עדכון אחרון: 26.7.2010

מתמטיקה דיסקרטית

ניר אדר

מסמך זה הוא הראשון בסדרת מסמכים שמטרתם להציג לקורא את עקרונות הקומבינטוריקה, כפי שהם מתוארים בקורס "מתמטיקה דיסקרטית", אך אין זה חומר רשמי של הקורס. המסמך מתאים גם לחלקו הראשון של הקורס "קומבינטוריקה למדעי המחשב" בטכניון.

תוכן עניינים

בעיות מניה בסיסיות

חוק הסכום

מתי מחברים?

דוגמה: בכיתה יש 15 בנות ו-10 בנים. כמה תלמידים יש בכיתה? תשובה: 15+10=25.

כאשר סופרים עצמים המתחלקים למספר סוגים, כך שאין ביניהם חפיפה, מחברים את מספרי העצמים מכל סוג.

חוק הסכום: אם בקבוצה א' יש m איברים, בקבוצה ב' יש n איברים והקבוצות זרות (כלומר, אין אף איבר הנמצא בשתי הקבוצות) אז מספר האפשרויות לבחור איבר מקבוצה א' או ב' הוא m+n.

ניסוח נוסף:

אם למאורע א' יש m תוצאות אפשריות ולמאורע ב' יש n תוצאות אפשריות והמאורעות זרים, אז מספר האפשרויות שבדיוק אחד מהם יתרחש הוא m+n.

דוגמה: לוועד הפקולטה יש לבחור נציג משנה א' או משנה ב'. ישנם 30 אנשים שלומדים בשנה א' ועוד 40 אנשים שלומדים בשנה ב'. סה"כ האפשרויות לבחור נציג אחד הן 30+40=70 אפשרויות.

יש להיזהר: בפקולטה 40 דוברי אנגלית ו-20 דוברי צרפתית. בכמה אפשרויות ניתן לבחור נציג שהוא דובר אנגלית או צרפתית? יתכנו סטודנטים שהם דוברים גם אנגלית וגם צרפתית, ולכן לא נכון להשתמש בחוק הסכום במקרה זה, כי לא מתקיימת הדרישה ששתי הקבוצות יהיו זרות. אי אפשר לענות על השאלה ללא מידע נוסף על חפיפות, כלומר סטודנטים שיודעים את 2 השפות.

חוק המכפלה

מתי מכפילים?

דוגמה: בבית ספר יש שתי כיתות. באחת 20 תלמידים ובשניה 25. רוצים לבחור ועד בו נציג לכל כיתה. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת? תשובה: 20*25=500.

כאשר סופרים אפשרויות הנקבעות ע"י מספר מסוים של בחירות, והבחירות אינן תלויות זו בזו, אז מספר האפשרויות הכללי הוא מכפלת מספריהן בכל אחת מהבחירות.

חוק המכפלה: אם ניתן לבצע תהליך בשני שלבים, בשלב א' m תוצאות ובעקבות כל תוצאה של שלב א' יש n תוצאות אפשריות לשלב ב', ואם כל צירוף אפשרי של האיברים נותן תוצאה שונה, אזי מספר האפשרויות לבצע את התהליך הוא m*n.

דוגמה: כמה מילים בנות 2 אותיות ניתן לבנות מהאותיות a,b,c?

עבור האות הראשונה נבחר אחת מ- 3 האותיות (ישנן 3 אפשרויות לבחור אות) ולאחר מכן נבחר אות עבור האות השניה (גם לכך ישנן 3 אפשרויות). סה"כ: 3*3=9 אפשרויות.

<u>דוגמא לשאלה בעייתית:</u> כמה מילים בנות שתי אותיות ניתן לבנות מהאותיות a,b,c כאשר a היא אות במילה?

<u>פתרון שגוי:</u> נחלק לשני שלבים:

שלב א': נבחר מקום עבור ה-a. יש לכך 2 אפשרויות

שלב ב': נבחר את האות שתשב במקום האחר. יש 3 אפשרויות.

