תורת המשחקים

יובל קפלן

סיכום הרצאות ד״ר דן רומיק בקורס ״תורת המשחקים״ (80428) באוניברסיטה העברית, 9–2008.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ב־22 בפברואר 2009.
עדכונים ותיקונים יופיעו ב־http://www.limsoup.net/. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

2006-7	חשבון אינפיניטסימלי 1	אלגברה לינארית 1
	חשבון אינפיניטסימלי 2	אלגברה לינארית 2
	תורת הקבוצות	
2007-8	חשבון אינפי׳ מתקדם 1	מבנים אלגבריים 1
	חשבון אינפי׳ מתקדם 2	מבנים אלגבריים 2
	תורת ההסתברות 1	מבוא לטופולוגיה
	תורת המספרים וקריפטו׳	תולדות המתמטיקה
2008-9	לוגיקה של מבנים מת׳	פונקציות מרוכבות
	משוואות דיפ׳ רגילות	תורת המידה
	תורת המשחקים 1	

תוכן עניינים

6.11.2008 **תורת המשחקים** מנסה לנתח מצבי קונפליקט בין גורמים שונים בעלי אינטגרס, בהם כל אחד מהגורמים מקבל החלטה, ומכלול ההחלטות שהתקבלו קובע את התוצאה.

לתורת המשחקים חשיבות ויישומים בתחומים רבים, ביניהם כלכלה, מדע המדינה וביולוגיה.

במאות ה־18 וה־19, היו רסיסי תובנות; תורת המשחקים המודרנית התפתחה מסוף שנות ה־20 של המאה ה־20 עם הישגיהם של ג'ון פון־נוימן (הגדרת משחק, שיווי משקל, משפט המינימקס) וג'ון נאש (שיווי המשקל הקרוי על שמו). תוצאותיו של נאש היוו דחיפה משמעותית לתחום, לצד המלחמה הקרה שהובילה להשקעה אמריקנית במחקר.

1 משחקי סכום אפס

1.1 בשני שחקנים

1.1.1 באסטרטגיות טהורות

משחק הוא מודל למצב קונפליקט בין שני גורמים בעלי אינטרס (להלן: **"שחקנים"**). לכל אחד מהשחקנים, יש מספר פעולות שהוא יכול לבצע (להלן: **"אסטרטגיות"**). כל שחקן בוחר אסטרטגיה מבין אוסף נתון (על־פי רוב סופי) של אסטרטגיות. הבחירה מתבצעת בו־זמנית. בהינתן בחירת אסטרטגיות, תוצאת המשחק היא זוג מדדים לשביעות הרצון של שני השחקנים כתוצאה מבחירת האסטרטגיות. שביעות רצון זו נמדדת כמספר ממשי (להלן: **"תועלת"**, utility, או **"תשלום"**, payoff).

משחק סכום אפס הוא משחק שבו האינטרסים של שני השחקנים מנוגדים באופן מקסימלי; פורמלית, התועלת של שחקן 2 היא מינוס התועלת של שחקן 1.[1]

משחק סכום אפס בשני שחקנים

הגדרה. **משחק סכום אפס בשני שחקנים** (באסטרטגיות טהורות) הוא אוסף $\Sigma_1 = \{1,\ldots,s_1\}$ של אסטרטגיות שחקן 1, אוסף $\Sigma_2 = \{1,\ldots,s_2\}$ של אסטרטגיות שחקן 2, וזוג פונקציות תועלת $u_1, u_2 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ כאשר u_i פונקציית התועלת של שחקן i ומתקיים $u_2 \equiv -u_1$.

בדרך כלל, נתאר רק את u_1. נוכל לתאר את התשלומים במטריצה, כאשר השורות מתארות את בחירת האסטרטגיה של שחקן 1, והעמודות מתארות את בחירת האסטרטגיה של שחקן 2.

שליטה

הגדרה. אסטרטגיה a של שחקן 1 **שולטת חזק** על אסטרטגיה b אם $u_1(a,j) > u_1(b,j)$ לכל אסטרטגיה j של שחקן 2. (כנ"ל, באופן אנלוגי, לשחקן 2; **שליטה חלשה** מוגדרת עם אי־שוויון חלש.)

רמת ביטחון מקסימלית

הגדרה. אסטרטגיה i_0 של שחקן 1 היא **אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית** אם לכל אסטרטגיה i של שחקן 1 מתקיים $\min_j a_{i_0,j} \geq \min_j a_{i,j}$ (כלומר $\min_j a_{i_0,j} = \max_i \min_j a_{i,j}$), כאשר $a_{i,j}$ התשלום בבחירת זוג אסטרטגיות (i,j).

[1] הגדרה זו שרירותית, כמובן, ובאותה מידה ניתן להגדיר "משחק סכום עשר".

באופן אנלוגי, אסטרטגיה j_0 של שחקן 2 היא **אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית** אם לכל אסטרטגיה j מתקיים $\max_i a_{i,j_0} \le \max_i a_{i,j}$ (כלומר $\max_i a_{i,j_0} = \min_j \max_i a_{i,j}$).

למה 1: בכל מטריצה $(a_{i,j})$ מתקיים $A = \min_j \max_i a_{i,j} \ge \max_i \min_j a_{i,j} = B$.

הוכחה (1). A הוא רמת הביטחון המקסימלית של שחקן 2 ו־B הוא רמת הביטחון המקסימלית של שחקן 1. אז 2 לא ישלם יותר מ־A ו־1 לא יקבל יותר מ־B, לכן ברור ש־$A \ge B$.

הוכחה (2). לכל שורה i במטריצה, מתקיים לכל j ש־$a_{i,j} \ge \min_{j'} a_{i,j'}$. לכן גם לכל i ו־j, $\max_{i'} a_{i',j} \ge a_{i,j} \ge \min_{j'} a_{i,j'}$. זה נכון לכל i, לכן $\max_{i'} a_{i',j} \ge \max_i \min_{j'} a_{i,j'}$. זה נכון לכל j, לכן $\min_{j'} \max_{i'} a_{i',j'} \ge \max_i \min_{j'} a_{i,j'}$.

שיווי משקל **הגדרה.** זוג אסטרטגיות (i_0, j_0) הוא **שיווי משקל** (באסטרטגיות טהורות) אם מתקיים שלכל 13.11.2008
אסטרטגיה j של שחקן 2, $a_{i_0,j_0} \le a_{i_0,j}$, ולכל אסטרטגיה i של שחקן 1, $a_{i_0,j_0} \ge a_{i,j_0}$.[2]

משפט 2: קיים למשחק שיווי משקל אם ורק אם מתקיים $\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}$, ובמקרה זה, אוסף שיווי המשקל הוא אוסף זוגות האסטרטגיות (i_0, j_0) כך ש־i_0 היא אסטרטגיית רמת הביטחון המקסימלית של שחקן 1 ו־j_0 היא אסטרטגיית רמת הביטחון המקסימלית של שחקן
ערך משחק 2. לכל זוג כזה מתקיים $a_{i_0,j_0} = \max_i \min_j a_{i,j}$. מספר זה נקרא **ערך המשחק**.

דוגמה. משחקים פשוטים ללא שיווי משקל:

זוג או פרט –

1	0
0	1

אבן, נייר ומספריים –

	אבן	נייר	מספריים
אבן	0	-1	1
נייר	1	0	-1
מספריים	-1	1	0

הוכחה. נניח שמתקיים $v = \max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}$ ויהי (i_0, j_0) זוג אסטרטגיות רמת ביטחון מקסימלית של שחקנים 1,2 בהתאמה. נראה שזהו שיווי משקל: מהגדרת אסטרטגיות רמת ביטחון מקסימלית,

$$a_{i_0,j_0} \ge \min_j a_{i_0,j} = \max_i \min_j a_{i,j} = v = \min_j \max_i a_{i,j} = \max_i a_{i,j_0} \ge a_{i_0,j_0}$$

אז $v = a_{i_0,j_0}$. כעת, לכל j' מתקיים $v = \min_j a_{i_0,j} \le a_{i_0,j'}$, ובאופן דומה, לכל i' מתקיים $v = \max_i a_{i,j_0} \ge a_{i',j_0}$ (כלומר, a_{i_0,j_0} הכי קטן בשורה שלו והכי גדול בעמודה שלו); לכן (i_0, j_0) שיווי משקל.

בכיוון השני: נניח שמתקיים $v_2 = \min_j \max_i a_{i,j} > \max_i \min_j a_{i,j} = v_1$. יהי (i_0, j_0) זוג אסטרטגיות; נראה שהן אינן שיווי משקל. מהגדרת v_1 ו־v_2, בכל עמודה של המטריצה קיים איבר גדול מ־ או שווה ל־v_2, ובכל שורה של המטריצה קיים איבר קטן מ־ או שווה ל־v_1. כעת, אם $a_{i_0,j_0} < v_2$ אז יש אסטרטגיה i' כך ש־$a_{i',j_0} \ge v_2 > a_{i_0,j_0}$, כלומר לשחקן 1 כדאי לסטות.

[2] כלומר, אם שני השחקנים מכריזים מראש על בחירת אסטרטגיות זו, לאף אחד מהם אין סיבה לשנות את בחירתו.

באופן דומה, אם $a_{i_0,j_0} > v_1$, אז יש אסטרטגיה j' כך ש־$a_{i_0,j'} \le v_1 < a_{i_0,j_0}$, כלומר לשחקן 2 כדאי לסטות. לכן (i_0, j_0) איננו שיווי משקל.

הראינו שכל זוג אסטרטגיות רמת ביטחון מקסימלית הוא שיווי משקל. בכיוון השני, נניח ש־(i_0, j_0) זוג אסטרטגיות שלפחות אחת מהן, ובלי הגבלת הכלליות i_0, איננה אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית. נסמן $v = \max_i \min_j a_{ij}$. אם $a_{i_0,j_0} < v$, אז לשחקן כדאי לשנות את בחירתו לאסטרטגיה i'_0 שהיא אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית ותבטיח לו תשלום של v. לכן (i_0, j_0) איננו שיווי משקל. מצד שני, אם $a_{i_0,j_0} \ge v$, מכיוון ש־i_0 איננה אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית, קיימת אסטרטגיה j'_0 של שחקן 2 כך ש־$a_{i_0,j_0} \ge v > a_{i_0,j'_0}$, לכן לשחקן 2 כדאי לשנות את בחירתו, ושוב זה אינו שיווי משקל.

