אלגברה לינארית 2

יובל קפלן

סיכום הרצאות מר שמואל ברגר בקורס "אלגברה לינארית 2" (80135)
באוניברסיטה העברית, 7–2006.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות LaTeX 2_ε ב־18 בנובמבר 2007.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־http://www.limsoup.net/. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

2006–7	חשבון אינפיניטסימלי 1	אלגברה לינארית 1
	חשבון אינפיניטסימלי 2	אלגברה לינארית 2
	תורת הקבוצות	
2007–8	מבנים אלגבריים 1	תורת ההסתברות 1

תוכן עניינים

1 דטרמיננטות

1.1 מטריצות הפיכות

26.2.2007 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית. T היא **הפיכה** אם קיימת טרנספורמציה לינארית $S : V \to V$ כך ש־$TS = ST = I$ (I היא טרנספורמציית הזהות). הטרנספורמציה S, שנקראת **הטרנספורמציה ההופכית** ל־T, היא יחידה. מסמנים $S = T^{-1}$.

T נקראת **הפיכה מימין** אם קיימת S כך ש־$TS = I$; אומרים ש־S **הופכית מימין** ל־T. באופן דומה, T נקראת **הפיכה משמאל** אם קיימת S כך ש־$ST = I$, ואז S **הופכית משמאל** ל־T. יחידות המטריצות ההופכיות מימין ומשמאל לא מתחייבת. כמובן, T הפיכה אם ורק אם היא הפיכה גם מימין וגם משמאל.

אם V מרחב בעל מימד סופי n ו־$T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית, אז

א. T הפיכה אם ורק אם הדרגה של T היא n;

ב. T הפיכה מימין אם ורק אם היא הפיכה משמאל אם ורק אם היא הפיכה;

ג. T חח״ע אם ורק אם T על.

נראה שאם הט״ל $T : V \to V$ הפיכה מימין אז היא גם הפיכה משמאל (ולכן הפיכה), ולהיפך. נניח ש־T הפיכה מימין; אז יש S כך ש־$TS = I$. נבחר בסיס $(v_1, \ldots, v_n)$. אז $TSv_i = v_i$. $Sv_1, \ldots, Sv_n$ בת״ל.[1] לכן $Sv_1, \ldots, Sv_n$ בסיס ל־V. קיבלנו ש־T מעבירה בסיס מסויים לבסיס; לכן T חח״ע ועל, ולכן הפיכה. לכן היא בפרט הפיכה משמאל.

בנוסף, ההופכי מימין שווה להופכי משמאל: נניח $TS = I$, $S'T = I$. נקבל $(S'T)S = IS = S$, ומאסוציאטיביות $S'(TS) = S' = S$.

נניח ש־V מרחב n־מימדי, ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס. נתאים לכל ט״ל $T : V \to V$ את המטריצה המייצגת אותה לפי הבסיס B. התאמה זו היא איזומורפיזם ממרחב הט״ל על מרחב המטריצות, השומר גם על הכפל. לכן T הפיכה אם ורק אם המטריצה A המתאימה לה הפיכה. בגלל האיזומורפיזם השומר על הכפל, כל מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ הפיכה מימין אס״ם היא הפיכה משמאל אס״ם היא הפיכה, ואז יש לה מטריצה הופכית יחידה A^{-1}, שהיא גם המטריצה ההופכית היחידה מימין ומשמאל.

למדנו ש־A הפיכה אס״ם דרגתה היא n; אז A נקראת **מטריצה רגולרית**.[2] אם נתונה מטריצה רגולרית A, איך נמצא את A^{-1}? בעזרת פעולות אלמנטריות על שורות A, אפשר להגיע מ־A ל־I. נמיר את הפעולות האלמנטריות בכפל במטריצות אלמנטריות. לכן קיימת סדרת מטריצות אלמנטריות $E_1, \ldots, E_k$ כך ש־$E_k \ldots E_1 A = I$, ואז $E_k \ldots E_1 = A^{-1}$. כלומר, אם על־ידי פעולות אלמנטריות על A מקבלים את I, על־ידי אותן פעולות אלמנטריות על I באותו סדר מקבלים את A^{-1}. מטריצה רגולרית

[1] אילו היו תלויים, גם $TSv_1, \ldots, TSv_n$ היו תלויים – כל ט״ל מעבירה ת״ל לת״ל – אבל אלה $v_1, \ldots, v_n$, שאינם תלויים.

[2] מטריצה שאינה רגולרית נקראת **סינגולרית**.

1.2 הדטרמיננטה

1.2.1 מוטיבציה: המקרה 2×2

נתחיל במערכת של שתי משוואות לינאריות בשני נעלמים: $ax + by = e$, $cx + dy = f$. אם המטריצה (המצומצמת) של המערכת, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, היא רגולרית, אז יש פתרון אחד ויחיד. אחרת, יש יותר מפתרון אחד – לא בהכרח אינסוף: מעל שדה סופי, כמו שדה השאריות, יהיה מספר סופי של פתרונות – או אין פתרון.

נחפש את הפתרון, במקרה הרגולרי. נקבל $x = \frac{af-ec}{ad-bc}$, $y = \frac{ed-bf}{ad-bc}$.

28.2.2007 מכיוון שיש פתרון יחיד, $ad - bc \neq 0$: אחרת, המטריצה לא תהיה רגולרית – נניח $ad - bc = 0$; אם $a = 0$, אז $bc = 0$, ולכן $b = 0$ או $c = 0$: קיבלנו שורת או עמודת אפסים. באופן דומה, אם אחד מ־b, c, d הוא 0, מקבלים שורת או עמודת אפסים, ולכן המטריצה אינה רגולרית. אם $a, b, c, d \neq 0$, מכך ש־$ad - bc = 0$ נובע ש־$ad = bc$, ולכן $\frac{a}{d} = \frac{b}{d} = s \neq 0$, ואז $a = sc$, $b = sd$; כלומר, השורה הראשונה היא כפולה של השנייה, ושוב המטריצה אינה רגולרית.

נגדיר את הדטרמיננטה של מטריצה 2×2 כך:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

קל לראות (וראינו כיוון אחד) ש־A רגולרית אם ורק אם $\det A \neq 0$.

טענה 1: א. אם ב־A שתי שורות שוות, $\det A = 0$.

ב. אם כופלים שורה בסקאלר, הדטרמיננטה נכפלת באותו סקאלר. (הומוגניות)

ג. מתקיים $\det \left(\begin{smallmatrix} v_1+v_2 \\ u \end{smallmatrix}\right) = \det \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ u \end{smallmatrix}\right) + \det \left(\begin{smallmatrix} v_2 \\ u \end{smallmatrix}\right)$, וכן $\det \left(\begin{smallmatrix} v \\ u_1+u_2 \end{smallmatrix}\right) = \det \left(\begin{smallmatrix} v \\ u_1 \end{smallmatrix}\right) + \det \left(\begin{smallmatrix} v \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$. (מולטי־לינאריות)

ד. $\det I = 1$ (נורמליות)

טענה 2: מהתכונות א׳ וג׳ נובע שאם מחליפים שורות, סימן הדטרמיננטה מתהפך.

הוכחה. נניח שהשורות הן u, v, ונניח ש־Δ היא פונקציה המקיימת את התכונות א׳ וג׳. אז

$$0 = \Delta\begin{pmatrix} u+v \\ u+v \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} u \\ u+v \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} v \\ u+v \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$$

לכן $\Delta\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) + \Delta\left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right) = 0$; כלומר, $\Delta\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = -\Delta\left(\begin{smallmatrix} v \\ u \end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה 3: אם בדטרמיננטה מחליפים שורות, הסימן מתהפך.

טענה 4: יש רק פונקציה אחת המקיימת את א׳, ב׳, ג׳ וד׳, והיא הדטרמיננטה.

הוכחה. תהי Δ פונקציה כזו, ונראה שהיא הדטרמיננטה:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &= \Delta\left(\begin{smallmatrix} a(1,0)+b(0,1) \\ c(1,0)+d(0,1) \end{smallmatrix}\right) \\
&= \Delta\left(\begin{smallmatrix} a(1,0) \\ c(1,0)+d(0,1) \end{smallmatrix}\right) + \Delta\left(\begin{smallmatrix} b(0,1) \\ c(1,0)+d(0,1) \end{smallmatrix}\right) \\
&= \Delta\left(\begin{smallmatrix} a(1,0) \\ c(1,0) \end{smallmatrix}\right) + \Delta\left(\begin{smallmatrix} a(1,0) \\ d(0,1) \end{smallmatrix}\right) + \Delta\left(\begin{smallmatrix} b(0,1) \\ c(1,0) \end{smallmatrix}\right) + \Delta\left(\begin{smallmatrix} b(0,1) \\ d(0,1) \end{smallmatrix}\right) \\
&= ac\Delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + ad\Delta\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + bc\Delta\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + bd\Delta\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
&= ad - bc
\end{aligned}$$

1.2.2 הדרטמיננטה של מטריצה $n \times n$

נחפש פונקציה המקיימת את התכונות א', ב', ג', ד' כקודם:

א. אם ב־A שתי שורות שוות, אז $\Delta(A) = 0$.

ב. אם B מתקבלת מ־A על־ידי כפל שורה בסקאלאר s, אז $\Delta(B) = s\Delta(A)$. (הומוגניות)

ג. אם A_1, A_2, A מטריצות בעלות אותן שורות פרט לשורה ה־i, כך שהשורה ה־i ב־A שווה לסכום השורות ה־i של A_1 ושל A_2, אז $\Delta(A) = \Delta(A_1) + \Delta(A_2)$. (מולטי־לינאריות)

ד. $\Delta(I) = 1$.

נראה שיש פונקציה יחידה כזו, ונגדיר אותה במפורש. נעיקר שאם Δ פונקציה המקיימת את תכונות א' וג' ו־B מתקבלת מ־A על־ידי החלפת שתי שורות, אז $\Delta(B) = -\Delta(A)$: בה"כ, נניח שהחלפנו את השורה הראשונה בשנייה; אם

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ v_2+v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ברור ש־$\Delta(C) = 0$, ואז

$$0 = \Delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \Delta(A) + \Delta(B)$$

ו־$\Delta(B) = -\Delta(A)$, כנדרש.

נשים לב שבמקרה 2×2, הדטרמיננטה היא $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: בעצם, במחובר הראשון מפעילים את התמורה (הזוגית) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, ובשני את התמורה (האי־זוגית) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. באופן אנלוגי, נגדיר, כאשר S_n הוא אוסף התמורות על $\{1, \ldots, n\}$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ונראה ש־$\det$ היא היחידה המקיימת את ארבע התכונות.

ראשית, אם מחליפים שתי שורות ב־A, הדטרמיננטה מחליפה סימן: נסתכל במטריצה A ונחליף בה שתי שורות; אז בדטרמיננטה נקבל אותם מחוברים אך בסדר שונה, בלי להתייחס לסימן. אך על־ידי החלפת השורות, ביצענו חילוף בכל אחת מהתמורות, לכן כל תמורה זוגית הפכה לאי־זוגית ולהיפך – כלומר, סימן כל תמורה הפך מ־$+$ ל־$-$ ולהיפך. לכן כל מחובר נכפל ב־-1, ולכן הכל נכפל ב־-1.

7.3.2007 **תכונה א'.** אם יש שתי שורות שוות, כל מחובר מופיע פעמיים: פעם בסימן $+$ ופעם בסימן $-$. אם מציין השדה הוא 2, נקבל $2a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \equiv 0$. אחרת, נניח שהשורה ה־$i$ שווה לשורה ה־j, $i < j$, ותהי σ תמורה. נסתכל במחובר $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$: הוא שווה למחובר $a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{i\sigma'(i)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$, כאשר σ' מתקבלת מ־σ על־ידי כפל מימין בחילוף בין i ל־j. קיבלנו שני מחוברים ששווים בערכם המוחלט. σ' התקבלה מ־σ על־ידי

כפל בחילוף, לכן זוגיות σ' מנוגדת לזו של σ, ולכן $\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$. קיבלנו שכל המחוברים מתבטלים, לכן $\det A = 0$ ותכונה א׳ מתקיימת.[3]

תכונה ב׳. נניח ש־B מתקבלת מ־A על־ידי כפל השורה ה־i ב־c. על־פי ההגדרה, נקבל שמתקיים $\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots ca_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} = c\det A$.