סה"כ 6 אפשרויות. אבל המילים בנות שתי אותיות כאשר a מופיעה הן aa, ab, ac, ba, ca. כלומר, יש רק 5 אפשרויות. היכן הטעות? באופן הספירה הנ"ל ספרנו את המילה aa פעמיים: בפעם הראשונה בחרנו בשלב א' ש-a תופיע במקום הראשון, ואח"כ בשלב ב' בחרנו שהאות שתשב במקום האחר (המקום השני) תהיה a. בפעם השניה בחרנו בשלב ש-a תופיע דווקא במקום השני, ואח"כ בשלב ב' בחרנו שהאות שתשב במקום האחר (המקום הראשון) תהיה a. בשני המקרים בחרנו המילה שנוצרה היא aa. לכן אופן הספירה הנ"ל גרם לספירה כפולה של aa, ומס' האפשרויות שקיבלנו היה 6 במקום 5.

יש להיזהר מספירה כפולה.

<u>הפתרון הנכון:</u> כמה מילים באורך 2 אותיות מעל a,b,c קיימות ללא אילוצים? תשובה: 9 (כפי שחישבנו קודם). כמה מילים באורך 2 אותיות קיימות כך שהן לא עונות על האילוץ ש-a מופיעה במילה? כלומר, כמה מילים באורך 2 קיימות מעל a,b בלבד? תשובה: 2*2=4 (מדוע? 2 אפשרויות לבחירת האות הראשונה, 2 אפשרויות לבחירת האות השניה, ומכלל הכפל יש 2*2 מילים אפשריות). לכן מס' המילים שעונות על האילוץ הוא 9-4=5.

חליפות

בכיתה שיש בה 20 תלמידים רוצים לבחור נבחרת שחמט. בנבחרת יש לוח ראשון, שני ושלישי. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת?

יש 20 אפשרויות לבחירת הלוח הראשון. לאחר שבחרנו את הלוח הראשון, יש 19 אפשרויות לבחירת השני, ולאחר מכן יש 18 אפשרויות לבחור את השלישי. לכן מס' האופנים הוא 20*19*18.

<u>הגדרה</u>

נתונה קבוצה של n אלמנטים שונים.

חליפה של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה-n המסודרים בסדר כלשהו. כל איבר בקבוצה נמצא בחליפה לכל היותר פעם אחת (כלומר ללא חזרות).

סימון: P(n,k) מספר החליפות של k מתוך n אלמנטים.

<u>דוגמא לשאלה</u>: 10 רצים ממוספרים מ- 1 עד 10 משתתפים בתחרות שבה מחלקים 3 מדליות. מהו מספר האפשרויות לחלק מדליות?

<u>פתרון:</u>

שלב א': 10 אפשרויות לבחירת זוכה בזהב.

שלב ב': 9 אפשרויות לבחירת זוכה בכסף.

שלב ג': 8 אפשרויות לבחירת זוכה בארד.

סה"כ: 10*9*8 אפשרויות.

במקרה הכללי:

$$p(n,k)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

תמורות

<u>הגדרה:</u>

תמורה של n אלמנטים היא חליפה של n מתוך n אלמנטים. כלומר, P(n,n).

<u>הגדרה נוספת לתמורה:</u>

סידור של כל n האלמנטים.

<u>דוגמא:</u>

1. בכמה אופנים ניתן להושיב 5 ילדים בספה מול טלוויזיה?
2. בכמה אופנים ניתן להושיב 5 ילדים סביב שולחן עגול שמושביו זהים?

1. 5!
2. שלב א': בוחרים מקום לילד הראשון. קיימת אפשרות אחת.
   שלב ב': בוחרים מקום לילד השני. קיימות 4 אפשרויות.
   שלב ג': בוחרים מקום לילד השלישי. קיימות 3 אפשרויות.
   שלב ד': בוחרים מקום לילד הרביעי. קיימות 2 אפשרויות.
   שלב ה': בוחרים מקום לילד החמישי. קיימת אפשרות אחת.
   סה"כ קיימות 1*4*3*2*1=4! אפשרויות.

<u>באופן כללי:</u> מספר האפשרויות לסדר n אלמנטים שונים במעגל הוא (n-1)!