1.1.2 באסטרטגיות מעורבות

בהינתן מטריצת תשלומים $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s_1 \\ j=1,\dots,s_2}}$, נרחיב את אוסף האסטרטגיות לכל שחקן על־ידי שנאפשר לשחקנים לבצע הגרלה כדי להחליט איזו פעולה ("אסטרטגיה טהורה") לבצע. כלומר, במשחק המורחב, אוסף האסטרטגיות של שחקן i יהיה Δ_{s_i}, כאשר Δ_k **הסימפלקס ה־$k-1$־מימדי**, $\Delta_k = \{(p_1, p_2, \dots, p_k) \,:\, p_1, \dots, p_k > 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1\}$ סימפלקס

($\Delta_1 = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$, $\Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ הישר $x + y = 1$ ברביע הראשון, $\Delta_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ חלק המישור $x + y + z = 1$ ברביע הראשון – משולש.)

בדרך כלל, נסמן ב־$(p_1, \dots, p_{s_1})$ את אסטרטגיית שחקן 1 וב־$(q_1, \dots, q_{s_2})$ את אסטרטגיית שחקן 2.

נרחיב את הגדרת פונקציית התועלת על־ידי שנגדיר, עבור וקטורי עמודות $p = (p_i)_{i=1,\dots,s_1}$, $q = (q_j)_{j=1,\dots,s_2}$,

$$u_1 = -u_2 = \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} p_i q_j a_{ij} = p^t A q$$

(תוחלת התועלת).[3]

קיבלנו, אם כן, משחק עם רצף של אסטרטגיות. המושגים שהגדרנו לגבי משחק עם אסטרטגיות טהורות תקפים גם כאן.

למה 3: $\min_{q\in\Delta_{s_2}} \max_{p\in\Delta_{s_1}} p^t A q \ge \max_{p\in\Delta_{s_1}} \min_{q\in\Delta_{s_2}} p^t A q$.

הוכחה. בדיוק כמו קודם. (ל־$\max$ ול־$\min$ יש משמעות כאן, כי פונקציה רציפה מקבלת מינימום ומקסימום על קבוצה קומפקטית.)

הגדרה. אסטרטגיה מעורבת $p_0 \in \Delta_{s_1}$ תיקרא **אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית** של שחקן 1 אם לכל $p \in \Delta_{s_1}$, $\min_q p_0^t A q \ge \min_q p^t A q$, כלומר אם $\min_q p_0^t A q = \max_p \min_q p^t A q$.

באופן דומה, $q_0 \in \Delta_{s_2}$ תיקרא אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית של שחקן 2 אם מתקיים $\max_p p^t A q_0 = \min_q \max_p p^t A q$.

[3] כלל לא ברור שזו ההרחבה הנכונה: עבור בני אדם, לקבל 100 או לקבל 50 בהסתברות $\frac{1}{2}$ ו־150 בהסתברות $\frac{1}{2}$ אלו שני דברים שונים.

תרגיל: $p_0 = (p_1, \ldots, p_{s_1})$ היא אסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית אם $\min_{q \in \Delta_{s_2}} p_0^t Aq \geq$ $\min_{q \in \Delta_{s_2}} p^t Aq$ לכל $p \in \Delta_{s_1}$, וזה קורה אס"ם $\min_{1 \leq j \leq s_2} p_0^t Ae_j \geq \min_{1 \leq j \leq s_2} p^t Ae_j$.[4]

הגדרה. זוג אסטרטגיות מעורבות (p_0, q_0) הן **שיווי משקל** באסטרטגיות מעורבות אם מתקיים $p_0^t Aq_0 = \max_p p^t Aq_0 = \min_q p_0^t Aq$.

משפט 4: קיים למשחק שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם ורק אם $\min_q \max_p p^t Aq =$ $v = \max_p \min_q p^t Aq$, ובמקרה זה, אוסף שיווי המשקל הוא אוסף הזוגות של אסטרטגיות שהן אסטרטגיות רמת ביטחון מקסימלית של שחקנים 1 ו־2, בהתאמה. עבור כל זוג כזה מתקיים $p_0^t Aq_0 = v$. מספר זה נקרא **ערך המשחק**.

משפט 5 (המינימקס): $\max_{p \in \Delta_{s_1}} \min_{q \in \Delta_{s_2}} p^t Aq = \min_{q \in \Delta_{s_2}} \max_{p \in \Delta_{s_1}} p^t Aq$. כלומר, לכל משחק סכום אפס בשני שחקנים קיים שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות. משפט המינימקס

הגדרה. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת **קמורה** אם היא מכילה את הקטע המחבר בין כל שתי נקודות בה, כלומר אם לכל $x, y \in A$ ולכל $0 \leq t \leq 1$ מתקיים $tx + (1-t)y \in A$. 20.11.2008

הגדרה. **צירוף קמור** של נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ הוא נקודה מהצורה $\sum_{i=1}^n p_i x_i$, כאשר $p_1, \ldots, p_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ (דהיינו $(p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$).

הגדרה. **הקמור** (convex hull) של נקודות $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ הוא אוסף הצירופים הקמורים של $x_1, \ldots, x_n$. מסמנים $\text{conv}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^n p_i x_i \ : \ (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n\}$.

הגדרה. **נקודת קיצון** של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ היא נקודה $x \in A$ שאינה ניתנת להצגה בצורה $x = \frac{y+z}{2}$ עבור $y, z \in A$, $y \neq z$.

הגדרה. **סכום מינקובסקי** של קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ הוא הקבוצה $A + B = \{a + b \ : \ a \in A, b \in B\}$.

תרגיל: חיתוך קבוצות קמורות הוא קבוצה קמורה. סכום קבוצות קמורות הוא קבוצה קמורה.

תזכורת: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת **סגורה** אם לכל סדרת נקודות $(x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \in A$, אם קיים הגבול $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ אזי $x \in A$.

קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת **קומפקטית** אם היא סגורה וחסומה. ידוע כי בקבוצה קומפקטית, לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ יש תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x \in A$.

משפט 6 (ההפרדה לקבוצות קמורות): תהא $\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה וסגורה כך ש־$0 \notin K$. אזי קיים קבוע $c > 0$ ווקטור $x \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $y \in K$ מתקיים $\langle x, y \rangle > c$.

[4] זה כך כיוון שפונקציה לינארית על קבוצה קמורה וקומפקטית מקבלת מינימום ומקסימום על אחת מנקודות הקיצון של הקבוצה.

הוכחה. הפונקציה $y \mapsto \|y\| = \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ מקבלת מינימום על הפונקציה המוקרה $K \cap B(0,R)$ עבור R גדול מספיק.[5] לכן היא גם מקבלת מינימום על K עצמה (מחוץ לכדור, הנורמה גדולה מ־R). תהא $x \in \mathbb{R}^n$ נקודה בה המינימום מתקבל, ונראה שהיא מקיימת את הטענה עם $c = \frac{\langle x,x\rangle}{2}$. אם $y \in K$, לכל $0 \le t \le 1$ מתקיים $ty + (1-t)x \in K$, ולכן לפי הגדרת x, מתקיים

$$\langle ty + (1-t)x, ty + (1-t)x\rangle \geq \langle x, x\rangle$$

כלומר

$$t^2\langle y,y\rangle + (1-t)^2\langle x,x\rangle + 2t(1-t)\langle x,y\rangle \geq \langle x,x\rangle$$

ובמילים אחרות,

$$2t\langle y,x\rangle \geq 2t\langle x,x\rangle + O(t^2)$$

נחלק ב־t ונשאיף את t ל־0. נקבל ש־$\langle y,x\rangle \geq \langle x,x\rangle = 2c > c$.

כעת נוכל להוכיח את משפט המינימקס:

הוכחה. נראה שקיים מספר ממשי v ווקטורים $p_0 \in \Delta_{s_1}$, $q_0 \in \Delta_{s_2}$ כך שלכל $1 \le j \le s_2$ מתקיים $\sum_{i=1}^{s_1} p_i a_{ij} = p_0^t A e_j \geq v$ (דהיינו, שחקן 1 יכול להבטיח תשלום v על־ידי האסטרטגיה p_0) ולכל $1 \le i \le s_1$ מתקיים $\sum_{j=1}^{s_2} q_j a_{ij} = e_i^t A q_0 \le v$ (דהיינו, שחקן 2 יכול להבטיח לא לשלם יותר מ־v). יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_{s_2}$ וקטורי העמודות של A, $a_j = (a_{ij})_{i=1,\ldots,s_1}$. נגדיר קבוצה קמורה וסגורה על־ידי $K = \mathrm{conv}(a_1, a_2, \ldots, a_{s_2}) + \mathbb{R}_+^{s_1}$ ($\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$) – כלומר, כל הווקטורים ששולטים על איזשהו צירוף קמור של עמודות A. יהי u מספר ממשי.

אם $(u,\ldots,u) \in K$, אז הווקטור $(u,\ldots,u)$ שולט על צירוף קמור של עמודות A, כלומר קיים וקטור $q = q_u \in \Delta_{s_2}$ כך ש־$Aq \le (u,\ldots,u)^t$ (אי־שוויון בכל קואורדינטה).

אם $(u,\ldots,u) \notin K$, אז ממשפט ההפרדה לקבוצות קמורות קיים וקטור $x_u = x \in \mathbb{R}^{s_1}$ כך שלכל $y \in K$, $\langle y,x\rangle > \langle (u,\ldots,u)^t, x\rangle = u\sum_{i=1}^{s_1} x_i$. בפרט, זה אומר ש־$x_i \geq 0$ לכל i, כי אפשר להשאיף את y_i ל־∞ ואם $x_i < 0$ היינו מקבלים סתירה. כמו כן, $x \neq 0$, לכן ניתן להחליף את x בווקטור $p = p_u = \frac{x}{\sum_{i=1}^{s_1} x_i} \in \Delta_{s_1}$ שגם עבורו מתקיים $\langle y,p\rangle > \langle (u,\ldots,u)^t, p\rangle = u\sum_{i=1}^{s_1} p_i = u$. זה נכון לכל $y \in K$, ובפרט ל־$y = a_j$. כלומר, $\sum_{i=1}^{s_1} p_i a_{ij} = \langle a_j, p\rangle > u$.