תכונה ג׳. במונחי תכונה ג׳,

$$\begin{aligned}\det A &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots(a'_{i\sigma(i)}+a''_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma[(a_{1\sigma(1)}\cdots a'_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)})+(a_{1\sigma(1)}\cdots a''_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)})]\\ &= \det A_1+\det A_2\end{aligned}$$

תכונה ד׳. תמורת הזהות (תמורת היחידה) היא זוגית, לכן מחובר המתאים לה הוא $1 = 1\cdots 1$. שאר המחוברים שייכים לתמורות אחרות, אך לכל תמורה אחרת יש i כך ש־$\sigma(i) \neq i$, ואז $a_{i\sigma(i)} = 0$, כי אינו על האלכסון. לכן המחובר כולו 0.

תהי Δ פונקציה המקיימת את א׳, ב׳, ג׳ וד׳.

טענה 5: אם A מטריצה ו־B מתקבלת ממנה

1. על־ידי כפל שורה בסקאלאר c: אז $\Delta B = c\Delta A$. (זוהי תכונה ב׳.)
2. על־ידי החלפת שורות: אז $\Delta B = -\Delta A$. (הוכחנו כבר.)
3. על־ידי הוספת c פעמים השורה ה־i לשורה ה־j $(i\neq j)$: $\Delta B = \Delta A$.

הוכחה. נסמן

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ c\alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j+c\alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

ואז מתקיים

$$\Delta B = \Delta A+\Delta C = \Delta A + c\Delta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \Delta A + c\cdot 0 = \Delta A$$

טענה 6: אם ב־A יש שורת אפסים, אז $\Delta A = 0$.

[3] הוכחה אחרת: נניח שב־A השורות v_i, v_j שוות. נחליף אותן ביניהן ונקבל שוב את A: אז $\det A = -\det A$ $\iff 2\det A = 0 \iff \det A = 0$. (הוכחה זו טובה פרט למקרה שמציין השדה הוא 2.)

הוכחה. נניח שהשורה ה־i היא שורת אפסים. אז אם נכפול את השורה ה־i ב־0, המטריצה לא תשתנה. לכן $\Delta A = 0 \cdot \Delta A = 0$.

טענה 7: אם A אינה רגולרית, אז $\Delta A = 0$.

הוכחה. נניח שהשורה ה־i היא צירוף לינארי של שאר השורות. אם כל מקדמי הצירוף הם 0, אז i שורת אפסים, ולפי הטענה הקודמת, $\Delta A = 0$. בשאר המקרים, על־ידי שורת פעולות של הוספת כפולות של שורות אחרות לשורה ה־i, נקבל מטריצה עם שורת אפסים, ומבן שעבורה $\Delta = 0$. אך בכל פעולה כזו ערך Δ אינו משתנה, ולכן $\Delta A = 0$.

טענה 8: יש פונקציה אחת ויחידה המקיימת את א׳, ב׳, ג׳ וד׳.

הוכחה. אחת כבר יש לנו, והיא $\det$. נוכיח שיש רק אחת.

תהיינה Δ_1, Δ_2 שתי פונקציות כאלה, ונראה $\Delta_1 \equiv \Delta_2$: כלומר, לכל מטריצה A, $\Delta_1 A = \Delta_2 A$. אם A אינה רגולרית, $\Delta_1 A = \Delta_2 A = 0$; אחרת, A מתקבלת מ־I על־ידי סדרת פעולות אלמנטריות על השורות. לכל פעולה אלמנטרית, ה־Δ נכפל בסקאלאר שונה מ־0, התלוי רק באותה פעולה אלמנטרית. אז $\Delta_1 A = c_1 c_2 \cdots c_k \Delta_1 I$ וגם $\Delta_2 A = c_1 c_2 \cdots c_k \Delta_2 I$. אך $\Delta_1 I = \Delta_2 I = 1$, ולכן $\Delta_1 A = \Delta_2 A$.

12.3.2007 **הגדרה.** אם $A = (a_{ij})$, **המטריצה המשוחלפת** היא $A^t = (a_{ji})$. מטריצה משוחלפת

משפט 9: $\det A^t = \det A$.

דוגמה. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז $\det A = ad - bc$; $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$, ו־$\det A^t = ad - cb$.

הוכחה. אם $A^t = B$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) = (a_{ji})$. אז

$$\begin{aligned} \det B &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \end{aligned}$$

כך עברנו על כל התמורות שב־S_n, ורשמנו את המחוברים המתאימים, אולי בסדר שונה; לכן קיבלנו את $\det A$.

מסקנה 10: כל מה שאמרנו על דטרמיננטות בקשר לשורות נכון גם בקשר לעמודות.

הוכחה (א׳). אם ב־A יש שתי עמודות שוות, אז ב־A^t יש שתי שורות שוות. לכן, בגלל א׳, $\det A^t = 0$. אבל $\det A = \det A^t = 0$. לכן $\det A = 0$.

באותו אופן מוכיחים את ב׳ וג׳. ראינו מה עושות פעולות אלמנטריות על שורות לדטרמיננטה; אותו דבר עושות הפעולות האלמנטריות על עמודות. בין השאר, מקבלים שעמודות המטריצה תלויות אס״ם הדטרמיננטה שלה שווה ל־0.

משפט 11: $\det AB = \det A \cdot \det B$

הוכחה. ראשית, נוכיח שתי טענות־עזר:

למה 1.11: אם A מטריצה כלשהי ו־E מטריצה אלמנטרית, אז $\det EA = \det E \cdot \det A$.

הוכחה. E התקבלה מ־I על־ידי פעולה אלמנטרית – חילוף שורות, כפל שורה בסקאלר $c \neq 0$, או תוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת. במקרה הראשון, $\det E = -1$; במקרה השני, $\det E = c$; במקרה השלישי, $\det E = 1$. מהי $\det EA$? במקרה הראשון, $-\det A$; במקרה השני, $c \det A$; במקרה השלישי, $\det A$. לכן, בכל המקרים $\det EA = \det E \cdot \det A$.

למה 2.11: $E_1, \ldots, E_k$ מטריצות אלמנטריות, אז $\det(E_1 \cdots E_k) = \det E_1 \cdots \det E_k$.

הוכחה. $\det(E_1 \cdots E_k) = \det E_1 \cdot \det(E_2 \cdots E_k) = \ldots = \det E_1 \cdots \det E_k$

נניח ש־A ו־B רגולריות. אז כל אחת משתיהן היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות: $A = E_1 \cdots E_k$, $B = E_1' \cdots E_l'$. אז $AB = E_1 \cdots E_k E_1' \cdots E_l'$, ולפי טענת־העזר השנייה, $\det AB = \det E_1 \cdots \det E_k \cdot \det E_1' \cdots \det E_l'$. אבל גם $\det A = \det E_1 \cdots \det E_k$ ו־$\det B = \det E_1' \cdots \det E_l'$, לכן $\det AB = \det A \cdot \det B$.

אם A או B סינגולרית, AB סינגולרית (כי דרגת מכפלת מטריצות קטנה מ־ או שווה לדרגת כל אחת מהן). לכן $\det AB = 0$, ולפחות אחת מבין $\det A$, $\det B$ היא 0. לכן $\det A \cdot \det B = 0 = \det AB$.

1.3 חישוב דטרמיננטות

מינור **הגדרה.** נסתכל במטריצה $n \times n$ $A = (a_{ij})$. (נניח ש־$n > 1$.) **המינור** של האיבר a_{ij}, שיסומן A_{ij}, זו הדטרמיננטה של המטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$ המתקבלת על־ידי מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

דוגמה. אם $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, אז $A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

משפט 12 (לפלס): $|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$ [4]

דוגמה. נחשב את $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ לפי השורה הראשונה: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ $1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 - 3 = -1$.

הוכחה. ראשית, נוכיח את המשפט עבור השורה הראשונה:

למה 1.12: אם $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ אז $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

הוכחה. בחישוב $\det A$ לפי ההגדרה, באות לידי ביטוי רק התמורות המעבירות את 1 ל־1 – אחרת, המחובר המתאים יהיה 0 (הכופל הראשון שלו הוא 0). על כל תמורה כזו אפשר להסתכל כעל תמורה של $\{2, \ldots, n\}$, בעלת אותה זוגיות (כי כל החילופים בה הם מ־2 עד n). קיבלנו $\det A = 1 \cdot \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, כנדרש.

[4] משפט זה בעצם מאפשר לפתח דטרמיננטה לפי השורה ה־i.

למה 2.12: אם $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \cdots & & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & & & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ אז $\det A = (-1)^{1+j} A_{1j}$.

הוכחה. נחליף את העמודה ה־j בעמודה שלפניה שוב ושוב עד שעמודה זו תהיה ראשונה.[5] ביצענו $j-1$ חילופים, והתקבלה מטריצה A' שעונה על דרישות הלמה הראשונה; מצד אחד, $\det A' = A_{1j}$, ומצד שני, $\det A' = (-1)^{j-1} \det A = (-1)^{j+1} \det A$. מכאן מתקבל הדרוש.

14.3.2007 כעת, את השורה הראשונה נוכל להציג כ־$a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{n1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נקבל $\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix} + \ldots + a_{n1} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$.
עבור השורה ה־i, נחליף את השורה ה־i עם זו שלפניה, ואז את השורה ה־$i-1$ עם זו שלפניה וכו'; כעבור $i-1$ החלפות, נקבל $\det A = (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ואם כעת נפתח לפי השורה הראשונה נקבל $\det A = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$.

הוכחנו ש־$\det A^t = \det A$, לכן נקבל שניתן לפתח באופן זהה גם לפי עמודות.

טענה 13: הדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה. באינדוקציה על n. אם $n=1$, ברור. נניח נכונות ל־$n-1$ ונוכיח נכונות ל־n. נתונה מטריצה $n \times n$ משולשית A. נפתח לפי העמודה הראשונה (אם המטריצה משולשית עליונה) או לפי השורה הראשונה (אם המטריצה משולשית תחתונה), ונקבל $\det A = a_{11} A_{11}$. המטריצה המינורית ל־a_{11} אף־היא משולשית, ואלכסונה הראשי הוא $a_{22}, \ldots, a_{nn}$; לפי הנחת האינדוקציה, $A_{11} = a_{22} \cdots a_{nn}$. לכן $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ – מכפלת איברי האלכסון הראשי.

1.4 חוק קרמר

נניח שיש מערכת $ax+by=e$, $cx+dy=f$, כאשר המטריצה המצומצמת רגולרית. אז יש פתרון יחיד, והוא, כפי שכבר חישבנו קודם,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

באופן כללי יותר:

משפט 14 (חוק קרמר): תהי A מטריצה רגולרית $n \times n$, ויהי $\vec{b}$ וקטור עמודה (מעל שדה F). אז למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד. לכל k, תהי A_k המטריצה המתקבלת מ־A על־ידי החלפת העמודה ה־k בווקטור $\vec{b}$; אז הפתרון היחיד של המערכת הוא $X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

[5] נשים לב שזה שונה מהחלפה בבת־אחת (כלומר, החלפת העמודה ה־j עם העמודה ה־1: החלפה בבת־אחת לא שומרת על סדר העמודות.