צירופים

בכיתה שיש בה 20 תלמידים רוצים לבחור נבחרת כדורסל (ובה 5 שחקנים). בכמה אופנים אפשר לעשות זאת? שימו לב: הפעם סדר בחירת השחקנים אינו חשוב (בניגוד לדוגמה של השחמט).
פתרון: נניח לרגע שהסדר דווקא כן חשוב. במקרה זה מס' האפשרויות הוא20*19*18*17*16. זה מס' האפשרויות לבחור רשימה מסודרת של 5 מתוך ה-20. אבל במקרה הזה ספרנו כל נבחרת מס' פעמים (הרי אם בחרנו קודם את תלמיד א' ואח"כ את תלמיד ב' או קודם את תלמיד ב' ואח"כ את תלמיד א' קיבלנו את אותה נבחרת, כלומר את אותה תת קבוצה של20 תלמידים). כמה פעמים נבחרת נתונה נספרה בספירה הזו? נניח x. לכן כדי להגיע אל התשובה נצטרך לחלק ב-x את מה שקיבלנו. אז כמה פעמים נספרה נבחרת נתונה? תשובה: 5*4*3*2*1=5!. לכן נחלק ב-5!.

<u>הגדרה:</u>

נתונה קבוצה של n אלמנטים שונים. צירוף של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה-n ללא חשיבות לסדר ביניהם.

סימונים: מס' הצירופים של k עצמים מתוך n מסומן ב-3 הסימונים (השקולים) הבאים-

$c(n, k), \binom{n}{k}, c_n^k$

משמעותם: מספר הצירופים של k מתוך n (מס' האפשרויות לבחור תת-קבוצה בגודל k מתוך קבוצה בגודל n).

במקרה הכללי:

$$\binom{n}{k} = \frac{p(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

מקרים פרטיים:

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

תמורות עם חזרות

דוגמא

נתונים 12 דגלים. 7 אדומים זהים, 3 כחולים זהים ו- 2 סגולים זהים. בכמה אפשרויות ניתן לסדר את הדגלים בשורה?

שלב א': נבחר מקומות לאדומים: $\binom{12}{7}$ אפשרויות.

שלב ב': נבחר מקומות לכחולים: $\binom{5}{3}$ אפשרויות.

שלב ג': נבחר מקומות לסגולים: $\binom{2}{2}$ אפשרויות.

$$\binom{12}{7}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2} = \frac{12!}{7!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot2!} = \frac{12!}{7!\cdot2!\cdot3!}$$

במקרה הכללי:

נתונים n עצמים מ-t סוגים שונים. q_1 עצמים מסוג 1, q_2 עצמים מסוג 2, ..., q_t עצמים מסוג t, כך ש: $q_1+q_2+\ldots+q_t=n$. אין מבחינים בין עצמים מאותו סוג.

מספר האפשרויות לסדרם בשורה הוא:

$$\binom{n}{q_1!}\cdot\binom{n-q_1}{q_2}\cdot\binom{n-q_1-q_2}{q_3}\cdot\ldots\cdot\binom{q_t}{q_t}=\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_t!}$$

<u>מקרים פרטיים:</u>

<u>מקרה 1</u>: מכל סוג יש רק עצם אחד. כלומר, $k_1=k_2=k_3=\ldots=k_t=1$. במקרה זה לכל עצם יש את הזהות שלו, ולכן השאלה שקולה למס' התמורות של n עצמים, והתשובה היא אכן n!.

<u>מקרה 2</u>: כל העצמים הם מאותו סוג. כלומר, t=1. במקרה זה אין בכלל סידורים שונים, ולכן יש רק סידור אחד, והתשובה היא אכן 1.

<u>מקרה 3</u>: t=2. במקרה זה יש 2 סוגים, והסידור נקבע לחלוטין ע"י בחירת המקומות שבהם נמצאים העצמים מסוג 1 (כי ברגע שקבעתי איפה נמצאים העצמים מסוג 1, קבעתי גם איפה נמצאים העצמים מסוג 2). לכן השאלה שקולה לבחירת k מקומות מתוך n, ואכן התשובה היא $\binom{n}{k}$.

חליפות עם חזרות

<u>דוגמא</u>

10 ספורטאים משתתפים ב- 3 תחרויות: ריצה, גובה, רוחק.
בכמה אפשרויות ניתן לחלק את מדליות הזהב בין המשתתפים?
שלב א': חלוקת מדליית זהב בריצה – 10 אפשרויות.
שלב ב': חלוקת מדליית זהב בגובה – 10 אפשרויות.
שלב ג': חלוקת מדליית זהב ברוחק – 10 אפשרויות.

סה"כ 1000 אפשרויות.

<u>במקרה הכללי:</u>

נתונים n אלמנטים ורוצים לבחור k עם חשיבות לסדר הבחירה וניתן לחזור על אותו אלמנט יותר מפעם אחת.