כעת נגדיר $v = \inf\{u \;:\; (u,\ldots,u) \in K\}$. בפרט, $(v,\ldots,v) \in K$ כי K קבוצה סגורה, ולכן עבור הווקטור $q = q_v$ שהגדרנו קודם מתקיים $Aq \le (v,\ldots,v)^t$, כלומר v רמת ביטחון של שחקן 2 המושגת על־ידי האסטרטגיה q_v. מהכיוון השני, לכל $n \geq 1$ הווקטור $(v-\frac{1}{n},\ldots,v-\frac{1}{n})$ אינו ב־K, לכן $v - \frac{1}{n}$ הוא רמת ביטחון של שחקן 1 המושגת על־ידי האסטרטגיה $p_{v-\frac{1}{n}}$ שהוגדרה קודם. כעת נשאיף את n ל־∞. מכיוון ש־Δ_{s_1} קבוצה קומפקטית, קיימת תת־סדרה מתכנסת $p_{v-\frac{1}{n_k}} \to p_v \in \Delta_{s_1}$, ועבור p_v מתקיים $\sum_{i=1}^{s_1} p_i a_{ij} \geq v$, כלומר v רמת ביטחון של שחקן 1 המושגת על־ידי האסטרטגיה p_v.

27.11.2008 **דוגמה.** במשחק הבא אין שיווי משקל באסטרטגיות טהורות:

[5] $B(0,R) = \{z \;:\; \|z\| \le R\}$ הכדור ברדיוס R סביב 0.

3	1
0	3

נמצא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות. שיווי משקל $((p_0, 1-p_0), (q_0, 1-q_0))$ צריך לקיים

$$\min(3p_0, p_0+3(1-p_0)) = \min_q p_0^t A q = \max_p \min_q p^t A q = \max_{0\le p\le 1} \min(3p, p+3(1-p))$$

p_0 הוא הפתרון של המשוואה $3p_0 = 3 - 2p_0$, כלומר $p_0 = \frac{3}{5}$. הערך של המשחק הוא $v = 3p_0 = 3 - 2p_0 = \frac{9}{5}$. באופן דומה, q_0 מקיים

$$\max(3q_0+(1-q_0), 3(1-q_0)) = \max_p p^t A q_0 = \min_q \max_p p^t A q = \min_{0\le q\le 1} \max(3q+(1-q), 3(1-q))$$

q_0 הוא הפתרון של מהשוואה $1 + 2q_0 = 3 - 3q_0$, כלומר $q_0 = \frac{2}{5}$, ו־$v = 1 + 2q_0 = \frac{9}{5}$.

פתרון אלטרנטיבי: בהוכחת משפט המינימקס, הגדרנו קבוצה $K = \mathrm{conv}\{A \text{ עמודות}\}+\mathbb{R}_+^{s_1}$ והראינו שערך המשחק הוא $v = \min\{u \in \mathbb{R} \ :\ (u,\dots,u) \in K\}$. במקרה שלנו, נקבל [גרף] נחשב את הערך: $v = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}v$ ולכן $v = \frac{9}{5}$.

הראינו גם שמכיוון ש־$(v,\dots,v) \in K$, הוא ניתן להצגה כ־$Aq_0 = (v,\dots,v)^t$; q_0 הוא אסטרטגיית רמת הביטחון המקסימלית של שחקן 2. לגבי שחקן 1, יש לטעון טיעון גבולי.

דוגמה. נתבונן במשחק

2	5	-1
1	-2	5

נסמן $p = (x, 1-x)$, $q = (a, b, c)$.

$$f(x_0) = \min(2x_0+(1-x_0), 5x_0-2(1-x_0), -x_0+5(1-x_0)) = \min_q p_0^t A q = \max_p \min_q p^t A q = \max_{0\le x<1} f(x)$$

x_0 הוא הפתרון של המשוואה $1 + x = 5 - 6x$, לכן $x_0 = \frac{4}{7}$, $v = 1 + 7x_0 = \frac{11}{7}$.

אם שחקן 2 משחק $q = (a, b, c)$ מול אסטרטגיית רמת הביטחון המקסימלית p_0 של שחקן 1, התשלום שלו יהיה

$$a(2\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{7}) + b(5\cdot\frac{4}{7} - 2\cdot\frac{3}{7}) + c(-\frac{4}{7}+5\cdot\frac{3}{7}) = \frac{11}{7}a + 2b + \frac{11}{7}b$$

מכיוון ש־$v = \frac{11}{7} < 2$, נובע שבאסטרטגיית רמת ביטחון מקסימלית $q_0 = (a_0, b_0, c_0)$ מתקיים $b_0 = 0$. כדי לקבוע את $q_0 = (a_0, 0, 1-a_0)$, נשתמש בעובדה שלשחקן 1 לא כדאי לשנות את בחירתו במצב זה: בפרט, אם ישחק את השורה הראשונה יקבל $2a_0 - (1-a_0) = 3a_0 - 1 \le \frac{11}{7}$, ולכן $a_0 \le \frac{6}{7}$, ואם ישחק את השורה השנייה, יקבל $a_0 + 5(1-a_0) = 5 - 4a_0 \le \frac{11}{7}$, ולכן $a_0 \ge \frac{6}{7}$.[6] לכן $a_0 = \frac{6}{7}$. שיווי המשקל הוא $p_0 = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$, $q_0 = (\frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7})$, $v = \frac{11}{7}$.

כפי שראינו, מהוכחת משפט המינימקס מקבלים אלגוריתם לחישוב שיווי משקל. זה שקול לבעיית תכנון לינארי, שניתן לפתור בזמן פולינומיאלי (שיטת הסימפלקס).

[6] זה, כמובן, לא מקרי: משפט המינימקס מבטיח זאת.

1.1.3 סיכונים

הגדרה. תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה. פונקציה $f : K \to \mathbb{R}$ נקראת **פונקציה קמורה** אם לכל $x, y \in K$ ומספר $0 \leq t \leq 1$ מתקיים $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. f נקראת **פונקציה קעורה** אם $-f$ קמורה.

משפט 7: יהיו $X \subseteq \mathbb{R}^{s_1}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^{s_2}$ קבוצות קומפקטיות קמורות.[7] תהא $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך שמתקיים (1) לכל $x_0 \in X$, הפונקציה $y \mapsto f(x_0, y)$ קמורה על Y; (2) לכל $y_0 \in Y$, הפונקציה $x \mapsto f(x, y_0)$ קעורה על X. אז מתקיים $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$.

ניתן לפרש את העובדה שעבור שחקן 1 הפונקציה קעורה כאהבת סיכון: השחקן יעדיף לבחור אסטרטגיה שהיא ממוצע מאשר את ממוצע התשלומים (כי הוא נהנה מההגרלה עצמה ולא רק מהתשלום עצמו – ההנאה מגבירה את התועלת). קמירות, באופן דומה, ניתנת לפירוש כשנאת סיכון. ממשפט זה אפשר להסיק את משפט המינימקס.

[7] במקרה של משחקים, ניקח $X = \Delta_{s_1}$, $Y = \Delta_{s_2}$.

2 משחקים לא שיתופיים בצורה אסטרטגית

2.1 הגדרות

משחק בצורה אסטרטגית

הגדרה. **משחק n שחקנים בצורה אסטרטגית** עם מספר סופי של אסטרטגיות (טהורות) מורכב מ־(1) אוסף של n שחקנים $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$; (2) אוסף סופי של פעולות (אסטרטגיות טהורות) לכל שחקן, $S_i=[s_i]$; (3) פונקציית תועלת (תשלום) $u_i:\prod_{i=1}^n S_i\to\mathbb{R}$ לכל שחקן $i\in[n]$. 4.12.2008

ההרחבה המעורבת

אסטרטגיה מעורבת לשחקן i היא וקטור הסתברות $p_i\in\Delta_{s_i}$. בהינתן אסטרטגיות מעורבות $p_i\in\Delta_{s_i}$, $i=1,\ldots,n$, מרחיבים את פונקציית התשלום על־ידי שמגדירים

$$u_i(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in\prod_{k=1}^n S_k}\prod_{k=1}^n p_k(j_k)u_i(j_1,\ldots,j_n)$$

(תוחלת התשלום לשחקן i).

דוגמה. משחקים על ריבוע היחידה: האסטרטגיות לשחקנים 2,1 הן $[0,1]$. פונקציות התועלת: $u_i(x,y)=A_ixy+B_ix(1-y)+C_i(1-x)y+D_i(1-x)(1-y)$. זה שקול למשחק באסטרטגיות מעורבות עם מטריצות תשלומים $U_i=\begin{pmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{pmatrix}$ (מסמנים $\begin{pmatrix}A_1,A_2 & B_1,B_2\\ C_1,C_2 & D_1,D_2\end{pmatrix}$).

שיווי משקל נאש

הגדרה. במשחק n שחקנים, אוסף אסטרטגיות מעורבות $p_1,\ldots,p_n$ ייקרא **שיווי משקל נאש** אם לכל $1\le i\le n$, $u_i(p_1,\ldots,p_n)=\max_{p_i'\in\Delta_{s_i}}u_i(p_1,\ldots,p_{i-1},p_i',p_{i+1},\ldots,p_n)$.

דוגמה. דילמת האסירים:

	C	$\neg C$
C	$1,1$	$5,0$
$\neg C$	$0,5$	$4,4$

(C – האסיר מודה). לכל אחד משני אסירים נאמר שאם הוא וחברו יודו, עונשם יופחת, ואם רק הוא יודה, יקבל הטבות. במקרה זה שיווי המשקל היחיד הוא כאשר שניהם מודים, אף שאם שניהם מודים, מצבם טוב יותר כי לא יורשעו. מאפיה היתה דואגת לשנות את המצב ("אנחנו נדאג שהתועלת שלך תקטן אם תלשין!").

דוגמה. מלחמת המינים:

	Θ	W
Θ	$1,2$	$-1,-1$
W	$-1,-1$	$2,1$

הבעל והאישה מפיקים תועלת מללכת יחד לבילוי בתיאטרון (Θ) או בתחרות איגרוף (W), אבל מחליטים באופן בלתי תלוי לאן ללכת. במקרה זה, שיוויי המשקל הם (Θ,Θ) ו־(W,W) (וכן $((\frac12,\frac12),(\frac12,\frac12))$).

2.2 משפט נאש

משפט 8 (נאש): בכל משחק n שחקנים קיים שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות.

