\cdot 6\cdot 6=f(1)\cdot 6\cdot 6\cdot 6=6^4$$

<u>דוגמא</u>

בכמה דרכים ניתן להעמיד n אנשים בשורה?
נסמם ב$f(n)$ את מספר האפשרויות עבור n אנשים.
סידור של n אנשים יתבצע כך:
- נבחר את הראשון מימין: n אפשרויות.
- נספר משמאלו n-1 אנשים בשורה - $f(n-1)$

$$f(n)=n\cdot f(n-1)$$
$$f(1)=1$$

- לעיתים לא ניתן למצוא נוסחה סגורה עבור בעייה.
- לעיתים פתרון בעזרת יחס רקורסיבי יעיל יותר מבחינה חישובית.

הפרות סדר – צורה רקורסיבית

הפרת סדר היא תמורה שבה אף איבר לא נמצא במקומו הטבעי.
D(n) – מספר הפרות הסדר של n אלמנטים.
כציד ניתן לבנות הפרות סדר?
בשלב הראשון נבחר איבר למקום ה1: יש n-1 אפשרויות לבצע זאת.
בשלב השני נסדר את שאר המספרים.
נניח שk נבחר לשבת בתא מספר 1, ונפריד לשני מקרים זרים:
מקרה א': האיבר הראשון ממוקם בתא k:

k		1	
1		k	

נותר לסדר n-2 איברים באופן שלכל מספר מקום מיוחד ושונה שאסור לו לשבת בו. הפרת סדר של n-2 אלמנטים: D(n-2).

מקרה ב': 1 לא נמצא במקום הk.

k			
1		k	אסור ל1 להיות במקום ה-k

ישנם n-1 אלמנטים שלכל אחד יש מקום מיוחד ושונה שאסור לו לשבת בו. זוהי הפרת סדר ב(n-1) אלמנטים. D(n-1) אפשרויות.
סה"כ:

$$D(n)=(n-1)[D(n-2)+D(n-1)]$$

תנאיי התחלה:

$$D(1)=0$$
$$D(2)=1$$

פתרון סגור:

$$D(n)=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot\frac{1}{i!}$$

<u>מספרי פיבונצי</u>

אדם מטפס על סולם בעל n שלבים.
בכל פעם הוא יכול לעלות 2 שלבים בבת אחת או שלב בודד.
בכמה אופנים הוא יכול לטפס לראש הסולם?

כיצד ניתן לטפס על סולם בעל n שלבים? נפריד לשני מקרים:
מקרה א': בפעם הראשונה עולים שלב בודד. נשארו f(n-1) אפשרויות.
מקרה ב': בפעם הראשונה עולים שני שלבים. נשארו f(n-2) אפשרויות.

$$F(n)= f(n-1)+f(n-2)$$

נוסחה סגורה:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

דוגמא

לכמה איזורים מחלקים nישר מישור, אם כל 2 ישרים נחתכים ואין 3 ישרים שנחתכים באותה נקודה?
נסמן בf(n) את מספר האיזורים הנוצרים ע"י n ישרים.
n-1 ישרים יוצרים f(n-1) איזורים. נוסיף את הישר הn. הישר הn נחתך בn-1 מקומות שונים, ולכן נוצרים n מקטעים. ומכאן:

$$F(n)=f(n-1)+n$$

תנאי התחלה:

$$F(1)=2$$

דוגמא

נתונות שתי קוביות זהו.
מטילים אותן n פעמים. בכל סידרה של n הטלות בודקים כמה דאבלים שונים יצאו.
דוגמא:

(1,1), (3, 4), (2, 2), (5, 6), (1, 1)

בסידרה 2 דאבלים.
סדרת הטלות תיקרא מוצלחת אם יש בה בדיוק 2 דאבלים שונים.
כמה סדרות מוצלחות יש בסידרה של n הטלות?
העולם: כמו הסדרות באורך n.
כנה הטלות יש? פיזור 2 קוביות ל6 תוצאות. ומכאן תוצאות אפשרויות להטלה אחת: $\binom{7}{5} = 21$.

העולם שלהם אם כך: 21^n
תכונות:
גישה 1: Pi – הדאבל (i,i) יצא. מחפשים את E(2).
גישה 2: Pi – הדאבל (i,i) לא יצא. מחפשים את E(4).

דוגמא

מצא נוסחת נסיגה למספר הווקטורים הבינריים באורך n שלא מכילים את הרצף 001.
נסמן את הפתרון בT(n). נרצה לפרק את הבעיה למקרים זרים.
מקרה א': הווקטור מתחיל ב1. ווקטורים באורך n המקיימים את התנאי = T(n-1) ווקטורים.
מקרה ב': הווקטור מתחיל ב0.
(1) מתחיל ב01 = T(N-2)
(2) מתחיל ב00 = 1 (רק ווקטור ה0).
לפיכך:

$$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1$$

ישנם שני תנאים התחלה:

$$T(0)=1$$
$$T(1)=2$$

דוגמא

בעיית איזון הסוגריים
בהינתן n זוגות סוגריים, כמה סידורים חוקיים ישנם?
סידור חוקי - בכל רישא מספר הפותחים גדול ממספר הסוגרים.
נסמן בT(n) את מספר הסוגרים החוקיים.

| (| |) | |

1 i

האם i יכול להיות מספר אי זוגי?
מכיוון שi הוא הסוגר של 1, הסידור איננו יכול להיות חוקי. הסוגר של הפותח הראשון נמצא במקום 2i. ביניהם 2i-2 תווים, כלומר (i-1) זוגות סוגריים. בצד השני (n-i) זוגות סוגריים. נבחין בין מקרים לפי מיקום הסוגר הראשון.