הוכחה. יהי $(c_1,\ldots,c_n)$ הפתרון היחיד; עלינו להוכיח שלכל k, $c_k=\frac{|A_k|}{|A|}$. מכיוון שזהו פתרון,

$$c_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+\ldots+c_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

נחשב את $\det A_1$:

$$\begin{aligned}\det A_1 &= \det\begin{pmatrix}b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n c_ia_{1i} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{i=1}^n c_ia_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^n c_i\det\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לכל $i>1$, יש במטריצה המתאימה שתי עמודות שוות, לכן המחובר המתאים הוא 0. נותר רק המחובר המתאים ל־$i=1$, והוא $c_1\cdot\det A$. אז $\det A_1=c_1\cdot\det A$, לכן $c_1=\frac{\det A_1}{\det A}$. נקבל ביטויים דומים עבור c_2, c_3 וכו'.

טענה 15: עבור $i\neq k$, $\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{kj}A_{ij}=0$.

הוכחה. תהי B המטריצה המתקבלת מ־A על־ידי רישום השורה ה־k במקום ה־i. $\det B=0$, כי יש שתי שורות שוות. מצד שני, נפתח לפי השורה ה־i: $\det B=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{kj}B_{ij}$. המינורים של השורה ה־$i$ ב־B הם כמו ב־A, לכן $\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{ij}=0$.

1.5 המטריצה המצורפת

מטריצה מצורפת **הגדרה.** תהי A מטריצה $n\times n$ מעל שדה F. **המטריצה המצורפת** (adjoint matrix) היא המטריצה המוגדרת על־ידי $\operatorname{adj}A=(b_{ij})$ כאשר $b_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ji}$ ($A=(a_{ij})$). 19.3.2007

דוגמה. תהי $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$; אז $\operatorname{adj}A=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$.

מהו $A\cdot\operatorname{adj}A$?

אם נסמן $A\cdot\operatorname{adj}A=(c_{ij})$, נקבל $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+j}a_{ik}A_{jk}$. אם $i=j$, מקבלים $|A|=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+i}a_{ik}A_{ik}$ (נוסחת הפיתוח לפי השורה ה־i). אז לכל i, $c_{ii}=|A|$. אבל אם $i\neq j$, נקבל $c_{ij}=0$ (כפי שהוכחנו לעיל). אז נוכל לכתוב $c_{ij}=\delta_{ij}|A|$, ו־$A\cdot\operatorname{adj}A=|A|I$.

נובע שאם A סינגולרית, $A\cdot\operatorname{adj}A=0$. אחרת, $A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj}A=I$. נוכל להסיק שלכל מטריצה רגולרית A, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$.

דוגמה. תהי $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$; אז $\operatorname{adj}A=\left(\begin{smallmatrix}4&-2\\-3&1\end{smallmatrix}\right)$, $|A|=4-6=-2$, ומכאן נקבל $A^{-1}=\frac{1}{-2}\left(\begin{smallmatrix}4&-2\\-3&1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2 לכסון מטריצות

2.1 מוטיבציה

נסתכל במטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $Ax = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3 \\ 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 \\ 7\cdot 1+8\cdot 2+9\cdot 3 \end{pmatrix}$. אך אילו A היתה אלכסונית, פעול כפל כזו היתה הרבה יותר פשוטה: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$. ממש תענוג. והואיל ומתמטיקאים הם רודפי־תענוגות, הם מעדיפים שמטריצות תהיינה אלכסוניות. למעשה, במקרה הכללי, מחפשים בסיס שלפיו המטריצה היא אלכסונית:

יהי V מרחב n־מימדי מעל F, ותהי $T : V \to V$ ט״ל. יהי $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. נניח ש־A המטריצה של T לפי בסיס זה. יהי $B_2 = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס של V, ונניח ש־B היא המטריצה של T לפי בסיס זה. אם P היא מטריצת המעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2, אז $B = P^{-1}AP$.[6]

מטריצות דומות

הגדרה. אומרים שהמטריצה B **דומה** למטריצה A אם יש P רגולרית כך ש־$B = P^{-1}AP$.

2.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

2.2.1 הגדרה

תהי T ט״ל ויהי $(v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V לפי המטריצה של T אלכסונית: כלומר, מהצורה $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$. אז $Tv_i = a_i v_i$. באופן כללי:

וקטור עצמי

הגדרה. אם T ט״ל ו־$0 \neq v$ וקטור, v נקרא **וקטור עצמי** (eigenvector) של T אם קיים סקאלאר λ כך ש־$Tv = \lambda v$.

אם $(v_1, \ldots, v_n)$ הוא בסיס שלפיו המטריצה אלכסונית, כל וקטור בבסיס הוא וקטור עצמי של T. מצד שני, אם $(v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של וקטורים עצמיים, המטריצה אלכסונית לפי בסיס זה.

הוכחה. נניח ש־$(v_1, \ldots, v_n)$ בסיס שאיבריו וקטורים עצמיים; אז $Tv_i = a_i v_i$, והמטריצה היא $Tv_1 = a_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n, \ldots, Tv_n = 0v_1 + \ldots + 0v_{n-1} + a_n v_n$.

לא לכל טרנספורמציה לינארית יש בסיס של וקטורים עצמיים: למשל, נסתכל בט״ל $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שהיא סיבוב ב־$90°$ סביב הראשית, במגמה החיובית. לטרנספורמציה זו לא קיימים וקטורים עצמיים.

ערך עצמי

הגדרה. תהי A מטריצה $n \times n$ מעל F. סקאלאר $a \in F$ ייקרא **ערך עצמי** (eigenvalue) של A אם קיים וקטור $0 \neq v \in F^n$ (וקטור עמודה) כך ש־$Av = av$. אומרים ש־v הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי a.

[6] P הפיכה, כי היא מעבירה בסיס לבסיס.

יחס הדימיון רפלקסיבי – $A \sim A$, כי $A = I^{-1}AI$; הוא גם סימטרי – $A \sim B \Longleftarrow$ $B = P^{-1}AP \Longleftarrow A = PBP^{-1}$, כלומר $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$; בנוסף, הוא טרנזיטיבי – אם B דומה ל־A ו־C דומה ל־B, קיימות מטריצות רגולריות P ו־Q כך ש־$B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$; לכן $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}APQ$. לכן זהו יחס שקילות.

2.2.2 מציאת ערכים עצמיים

נניח ש־a ערך עצמי של A. אז קיים וקטור עמודה v כך ש־$Av = av = aIv$; כלומר, $Av - aIv = (A - aI)v = 0$. קיבלנו ש־a הוא ע״ע של A אס״ם למערכת המשוואות $(A - aI)v = 0$ יש פתרון לא־טריוויאלי. זה נכון אס״ם המטריצה $A - aI$ סינגולרית, וזה נכון אס״ם $|A - aI| = |aI - A| = 0$.

דוגמה. מהם הערכים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (מטריצת הסיבוב ב־$90°$) מעל $\mathbb{R}$?

$$|xI - A| = 0 \iff \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \iff x^2 + 1 = 0$$

אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, לכן אין ע״ע מעל $\mathbb{R}$.

דוגמה. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$:

$$|xI - A| = 0 \iff \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

כלומר, $(x-1)^2 - 1 = 0 \iff x^2 - 2x = x(x-2) = 0$. יש שני ע״ע: 0 ו־2.
נחפש ו״ע השייכים ל־0: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$. כלומר, $x + y = 0 \wedge x + y = 0$. נבחר, למשל, $(1, -1)$. עבור הע״ע 2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{2x}{2y}$. כלומר, $x + y = 2x \wedge x + y = 2y$. למשל, נבחר $(1, 1)$.

שני וקטורים אלה מהווים בסיס; לפיו, המטריצה היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

21.3.2007 **טענה 16:** v הוא ו״ע של T אס״ם הישר $\operatorname{span}\{v\}$ מועתק על־ידי T לתוך עצמו; ואם הע״ע המתאים שונה מ־0, ישר זה מועתק על עצמו.

הוכחה. תרגיל.

משפט 17: אם T ט״ל ו־A המטריצה שלה לפי בסיס מסויים, ל־T ול־A יש אותם ע״ע.

הוכחה. נניח ש־λ ע״ע של T. תהי A המטריצה של T לפי הבסיס B. יהי V ו״ע של T השייך ל־λ, ונסמן $[v]_B$ – וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B. $v \neq 0$, לכן $[v]_B \neq 0$. $Tv = \lambda v$; כאשר נעבור למטריצות, נקבל ש־$A[v]_B = \lambda[v]_B$. לכן λ ע״ע של A. כל הטיעונים תקפים גם בכיוון ההפוך; לכן מקבלים שאם λ ע״ע של A אז הוא ע״ע של T.

משפט 18: לשתי מטריצות דומות יש אותם ע״ע.

הוכחה. נניח ש־$A \sim B$. אז $B = P^{-1}AP$. יהי λ ע״ע של A, ויהי $v \neq 0$ ו״ע השייך לו. אז $Av = \lambda v$. $B(P^{-1}v) = P^{-1}APP^{-1}v = P^{-1}Av = P^{-1}\lambda v = \lambda P^{-1}v$. לכן λ ע״ע של B, ו־$P^{-1}v$ ו״ע השייך לו. ($P^{-1}v$, כי P^{-1} רגולרית.) הכיוון ההפוך נובע מסימטרייה.

דוגמה. נסתכל במטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; היא דומה למטריצה $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. ראינו שע״ע של A הם 2 ו־0, ולכן גם הע״ע של B הם 2 ו־0. ו״ע של A השייך לע״ע 2 הוא, למשל, $\binom{1}{1}$; אבל זה אינו ו״ע של B: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\binom{1}{1} = \binom{0}{2}$.

טענה 19: המטריצה A סינגולרית אס״ם 0 הוא ע״ע שלה.

הוכחה. נניח ש־A סינגולרית. אז למערכת המשוואות $Ax = 0$ יש פתרון לא־טריוויאלי. יהי v פתרון כזה; אז $v \neq 0$, אבל $Av = 0 = 0v$, ולכן 0 ע״ע של A.

אם A אינה סינגולרית, היא רגולרית, ולמערכת $Ax = 0$ הפתרון היחיד הוא 0; לכן לא קיים $v \neq 0$ כך ש־$Av = 0$. כלומר, אין $v \neq 0$ כך ש־$Av = 0v$, ולכן 0 אינו ע״ע של A.

טענה 20: תהי T ט״ל (A מטריצה), ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ע״ע שונים של T (של A) עם ו״ע $v_1, \ldots, v_k$, בהתאמה. אז $v_1, \ldots, v_k$ בת״ל.

הוכחה. באינדוקציה על k. אם $k = 1$, יש לנו המערכת (v_1). $v_1 \neq 0$, לכן מערכת זו בלתי־תלויה. נניח ל־k ונוכיח ל־$k + 1$. יש לנו ע״ע שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ וו״ע $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ השייכים להם, בהתאמה. נוכיח שהם בת״ל: נניח ש־

$$a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} = 0$$

נכפול ב־λ_{k+1}:

$$\lambda_{k+1}a_1v_1 + \ldots + \lambda_{k+1}a_kv_k + \lambda_{k+1}a_{k+1}v_{k+1} = 0$$

ובנוסף, נפעיל את T על (נכפול משמאל ב־A את) שני אגפי השוויון הראשון:

$$a_1\lambda_1v_1 + \ldots + a_k\lambda_kv_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1} = 0$$

נפחית את השוויון האחרון מהקודם לו, ונקבל

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \ldots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

מהנחת האינדוקציה, $a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \ldots = a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$. לכל $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$, כי אלו ע״ע שונים; לכן $a_1 = \ldots = a_k = 0$. נציב בשוויון הראשון, ונקבל $a_{k+1}v_{k+1} = 0$. אבל $v_{k+1} \neq 0$, לכן $a_{k+1} = 0$. קיבלנו שבכל צירוף לינארי מתאפס של $v_1, \ldots, v_{k+1}$ כל המקדמים מתאפסים, לכן וקטורים אלה בת״ל.

מסקנה 21: אם V n־מימדי ו־$T : V \to V$, אז ל־T יש לכל היותר n ע״ע שונים.