משפט 9 (נקודת השבת של בראוור): יהי $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$ כדור היחידה ב־$\mathbb{R}^n$. לכל פונקציה רציפה $f : D^n \to D^n$ יש נקודת שבת, כלומר $x \in D^n$ כך ש־$f(x) = x$.[8]

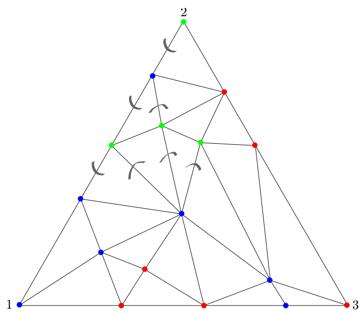
עבור $n = 1$, הטענה היא שלכל פונקציה רציפה $f \ : \ [0,1] \ \to \ [0,1]$ יש נקודת שבת, וזה נכון כי הפונקציה $g(x) = f(x) - x$ מקיימת $g(0) \geq 0$,$g(1) \leq 0$ ולכן קיים $x \in [0,1]$ כך ש־$g(x) = 0$ (משפט ערך הביניים).

עבור $n = 2$, ניתן הוכחה קומבינטורית של שפרנר. נשים לב שבמקום לעבוד עם D^2, ניתן להוכיח לכל מרחב הומיאומורפי ("שקול טופולוגית") ל־D^2, כלומר, בפרט, קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שקיימת פונקציה רציפה, חד־חד ערכית ועל $h : D^2 \to A$ כך שגם $h^{-1} : A \to D^2$ רציפה. אנו נוכיח זאת עבור $A = \Delta_3$; קל לראות שהוא הומיאומורפי ל־D^2.

למה 10 (שפרנר): בהינתן טריאנגולציה[9] של המשולש למשולשים יותר קטנים ובהינתן צביעה של קדקודי הטריאנגולציה בצבעים $\{1,2,3\}$ המקיימת (1) אם מסמנים את קדקודי המשולש הגדול ב־v_1, v_2, v_3, אז עבור $i = 1,2,3$, הקדקוד v_i צבוע בצבע i; (2) הקדקודים על הצלע של המשולש הגדול בין v_i ל־v_j צבועים בצבעים $\{i,j\}$. אז קיים משולש קטן 'צבעוני', כלומר – קדקודיו צבועים בשלושת הצבעים $\{1,2,3\}$.

הוכחה. נסמן ב־k את מספר המשולשים הקטנים הצבעוניים. נוכיח ש־k אי־זוגי, ובפרט אינו 0. נסתכל באוסף המשולשים הקטנים $T_1, T_2, \ldots, T_n$ הכולל גם את "המשולש באינסוף" (המשלים של המשולש הגדול כאשר פורשים אותו על ספירה; קדקודיו הם v_1, v_2, v_3).

נגיד ששני משולשים מתוך אוסף זה **חברים** אם הם שכנים (יש להם צלע – במקרה של המשולש באינסוף, חלק מצלע – משותפת) וקצוות הצלע צבועים בצבעים $\{1,2\}$.



משולשים חברים מחוברים בקשת.

[8] המשפט שקול לטענה שלא ניתן לכווץ את הספירה $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$ באופן רציף בלי לעבור דרך הראשית, כפי שראינו במבוא לטופולוגיה.

[9] **טריאנגולציה:** הצגה של המשולש כאיחוד משולשים קטנים שכל שניים מהם זרים או נחתכים בצלע משותפת לשניהם או בקדקוד משותף.

למשולשים צבעוניים (מלבד המשולש באינסוף) יש חבר אחד; למשולשים שקדקודיהם צבועים בצבעים $\{1,2\}$ שני חברים; לכל שאר המשולשים, פרט, אולי, למשולש באינסוף, אין חברים. בפרט, מבין המשולשים הקטנים, רק למשולשים הצבעוניים יש מספר אי־זוגי של חברים. לסיום, נשים לב כי

1. למשולש באינסוף יש מספר אי־זוגי של חברים, כי לאורך הצלע בין v_1 ל־v_2 הצבע מתחלף $2 \leftrightarrow 1$ מספר אי־זוגי של פעמים, וכל פעם כזו נותנת חבר;
2. סכום מספר החברים על כל המשולשים $T_1,\ldots,T_n$ הוא זוגי, כי כל יחס חברות נספר פעמיים.

לפיכך, k - מספר המשולשים הקטנים הצבעוניים - אי־זוגי.

כעת נוכל להוכיח את משפט נקודת השבת של בראוור: 11.12.2008

הוכחה ($n=2$). נתונה פונקציה רציפה $f:\Delta_3\to\Delta_3$. ניקח סדרת טריאנגולציות $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ של Δ_3 כך ש־$\delta(T_n)\to 0$, כאשר $\delta(T)$ הוא קוטר[10] המשולש הגדול ביותר בטריאנגולציה. (הוכחת קיום סדרה כזו - תרגיל.) נניח בשלילה שאין נקודת שבת. לכל טריאנגולציה T_n נגדיר צביעה של הקדקודים בשלושה צבעים באופן הבא: $\lambda(v)=\min\{1\le i\le 3\ :\ f(v)_i<v_i\}$ (קיים i כזה כי $v_1+v_2+v_3=1$ ו־$f(v)_1+f(v)_2+f(v)_3=1$, ואם לא קיים כזה - קיבלנו נקודת שבת).

הצביעה מקיימת את הנחות הלמה של שפרנר: לפי הגדרה, $\lambda(e_j)=j$. אם v על הצלע המנוגדת ל־e_j, אזי $v_j=0$ ולכן $\lambda(v)\ne j$.

לכן לכל n קיים משולש צבעוני $t_n=(v^{n,1},v^{n,2},v^{n,3})$ כך ש־$\lambda(v^{n,i})=i$. מקומפקטיות Δ_3, קיימת תת־סדרה מתכנסת $v^{n_k,1}\to u\in\Delta_3$. היות ש־$\delta(T_n)\to 0$, גם $v^{n_k,2}\to u$ ו־$v^{n_k,3}\to u$.

$\lambda(v^{n_k,1})=1$, לכן $f(v^{n_k,1})_1<v_1^{n_k,1}$, ומכאן גם $f(u)_1\le u_1$. באופן דומה, $f(u)_2\le u_2$ ו־$f(u)_3\le u_3$. לכן בהכרח $f(u)=u$.

כעת נוכל להוכיח את משפט נאש:

הוכחה. נניח חיזוק קל של משפט בראוור: אם $K\subseteq\mathbb{R}^n$ **קמורה וקומפקטית** ו־$f:K\to K$ פונקציה רציפה, אזי יש ל־f נקודת שבת.

נתון משחק ב־n שחקנים: לשחקן i קבוצת אסטרטגיות טהורות $S_i=\{1,2,\ldots,s_i\}$. נבנה פונקציה $f:K\to K$, $K=\prod_{i=1}^n\Delta s_i$ שנקודות שבת שלה היא שיווי משקל נאש.

עבור וקטור אסטרטגיות מעורבות $p=(p_1,\ldots,p_n)$ ($p_i=(p_i(1),\ldots,p_i(s_i))\in\Delta_{s_i}$), נסמן ב־$p_{-i}$ את הווקטור p ללא הרכיב p_i. נגדיר פונקציית עזר

$$\operatorname{gain}_i(p,a)=\max(0,u_i(e_a,p_{-i})-u_i(p_i,p_{-i}))$$

ל־$1\le i\le n$, $p\in K$, $a\in S_i$ - מודדת את הרווח האפשרי לשחקן i מהחלפת האסטרטגיה מ־p_i ל־a. נגדיר פונקציה $g=(g_1,\ldots,g_n):K\to\prod_{i=1}^n\mathbb{R}^{s_i}$ על־ידי

[10] קוטר קבוצה: המרחק המקסימלי בין נקודות בה.

$$(g_i(p))(a) = p_i(a) + \text{gain}_i(p,a) \geq 0$$

ל־$1 \leq i \leq n$, $a \in S_i$. מקבלים ש־

$$\sum_{a\in S_i}(g_i(p))(a) = \sum_{a\in S_i}(p_i(a) + \text{gain}_i(p,a)) = 1 + \sum_{a\in S_i}\text{gain}_i(p,a) \geq 1 > 0$$

כעת נגדיר $f = (f_1,\ldots,f_n) : K \to K$ על־ידי $(f_i(p))(a) = \frac{(g_i(p))(a)}{\sum_{b\in S_i}(g_i(p))(b)}$.
מההגדרה, f היא פונקציה רציפה מהקבוצה הקמורה והקומפקטית K לעצמה, לכן יש לה נקודת שבת $p^* = (p_1^*,\ldots,p_n^*)$. נראה ש־$p^*$ שיווי משקל נאש: לשם כך, מספיק להראות כי $\text{gain}_i(p^*,a) = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$, $a \in S_i$.

נניח בשלילה שזה לא מתקיים, כלומר קיים $1 \leq i \leq n$ ו־$a \in S_i$ כך ש־$\text{gain}_i(p^*,a) > 0$.
נגדיר $C = \sum_{b\in S_i} g_i(p^*,b) = 1 + \sum_{b\in S_i}\text{gain}(p^*,b) > 1$. ידוע כי $f(p^*) = p^*$, כלומר $f_j(p^*) = p_j^*$ לכל $1 \leq j \leq n$. במילים אחרות, $\frac{p_j^* + \text{gain}_j(p^*,\cdot)}{C} = \frac{(g_j(p^*))(a)}{\sum_{b\in S_j}(g_j(p^*))(b)} = p_j^*$. אז $Cp_j^* = p_j^* + \text{gain}_j(p^*,\cdot)$ ומכאן $p_j^* = \frac{1}{C-1}\text{gain}_j(p^*,\cdot)$.
בפרט, לכל $a \in S_i$, $p_j^*(a) > 0$ אם"ם $\text{gain}_i(p^*,a) > 0$. אבל אז

$$\begin{aligned}
u_i(p^*) = u_i(p_i^*, p_{-i}^*) &= \sum_{b\in S_i} p_i^*(b) u_i(e_b, p_{-i}^*) \\
&= \sum_{\substack{b\in S_i \\ p_i^*(b)>0}} p_i^*(b) u_i(e_b, p_{-i}^*) \\
&= \sum_{\substack{b\in S_i \\ \text{gain}_i(p^*,b)>0}} p_i^*(b) u_i(e_b, p_{-i}^*) \\
&= \sum_{\substack{b\in S_i \\ \text{gain}_i(p^*,b)>0}} p_i^*(b)(u_i(p_i^*, p_{-i}^*) + \text{gain}_i(p^*,b)) \\
&= u_i(p_i^*, p_{-i}^*) + [\text{משהו חיובי}] \\
&> u_i(p_i^*)
\end{aligned}$$

בסתירה.