קיימות n^k אפשרויות בחירה.

<u>דוגמא</u>

מטילים 5 קוביות משחק שונות. כמה תוצאות שונות יתכנו? 6^5

<u>דוגמא חשובה</u>

כמה ווקטורים בינריים / מילים בינריות / סדרות בינריות יש באורךn?
סידרה בינרית: סידרה שמכילה רק אפסים ואחדים.
תשובה: 2^n

טבלת סיכום

	חליפות	תמורות	צירופים
ללא חזרות	$p(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$	n!	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$
עם חזרות	n^k	$\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_t!}$ $q_1+q_2+\ldots+q_t=n$	?

<u>סיכום הגדרות</u>

חליפה של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה-n המסודרים בסדר כלשהו. כל איבר בקבוצה נמצא בחליפה לכל היותר פעם אחת (כלומר ללא חזרות).

תמורה של n אלמנטים היא חליפה של n מתוך n אלמנטים.

נתונה קבוצה של n אלמנטים שונים. **צירוף** של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה- n ללא חשיבות לסדר ביניהם.

דוגמאות לשאלות

.1

נתונה משפחה ובה אב, אם ו-k ילדים.

סעיף א

בכמה אפשרויות ניתן לסדרם במעגל?

תשובה:

יש לנו k+2 אנשים שונים לסדר במעגל.

(k+1)!

סעיף ב

האם והאב יושבים אחד ליד השני. כמה אפשרויות ישנן כעת?

תשובה:

נתייחס לאם ולאב כאל אובייקט יחיד. עכשיו צריך להושיב k+1 אנשים במעגל, ולכן יש k! אפשרויות. אבל האב והאם יכולים לשבת זה לצד זה ב-2 אופנים.

2*k!

סעיף ג

לשני הצעירים אסור לשבת אחד ליד השני. כמה אפשרויות ישנן?

תשובה:

(k+1)! = הצעירים יושבים יחד + הצעירים אינם יושבים יחד.

יש 2*k! אפשרויות בהן הצעירים ישבו יחד. לכן ישנן (k+1)!-2*k! אפשרויות בהן הם לא ישבו יחד.

.2

סעיף א

עלינו לחלק 10 סוכריות זהות בין חיים למשה. כמה אפשרויות ישנן?

תשובה: 11 אפשרויות

סעיף ב

עלינו לחלק 10 סוכריות שאינן זהות בין חיים למשה? כמה אפשרויות ישנן?

תשובה: כל סוכרייה יכולה ללכת לחיים או למשה, לכן ישנן 2^{10} אפשרויות.

סעיף ג

עלינו לחלק 10 סוכריות לא זהות בין חיים למשה, אך איננו חייבים לחלק את כולן. תשובה: לכל כל סוכרייה יכולה ללכת לחיים, למשה או לצנצנת ולכן ישנן 3^{10} אפשרויות.

סעיף ד

עלינו לחלק n סוכריות שונות ל- n ילדים כך שכל ילד יקבל סוכרייה אחת. כמה אפשרויות ישנן?

תשובה: !n אפשרויות.

.3

קיימים שני כלובים ו- 10 ציפורים שונות. צריך לחלקן בכלוב כך שבכל כלוב יהיו לפחות4 ציפורים.

הפתרון: נחלק לקבוצות. בכלוב יכולות להיות4, 5, 6 ציפורים.

עבור 4 ציפורים: $\binom{10}{4}$

עבור 5 ציפורים: $\binom{10}{5}$

עבור 6 ציפורים: $\binom{10}{6}$

סה"כ אפשרויות: $\binom{10}{6}+\binom{10}{5}+\binom{10}{4}$

.4

בקורס דיסקרטית 2n סטודנטים ורוצים לחלקם לזוגות להצגת תרגילי הבית. כמה זוגות יתכנו?

הפתרון: נסדר 2n סטודנטים בשורה. ישנן $(2n)!$ אפשרויות לעשות זאת. נסתכל על כל זוג בסדר שנוצר כעל זוג להגשת תרגילים.

ב- $(2n)!$ האפשרויות כפינו:

1. סדר בין הזוגות
2. סדר בתוך כל זוג

את 1 נבטל על ידי חלוקה בn (מספר הזוגות).