הוכחה. אם ניקח k ע״ע שונים ונבחר לכל אחד ו״ע, נקבל k וקטורים בת״ל. מכאן, $k \leq n$.

מסקנה 22: למטריצה $n \times n$ יש לכל היותר n ע״ע שונים.

תהי T ט"ל, ויהי λ ע"ע שלה. נסתכל בקבוצת הווקטורים $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$. V_λ מכילה את כל הוו"ע השייכים ל־λ ואת 0, ואלה כל איבריה; ברור ש־V_λ תת־מרחב של V: לא ריק, כי $0 \in V_\lambda$; אם $v_1, v_2 \in V_\lambda$ אז $Tv_1 = \lambda v_1$ ו־$Tv_2 = \lambda v_2$ – נחשב ונקבל $T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1+v_2)$. באופן דומה, לגבי כפל בסקאלאר.

הגדרה. V_λ נקרא **המרחב העצמי** של λ. מרחב עצמי

2.3 הפולינום האופייני והפולינום המינימלי

2.3.1 הפולינום האופייני

הראינו ש־λ הוא ע"ע של A (מטריצה $n \times n$) אס"ם $|\lambda I - A| = 0$. נסתכל בביטוי $|xI - A|$: זהו פולינום ממעלה $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn-1} & x-a_{nn} \end{vmatrix} = (x-a_{11})\cdots(x-a_{nn}) + \sum_{id \neq \sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

הגדרה. הפולינום $p(x) = |xI - A|$ נקרא **הפולינום האופייני** של A. פולינום אופייני

אם $p(x)$ הוא הפולינום האופייני של A, אז λ ע"ע אס"ם הוא שורש של $p(x)$: כלומר, אס"ם $p(\lambda) = 0$.

26.3.2007 **טענה 23:** אם A ו־B מטריצות דומות, יש להן אותו פולינום אופייני.

הוכחה. $B = P^{-1}AP$. הפולינום האופייני של A הוא $|xI - A|$; של B:

$$\begin{aligned} |xI - B| &= |xI - P^{-1}AP| \\ &= |xP^{-1}IP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}xIP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(xI-A)P| \\ &= |P^{-1}||xI-A||P| \\ &= |xI-A||P^{-1}||P| \\ &= |xI-A||P^{-1}P| \\ &= |xI-A||I| = |xI-A| \end{aligned}$$

לכן ל־A ול־B יש אותו פולינום אופייני.

דוגמה. $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: נקבל $|xI - A| = |xI - B| = x^2$, אך $A \nsim B$.

יהי V מרחב n־מימדי מעל השדה F, $T : V \to V$ ט"ל. מהמשפט הקודם, נוכל להגדיר את הפולינום האופייני של T כפולינום האופייני של אחת מהמטריצות המייצגות את T. יש הרבה כאלה, אך כולן דומות – לכן לכולן אותו פולינום אופייני, ושורשיו הם הע"ע של T.

טענה 24: יהי $p(x)$ פולינום מעל F. הסקאלאר a הוא שורש של $p(x)$ אם״ם $x-a$ מחלק את הפולינום; כלומר, אם קיים פולינום $q(x)$ כך ש־$p(x)=(x-a)q(x)$.

הוכחה. אם $x-a$ מחלק את $p(x)$, $p(x)=(x-a)q(x)$, ואם נציב $x=a$ נקבל 0.

בכיוון השני, נניח ש־$p(a)=0$. $p(x)=a_0+\ldots+a_nx^n$, $p(a)=a_0+\ldots+a_na^n$. $p(x)=p(x)-p(a)=a_1(x-a)+\ldots+a_n(x^n-a^n)$. כל־אחד מהמחוברים הנ״ל מתחלק ב־$x-a$, לכן $p(x)$ מתחלק ב־$x-a$.[7]

ריבוי אלגברי **הגדרה.** **הריבוי האלגברי** של השורש a של פולינום הוא ה־k המקסימלי כך ש־$(x-a)^k$ מחלק את הפולינום. (נסמן: $m_A(a)$.)

הגדרה. T ט״ל, a ע״ע; הריבוי האלגברי של a כע״ע של T הוא ריבויו האלגברי כשורש של הפולינום האופייני.

ריבוי גיאומטרי **הגדרה.** T ט״ל, a ע״ע; **הריבוי הגיאומטרי** של a כע״ע של T הוא המימד של המרחב העצמי V_a. (נסמן: $m_G(a)$.)

משפט 25: $m_G(a)\le m_A(a)$.

הוכחה. נניח $m_G(a)=k$. נסתכל במרחב העצמי V_a; מימדו k. נבחר בסיס ל־V_a, $(v_1,\ldots,v_k)$. כל איברי הבסיס הם ו״ע של T השייכים ל־a. נשלים בסיס זה לבסיס של V: $(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_n)$. נסתכל במטריצה של T לפי הבסיס הזה: זוהי מטריצה מהצורה

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & ? \\ 0 & \ddots & & \vdots & ? \\ \vdots & & \ddots & 0 & ? \\ 0 & \cdots & 0 & a & ? \\ \vdots & & & 0 & ? \\ & & & \vdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? \end{vmatrix}$$

עבורה הפולינום האופייני הוא, אם נפתח לפי העמודה הראשונה, $(x-a)^kq(x)$. קיבלנו שהפולינום האופייני מתחלק ב־$(x-a)^k$. לכן $m_A(a)\ge k=m_G(a)$.

משפט 26: תהי T ט״ל, ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ע״ע שונים של T. יהיו $V_{\lambda_1},\ldots,V_{\lambda_k}$ המרחבים העצמיים שלהם. אז לכל $k_1\neq k_2$, $V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\}$; יתר על כן, החיתוך של כל מרחב עצמי עם סכום המרחבים העצמיים האחרים מכיל רק את 0.

הוכחה. נוכיח, בה״כ, שהחיתוך של V_{λ_k} עם הסכום של השאר מכיל רק את 0. יהי v וקטור בחיתוך. אז $v=v_1+\ldots+v_{k-1}\in V_{\lambda_k}$ ו־$v_i\in V_{\lambda_i}$ לכל $1\le i\le k-1$. אז $v_1+\ldots+v_{k-1}-v=0$. נראה ש־$v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}$ שווים כולם ל־0, ומכאן נקבל $v=0$: אילו אחדים מהם היו שונים מ־0, הם היו ו״ע השייכים לע״ע שונים; אבל למדנו שו״ע השייכים לע״ע שונים הם בת״ל, ולכן הסכום לא יכול להיות 0 – בסתירה.

[7] $x^k-a^k=(x-a)(x^{k-1}+x^{k-2}a+\ldots+a^{k-1})$.

28.3.2007 **הגדרה. סכום ישר** של תתי־מרחבים U, W הוא $U+W=\{u+w : u\in U, w\in W\}$, אם כל וקטור בו ניתן להצגה יחידה כ־$u+w$ עבור $u\in U$, $w\in W$. מסמנים $U\oplus W$. סכום ישר

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש־$U+W$ יהיה סכום ישר הוא ש־$U\cap W=\{0\}$.

באופן טבעי, ניתן להרחיב הגדרה זו לסכום סופי: הסכום $U_1+\ldots+U_k$ נקרא סכום ישר אם כל וקטור בו ניתן להצגה יחידה כ־$u_1+\ldots+u_k$, כך שלכל i מתקיים $u_i\in U_i$. תנאי הכרחי ומספיק לכך הוא שהחיתוך של כל תת־מרחב עם סכום האחרים מכיל רק את האפס. מסמנים $U_1\oplus\ldots\oplus U_k=\oplus_{i=1}^k U_i$.

על־פי המשפט, נקבל שסכום מרחבים עצמיים שונים הוא סכום ישר.

מסקנה 27: $\dim(U_1\oplus U_2)=\dim U_1+\dim U_2$, ובאופן כללי $\dim\oplus_{i=1}^k=\sum_{i=1}^k\dim U_i$.

הוכחה (ב׳). באינדוקציה: $\dim(U_1\oplus\ldots\oplus U_{k+1})=\dim(U_1\oplus\ldots\oplus U_k)+\dim U_{k+1}=$ $\dim U_1+\ldots+\dim U_{k+1}$.

2.3.2 משפט קיילי המילטון

נסתכל במטריצה $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$. הפולינום האופייני הוא $|xI-A|=x^2-5x-2$. נציב בפולינום זה את A: נקבל $A^2-5A-2I$. למה זה שווה? נחשב ונציב: $\left(\begin{smallmatrix}7&10\\15&22\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}5&10\\15&20\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

2.7.2007 **משפט 28 (קיילי־המילטון):** אם $T:V\to V$ ט״ל (V מרחב n־מימדי מעל F) ו־$p(x)$ הפולינום האופייני של T, אז $f(T)=0$ [8].[9]

הוכחה. נוכיח למקרה של מטריצה. $p(x)=|xI-M|=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$, ולכל מטריצה P, $P\operatorname{adj}P=|P|I$. בפרט,

$$(xI-M)\operatorname{adj}(xI-M)=|xI-M|I=p(x)I=a_0I+a_1xI+\ldots+x^nI$$

איברי המטריצה $\operatorname{adj}(xI-A)$ הם מינורים, כלומר דטרמיננטות מסדר $(n-1)\times(n-1)$. לכן הם פולינומים ממעלה $n-1$ לכל היותר. כל מטריצה שאיבריה פולינומים אפשר לכתוב בצורה $B_0+B_1x+\ldots+B_kx^k$, כאשר $B_1,\ldots,B_k$ הן מטריצות של איברי F, $k\le n-1$. קיבלנו $\operatorname{adj}(xI-M)=B_0+B_1x+\ldots+B_{n-1}x^{n-1}$, לכן

$$(xI-M)(B_0+B_1x+\ldots+B_{n-1}x^{n-1}=a_0I+a_1Ix+\ldots+Ix^n$$

נפתח סוגריים ונקבל

$$-MB_0+(B_0-MB_1)x+\ldots+(B_{n-2}-MB_{n-1})x^{n-1}+B_{n-1}x^n=a_0I+\ldots+Ix^n$$

נעשה השוואת מקדמים:

[8] זוהי טרנספורמציית האפס, לא סקאלאר האפס.
[9] לגבי מטריצות: אם M מטריצה $n\times n$ מעל F ו־p הוא הפולינום האופייני שלה, אז $p(M)=0$.

$$\begin{aligned} -MB_0 &= a_0I \\ B_0 - MB_1 &= a_1I \\ &\vdots \\ B_{n-2} - MB_{n-1} &= a_{n-1}I \\ B_{n-1} &= I \end{aligned}$$

נכפול את השוויון ה־i־י משמאל ב־M^{i-1}:

$$\begin{aligned} -MB_0 &= a_0I \\ MB_0 - M^2B_1 &= a_1M \\ &\vdots \\ M^{n-1}B_{n-2} - M^nB_{n-1} &= a_{n-1}M^{n-1} \\ M^nB_{n-1} &= M^n \end{aligned}$$

נחבר את השוויונים: $0 = a_0I + a_1M + \ldots + a_{n-1}M^{n-1} + M^n$. כלומר, $p(M) = 0$, כנדרש.

2.3.3 הפולינום המינימלי

פולינום מינימלי

הגדרה. אם T ט״ל (M מטריצה), V n־מימדי, **הפולינום המינימלי** של T (M), שיסומן $\mu_T(x)$ ($\mu_M(x)$), הוא הפולינום המתוקן[10] בעל המעלה החיובית הקטנה ביותר המאפס את T (M).

טענה 29: א. יש פולינום יחיד בעל תכונה זו.

ב. כל פולינום שמאפס את T מתחלק ב־μ_T.

ג. שורשי הפולינום המינימלי הם בדיוק הערכים העצמיים.