2.3 המקרה הכללי

25.12.2008 ניתן להכליל את ההוכחה למקרה של מימד כללי.

הגדרה. צירוף אפיני של נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ הוא צירוף לינארי מהצורה $\sum_{i=1}^k a_i x_i$ כך ש־$\sum_{i=1}^k a_i = 1$.[11]

נקודות $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ נקראות **בלתי־תלויות אפינית** אם אין אחת מה־x_i שניתנת להצגה כצירוף אפיני של האחרות, או באופן שקול, אם $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ בלתי־תלויות לינארית, או באופן שקול, אם כאשר $\sum_{i=1}^k a_i x_i = 0$ וגם $\sum_{i=1}^k a_i = 0$ אז נובע ש־$a_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$.

תת־מרחב אפיני הוא אוסף כל הווקטורים מהצורה $\{\sum_{i=1}^k a_i x_i + v \ : \ a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}\}$.

הגדרה. סימפלקס k־מימדי ב־$\mathbb{R}^n$ הוא הקמור של $k+1$ נקודות בלתי־תלויות אפינית ב־$\mathbb{R}^n$.
הסימפלקס הסטנדרטי ב־$\mathbb{R}^n$ הוא הקמור של וקטורי הבסיס הסטנדרטי; סימנו אותו Δ_n.

[11] בצירוף קמור, דורשים גם $a_i \geq 0$.

פאה m־מימדית של סימפלקס k־מימדי היא הקמור של $m+1$ מקדקודיו (זהו סימפלקס ממימד m).

טריאנגולציה של סימפלקס n־מימדי היא הצגה שלו כאיחוד של סימפלקסים n־מימדיים כך שהחיתוך של כל שניים הוא ריק או שהוא אחת הפאות ממימד יותר נמוך של שניהם.

למה 11 (שפרנר, מימד כללי): בהינתן טריאנגולציה של סימפלקס n־מימדי Δ וצביעת שפרנר של קדקודי הטריאנגולציה בצבעים $\{1,2,\ldots,n+1\}$ - כלומר, לקדקודים $x_1,\ldots,x_{n+1}$ של Δ מתקיים שהצבע של x_i הוא i לכל i, ולכל פאה m־מימדית של Δ שקדקודיה $x_{i_1},\ldots,x_{i_{m+1}}$ כל הקדקודים על הפאה צבועים בצבעים $\{i_1,i_2,\ldots,i_{m+1}\}$ - אז קיים סימפלקס בטריאנגולציה שקדקודיו צבועים בכל הצבעים $\{1,2,\ldots,n+1\}$ ('צבעוני').

הוכחה. למעשה, נוכיח באינדוקציה על המימד שמספר הסימפלקסים הצבעוניים הוא אי־זוגי. מגדירים יחס חברות בין סימפלקסי הטריאנגולציה והסימפלקס באינסוף: a חבר של b אם יש להם פאה משותפת ממימד $n-1$ שקדקודיה צבועים בכל הצבעים $\{1,2,\ldots,n\}$. לסימפלקס באינסוף יש מספר אי־זוגי של חברים, לפי הנחת האינדוקציה; לסימפלקס צבעוני יש מספר אי־זוגי של חברים (תרגיל); לאחרים יש מספר זוגי של חברים. סך כל מספר יחסי החברות זוגי, כי זה יחס סימטרי. לכן מספר הסימפלקסים הצבעוניים אי־זוגי.

משפט 12 (נקודת השבת של בראוור, מחוזק): אם $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה וקומפקטית, לכל פונקציה רציפה $f:K\to K$ יש נקודת שבת.

הוכחה. ניעזר בלמה:

למה 1.12: אם $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וקומפקטית אז קיימת פונקציה רציפה $y:\mathbb{R}^n\to C$ המתאימה לכל $x\in\mathbb{R}^n$ את הנקודה (היחידה) הקרובה לה ביותר ב־C, כלומר מתקיים $\|x-y(x)\|=\inf_{z\in C}\|x-z\|$.

יהי $B=tD^n$ כדור ברדיוס גדול כך ש־$K\subseteq B$. נגדיר פונקציה $g:B\to B$ על־ידי $g(x)=f(y(x))$. אז g רציפה, לכן לפי בראוור יש לה נקודת שבת $x\in B$ כך ש־$g(x)=x$. אבל $x=g(x)\in K$, לכן $x=g(x)=f(y(x))=f(x)$, כלומר x נקודת שבת של f.

2.4 הוכחה אלטרנטיבית

נתון משחק ב־n שחקנים. רוצים למצוא שיווי משקל.

הגדרה. בהינתן $1\leq i\leq n$ ואסטרטגיות מעורבות $p_j\in\Delta_{s_j}$, $j\neq i$, אסטרטגיה p_i תיקרא **תגובה טובה ביותר** (best response) אם

$$u_i(p_1,\ldots,p_n)=\max_{q\in\Delta_{s_i}}u_i(p_1,\ldots,p_{i-1},q,p_{i+1},\ldots,p_n)$$

שיווי משקל נאש: וקטור $(p_1,\ldots,p_n)$ כך שכל p_i הוא תגובה טובה ביותר לאחרים.

נגדיר "פונקציה" $BR : \prod_{i=1}^n \Delta_{s_i} \to \prod_{i=1}^n \Delta_{s_i}$ על־ידי

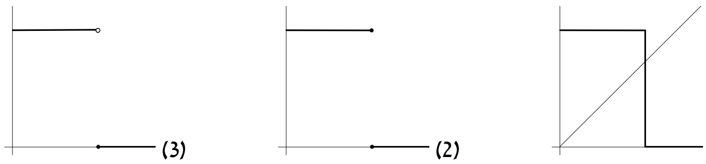
$$BR(p_1, \ldots, p_n) = (BR_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n))_{1 \le i \le n}$$

נקודת שבת של BR היא שיווי משקל נאש. אבל זו לא באמת פונקציה, כי יש הרבה תגובות טובות ביותר, ומה עם רציפות?

הגדרה. פונקציה קבוצתית (set-valued function) מקבוצה A ל־B היא העתקה המתאימה לכל $a \in A$ תת־קבוצה $f(a) \subseteq B$. באופן שקול, זהו יחס חלקי ל־$A \times B$. הגרף של פונקציה קבוצתית הוא האוסף $\{(x, y) \ : \ y \in f(x)\}$.[12]

משפט 13 (נקודת השבת של קקוטאני): אם $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, קומפקטית ולא ריקה ו־$f : K \to P(K)$ פונקציה קבוצתית המקיימת (1) לכל x, $f(x)$ לא ריקה; (2) $f(x)$ קמורה לכל x; (3) הגרף של f הוא קבוצה סגורה. אז ל־f יש נקודת שבת מוכללת, כלומר $x \in K$ כך ש־$x \in f(x)$.

דוגמה (מימד 1). גרף (1) מקיים את התנאים, ואכן מתקבלת נקודת שבת; בגרף (2), יש x כך ש־$f(x)$ אינה קמורה; גרף (3) אינו סגור:


(3) (2) (1)

אפשר להסיק את משפט קקוטאני ממשפט בראוור (ראה בספר של סולן, משלר וזמיר).

אפשר להוכיח את משפט נאש על־ידי משפט קקוטאני:

הוכחה. נראה שהפונקציה הקבוצתית BR מהקבוצה הקמורה $\prod_{i=1}^n \Delta_{s_i}$ מקיימת את ההנחות. קל לראות ש־$BR(x)$ קמורה (ממוצע תגובות טובות ביותר הוא גם תגובה טובה ביותר) ולא ריקה.

נראה שהגרף סגור. נניח שיש סדרה (p^n, q^n) של זוגות וקטורי אסטרטגיות, $p^n \to p \in \Delta$, $q^n \to q \in \Delta$, $q^n \in BR(p^n)$. נראה ש־$q \in BR(p)$. נניח בשלילה ש־$q \notin BR(p)$; אז יש $1 \le i \le n$ כך ש־$q_i \notin BR_i(p_1, \ldots, \hat{p_i}, \ldots, p_n)$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ ו־$q'_i \in \Delta_{s_i}$ כך ש־$u_i(q'_i, p_1, \ldots, \hat{p_i}, \ldots, p_n) > u_i(q_i, p_1, \ldots, \hat{p_i}, \ldots, p_n) + \varepsilon$.

מכיוון ש־u_i רציפה, נקבל שעבור n מספיק גדול מתקיים

$$u_i(q_i'^n, p_1^n, \ldots, \hat{p_i^n}, \ldots, p_n^n) > u_i(q_i^n, p_1^n, \ldots, \hat{p_i^n}, \ldots, p_n^n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

בסתירה לעובדה ש־$q_i^n \in BR_i(p_1^n, \ldots \hat{p_i^n}, \ldots, p_n^n)$.

[12] זה, בעצם, היחס.

3 תורת התועלת

נתאר אחר ניסוח אקסיומטי שמצדיק את קיומה של פונקציית תועלת (לינארית). 1.1.2009

אקסיומה (העדפות). על מרחב ההגרלות, קיים יחס סדר "עדיף או אדיש", שיסומן $\succeq$, כך ש־

א. היחס טרנזיטיבי: אם $L_1 \succeq L_2$ וגם $L_2 \succeq L_3$ אז $L_1 \succeq L_3$;[13]

ב. היחס מלא: לכל שתי הגרלות L_1 ו־L_2, $L_1 \succeq L_2$ או $L_2 \succeq L_1$ (ואם שניהם מתקיימים, נסמן $L_1 \sim L_2$).

בפרט, קיים יחס העדפות על הפרסים $A_1, A_2, \ldots, A_r$; בלי הגבלת הכלליות, נסדרם בסדר עדיפויות יורד: $A_1 \succeq A_2 \succeq \ldots \succeq A_r$.