את 2 נבטל על ידי חלוקה ב $(2!)^n$ (מספר הסדרים בזוג בחזרת מספר הזוגות)

והתשובה: $\frac{(2n)!}{n!(2!)^n}$

.5

כמה אפשרויות יש להוסיף n אנשים על ספסל כאשר:

סעיף א

ראובן רואה את שמעון מימינו:

פתרון ראשון

$\binom{n}{2}$ מספר האפשרויות לבחור מקום לשמעון וראובן

$(n-2)!$ האפשרויות לסידור שאר האנשים.

נכפיל גם במספר האפשרויות לסדר את ראובן ושמעון במקומותיהם (1 במקרה זה).

סה"כ: $\binom{n}{2}\cdot 1\cdot (n-2)!$

פתרון שני

מספר הסידורים החוקים + מספר הסידורים הלא חוקיים = $n!$

מספר הסידורים החוקיים זהה למספר הסידורים האי חוקיים (כי כל סידור חוקי נבדל מסידור אי חוקי על ידי החלפה אחת). מכאן מספר הסידורים החוקיים הוא $n!/2$.

סעיף ב

ראובן רואה את שמעון מימינו ואת צילה משמאלו.

תשובה:

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}\cdot(n-4)!\cdot 1\cdot 1$$

<u>דוגמא</u>

סעיף א

נתונות 5 סוכריות בצבעים שונים. בכמה דרכים ניתן לבחור 3 מתוכן?

תשובה:

$$\binom{5}{3}$$

סעיף ב

נתונות 5 צנצנות של סוכריות. בכל צנצנת הסוכריות זהות, ובצנצנות שונות סוכריות מסוג שונה. בכמה דרכים ניתן לבחור 3 סוכריות?

<u>פתרון שגוי</u>

נבחר סוכרייה ראשונה – 5 אפשרויות. סוכרייה שניה – 5 אפשרויות. סוכרייה 3 – אפשרויות. נבטל את הסדר על ידי חלוקה ב- !3:

הבעיה: ה -!3 אינו נכון. לא תמיד יש 6 אפשרויות סידור (כאשר חלק מהאלמנטים זהים למשל).

<u>פתרון נכון</u>

נחלק למקרים זרים:

- כל הסוכריות שונות: $\binom{5}{3}=10$
- שתי סוכריות זהות ואחת שונה: $5\cdot 4=20$.

5 זוהי בחירת הצנצנת ממנה נבחר שתי סוכריות ו- 4 זוהי הצנצנת השניה.

- כל הסוכריות זרות: 5 אפשרויות.

סה"כ: 35=10+20+5

ניסוח הבעיה

נתונים n סוגי עצמים, כאשר עצמים מאותו סוג הם זהים ומספרם לא מוגבל. בכמה אופנים ניתן לבחור מתוכם k כאשר אין חשיבות לסדר הבחירה?

בחירה מתאפיינת ב"כמה עצמים נבחרו מכל סוג". נאפיין בחירה על ידי המספרים $k_1, k_2, ..., k_n$,

כאשר k_1 הוא מספר העצמים שנבחרו מסוג 1, k_2 הוא מספר העצמים שנבחרו מסוג 2 וכו',

ומתקיים: $k_1 + k_2 + ... + k_n = \sum_{i=1}^{n} k_i = k$.

סימונים

$cc(n,k)$ $D(n,k)$

צירופים של k אלמנטים מתוך n עם חזרות.

מקרים פרטיים:

D(n, 1) = n

D(1, n) = 1

D(2, n) = n + 1

המטרה

למצוא נוסחה כללית עבור D(n, k)

- בעיה 1

בחירת k אלמנטים מתוך n סוגים ללא חשיבות לסדר ומותרות חזרות.

בעיה שקולה

בכמה אפשרויות ניתן לסדר k אסימונים ב- n תאים שונים?

לא נוכיח כאן למה הבעיות שקולות. ניתן להוכיח זאת בקלות ואת זאת נשאיר לקוראים.

פתרון לבעיה השקולה

ניתן ייצוג בינרי לכל פיזור. למשל

0	00				0100111
	0	0	0		1010101
				000	1111000

ניתן להגיע לכל הווקטורים השונים הבינריים. כמה ווקטורים בינריים ישנם?

במקרה הכללי: n סוגים ו- k אסימונים. יהיו n-1 ו-k אסימונים.