הוכחה. א. מדוע יש פולינום ממעלה חיובית קטנה ביותר המאפס את T? בכל קבוצה לא־ריקה של מספרים טבעיים יש איבר ראשון. נסתכל בקבוצת המספרים $n \in \mathbb{N}$ כך שיש פולינום מתוקן ממעלה n המאפס את T. זוהי קבוצה לא־ריקה, כי היא מכילה את מימד המרחב. יהי n_0 המספר הקטן ביותר בקבוצה זו, ויהי $\mu(x)$ פולינום ממעלה n_0 המאפס את T. פולינום זה מקיים את הדרישה מפולינום מינימלי.

נוכיח יחידות: נניח ש־μ_1 ו־μ_2 שני פולינומים מתוקנים ממעלה חיובית מינימלית המאפסים את T. נחלק את μ_2 ב־μ_1 עם שארית, ונקבל $\mu_2 = q \cdot \mu_1 + r$, כאשר $r(x)$ הוא פולינום האפס: נציב את T: נקבל $\mu_2(T) = q(T) \cdot \mu_1(T) + r(T)$, כלומר $0 = 0 + r(T)$. אז לא ייתכן ש־r פולינום ממעלה 0 השונה מ־0, כי אז נקבל $r(T) = k \neq 0$. בנוסף, לא ייתכן ש־r ממעלה חיובית, כי אז $0 < \deg(r) < \deg(\mu_1)$ ונקבל סתירה למינימליות μ_1 (כי $r(T) = 0$, כזכור, ואם r אינו מתוקן, קל לתקן אותו). אז קיבלנו $\mu_2 = q \cdot \mu_1$.

נראה ש־$q = 1$. $\deg(\mu_2) = \deg(\mu_1)$, אבל גם $\deg(\mu_2) = \deg(q) + \deg(\mu_1)$; לכן $\deg(q) = 0$, ולכן q קבוע. $\mu_1(x) = x^k + \ldots$ ו־$\mu_2(x) = x^k + \ldots$ (כי אלה פולינומים

[10] פולינום מתוקן ממעלה n הוא פולינום מהצורה $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.

מתוקנים), אז $q(x) \cdot x^k = x^k$ ולכן $q = 1$. קיבלנו $\mu_1 = \mu_2$.

ב. יהי $p(x)$ פולינום המאפס את T ויהי μ הפולינום המינימלי; נראה ש־$\mu(x)$ מחלק את $p(x)$. נחלק עם שארית: $p(x) = q(x) \cdot \mu(x) + r(x)$. אם נראה ש־$r(x) = 0$, נסיים. אחרת, r קבוע השונה מ־0 או פולינום ממעלה חיובית. אבל בהוכחת סעיף א׳ ראינו שאף אחת מאפשרויות אלה לא תיתכן, ולכן $r = 0$. אז $p(x) = q(x) \cdot \mu(x)$, כנדרש.

ג. נראה שכל ע״ע הוא שורש של $\mu(x)$.

למה 1.29: אם T ט״ל ו־M מייצגת אותה בבסיס מסויים, $\mu_T = \mu_M$.[11]

הוכחה. מספיק להראות שאם M מייצגת את T בבסיס מסויים ו־f פולינום כלשהו, אז $f(M)$ מייצגת את $f(T)$ לפי אותו בסיס. אולם זה נובע מהאיזומורפיזם בין חוג הטרנספורמציות לחוג המטריצות. לכן $f(M) = 0 \iff f(T) = 0$. מכאן, הפולינום המינימלי של שתיהן הוא אותו פולינום.

יהי c ע״ע של M (נוכיח למטריצה, ומהלמה הטענה תנבע עבור העתקה). לכן $|cI - M| = 0$. נחלק את $\mu(x)$ ב־$(x-c)$ עם שארית: $\mu(x) = q(x) \cdot (x-c) + r(x)$, כאשר r קבוע (כי $0 \leq \deg r < \deg(x-c) = 1$). נראה ש־$r = 0$. נציב את M ונקבל $0 = \mu(M) = (M - cI) \cdot q(M) + rI$. אז $rI = (cI - M) \cdot q(M)$. ניקח דטרמיננטה ונקבל $r^n = |cI - M| \cdot \det q(M)$. אבל $|cI - M| = 0$, ולכן נקבל $r = 0$. אז $\mu(x)$ מתחלק ב־$(x-c)$, ולכן c שורש של $\mu(x)$.

2.4 תנאים ללכסינות

28.3.2007 **משפט 30:** העתקה לינארית T ניתנת ללכסון אס״ם סכום הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים שלה הוא n, מימד המרחב.

הוכחה. נניח שסכום הריבויים הגיאומטריים הוא n. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הע״ע השונים. נסתכל במ״ע $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$. לכל $1 \leq i \leq k$, יהי $(v_1^i, \ldots, v_{d_i}^i)$ בסיס של V_{λ_i} (נסמן את מימדו d_i). כל שניים מהבסיסים האלה זרים, משום שהחיתוכים מכילים רק את 0 ובבסיס אין וקטור ה־0. נסתכל באיחוד הבסיסים הללו. מספר הווקטורים הוא סכום הריבויים הגיאומטריים, והוא n. נוכיח שהאיחוד הוא בסיס של V.

הואיל ויש n וקטורים, די להוכיח אי־תלות (או, במידה שווה, פרישה). נניח ש־

$$a_1^1 v_1^1 + \ldots + a_{d_1}^1 v_{d_1}^1 + \ldots + a_1^k v_1^k + \ldots + a_{d_k}^k v_{d_k}^k = 0$$

נעביר אגפים:

$$a_1^1 v_1^1 + \ldots + a_{d_1}^1 v_{d_1}^1 = -(a_1^2 v_1^2 + \ldots + a_{d_2}^2 v_{d_2}^2 + \ldots + a_1^k v_1^k + \ldots + a_{d_k}^k v_{d_k}^k)$$

[11] כמסקנה, למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

אגף שמאל שייך ל־V_{λ_1}, כי הוא בסיס של V_{λ_1}; אגף ימין שייך לסכום המרחבים העצמיים האחרים. אם כן, קיבלנו שוויון בין האגפים, אך החיתוך של V_{λ_1} עם סכום האחרים מכיל רק את האפס, ולכן שני האגפים הם אפס. לכן $a_1^1 v_1^1 + \ldots + a_{d_1}^1 v_{d_1}^1 = 0$, אך מכיוון שזה צירוף לינארי מתאפס של איברי בסיס, $a_1^1 = \ldots = a_{d_1}^1 = 0$.

באותו אופן, נשאיר את המחוברים השייכים ל־V_{λ_2} באגף שמאל ונעביר את השאר ימינה; נקבל ש־$a_1^2 = \ldots = a_{d_2}^2 = 0$, וכן הלאה. כך נקבל שכל המקדמים שווים ל־0, ולכן קיבלנו בסיס של V. כל איברי הבסיס הם וקטורים עצמיים, לכן T לכסינה.

בכיוון השני: ראשית, נעיר שסכום הריבויים הגיאומטריים תמיד קטן מ־ או שווה ל־n. מדוע? סכום הריבויים האלגבריים קטן מ־ או שווה ל־n, וכל ריבוי גיאומטרי קטן מ־ או שווה לריבוי האלגברי המתאים. לכן אם סכום הריבוים הגיאומטרי איננו n, הוא קטן מ־n.

נסתכל בסכום הישר של כל המרחבים העצמיים. זה תת־מרחב של V, ומימדו קטן מ־n. לסכום־ישר זה יש בסיס עם פחות מ־n איברים, וכל איברי הבסיס הם ו״ע. כל הו״ע נמצאים בסכום הישר הזה, והם פורשים אותו; לכן המספר המקסימלי של ו״ע בת״ל הוא מימד הסכום הישר, שקטן מ־n. לכן אין n ו״ע בת״ל, ולכן אין בסיס שכולו ו״ע ל־V, ו־T איננה לכסינה.

משפט 31: T לכסינה אס״ם מתקיימים שני התנאים –

א. הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים;

ב. לכל ע״ע λ, $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$.

הוכחה. נניח שהתנאים מתקיימים. אז סכום הריבויים האלגבריים הוא n, כי הפולינום האופייני מתפרק לגמרי. בגלל תנאי ב׳, סכום הריבויים הגיאומטריים שווה לסכום הריבויים האלגבריים, וזה n; לכן, לפי המשפט הקודם, T לכסינה.

בכיוון השני: אם א׳ אינו מתקיים, סכום הריבויים האלגבריים קטן מ־n; מכיוון שכל ריבוי גיאומטרי קטן מ־ או שווה לריבוי האלגברי, בוודאי סכום הריבויים האלגבריים קטן מ־n, ומהמשפט הקודם, T אינה לכסינה.

אם ב׳ אינו מתקיים, קיים ע״ע λ כך ש־$m_G(\lambda) < m_A(\lambda)$. לכן $\sum m_G < \sum m_A \leq n$, ושוב קיבלנו שסכום הריבויים הגיאומטריים קטן מ־n, ו־T אינה לכסינה.

משפט 32: T לכסינה אס״ם שני התנאים –

א. הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים;

ב. הפולינום המינימלי מתפרק לגמרי לגורמי לינאריים שונים.

הוכחה. נניח ש־T לכסינה. אז יש בסיס B שלפיו המטריצה A של T אלכסונית. $\mu_A = \mu_T$. באלסכון של A מופיעים בדיוק כל הערכים העצמיים של A ומחוץ לאלכסון מופיעים אפסים, לכן הפולינום האופייני של A הוא $(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ (λ_i ע״ע), ולכן מתפרק לגמרי.

יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ כל הע״ע השונים של A. נסתכל בפולינום $g(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$. נציב בו את A ונקבל $g(A) = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_k I)$. בכל מקום באלכסון, לפחות באחד

הכופלים יש 0 – לכן $g(A)=0$. קיבלנו פולינום מתוקן המאפס את A, לכן $\mu(x)\mid g(x)$. כלומר, המעלה של $\mu(x)$ היא לכל היותר k. אבל $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ שורשים של $\mu(x)$, לכן $\deg(\mu(x))\geq k$. קיבלנו $\deg(m(x))=k$, ו־$\mu(x)=g(x)$.

(הוכחת הכיוון השני לא נלמדה.)

3 מרחבי מכפלה פנימית

3.1 מכפלה סקלארית

מכפלה סקלארית **הגדרה.** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. **מכפלה סקלארית** היא פונקציה מ־$V \times V$ ל־$\mathbb{R}$, שתסומן $\alpha \cdot \beta$ או $\langle \alpha, \beta \rangle$, המקיימת את התכונות – 28.5.2007

א. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (סימטריות)

ב. $(\alpha + \alpha') \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta$ (לינאריות במשתנה הראשון)

ג. $(a\alpha) \cdot \beta = a(\alpha \cdot \beta)$ (הומוגניות במשתנה הראשון)

ד. $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha \cdot \alpha > 0$ (חיוביות)

דוגמה. נסתכל ב־$\mathbb{R}^2$ או ב־$\mathbb{R}^3$ כמרחבים מעל $\mathbb{R}$. מגדירים פעולה על $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$), שנקראת מכפלה סקלארית, שתוצאתה מספר ממשי, על־ידי $\alpha \cdot \beta = \langle \alpha, \beta \rangle = |\alpha||\beta| \cos \theta$, כאשר α ו־β וקטורים ו־θ היא הזווית ביניהם. ב־$\mathbb{R}^2$, אם $\alpha = (a_1, b_1)$, $\beta = (a_2, b_2)$, אז $\alpha \cdot \beta = a_1 a_2 + b_1 b_2$. מתקיימות התכונות. ב־$\mathbb{R}^n$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$, $\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ מקיימת את התכונות, ולכן היא מכפלה סקלארית.

דוגמה. יהי V מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[0,1]$ עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל בסקאלאר, ונגדיר $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. צריך לבדוק ברצינות רק את תכונה ד׳: מדוע אם $f \not\equiv 0$ אז $\int_0^1 f(x)^2 dx > 0$? אנו מסתמכים על משפט: אם $f \not\equiv 0$ אבל $f \geq 0$ ו־f רציפה, $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

תכונות:

1. במקום התכונות ב׳ וג׳, אפשר לכתוב $(a\alpha + a'\alpha') \cdot \beta = a(\alpha \cdot \beta) + a'(\alpha' \cdot \beta)$.