אקסיומה (רדוקציית הגרלות מורכבות). יהיו $L_1, \ldots, L_s$ הגרלות על קבוצת הפרסים כך ש־L_i הגרלה הנותנת בסיכוי $p_j^{(i)}$ את הפרס A_j (סימון: $L_i = p_1^{(i)} A_1 \dotplus \ldots \dotplus p_r^{(i)} A_r$). תהא M הגרלה על ההגרלות L_i: $M = q_i L_1 \dotplus \ldots \dotplus q_s L_s$. נגדיר $p_k = q_1 p_k^{(1)} + \ldots + q_s p_k^{(s)}$ ($1 \leq k \leq r$) ונגדיר הגרלה $L = p_1 A_1 \dotplus \ldots \dotplus p_r A_r$. אז $L \sim M$.[14]

אקסיומה (רציפות). לכל פרס A_i קיים מספר $0 \leq u_i \leq 1$ כך ש־$A_i \sim u_i A_1 \dotplus (1-u_i) A_r$ (סימון: $\tilde{A}_i = u_i A_1 \dotplus (1-u_i) A_r$).[15]

אקסיומה (שקילות הצבה). בכל הגרלה אפשר להציב את $\tilde{A}_i$ במקום A_i ולקבל הגרלה שהפרט אדיש בינה ובין ההגרלה המקורית.

מסקנה 14: ההגרלה $\dot{\sum} p_i A_i = p_1 A_1 \dotplus \ldots \dotplus p_r A_r$ שקולה להגרלה $p A_1 \dotplus (1-p) A_r$, כאשר $p = \sum_{i=1}^r p_i u_i$.

אקסיומה (מונוטוניות). $A_1 \succ A_r$ אז $p \geq p'$ אם"ם $p A_1 \dotplus (1-p) A_r \succeq p' A_1 \dotplus (1-p') A_r$. אם $A_1 \sim A_r$ אז לכל $0 \leq p \leq 1$, $p A_1 \dotplus (1-p) A_r \sim A_1$.

מסקנה 15: ה־u_i־ים באקסיומת הרציפות נקבעים ביחידות אם $A_1 \succ A_r$.

למה 16: בהנחת אקסיומות 1–5, לכל פרס קיים מספר $0 \leq u_i \leq 1$ כך שאם $L = \dot{\sum} p_i A_i$, $L' = \dot{\sum} p'_i A_i$, אז $u(L) \geq u(L')$ אם"ם $L \succeq L'$, כאשר $u(L) = \sum_{i=1}^r p_i u_i$.

הגדרה. פונקציה u על הגרלות המקיימת $L \succeq L'$ אם"ם $u(L) \geq u(L')$ נקראת **פונקציית תועלת**. אם היא מקיימת $u(\dot{\sum} p_i A_i) = \sum p_i u(A_i)$, נגיד שהיא תועלת **לינארית**.

משפט 17: אם $A_1 \succ A_r$, אזי קיימת פונקציית תועלת לינארית יחידה המקיימת $u(A_1) = 1$, $u(A_r) = 0$.

[13] זה טבעי וסביר, אך לא תמיד מתנהגים כך.

[14] גם זה נראה הגיוני, אבל זה לא תמיד תואם את התנהגותנו.

[15] לא חייב להיות כזה.

4 משפט הנישואים היציבים של גייל־שאפלי

יהיו n גברים ו־n נשים כך שלכל גבר יש העדפות על הנשים ולכל אישה יש העדפות על הגברים. **שידוך** הוא התאמה חד־חד ערכית בין אוסף הגברים לנשים. שידוך נקרא **יציב** אם אין גבר x ואישה y שמעדיפים זה את זה על־פני בן־זוגם הנוכחי (על־פי השידוך).

משפט 18 (הנישואים היציבים): תמיד קיים שידוך יציב.

הוכחה. נראה אלגוריתם שמוצא שידוך יציב.

שלב 1א׳: כל גבר הולך לביתה של האישה המועדפת עליו.

שלב 1ב׳: כל אישה דוחה את כל הגברים שמחזרים אחריה, פרט למועדף עליה מביניהם.

שלב 2א׳: כל גבר הולך לביתה של האישה המועדפת עליו מבין אלו שלא דחו אותו.

שלב 2ב׳: כל אישה דוחה את כל הגברים שמחזרים אחריה, פרט למועדף עליה מביניהם.

$\vdots$

שלב mא׳: כל גבר הולך לביתה של האישה המועדפת עליו מבין אלו שלא דחו אותו.

שלב mב׳: כל אישה דוחה את כל הגברים שמחזרים אחריה, פרט למועדף עליה מביניהם.

האלגוריתם נעצר: תכונותיו - הגברים מחזרים אחר הנשים המועדפות עליהם בסדר יורד; הנשים מחוזרות על־ידי הגברים המועדפים עליהן בסדר עולה; אישה שחיזרו אחריה תפוסה מאותו רגע (תמיד מחוזרת.) מהתכונה האחרונה, אין גבר שנדחה על־ידי כולן, ולכן האלגוריתם מסתיים בשידוך.

זמן הריצה: גבר שנדחה על־ידי אישה לא חוזר אליה: כלומר, כל אישה דוחה לכל היותר $n-1$ גברים. לכן יש לכל היותר $n(n-1)$ דחיות, ולכן לאחר לכל היותר $n(n-1)+1$ שלבים יגיע שלב בו אף גבר לא נדחה.

משפט 19: מבין כל השידוכים היציבים, השידוך שמיוצר על־ידי האלגוריתם אופטימלי לגברים והכי פחות טוב לנשים.

הוכחה. באינדוקציה.

5 בעיות מיקוח

5.1 הגדרה

בעיית המיקוח של נאש: שני (n) צדדים מתמקחים על משאב שאותו הם צריכים לחלק ביניהם. הסטטוס־קוו הוא המצב הנוכחי, בו לאף אחד אין כלום. התועלת יכולה להיות פונקציה לא לינארית של כמות המשאב שהם קיבלו. 8.1.2009

קבוצת המיקוח (bargaining set) : K. קבוצת הנקודות ברות ההשגה (feasible set) : הנקודות במישור התועלות ששני השחקנים במשותף יכולים להשיג. לדוגמה, בחלוקה של 1,000 שקלים בין שני שותפים,

המשחק: כל שחקן מציב דרישה (מספר ממשי) – כמה תועלת הוא רוצה. אם זוג הדרישות (x, y) בר־השגה, הם מקבלים מה שדרשו – אחרת, מקבלים 0.

מניחים שקבוצת המיקוח **קומפקטית** ו**קמורה**[16].

מהם שיווי המשקל (נאש) במשחק? קל לראות שנקודה (x, y) היא שיווי משקל אם ורק אם היא על "השפה היעילה", כלומר $(x, y) \in K$ אבל $(x+\varepsilon, y) \notin K$, $(x, y+\varepsilon) \notin K$ עבור $\varepsilon > 0$ קטנים.

מושג פתרון **הגדרה. מושג פתרון** לבעיית המיקוח הוא התאמה שלכל קבוצת מיקוח מתאימה את אחת הנקודות שלה. (אינטואיטיבית, זהו ניסיון למצוא נקודה ברת השגה שהיא "הוגנת" במובן מסוים.)

5.2 פתרון נאש

אקסיומות נאש למושג פתרון :

א. הפתרון הוא נקודת שיווי משקל (יעילות/פארטו־אופטימליות) ;

ב. אם מחליפים את שמות השחקנים, הפתרון יהיה אותו פתרון אחרי החלפת השמות (סימטרייה) ;

ג. אם משנים את הסקאלה של אחד הצירים בפקטור קבוע, הפתרון יהיה אותו פתרון אחרי שינוי הסקלה (אינווריאנטיות לשינוי סקלה לינארי) ;

ד. אם $S(K) = (x_0, y_0)$ ו־$K' \subseteq K$ קבוצת מיקוח שמכילה את (x_0, y_0), אז $S(K') = S(K)$ (אי־תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות).

משפט 20: קיים מושג פתרון יחיד המקיים אקסיומות אלה, והיא הנקודה היחידה $s = (x_0, y_0) \in K$ הממקסמת את מכפלת הקואורדינטות : $s = S_{\text{Nash}}(K) = \arg\max\{xy \ : \ (x, y) \in K\}$.[17]

[16] ללא קמירות, אין דברים מעניינים לומר על המשחק, ואם מאפשרים אסטרטגיות מעורבות, קבוצת המיקוח בהכרח קמורה.

[17] יש נקודה יחידה מכיוון שמכפלת הקואורדינטות היא פונקציה קעורה, ולכן מקבלת מקסימום יחיד על קבוצה קומפקטית : אם $(x, y) \neq (x', y') \in K$, $c = xy = x'y'$, אז $\frac{x+x'}{2} \cdot \frac{y+y'}{2} = \frac{1}{4}(xy + x'y' + xy' + x'y') = \frac{c}{2} + \frac{xy'+x'y}{4}$ וזה גדול מ־c אס"ם $xy' + x'y > 2c$, אבל $xy' + x'y = xy(\frac{x}{x'} + x'x) = c(a + \frac{1}{a})$ אם נסמן $a = \frac{x}{x'}$ ואם $a \neq 1$, $a + \frac{1}{a} > 2$. אז מכפלת הקואורדינטות של נקודת הביניים $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ גדולה מ־c, בסתירה. גיאומטרית, פתרון נאש הוא הנקודה בה פרבולה מהמשפחה $xy = c$ משיקה לשפה היעילה.

הוכחה. קל לראות שפתרון נאש $S_{\text{Nash}}(K)$ הוא אכן מושג פתרון שמקיים את 1–4. יהי S מושג פתרון כלשהו המקיים את אקסיומות 1–4 ונראה שהוא מתלכד עם S_{Nash}.

ראשית, אם נסמן $(x_0, y_0) = S_{\text{Nash}}(K)$, על־ידי שינוי הסקלה של הקואורדינטות אפשר להניח ש־$(x_0, y_0) = (1, 1)$. מכאן בהכרח נובע ש־$K \subseteq T$, כאשר T הוא המשולש שקדקודיו $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$: אם לא, K מכילה נקודה (x, y) כך ש־$x + y > 2$, ואם מחברים את (x, y) ל־$(x_0, y_0) = (1, 1)$, נקבל נקודה שמכפלת קואורדינטותיה גדולה מ־1 (תרגיל).