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n}T(i-1)\cdot T(n-i)$$

תנאיי התחלה:

T(0)=1

<u>דוגמא</u>

(0,k)				(n,k)
(0,0)				(n,0)

פתרון ידוע לבעיה: $\binom{n+k}{n}$. נפתור זאת כעת ברקורסיה.

H(n,k)

1. הגענו מ(n-1,k) ועשינו צעד ימינה. H(n-1, k).
2. הגענו מ(n,k-1) ועשינו צעד למעלה. H(n, k-1)

סה"כ: H(n,k)=H(n-1,k)+H(n,k-1)

עבור כל נקודה על הצירים צריכים תנאי התחלה:

$$\forall n\geq 0, H(n,0)=1$$
$$\forall k\geq 0, H(0,k)=1$$

הבעיה הבסיסית בקומבינטוריקה - חלוקת אלמנטים לתאים

הבעיה הבסיסית בקומבינטוריקה: מהו מספר האפשרויות לחלק k אלמנטים לn תאים.
כדי לענות על שאלו זו יש לספק נתונים נוספים כגון:

- האם האלמנטים זהים?
- האם התאים זהים?
- האם יש חשיבות לסדר בתוך התא?
- האם קיבול התא מוגבל?
- וכו'

<u>בעיה מספר 1</u>

בכמה אפשרויות ניתן לחלק k אלמנטים זהים בn תאים שונים כאשר אין הגבלה על קיבול התא?
ראינו כי הפיתרון הוא $\binom{k+n-1}{k}$.

<u>בעיה מספר 2</u>

בכמה אופנים ניתן לפזר k אלמנטים שונים כאשר יש חשיבות לסדר בתוך התא וקיבלות התא איננה מוגבלת?
<u>פתרון</u>
נתייחס לכדורים כאילו הם זהים ונזרוק אותם לתאים. $\binom{k+n-1}{k}$
נכפיל בk! כדי לקבל את כל הפרמוטציות השונות האפשריות לחלוקה לתאים. $k!\cdot\binom{k+n-1}{k}$

<u>בעיה מספר 3</u>

בכמה אופנים ניתן לפזר k אלמנטים שונים בn תאים שונים כאשר אין חשיבות לסדר בתוך התאים וקיבולם אינו מוגבל? n^k

<u>בעיה מספר 4</u>

בכמה אופנים ניתן לפזר k אלמנטים שונים בn תאים שונים כאשר אף תא אינו ריק?

<u>פתרון 1</u> בעזרת הכלה והפרדה.
Pi - התא הi ריק. $1 \le i \le n$. מחפשים את E(0).

$$w(0) = n^k$$

$$w(i) = \binom{n}{i}\cdot(n-i)^k$$

$$E(0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot\binom{n}{i}\cdot(n-i)^k$$

<u>פתרון שגוי</u>

נבחר n מתוך k הכדורים עם חשיבות לסדר (כדור בכל תא) ואת יתר k-n הכדורים נזרוק באופן חופשי.
דוגמא לבעייתיות:

5 3	4 2	1

5 3	2 4	1

<u>פתרון 2 - פתרון רקורסיבי</u>

רקורסיה ב2 משתנים. נסמן T(n,k) את מספר האפשרויות לפזר k כדורים שונים בn תאים שונים כך שאף תא אינו ריק.
בשלב הראשון: נבחר תא עבור כדור מספר 1.
ישנן n אפשרויות.
נפז את יתר הכדורים.
מקרה א': כדור 1 נשאר לבד בתא. ישארו n-1 כדורים לפזר בn-1 תאים. ישנן T(k-1, n-1) אפשרויות.
מקרה ב': כדור 1 לא נשאר לבדו בתא. נפזר k-1 כדורים לn תאים כך שאף אחד מn התאים אינו ריק וכדור אחד לפחות מצטרף לכדור מספר 1. ישנן T(k-1,n) אפשרויות לכך.

סה"כ:

T(k,n)=n[T(k-1, n-1)+T(k-1,n)]

תנאיי התחלה:

$$T(1,n),T(k,1),n>1$$
$$T(1,n)=0$$
$$T(k,1)=1$$

<u>בעיה 5</u>
בכמה אופנים ניתן לבחור k אלמנטים מתוך n אלמנטים שונים ללא חשיבות לסדר?
ראינו כי התשובה היא $\binom{n}{k}$.

EOF