2. $\alpha \cdot (\beta + \beta') = (\beta + \beta') \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \beta' \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$

3. $0 \leq \alpha \cdot \alpha$, $\alpha \cdot \alpha = 0$ אם"ם $\alpha = 0$. (אם $\alpha \neq 0$, לפי ד׳ $\alpha \cdot \alpha > 0$; אחרת, לפי ג׳, $\alpha \cdot \alpha = 0\alpha \cdot \alpha = 0(\alpha \cdot \alpha) = 0$.)

מרחב אוקלידי V עם המכפלה הסקלארית נקרא **מרחב אוקלידי**.

3.2 מכפלה הרמיטית

מכפלה הרמיטית **הגדרה.** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$. **מכפלה הרמיטית** היא פונקציה מ־$V \times V$ ל־$\mathbb{C}$, שתסומן $\alpha \cdot \beta$ או $\langle \alpha, \beta \rangle$, המקיימת את התכונות –

א. $\alpha \cdot \beta = \overline{\beta \cdot \alpha}$ (הרמיטיות)

ב. $(\alpha + \alpha') \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta$ (לינאריות במשתנה הראשון)

ג. $(a\alpha) \cdot \beta = a(\alpha \cdot \beta)$ (הומוגניות במשתנה הראשון)

ד. $\alpha \neq 0 \Longleftarrow \alpha \cdot \alpha > 0$ (חיוביות)

דוגמה. נסתכל ב־$\mathbb{C}^n$ ונגדיר $(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}$. זה מקיים את ארבע התכונות הנדרשות.

תכונות:

1. מאי נובע ש־$\alpha \cdot \alpha$ ממשי, כי $\alpha \cdot \alpha = \overline{\alpha \cdot \alpha}$.
2. $\alpha \cdot (\beta + \beta') = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$
($\alpha \cdot (\beta + \beta') = \overline{(\beta + \beta') \cdot \alpha} = \overline{\beta \cdot \alpha + \beta' \cdot \alpha} = \overline{\beta \cdot \alpha} + \overline{\beta' \cdot \alpha} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$)
3. $\alpha \cdot b\beta = \bar{b}\alpha \cdot \beta$ ($\alpha \cdot b\beta = \overline{b\beta \cdot \alpha} = \bar{b}\alpha \cdot \beta$)

V עם המכפלה ההרמיטית נקרא **מרחב אוניטרי**. מרחב אוניטרי

3.3 מכפלה פנימית

3.3.1 הגדרה

מכפלה סקאלארית ומכפלה הרמיטית נקראות, באופן כללי, מכפלה פנימית. נשים לב שמעל $\mathbb{R}$, $\overline{\alpha \cdot \beta} = \alpha \cdot \beta$: לכן המכפלה הסקאלארית היא מקרה פרטי של מכפלה הרמיטית, ונוכל להגדיר מכפלה פנימית כך:

הגדרה. יהי V מרחב מעל $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **מכפלה פנימית** $\cdot$ מעל V היא פונקציה מ־$V \times V$ ל־F המקיימת – מכפלה פנימית

א. $\alpha \cdot \beta = \overline{\beta \cdot \alpha}$

ב. $(\alpha + \alpha') \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha' \cdot \beta$

ג. $(a\alpha) \cdot \beta = a(\alpha \cdot \beta)$

ד. $\alpha \neq 0 \Longleftarrow \alpha \cdot \alpha > 0$

V עם $\cdot$ נקרא **מרחב מכפלה פנימית**. מרחב מכפלה פנימית

3.3.2 אורך וקטור

הגדרה. במרחב מכפלה פנימית, **האורך** של וקטור α מוגדר כ־$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$. אורך וקטור

טענה 33: א. $\|\alpha\| \geq 0$, ויש שוויון אם"ם $\alpha = 0$.

ב. $\|a \cdot \alpha\| = |a|\|\alpha\|$

ג. $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\alpha \cdot \beta) + \|\beta\|^2$

הוכחה. א. נובע בקלות מהתכונות.

ב. $\|a\alpha\|^2 = (a\alpha) \cdot (a\alpha) = a\bar{a}(\alpha \cdot \alpha) = |a|^2\|\alpha\|$. נוציא שורש ונקבל $\|a\alpha\| = |a|\|\alpha\|$.

ג. נוכיח עם $+$:

$$\begin{aligned}\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) &= \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta\cdot\beta\\ &= \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\overline{\alpha\cdot\beta}+\beta\cdot\beta\\ &= \|\alpha\|^2+2\operatorname{Re}(\alpha\cdot\beta)+\|\beta\|^2\end{aligned}$$

3.3.3 מרחק בין וקטורים

המרחק בין α ל־β הוא $\|\alpha-\beta\|$; מסמנים $d(\alpha,\beta)$. כמובן, $\|\alpha\|=d(\alpha,0)$.

תכונות:

1. $d(\alpha,\beta)\ge 0$, ויש שוויון אס״ם $\alpha=\beta$.
2. $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$
3. $d(\alpha,\gamma)\le d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$ (אי־שוויון המשולש)

3.3.4 ניצבות וקטורים

ניצבות

הגדרה. נאמר ש־α **ניצב** ל־β ($\alpha\perp\beta$) אם $\alpha\cdot\beta=0$.

ברור ש־$\beta\perp\alpha$ אס״ם $\alpha\perp\beta$; כמו־כן, 0 ניצב לכל וקטור. (זהו הווקטור היחיד שניצב לכל וקטור, מהחיוביות: אם α ניצב לכל וקטור, בפרט $\alpha\perp\alpha$; לכן $\alpha\cdot\alpha=0$, ולכן $\alpha=0$.)

3.3.5 אי שוויון קושי שוורץ

משפט 34 (אי־שוויון קושי־שוורץ): $|\alpha\cdot\beta|\le\|\alpha\|\|\beta\|$, ושוויון מתקיים אס״ם α ו־β תלויים.[12] 30.5.2007

הוכחה. נניח $\alpha\ne 0$. נגדיר וקטורים $\alpha_0=\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|^2}\alpha$, $\gamma=\beta-\alpha_0$.

$\gamma\perp\alpha_0$ (כלומר, $\gamma\cdot\alpha_0=0$): $\gamma\cdot\alpha_0=\gamma\cdot\left(\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\right)\alpha=\overline{\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}}(\gamma\cdot\alpha)$. לכן מספיק להראות ש־$\gamma\cdot\alpha=0$. ואכן,

$$\gamma\cdot\alpha=(\beta-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha)\cdot\alpha)=\beta\cdot\alpha-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\|\alpha\|^2=\beta\cdot\alpha-\beta\cdot\alpha=0$$

$$\begin{aligned}\|\gamma\|^2=\gamma\cdot\gamma=\gamma\cdot(\beta-\alpha_0) &= \gamma\cdot\beta-\gamma\cdot\alpha_0=\gamma\cdot\beta\\ &= (\beta-\alpha_0)\cdot\beta=\beta\cdot\beta-\alpha_0\cdot\beta\\ &= \|\beta\|^2-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha\cdot\beta\\ &\ge 0\end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו $0\le\|\gamma\|^2=\|\beta\|^2-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha\cdot\beta$. כלומר, $\|\beta\|^2-\frac{\beta\cdot\alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha\cdot\beta\ge 0 \iff$ $\|\alpha\|^2\|\beta\|^2-|\alpha\cdot\beta|^2\ge 0 \iff |\alpha\cdot\beta|^2\le\|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \Longleftarrow |\alpha\cdot\beta|\le\|\alpha\|\|\beta\|$.

[12] כלומר, אס״ם אחד מהם הוא כפולה של חברו במספר מרוכב, אם $F=\mathbb{C}$, או ממשי, אם $F=\mathbb{R}$.

אם α ו־β תלויים, או $\alpha = 0$ וברור שיש שוויון, או $\beta = z\alpha$ ($z \in \mathbb{C}$). באגף שמאל, $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha \cdot z\alpha| = |\bar{z}\alpha \cdot \alpha| = |\bar{z}||\alpha \cdot \alpha| = |z|\|\alpha\|^2$. באגף ימין, $\|\alpha\|\|z\alpha\| = |z|\|\alpha\|^2$. לכן יש שוויון.

מצד שני, נניח שיש שוויון; אם $\alpha = 0$, ברור שיש תלות. אחרת, $\gamma = 0$ (כי $\|\gamma\|^2 = 0$); כלומר, $\beta - \alpha_0 = 0$, ו־$\beta = \alpha_0 = \frac{\beta \cdot \alpha}{\|\alpha\|^2}\alpha$. לכן β כפולה של α, ואכן יש תלות.

3.3.6 אי שוויון המשולש

משפט 35 (אי־שוויון המשולש): $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$, ושוויון מתקיים אס"ם אחד מ־α, β הוא כפולה של האחר בסקאלאר ממשי אי־שלילי.

הוכחה. $0 < \|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha \cdot \beta) + \|\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + 2|\alpha \cdot \beta| + \|\beta\|^2$, מכיוון ש־$\operatorname{Re}(z) \leq |z|$; מאי־שוויון קושי־שוורץ, נקבל $\|\alpha + \beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\| + \|\beta\|^2$; כלומר, $\|\alpha + \beta\|^2 \leq (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$. לכן $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

אם $\alpha = 0 = 0\beta$, שני האגפים הם $\|\beta\|$, ולכן שווים. אחרת, אם $\alpha \neq 0$, אז $\beta = a\alpha$ כאשר $a \geq 0$, ואז $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha + a\alpha\| = \|(1+a)\alpha\| = |1+a|\|\alpha\| = (1+a)\|\alpha\| = \|\alpha\| + a\|\alpha\| = \|\alpha\| + |a|\|\alpha\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$.

מצד שני, אם קיים שוויון, $\|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha \cdot \beta) + \|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + 2|\alpha \cdot \beta| + \|\beta\|^2$. לכן $\operatorname{Re}(\alpha \cdot \beta) = |\alpha \cdot \beta|$. כלומר, $\alpha \cdot \beta$ מספר ממשי אי־שלילי, ומכאן גם $\beta \cdot \alpha$ מספר ממשי אי־שלילי; אם $\alpha = 0$, אז $\alpha = 0\beta$ וסיימנו. אחרת, נסמן $\lambda = \frac{\beta \cdot \alpha}{\|\alpha\|^2} \geq 0$. אז $\beta = \lambda\alpha$ (הוכחה הכתרגיל).

מסקנה 36: $\|\alpha + \beta\| \geq |\|\alpha\| - \|\beta\||$

הוכחה. נסתכל בשני הווקטורים $\alpha + \beta$ ו־$-\beta$. מכיוון ש־$\alpha = \alpha + \beta + (-\beta)$, נקבל מאי־שוויון המשולש $\|\alpha\| \leq \|\alpha + \beta\| + \|-\beta\| = \|\alpha + \beta\| + \|\beta\|$. כלומר, $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\|$. באותו אופן, $\|\alpha + \beta\| = \|\beta + \alpha\| \geq \|\beta\| - \|\alpha\|$.

3.4 מערכות אורתונורמליות

הגדרה. במרחב מכפלה פנימית V, קבוצת וקטורים A תיקרא **אורתונורמלית** אם לכל α, β שונים ב־A, $\alpha \cdot \beta = 0$, $\alpha \cdot \alpha = 1$.　　קבוצה אורתונורמלית

דוגמה. $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הרגילה: $\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

טענה 37: יהי V מרחב מכפלה פנימית n־מימדי מעל F. אז כל מערכת אורתונורמלית ב־V היא בלתי־תלויה.