כעת, בגלל אקסיומת הסימטרייה ובגלל אקסיומה 1, מתקיים $S(T) = 1, 1$, כי T שווה לשיקוף שלה (בהחלפת שמות השחקנים). אבל $K \subseteq T$ ומכיל את $(1, 1)$, לכן לפי אקסיומה 4 מקבלים $S(K) = S(T) = (1, 1) = S_{\text{Nash}}(K)$.

5.3 הגירסה המוחלקת

מניחים שבבעיית המיקוח יש עמימות מסוימת, כלומר האינפורמציה לגבי קבוצת המיקוח לא נתונה במלואה. ממדלים זאת על־ידי החלפת פונקציות התועלת הלא־רציפות $u_1(x, y) = x$ ל־$(x, y) \in K$, $u_1(x, y) = 0$ אחרת (וכך גם u_2) בגירסאות מוחלקות שלהן, $u_1(x, y) = xp(x, y)$, $u_2(x, y) = yp(x, y)$ כאשר p שווה ל־1 על K, 0 במרחק גדול מ־ε מ־K, ובתחום הביניים דועכת מ־1 ל־0. (במשחק הלא־מוחלק, $p = \chi_K$.)

משפט 21: כאשר $\varepsilon \to 0$, אוסף שיוויי המשקל ה־ε־מוחלק שואף לפתרון נאש.

22.1.2009 **הוכחה.** נגדיר פונקציה $f(x, y) = xyp(x, y)$. נשים לב שנקודה (x_0, y_0) היא שיווי משקל במשחק המקורב אם ורק אם $f(x_0, y_0) = \max_y f(x_0, y)$ ו־$f(x_0, y_0) = \max_x f(x, y_0)$, וזה קורה אם ורק אם $y_0 p(x_0, y_0) = \max_y yp(x_0, y)$ ו־$x_0 p(x_0, y_0) = \max_x xp(x, y_0)$. בפרט, נקודת המקסימום הגלובלית של f היא שיווי משקל והיא מקיימת $x_0 y_0 \geq x_{\text{Nash}} y_{\text{Nash}}$. לכן קל לראות שכש־$\varepsilon \to 0$, $(x_0, y_0) \to S_{\text{Nash}}(K)$.

מצד שני, אם (x_0, y_0) היא שיווי משקל, ממה שהראינו נובע $f_x(x_0, y_0) = 0 = y_0(p(x_0, y_0) + x_0 p_x(x_0, y_0))$ ו־$f_y(x_0, y_0) = 0 = x_0(p(x_0, y_0) + y_0 p_y(x_0, y_0))$. בפרט, $x_0 p_x(x_0, y_0) = y_0 p_y(x_0, y_0)$,[18] לכן נובע ש־$(x_0, y_0)$ ממקסמת את xy תחת האילוץ $p(x, y) = c$ (ל־$c = p(x_0, y_0)$).[19] תהא $s_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ הנקודה הממקסמת את xy תחת האילוץ $p = 1$. ברור ש־$s_\varepsilon \to s_{\text{Nash}}(K)$. מצד שני, $x_0 y_0 \geq x_\varepsilon y_\varepsilon$, ולכן גם $(x_0, y_0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} s_{\text{Nash}}(K)$.

א. קלעי ומ. סמורודינסקי הציעו פתרון אחר, שמקיים את האקסיומות 1–3 ואת האקסיומה הבאה: אם מגדילים את קבוצת המיקוח באופן שלא מגדיל את התועלת המקסימלית של כל אחד מהשחקנים, הפתרון בקבוצה המוגדלת נותן לכל אחד מהשחקנים לפחות מה שקיבל קודם. הם הוכיחו **משפט:** הפתרון היחיד שמקיים את מערכת אקסיומות זו הוא $S_{\text{KS}}(K) =$

[18] וברור ש־$x_0, y_0 \neq 0$, כי אף אחד מהשחקנים לא מסתפק בכך.

[19] זהו **כופל לגראנז'**: כדי למצוא מקסימום של $G(x, y)$ תחת האילוץ $Q(x, y) = c$ פותרים את מערכת המשוואות $\nabla G = \lambda \nabla Q$, $Q = c$; הפתרון λ הוא כופל לגראנז'.

5.4 משחק האיומים של נאש

בהינתן משחק לא שיתופי בשני שחקנים בצורה אסטרטגית עם מטריצות תועלות $A_{s_1\times s_2}$, $B_{s_1\times s_2}$, נגדיר קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^2$ המתארת את זוגות התועלות ברי־ההשגה על־ידי שיתוף פעולה של שני השחקנים:[20]

$$K=\mathrm{conv}\{(a_{ij},b_{ij})\,:\,1\le i\le s_1,1\le j\le s_2\}=\{\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(a_{ij},b_{ij})\,:\,(p_{ij})_{\substack{1\le i\le s_1\\1\le j\le s_2}}\in\Delta_{s_1\times s_2}\}$$

K קמורה וקומפקטית.

משחק האיומים שנגזר מהמשחק הנתון A,B – שני שלבים:

בשלב הראשון, כל אחד מהשחקנים i מצהיר על אסטרטגיה מעורבת $p_i\in\Delta_{s_i}$ (ה"איום").

זוג האיומים (p_1,p_2) קובע זוג תשלומים (u_1,u_2) על־ידי $u_1=p_1^tAp_2$, $u_2=p_1^tBp^2$.

בשלב השני, השחקנים משחקים משחק מיקוח עם קבוצת המיקוח K ועם נקודת סטטוס־קוו (נקודת אי־הסכמה / נקודת איום) (u_1,u_2). השחקנים מסכימים מראש שהתשלום הסופי יהיה פתרון נאש, $S_{\mathrm{Nash}}(K;u_1,u_2)=\arg\max_{(x,y)\in K}(x-u_1)(y-u_2)$.

איפיון גיאומטרי של פתרון נאש

פתרון נאש הוא נקודה על השפה היעילה שבה התומך ל־K בעל שיפוע נגדי לקו l המחבר נקודה זו עם נקודת האי־הסכמה. נשים לב שפתרון נאש לכל הנקודות על l הוא אותו פתרון. בדוגמה, השפה של K לינארית למקוטעין ומורכבת משני ישרים; לכן יש שתי משפחות של קווים מקבילים המגדירות את פתרון נאש עבור כל נקודת איום אפשרית ב־K. 29.1.2009

ניתוח משחק האיומים מתבצע על־ידי ניתוח משחק סכום אפס לכל אחד מהאזורים בציור:

איזור א׳: תחילה נכתוב את פתרון נאש: $(v_1,v_2)=S_{\mathrm{Nash}}(u_1,u_2)=(au_1+bu_2+c,90-(au_1+bu_2+c))$.

מהתנאים $S_{\mathrm{N}}(0,60)=(15,75)$, $S_{\mathrm{N}}(0,90)=(0,90)$, $S_{\mathrm{N}}(30,60)=(30,60)$ מקבלים $a=\frac12$, $b=-\frac12$, $c=45$.

כלומר, באיזור א׳, $S_{\mathrm{Nash}}(u_1,u_2)=(45+\frac{u_1-u_2}{2},45-\frac{u_1-u_2}{2})$. לכן נפתור את משחק סכום אפס

נסמן ב־(p^*,q^*) את שיווי המשקל.

אם נחזור למשחק המקורי, נקודת האיום עבור האסטרטגיה (p^*,q^*) תהיה $u_1=0\cdot\frac16\cdot\frac12+30\cdot\frac56\cdot\frac12+60\cdot\frac16\cdot\frac12+0\cdot\frac56\cdot\frac12=17.5$, $u_2=32.5$.

לסיכום, כמסקנה ממה שהראינו, שחקן 1 יכול לכפות על נקודת האיום להימצא מחוץ לאיזור א׳. הוא ירצה לעשות זאת, כמובן; לכן הפתרון אינו באיזור א׳, ויש לבחון את האיזורים האחרים.

איזור ג׳: קל לראות ששחקן 1 יכול לכפות על נקודת האיום להימצא באיזור ג׳ על־ידי משחק האסטרטגיה הטהורה B. מצד שני, שחקן 2 יכול לכפות על נקודת האיום להימצא על השפה של איזור ג׳ (הישר $y=2x$) על־ידי משחק R. לכן קיבלנו שהפתרון במצב שיווי משקל יהיה $(30,60)$.

[20] במקום לבחור שורה ועמודה, השחקנים בוחרים יחד תא במטריצת התשלומים.

משפט 22: במשחק האיומים קיים שיווי משקל. יתר על כן, למשחק יש ערך מקס׳־מיני׳, כלומר כל שני שיווי משקל מבטיחים אותה תועלת בדיוק לכל אחד מהשחקנים, וכל שיווי משקל הוא זוג אסטרטגיות רמת ביטחון מקסימליות.

הוכחה. הטענה השנייה נובעת מהעובדה שפונקציית התועלת של השחקן השני היא פונקציה מונוטונית יורדת בתועלת של השחקן הראשון, ולכן כל ההוכחות שהראינו עבור משחקי סכום אפס תקפות. קיום נובע ממשפט נקודות השבת של קקוטאני - צריך לבדוק שהפונקציה הקבוצתית $(p,q) \mapsto BR(q) \times BR(p)$ מקיימת את הנחות המשפט.

6 משחקים שיתופיים והערך של שאפלי

6.1 הגדרה

קבוצת שחקנים $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. תת־קבוצה $S \subseteq N$ נקראת **קואליציה**, ולכל קואליציה יש פונקציית תשלום (הפונקציה הקואליציונית) $v(S)$, $v(\varnothing) = 0$. $v(S)$ אינו תלוי בהתנהגות השחקנים האחרים. שחקני S יכולים לחלק את $v(S)$ ביניהם כרצונם. 15.1.2009

דוגמה. פרופ׳ משלר היה מתאר משחק 3 שחקנים שיתופי, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 15$, $v(13) = 50$, $v(23) = 40$, $v(123) = 100$, כך:

משחק פשוט: $v(S) = 0$ או $v(S) = 1$ לכל S.

לפעמים דורשים מונוטוניות ($v(S) \geq v(R)$ אם $R \subseteq S$) ו/או סופר־אדיטיביות $v(T) \geq v(S) + v(R)$ אם $R \cup S = T$, $R \cap S = \varnothing$.

משחק פשוט וסופר־אדיטיבי מקיים שאם S ו־R זרות ו־$v(S) = 1$ אזי $v(R) = 0$.