ישנם k+n-1 ווקטורים בינריים בהם k אפסים ו- n-1 אחדות.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

k+n-1 מקומות. נבחר מקומות לאפסים ובשאר המקומות יהיו אחדות.

פתרון:

$$D(n,k)=\binom{k+n-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$$

דוגמא

כמה ווקטורים בינריים בגודל m+n ישנם בהם n אפסים ו- m אחדים?

$\binom{n+m}{m}$ או $\binom{n+m}{n}$.

דוגמא

מספר האפשרויות להגיע מנקודה (0,0) לנקודה (m,n) בסריג הוא $\binom{n+m}{m}$ או $\binom{n+m}{n}$.

טעות נפוצה

בחירה של k מתוך n סוגים ללא חשיבות לסדר:

לא נכון: $\frac{n^k}{k!}$

נכון: $\binom{k+n-1}{k}$

תרגיל

מטילים 10 קוביות משחק זהות. מהן מספר התוצאות האפשריות?

הפתרון: בחירה של 10 עצמים מתוך 6 סוגים ללא חשיבות לסדר הבחירה, כלומר:

$$\binom{10+6-1}{10}=\binom{15}{10}$$

מה הפתרון אם הקוביות שונות? 6^{10}

עקרון שובך היונים

דוגמא

בחדר מסוים 10 זוגות נשואים. מה המספר המינימלי של אנשים שצריך לסכום כך שבוודאות יבחרו שני אנשים שהם בני זוג? 11

עקרון שובך היונים

אם n+1 יונים נכנסות ל- n שובכים אז בוודאות יש שובך אחד בו יותר מיונה אחת.

עקרון כללי יותר (הכללת שובך היונים)

(k>n)

אם k עצמים נכנסים ל- n תאים אז בוודאות יש תא אחד לפחות בו $\frac{k}{n}$ עצמים או יותר.

דוגמא

בקבוצה A 25 איברים מהתחום 1,2,150,....

הוכח כי בוודאות יש ב- A 4 מספרים שונים x,y,z,w כך ש- x+y = z+w.

- אם נמצא ב- A שני זוגות שונים של מספרים {z, w} ו- {x, y} כך ש $x \neq y$ וגם $z \neq w$ וגם x+y = z+w אז בהכרח x, y, z, w שונים.

פתרון

כמה זוגות בהם מספרים שונים ניתן לקבל מהקבוצה A?

$$\binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

מהו טווח המספרים האפשריים?

סכום מינימלי: 3

סכום מקסימלי: 297

ישנם 297 סכומים אפשריים לכל היותר. נשייך את הזוגות לתאים המייצגים את סכומם. לשני זוגות או יותר יש את אותו הסכום.

דוגמאות

א.

נתונות האותיות: א, א, א, א, ב, ב, ב, ב, ג, ג, ג, ג, ג, ד, ד, ד, ד

כמה מילים בנות 10 אותיות ניתן להרכיב מהן אם כל אות צריכה להופיע לפחות פעמיים?

<u>פתרון</u>

נחלק לשני מקרים:

מקרה 1: אות אחת מופיעה 4 פעמים

$\binom{4}{1}$ - בחירת האות שתופיע 4 פעמים.

$\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$ - סידור האותיות במילה.

מספר אפשרויות למקרה 1:

$$\binom{4}{1}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$$

מקרה 2: 2 אותיות מופיעות שלוש פעמים והשאר מופיעות פעמיים.

מספר אפשרויות למקרה 2:

$$\binom{4}{2}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

נשתמש בחוק הסכום, מספר האפשרויות לפתרון:

$$\binom{4}{1}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}+\binom{4}{2}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

ב.

נתונה ערמת כדורים כחולים, אדומים וצהובים.

סעיף 1

נרצה לבחור 10 כך שיהיו לפחות 5 אדומים.

$$1\cdot\binom{5+(3-1)}{5}=\binom{7}{5}$$

ה- 1 הוא בחירת 5 אדומים שבוודאות יופיעו בבחירה.

סעיף 2

נרצה לבחור 10 כדורים בהם יהיו לכל היותר 5 אדומים.

פתרון

מקרה לא חוקי הוא מצב בו יש לפחות 6 כדורים אדומים.

אנחנו יודעים למצוא את מספר האפשרויות: $1\cdot\binom{4+(3-1)}{4}=\binom{6}{4}$

מספר האפשרויות החוקיות והלא חוקיות הוא $\binom{10+(3-1)}{10}$.