הוכחה. תהי A מערכת אורתונורמלית, ויהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ וקטורים שונים ב־A. נראה שהם בלתי־תלויים: נניח ש־$a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$, ונראה ש־$a_1 = \ldots = a_k = 0$. את שני אגפי

השוויון נכפול מימין ב־α_1: נקבל $0 = 0 \cdot \alpha_1 = a_1 = (a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) \cdot \alpha_1$.[13] לכל $1 \leq i \leq k$, נכפול את שני האגפים מימין ב־α_i, ונקבל $a_i = 0$. לכן הם בלתי־תלויים.

מסקנה 38: במרחב מכפלה פנימית n־מימדי, בקבוצה אורתונורמלית יש n וקטורים לכל היותר. אם יש n וקטורים, קבוצה זו היא בסיס, שנקרא **בסיס אורתונורמלי**. בסיס אורתונורמלי

4.6.2007 **דוגמה.** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$, עם המכפלה הסקאלארית הרגילה.

טענה 39: יהי $B = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ בסיס אורתונורמלי של V, ויהי וקטור $\alpha \in V$. אז מתקיים $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $a_i = \alpha \cdot \varepsilon_i$.

הוכחה. נכפול את שני האגפים מימין ב־ε_i: נקבל $\alpha \cdot \varepsilon_i = a_1\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_i + \ldots + a_n\varepsilon_n \cdot \varepsilon_i = a_i$.

טענה 40: אם $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ מערכת אורתונורמלית ו־$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k$, אז מתקיים $\|\alpha\|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2 = |\alpha \cdot \varepsilon_1|^2 + \ldots + |\alpha \cdot \varepsilon_k|^2$.

הוכחה. $\|\alpha\|^2 = \alpha \cdot \alpha = (a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k) \cdot (a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k) = |a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2$.[14]

3.5 אי שוויון בסל

משפט 41 (אי־שוויון בסל): א. אם $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ מעי א״נ, α וקטור, $\sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2 \leq \|\alpha\|^2$.

ב. אם $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ בסיס, יש שוויון.

הוכחה. ראשית, אם מערכת זו היא בסיס, α הוא צירוף לינארי שלהם, והשוויון (סעיף ב׳) נובע מהטענה הקודמת.

למה 1.41: $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$. אז (א) γ ניצב לכל ε_i; (ב) γ ניצב לכל וקטור שנפרש על־ידי $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$; (ג) $\|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2$.

הוכחה. (א) $\gamma \cdot \varepsilon_1 = \alpha \cdot \varepsilon_1 - \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i \cdot \varepsilon_1 = \alpha \cdot \varepsilon_1 - \alpha \cdot \varepsilon_1 = 0$. באופן דומה מוכיחים עבור $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$.

(ב) יהי δ וקטור הנפרש על־ידי $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$. אז $\delta = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_k\varepsilon_k$. לפי חלק א׳, נקבל $\gamma \cdot \delta = a_1\gamma \cdot \varepsilon_1 + \ldots + a_k\gamma \cdot \varepsilon_k = 0$.

(ג) יהי $\beta = \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$; אז $\gamma = \alpha - \beta$.

$\|\gamma\|^2 = \gamma \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha - \beta) = \gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta$. אבל מחלק ב׳, $\gamma \perp \beta$, ולכן $\|\gamma\|^2 = \gamma \cdot \alpha = (\alpha - \beta) \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \alpha$. נקבל $\alpha \cdot \alpha = \|\alpha\|^2$, וכן $\beta \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)(\varepsilon_i \cdot \alpha) = \sum_{i=1}^{k}(\alpha \cdot \varepsilon_i)(\overline{\alpha \cdot \varepsilon_i}) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2$. לכן, כנדרש, $\|\gamma\|^2 = \alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \alpha = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2$.

$0 \leq \|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2$, לכן $\sum_{i=1}^{k} |\alpha \cdot \varepsilon_i|^2 \leq \|\alpha\|^2$.

[13] $(a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k) \cdot \alpha_1 = a_1\alpha_1 \cdot \alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \cdot \alpha_1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_k \cdot 0 = a_1$.

[14] $|a_1| = a_1\overline{a_1}\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = a_1\varepsilon_1 \cdot a_1\varepsilon_1$.

הגדרה. תהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ מערכת אורתונורמלית, ויהי $\alpha \in V$. **ההטלה** של α על תת־המרחב הנפרש על־ידי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ הוא הווקטור $\sum_{i=1}^k (\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$. הטלה

בטענת העזר, דיברנו על הווקטור $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^k (\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$. אם α בתת־המרחב הנפרש, אז $\gamma = 0$; בכל מקרה, γ הוא הווקטור הקצר ביותר מבין הווקטורים המחברים את α עם וקטורים ב־$\operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$.

האורך של γ הוא המרחק מ־α אל $\sum_{i=1}^k (\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$. פירושו של דבר ש־$\sum_{i=1}^k (\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$ הוא הווקטור הקרוב ביותר ל־α ב־$\operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. (ההוכחה כתרגיל.)

3.6 אורתוגונליזציית גראם שמידט

משפט 42: יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ וקטורים בת״ל במרחב מכפלה פנימית. קיימת מערכת אורתונורמלית $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ כך שלכל $1 \le l \le k$ מתקיים $\operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$.

הוכחה. באינדוקציה על k: 6.6.2007

אם $k = 1$, יש לנו רק $\alpha_1 \neq 0$; נבחר $\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$. כמובן, $\operatorname{span}\varepsilon_1 = \operatorname{span}\alpha_1$, ו־$(\varepsilon_1)$ סדרה אורתונורמלית.

נניח נכונות ל־$k-1$ ונוכיח ל־k. נסתכל ב־$(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. לפי הנחת האינדוקציה, יש סדרה א״נ $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ כך שלכל $1 \le l \le k-1$ מתקיים $\operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$. נסמן $\varepsilon_k' = \alpha_k - \sum_{i=1}^l (\alpha_k \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$. לפי טענת־עזר קודמת, $\varepsilon_i \perp \varepsilon_k'$ לכל $1 \le i \le k-1$. כלומר, $\varepsilon_k' \cdot \varepsilon_i = 0$. אך $\varepsilon_k' \neq 0$, כי אילו $\varepsilon_k' = 0$, היינו מקבלים $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$, ולכן α_k תלוי לינארית ב־$\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, בסתירה. נוכל להגדיר $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_k'}{\|\varepsilon_k'\|}$.

הסדרה $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ היא סדרה כדרוש: ראשית, לכל $1 \le i \le k$, $\|\varepsilon_i\| = 1$; שנית, קל לראות שלכל $i \neq j$ $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$. בנוסף, מהנחת האינדוקציה, לכל $1 \le l < k$ מתקיים $\operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$ – צריך כעת להוכיח עבור $l = k$: נשים לב שמתקיים $\varepsilon_k \in \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \alpha_k\} = \operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. אז מתקיימת ההכלה (של פרישת קבוצות בת״ל) $\operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \subseteq \operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. שתי הפרישות בעלות מימד k, לכן שוות.

משפט 43: אם $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V, ניתן לבנות ממנו בסיס א״נ $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ כך שלכל $1 \le l \le k$ מתקיים $\operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$.

מסקנה 44: אם V מרחב מ״פ בעל מימד סופי, כל סדרה א״נ ניתנת להשלמה לבסיס א״נ.

הוכחה. נניח ש־$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ היא סדרה אורתונורמלית. אם $k = n$, סיימנו, כי זה כבר בסיס א״נ.

אחרת, $k < n$; נשלים את הסדרה לבסיס – $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$. על סדרה זו נפעיל את תהליך גראם־שמידט. ב־k המקומות הראשונים, לא ישתנו הווקטורים (ההוכחה – כתרגיל[15]).

[15] למשל, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - (\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1)\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - 0$.

נקבל סדרה אורתונורמלית $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n)$, וזה בסיס ש־$k$ הווקטורים הראשונים בו הם איברי הסדרה המקורית, לפי סדרם.

משפט (אי־שוויון בסל). אם $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ סדרה א״נ, לכל α $\|\alpha\|^2 \le \sum_{i=1}^k |\alpha\cdot\varepsilon_i|^2$.

הוכחה. נשלים את $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ לבסיס א״נ $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n)$. למדנו שבמקרה זה $\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha\cdot\varepsilon_i|^2$; מכאן נובעת הטענה.

3.7 שוויון פרסבל

טענה 45: יהי $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ בסיס א״נ של V, ויהיו $\alpha,\beta\in V$ כך ש־$\alpha = a_1\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_n$, $\beta = b_1\varepsilon_1+\ldots+b_n\varepsilon_n$. אז $\alpha\cdot\beta = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$.

הוכחה. נחשב:

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\beta &= (a_1\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_n)\cdot(b_1\varepsilon_1+\ldots+b_n\varepsilon_n)\\ &= a_1\overline{b_1}\varepsilon_1\cdot\varepsilon_1 + a_1\overline{b_2}\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\ldots+a_n\overline{b_n}\varepsilon_n\cdot\varepsilon_n\\ &= a_1\overline{b_1}+\ldots+a_n\overline{b_n}\end{aligned}$$

(מכיוון ש־$\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j = \delta_{ij}$.)

משפט 46 (שוויון פרסבל): יהי $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ בסיס א״נ של V, ויהיו $\alpha,\beta\in V$. אז $\alpha\cdot\beta = \sum_{i=1}^n(\alpha\cdot\varepsilon_i)(\varepsilon_i\cdot\beta)$.

הוכחה. אם $\alpha = a_1\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_n$, $\beta = b_1\varepsilon_1+\ldots+b_n\varepsilon_n$, מטענה קודמת $a_i = \alpha\cdot\varepsilon_i$, $b_i = \beta\cdot\varepsilon_i$; לפי הטענה הקודמת,

$$\alpha\cdot\beta = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i} = \sum_{i=1}^n(\alpha\cdot\varepsilon_i)(\overline{\beta\cdot\varepsilon_i}) = \sum_{i=1}^n(\alpha\cdot\varepsilon_i)(\varepsilon_i\cdot\beta)$$

כנדרש.

3.8 תת מרחב ניצב

כרגיל, V מרחב מכפלה פנימית מעל F. תהי $A\subseteq V$ קבוצת וקטורים. **הניצב** של A הוא $A^\perp = \{\alpha\in V : \forall\beta\in A\ \alpha\perp\beta\}$.

דוגמה. אם $A=\varnothing$ או $A=\{0\}$, אז $A^\perp = V$. אם $A=V$, אז $A^\perp=\{0\}$.

טענה 47: לכל A, $A^\perp$ הוא תת־מרחב של V.

הוכחה. ראשית, $0\in A^\perp$, לכן $A^\perp$ איננו ריק; נבדוק סגירות – אם $\alpha_1,\alpha_2\in A^\perp$, $\beta\in A$, אז $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\beta = \alpha_1\cdot\beta+\alpha_2\cdot\beta = 0$. הוכחת הסגירות לכפל בסקאלאר דומה.

על־פי הטענה, נוכל להגדיר כך –

הגדרה. עבור $A \subseteq V$, **תת־המרחב הניצב** של A הוא $A^\perp = \{\alpha \in V : \forall\beta \in A\ \alpha \perp \beta\}$. תת־מרחב ניצב

דוגמה. נסתכל במטריצה M מעל $\mathbb{R}$. תהי A קבוצת השורות של המטריצה. $A^\perp$ הוא מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות $Mx = 0$.

בדרך־כלל נדבר על תת־מרחבים U ועל תת־המרחב הניצב להם, $U^\perp$.

טענה 48: א. $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

ב. $U \cap U^\perp = \{0\}$.

הוכחה. א. יהי $\beta \in U$, $\alpha \in U^\perp$. לכן $\alpha \cdot \beta = 0$, ולכן $\beta \cdot \alpha = \overline{0} = 0$; זה נכון לכל $\alpha \in U^\perp$, לכן $\beta \in U^{\perp\perp}$.

ב. נניח ש־$\alpha \in U \cap U^\perp$. אז $\alpha \cdot \alpha = 0$, לכן $\alpha = 0$.