משחק בחירות: משחק פשוט נומוטוני וסופר־אדיטיבי.

שאפלי גילה שני מושגי פתרון חשובים:

6.2 ליבה

הגדרה. בהינתן משחק שיתופי (N, v), **הליבה** (core) של המשחק היא אוסף כל הווקטורים $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ כך שמתקיים

(1) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v(N)$ (יעילות / פארטו);

(2) לכל $\varnothing \neq S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

הליבה נותנת דרכים לחלוקת התשלום בהם לאף קואליציה לא כדאי לערוק – אך לא בהכרח דרך יחידה, ולפעמים היא אף ריקה.

בהינתן משחק (N, v), נרצה לנסח אקסיומות סבירות לחלוקת התשלומים.

פתרון איילת:[21] $x_i = \frac{(\sum_{i \in S} v(S))}{\sum_{S \subseteq N} v(S)|S|} = \frac{(\sum_{i \in S} v(S))v(N)}{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{i \in S} v(S))}$.

בהינתן קבוצת שחקנים N ופונקציית תשלום v, הערך $\varphi_i(N, v)$ אומר כמה יקבל שחקן i. נרצה

1. $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(N, v) = v(N)$.
2. שחקנים i ו־j ייקראו **סימטריים** אם לכל קואליציה S כך ש־$i \notin S$ ו־$j \notin S$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$. אז אם i ו־j סימטריים, $\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v)$.
3. נניח $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $w(S) = av(S) + b(S)$, $b(S) = \sum_{i \in S} b_i$. אז $\varphi_i(N, w) = a\varphi_i(N, v) + b_i$. (ניתן לקבל תנאי זה כמסקנה מהשאר.)

[21] לעתים מופיע בספרות כ**פתרון בנזף המנורמל**.

4. שחקן i ייקרא **גולם** אם $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ לכל $S \subseteq N$, $i \notin S$. **עיקרון הגולם:** אם $i \in N$ גולם, אז $\varphi_i(N,v) = 0$.
5. **עיקרון החיבוריות:** אם (N,v) ו־(N,w) שני משחקים, אז $\varphi_i(N,v+w) = \varphi_i(N,v) + \varphi_i(N,w)$.

משפט 23: קיים פתרון יחיד שמקיים את אקסיומות 1–5.

הוכחה. תהא π תמורה על קבוצת השחקנים. יהי i שחקן ותהא S קבוצת השחקנים שקדמו ל־i (כאשר מסתכלים על התמורה כסדר על השחקנים, כלומר $S = \{\pi(1), \ldots, \pi(k-1)\}$ אם $\pi(k) = i$).

נגדיר $\Psi_i^\pi = v(S \cup \{i\}) - v(S)$: הערך המוסף של שחקן i ביחס לתמורה π.

הערך של שאפלי: $SH_i(N,v) = \frac{1}{n!}\sum_\pi \Psi_i^\pi$. נראה ש־$SH_i$ מקיימת את האקסיומות, ושהיא היחידה שמקיימת אותן.

הערך של שאפלי

יעילות מתקיימת כי לכל תמורה π, $\sum_{i=1}^n \Psi_i^\pi = v(N)$, ולכן זה נכון בממוצע על $n!$ התמורות.

שחקנים סימטריים יקבלו אותה תמורה, כי נוכל לחלק את התמונות לזוגות בהן מחליפים i ו־j.

(3), עיקרון הגולם ועיקרון החיבוריות מתקיימים לכל תמורה ולכן גם בממוצע.

נשים לב שמספר התמורות בהן שחקן i ייכנס לחדר ויראה קואליציה S הוא $|S|!(n-|S|-1)!$. לכן ניתן לכתוב גם $SH_i(N,v) = \frac{\sum_{i \notin S}(v(S\cup\{i\})-v(S))|S|!(n-1-|S|)!}{n!}$.[22]

רעיון הוכחת היחידות : נתבונן במשחק המוגדר ל־$\varnothing \neq T \subseteq N$, $v_T(S) = 1$ אם $T \subseteq S$, $v_T(S) = 0$ אחרת. יש $2^n - 1$ משחקים כאלה – כמות התת־קבוצות הלא־ריקות של N. משחקים אלה פורשים לינארית את מרחב כל המשחקים, לכן בעזרת הלינאריות נוכל לקבל את הערך לכל המשחקים. שחקן שלא ב־T הוא גולם, לכן מקבל 0. כל השחקנים ב־T סימטריים. לכן מאקסיומות הגולם והסימטרייה, כל שחקן שלא ב־T מקבל 0, וכל שחקן ב־T יקבל $\frac{1}{|T|}$.

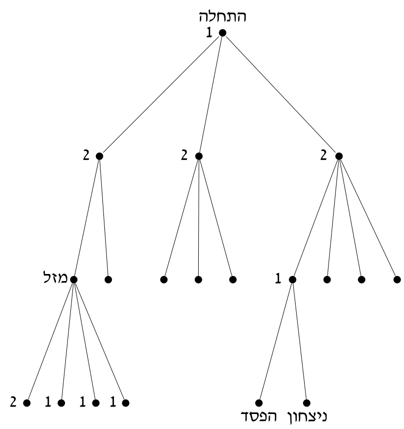
[22] הערך של בנזף נקבע על־ידי קבוצות בגודל $\frac{n}{2}$; כאן, המשקל מאוזן יותר לפי הגודל.

7 משחקים בצורה אקסטנסיבית

7.1 הגדרה

'משחקי תורות' – הכללה של שחמט, למשל. נניח שיש שני שחקנים. יש אינפורמציה מלאה, מרשים אלמנט של מזל ומניחים שהמשחק יסתיים לאחר זמן סופי, בתוצאה של ניצחון, הפסד או תיקו. 5.2.2009
תיאור המשחק – על־ידי עץ.

דוגמה. משחק עם שני שחקנים ומזל (תיאור חלקי):



אסטרטגיה היא פונקציה שאומרת איזה מהלך השחקן ישחק בכל אחד מצמתי ההחלטה שלו.
אסטרטגיה מנצחת היא אסטרטגיה שמבטיחה ניצחון ללא תלות בדרך המשחק של השחקן השני.
אסטרטגיה אופטימלית היא אסטרטגיית מקסי־מיני: מבטיחה את "הרע במיעוטו" (המקרה הגרוע ביותר הכי טוב).

משפט 24 (פון־נוימן): במשחקי תורות עם אינפורמציה מלאה יש לשחקן 1 אסטרטגיה שמבטיחה לו ניצחון או אסטרטגיה שמבטיחה לו תיקו, או שלשחקן 2 יש אסטרטגיה שמביאה לו ניצחון. (במקרה של משחק עם מזל, למשחק יש ערך.)

הוכחה. באינדוקציה הפוכה (backtracking).

7.2 צ'ומפ

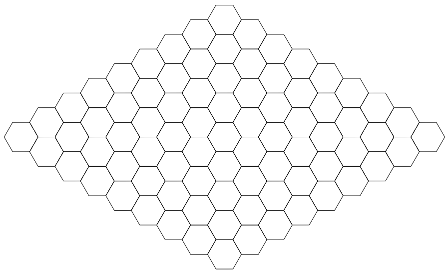
במשחק צ'ומפ (Chomp), נתונה טבלת שוקולד בגודל $n \times m$ משבצות. שני השחקנים לוקחים "ביסים" בתורות; כל ביס מורכב מכל המשבצות (i,j) כך ש־$i \geq i_0$ וגם $j \geq j_0$ עבור (i_0,j_0) כלשהם. השחקן שאוכל את $(1,1)$ מפסיד.

בצ'ומפ, לשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת (אס"ם $(m,n) \neq (1,1)$): הוכחה על־ידי "גניבת אסטרטגיות" – אם לשחקן 2 אסטרטגיה מנצחת, שחקן 1 יכול "לגנוב" אותה על־ידי משחק (n,m) בצעד הראשון.

עם זאת, לא ידוע מהי האסטרטגיה המנצחת במקרה הכללי (במקרה $n \times n$ זה קל).

7.3 הקס

המשחק הקס (Hex) הומצא באופן בלתי־תלוי על־ידי Piet Hein ב־1942 ועל־ידי נאש ב־1948.



לוח המשחק ($n \times n$, $n = 9$)

כל שחקן בוחר בתורו משושה שאינו צבוע וצובע אותו בצבע שלו. הלבן מנסה לחצות את הלוח מדרום־מזרח לצפון־מערב, והשחור – מדרום־מערב לצפון־מזרח.

בהקס, לשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת: גם כאן, על־ידי גניבת אסטרטגיות. עבור $n \leq 9$, האסטרטגיה המנצחת ידועה. בגירסה הרשמית של המשחק, גודל הלוח הוא $n = 11$.

הקס הוא מקרה פרטי של "משחק סלקציה": שני מאמנים של קבוצת כדורגל בוחרים שחקנים לסירוגין מתוך מאגר של n שחקנים. בסיום התהליך, שתי הקבוצות A ו־B שנבחרו מתחרות, והתוצאה היא ניצחון ל־A בסיכוי $f(A, B)$.

לא ידועה האסטרטגיה האופטימלית בהקס ולכן גם במשחק סלקציה כללי, אבל אם נשנה מעט את המשחק למשחק תורות אקראיים (random-turn selection game), בו בכל תור מטילים מטבע (הוגן, בדרך־כלל) כדי להחליט מי יבצע מהלך, הכול נהיה פשוט יותר:

משפט 25 (פרס, שראם, שפילד, וילסון; 2006): במשחק סלקציה בתורות אקראיים, ערך המשחק (תוחלת התשלום ששחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לקבל על־ידי משחק אסטרטגיה אופטימלית) הוא $\mathbb{E}f(T) = \frac{1}{2^n} \sum_{T \subseteq \{1,\ldots,n\}} f(T)$: כלומר, התוחלת כאשר T נבחרת באקראי ובאופן אחיד מתוך $P(\{1, \ldots, n\})$. יתר על כן, כל אסטרטגיה אופטימלית של שחקן 1 היא גם אסטרטגיה אופטימלית של שחקן 2.

הוכחה. בעזרת האבחנה שאם שני השחקנים משחקים את אותה אסטרטגיה, קבוצת השחקנים שמצטרפים ל־A תהיה בדיוק תת־קבוצה אקראית $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$.