ניתן למצוא כעת את מספר האפשרויות החוקיות.

ג.

דרך קו תקשורת רוצים להעביר 5 אותיות a,b,c,d,e ו- 15 רווחים כך שכל הרווחים הם בין האותיות ויש לפחות רווח אחד בין אות לאות.

פתרון

שלב א', נקבע סדר בין האותיות: 5!.

נשים באופן יחיד רווח אחד בין האותיות.

נותר פיזור 11 רווחים ב- 4 "תאים": $\binom{11+(4-1)}{11}$

פתרון סופי: $5!\cdot 1\cdot \binom{11+(4-1)}{11}$

הבינום של ניוטון

נוסחת הבינום של ניוטון מאפשרת לפתוח סוגריים בביטוי מהצורה $(x+y)^n$

דוגמא

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx +$$
$$+ xyxy + xyyx + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy$$

16 מחוברים שכל אחד מהם נוצר על ידי בחירה של x או y מאחד מהסוגריים.

בנוסף, בעזרת חוק החילוף ניתן לכנס איברים דומים.

$$xxxy = xxyx = xyxx = yx^3$$

בסכום נמצאים כל הווקטורים מעל { x, y } באורך 4, וכל ווקטור מופיע בדיוק פעם אחת.

מהו המקדם של x^3y ? כמספר הווקטורים באורך 4 המכילים 3 איקסים ו-y אחד, כלומר $\binom{4}{3}$.

מהו המקדם של x^iy^j ? $\binom{4}{i}$

באופן כללי:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)...(x+y) = x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}yx + ... + y^n =$$
$$= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + ... + \binom{n}{n}x^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

נוסחת הבינום: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

מכיוון שהמספרים $\binom{n}{k}$ מופיעים בתור מקדמים בנוסחת הבינום של ניוטון, הם נקראים גם "המקדמים הבינומיים".

נביט בביטוי $\binom{n}{k}$:

עבור n, k המקיימים $n \geq k > 0$ משמעות הביטוי $\binom{n}{k}$ היא $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

עבור n, k אחרים נגדיר באופן מלא את $\binom{n}{k}$ כך:

מקרה 1

$k < 0 \quad n \geq 0$

$\binom{n}{k} = 0$

מקרה 2

$k > n \quad n \geq 0$

$\binom{n}{k} = 0$

מקרה 3

$k = 0 \quad n \geq 0$

$\binom{n}{k} = 1$

מקרה 4

$\forall k \quad n < 0$

$\binom{n}{k} = 0$

זהויות קומבינטוריות

זהות 1

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

זהות 2

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

זהות 3

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

זהות 4

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

זהות 5

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = 0$$

זהות 6

$$\binom{n}{r+1} \cdot (r+1) = \binom{n}{r} \cdot (n-r)$$

זהות 7

$$\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r-k}$$

זהות 8

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

זהות 9

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

זהות 10

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{t+k}{k} = \binom{t+n+1}{n}$$

זהות 11

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{n+k}{r}=\binom{n+t+1}{r+1}-\binom{n}{r+1}$$

הוכחת הזהויות

הוכחת זהויות נעשות במספר אופנים:

1. באינדוקציה.
2. בדרך קומבינטורית – מציגים בעייה ושני פתרונות. הפתרון הראשון מתאים לצד אחד של הזהות והפתרון השני לצד השני, ומכיוון שקיים פתרון אחד לבעיה הפתרונות הם זהים, כלומר צדדי השוויון זהים.
3. דרך אלגברית – יוצאים מצד אחד של הזהות בעזרת פעולות אלגבריות ומגיעים לשני.
4. משולש פסקל.

זהות 1

צ"ל לכל n ו- k שלמים מתקיים: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

<u>הוכחה אלגברית</u>

נחלק למקרים:

א.

$0<k\le n$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}$$

ב.

$$n \geq 0$$

$$h < 0$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ (case 1)}$$

$$\binom{n}{n-k} = 0 \text{ (case 2)}$$

$n \geq 0$
$k > n$
$\binom{n}{k} = 0\ (\text{case } 2)$
$\binom{n}{n-k} = 0\ (\text{case } 1)$

ד.

$k = 0$
$n \geq 0$
$\binom{n}{k} = 1\ (\text{case } 3)$
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{n} = 1$

ה.

$n < 0$
$\forall k$
$\binom{n}{k} = 0$
$\binom{n}{n-k} = 0$

זהות 2

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

הוכחה קומבינטורית

הבעיה: בכמה אפשרויות ניתן לבחור k מתוך n אנשים לוועד מסויים?

פתרון א': בחירה של k מתוך n: $\binom{n}{k}$

פתרון ב': נניח שבין האנשים קיים מישהו בשם משה. נחלק לשני מקרים:

1. משה נבחר לוועד, ולכן נותר לבחור k-1 אנשים נוספים מתוך n-1 הנותרים, כלומר $\binom{n-1}{k-1}$
2. משה לא נבחר לוועד. עדיין יש לבחור k אנשים, אך מתוך n-1 הנותרים, כלומר $\binom{n-1}{k}$

מכאן יש $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות.

דרך נוספת לרשום את הזהות:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

זהות 3

לכל $n \ge 0$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

בסיס האינדוקציה

n = 0

$$(x+y)^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^k y^{0-k}$$

$$(x+y)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^k y^{0-k} = \binom{0}{0}x^0 y^0 = 1$$

טענה

לכל $n \ge 0$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

הנחה: הטענה נכונה עבור n כלשהו.

צעד: נוכיח את הטענה עבור n+1.

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$$

הוכחה

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n$$

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n+1-(k+1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\underset{(k+1=j)}{=}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}=$$

$$\binom{n}{n}x^{n+1}y^{n+1-(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k}+\binom{n}{0}x^0 y^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}=$$

$$\binom{n+1}{0}x^{01}y^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^k y^{n+1-k}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^{n+1-(n+1)}=$$

$$\binom{n+1}{0}x^{01}y^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}=$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$$

זהות 4

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

הוכחה אלגברית

נציב בנוסחת הבינום x=y=1.

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i\bullet 1^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

הוכחה קומבינטורית

בעזרת הבעיה : "כמה ווקטורים בינריים יש באורך n?".

זהות 5

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

הוכחה אלגברית

נציב בנוסחת הבינום x=-1 ו- y=1.

$$0=(-1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$$

הוכחה קומבינטורית

הזהות היא למעשה סכום של מקדמים בינומיים, ולכל מחובר בסכום יש סימן. הסימן נקבע לפי הזוגיות של i – כאשר i זוגי הסימן הוא + וכאשר i אי זוגי הסימן הוא -. כלומר, זהו סכום של מקדמים בינומיים שמתחלפים מפלוס למינוס לפי הזוגיות של i. נעביר את כל המקדמים הבינומיים שסימנם שלילי ונעביר אותם לאגף ימין של המשוואה. כלומר, נכתוב מחדש את הזהות בצורה הבאה:

$$\sum_{\underbrace{i=0}_{even(i)}}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{\underbrace{i=0}_{odd(i)}}^{n}\binom{n}{i}$$

(סכום מקדמי הבינום עבור iים זוגיים שווה לסכום מקדמי הבינום עבור iים אי זוגיים).

נניח שנתונה קבוצה בת n עצמים. אגף שמאל סופר את מספר התת-קבוצות שלה שגודלן מספר זוגי. אגף ימין סופר את מספר התת-קבוצות שלה שגודלן מספר אי זוגי. הנוסחה טוענת שלקבוצה בתת n איברים יש מספר שווה של תת-קבוצות בגודל זוגי ובגודל אי זוגי. מה ההסבר הקומבינטורי לשוויון בין שני המספרים האלה? נניח שהקבוצה בת n העצמים היא [n]={1,2,…,n}. לכל תת-קבוצה S של [n] נגדיר את f(S) להיות קבוצה זהה ל-S פרט לאיבר 1. כלומר, אם 1 מופיע בקבוצה S אז הוא לא יופיע ב-f(S). אם 1 לא מופיע ב-S אז הוא כן יופיע ב-f(S). פרט לאיבר 1 הקבוצות f(S) מוגדרת כזהה לקבוצה S. כעת ניתן לבדוק שהפונקציה f המוגדרת עבור S בגודל זוגי מעתיקה אותן באופן חח"ע ועל אל התת-קבוצות בגודל אי זוגי של [n]. כלומר, יש לנו התאמה חח"ע ועל בין הקבוצות שגודלן זוגי לבין הקבוצות שגודלן אי זוגי, ולכן מתקיים שוויון מספרי בין שני סוגי התת-קבוצות.