(יש לשים לב שטענה זו אינה דורשת ש־U תת־מרחב.)

משפט 49: נניח ש־V בעל מימד סופי. אם U תת־מרחב של V, אז $V = U + U^\perp$.[16]

הוכחה. יהי $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ בסיס א״נ של U. יהי נתון $\alpha \in V$. נסמן $\beta = \sum_{i=1}^r (\alpha \cdot \varepsilon_i)\varepsilon_i$, ויהי $\gamma = \alpha - \beta$. למדנו ש־γ ניצב לכל ε_i, לכן הוא ניצב לכל איבר של U. לכן $\gamma \in U^\perp$, ובפרט $\beta \perp \gamma$.

קיבלנו ש־$\alpha = \beta + \gamma$ – כלומר, כל וקטור ב־V שווה לווקטור ב־U ועוד וקטור ב־$U^\perp$; לכן $V = U + U^\perp$. אבל $U \cap U^\perp = \{0\}$, לכן הסכום הוא סכום ישר.

משפט 50: אם V בעל מימד סופי ו־U תת־מרחב של V, אז $U^{\perp\perp} = U$.

הוכחה. כידוע, $U \subseteq U^{\perp\perp}$. U תת־מרחב, לכן $V = U \oplus U^\perp$; מכיוון שגם $U^\perp$ תת־מרחב, $V = U^\perp \oplus U^{\perp\perp}$. קיבלנו $\dim V = \dim U + \dim U^\perp = \dim U^\perp + \dim U^{\perp\perp}$, לכן $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$. U תת־מרחב של $U^{\perp\perp}$ ויש לו אותו מימד כמו ל־$U^{\perp\perp}$, לכן $U = U^{\perp\perp}$.

3.9 טרנספורמציות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

3.9.1 תבניות בילינאריות

11.6.2007 **הגדרה.** יהי V מרחב מכפלה פנימיתמעל F, ותהי $T : V \to V$ טרנספורמציה לינארית. לכל $\alpha, \beta \in V$ נסתכל בסקאלאר $\langle T\alpha, \beta\rangle$. לפונקציה זו נקרא **התבנית הבילינארית** המוגדרת על־ידי T. תבנית בילינארית

טענה 51: נניח שלכל $\alpha, \beta \in V$ מתקיים $\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$. אזי $T = 0$.

הוכחה. יהי α וקטור ב־V. לכל $\beta \in V$ מתקיים $\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$. כלומר, $T\alpha$ ניצב לכל וקטור ב־V, ולכן $T\alpha = 0$. זה נכון לכל α, ולכן $T = 0$.

דוגמה. נניח שלכל α מתקיים $\langle T\alpha, \alpha\rangle = 0$. לא נובע, במצב זה, $T = 0$: למשל, $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקאלארית הרגילה, T סיבוב ב־$90°$. T ט״ל והיא אינה טרנספורמציית האפס, אבל לכל $\alpha \in V$ $\langle T\alpha, \alpha\rangle = 0$.

[16] למעשה, $V = U \oplus U^\perp$.

טענה 52: לכל $a, b \in F$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in V$, מתקיים –

א. $\langle T(\alpha+\alpha'), \beta\rangle = \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\alpha', \beta\rangle$

ב. $\langle T\alpha, \beta+\beta'\rangle = \langle T\alpha, \beta'\rangle + \langle T\alpha, \beta'\rangle$

ג. $\langle Ta\alpha, \beta\rangle = a\langle T\alpha, \beta\rangle$

ד. $\langle T\alpha, b\beta\rangle = \bar{b}\langle T\alpha, \beta\rangle$

טענה 53: אם $T, S \in \hom(V, V)$ ולכל $\alpha, \beta \in V$ $\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle S\alpha, \beta\rangle$, אז $T = S$.

הוכחה. לכל $\alpha, \beta \in V$,

$$\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle S\alpha, \beta\rangle \iff \langle T\alpha - S\alpha, \beta\rangle = \langle (T-S)\alpha, \beta\rangle = 0$$

לכן, לפי טענה קודמת, $T - S = 0$, ולכן $T = S$.

מטענה 52 נובע שבהינתן β, ההעתקה $\langle T\alpha, \beta\rangle \mapsto \alpha$ היא העתקה לינארית מ־V ל־F; העתקה כזו נקראת בשם **פונקציונל לינארי**. פונקציונל לינארי

טענה 54: יהי V בעל מימד סופי, ויהי φ פונקציונל לינארי על V. אז קיים וקטור יחיד $\beta \in V$ שמקיים שלכל α ב־V $\varphi(\alpha) = \langle \alpha, \beta\rangle$.

יתר על כן, לכל β ההעתקה $\langle \alpha, \beta\rangle \mapsto \alpha$ היא פונקציונל לינארי. (חלק זה נובע מיידית מתכונות המכפלה הפנימית.)

הוכחה. לכל $\beta \in V$, נסתכל בפונקציונל הלינארי φ_β המוגדר ע״י $\varphi_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta\rangle$. קל לראות ש־$\varphi_{\beta+\beta'} = \varphi_\beta + \varphi_{\beta'}$, $\varphi_{b\beta} = \bar{b}\varphi_\beta$.

הפונקציונלים מהצורה φ_β הם תת־מרחב של מרחב הפונקציונלים $V^* = \hom(V, F)$; מימדו הוא כמימד V: $\dim V^* = \dim\hom(V, F) = \dim V \cdot \dim F = \dim V \cdot 1 = \dim V$.

מימד מרחב הפונקציונלים מהצורה φ_β הוא כמימד V, מכיוון ש־$\beta = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$, $\varphi_\beta = a_1\varphi_{\beta_1} + \ldots + a_n\varphi_{\beta_n}$. $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ בסיס של V, אז הם בלתי־תלויים, ו־β, φ תלויים בהם; לכן $\varphi_{\beta_1}, \ldots, \varphi_{\beta_n}$ בת״ל, וכל φ_β תלוי בהם. לכן זה בסיס.

קיבלנו תת־מרחב שמימדו כמימד המרחב בו הוא מוכל, לכן הם מתלכדים; כלומר, כל פונקציונל לינארי הוא מהצורה φ_β.[17]

איך יודעים ש־β יחיד? אם β_1 ו־β_2 נותנים אותו פונקציונל לינארי, לכל α מתקיים $\langle \alpha, \beta_1\rangle = \langle \alpha, \beta_2\rangle$. לכן לכל α, $\langle \alpha, \beta_1 - \beta_2\rangle = 0$, ולכן $\beta_1 - \beta_2 = 0$ ו־$\beta_1 = \beta_2$.

משפט 55: נניח ש־V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. אז לכל ט״ל $T : V \to V$ קיימת ט״ל יחידה T^* כך שלכל $\alpha, \beta \in V$ מתקיים $\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T^*\beta\rangle$.

הוכחה. היחידות קלה: אם T', T^* שתיהן מקיימות את האמור לעיל, אז לכל α ו־β מתקיים $\langle \alpha, T'\beta\rangle = \langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T^*\beta\rangle$. לכן $\langle \alpha, (T' - T^*)\beta\rangle = 0$. אם נקבע את β, נקבל שלכל

[17] נשים לב שהסתמכנו כאן על סופיות המימד.

α מתקיים $\langle\alpha,(T'-T^*)\beta\rangle=0$. לכן $(T'-T^*)\beta=0$. מכיוון שזה נכון לכל β, נקבל $T'-T^*=0$ – כלומר, $T'=T^*$.

נותר להראות קיום. נגדיר את $T^*\beta$ לכל β. בהינתן $\beta\in V$, נסתכל בפונקציונל הלינארי ψ_β המוגדר על־ידי $\psi_\beta(\alpha)=\langle T\alpha,\beta\rangle$. מהטענה הקודמת, קיים וקטור יחיד β' כך שלכל α $\psi_\beta(\alpha)=\langle\alpha,\beta'\rangle$. מהגדרת ψ, נקבל $\langle T\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\beta'\rangle$. אז נגדיר $T^*\beta=\beta'$, ואז $\langle T\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,T^*\beta\rangle$.

נותר להוכיח כי T^* לינארית. כלומר, צריך להוכיח שמתקיים $T^*(\beta_1+\beta_2)=T^*\beta_1+T^*\beta_2$, $T^*(b\beta_1)=bT^*\beta_1$.

למה 1.55: $T^{**}=T^*$.

הוכחה. $\langle T^{**}\alpha,\beta\rangle=\overline{\langle\beta,T^{**}\alpha\rangle}=\overline{\langle T^*\beta,\alpha\rangle}=\langle\alpha,T^*\beta\rangle=\langle T\alpha,\beta\rangle$ לכל $\alpha,\beta\in V$.

$$\begin{aligned}\langle\alpha,T^*(\beta_1+\beta_2)\rangle &= \langle T\alpha,\beta_1+\beta_2\rangle\\ &= \langle T\alpha,\beta_1\rangle+\langle T\alpha,\beta_2\rangle\\ &= \langle\alpha,T^*\beta_1\rangle+\langle\alpha,T^*\beta_2\rangle\\ &= \langle\alpha,T^*\beta_1+T^*\beta_2\rangle\end{aligned}$$

מאחר שזה נכון לכל α, נקבל $T^*(\beta_1+\beta_2)=T^*\beta_1+T^*\beta_2$.

באופן דומה מוכיחים עבור כפל בסקאלאר.

בעקבות המשפט, נוכל להגדיר –

הגדרה. לכל טרנספורמציה לינארית T, הטרנספורמציה T^* תיקרא **הטרנספורמציה הצמודה** ל־T. הטרנספורמציה הצמודה

משפט 56: יהי V מ״ו נוצר־סופית מעל F, ותהי $T:V\to V$ ט״ל. תהי T^* הט״ל הצמודה ל־T. יהי $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ בסיס א״נ של V, ותהיינה $A=(a_{ij})$, $A^*=(a^*_{ij})$ המטריצות של T ו־T^* לפי בסיס זה, בהתאמה. אז $a^*_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

הוכחה. a_{ij} היא הקואורדינטה ה־i בפיתוח של הווקטור $T\varepsilon_j$ כצירוף לינארי של $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. לכן $a_{ij}=\langle T\varepsilon_j,\varepsilon_i\rangle$. באותו אופן, $a^*_{ij}=\langle T^*\varepsilon_j,\varepsilon_i\rangle$. אבל

$$a^*_{ij}=\langle T^*\varepsilon_j,\varepsilon_i\rangle=\langle\varepsilon_j,T\varepsilon_i\rangle=\overline{\langle T\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle}=\overline{a_{ji}}$$

כנדרש.

נשים לב שאם $F=\mathbb{R}$, $A^*=A^t$; אם $F=\mathbb{C}$, $A^*=\overline{A^t}$.

טענה 57: אם V ממ״פ מעל $\mathbb{C}$ ולכל $\alpha\in V$ מתקיים $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$, אז $T=0$. 13.6.2007

הוכחה. נניח שלכל α $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$, ונוכיח שלכל $\alpha,\beta\in T$ $\langle T\alpha,\beta\rangle=0$. מכאן ינבע ש־$T=0$.

$$\begin{aligned}0 &= \langle T(\alpha+\beta),\alpha+\beta\rangle\\ &= \langle T\alpha+T\beta,\alpha+\beta\rangle\\ &= \langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle+\langle T\beta,\beta\rangle\\ &\Longrightarrow \langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle=0\end{aligned}$$

במקביל:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(\alpha+i\beta), \alpha+i\beta\rangle \\ &= \langle T\alpha+iT\beta, \alpha+i\beta\rangle \\ &= \langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle T\alpha, i\beta\rangle+\langle iT\beta,\alpha\rangle+\langle iT\beta, i\beta\rangle \\ &\implies \langle T\alpha, i\beta\rangle+\langle iT\beta,\alpha\rangle=0 \\ &\implies \langle T\alpha,\beta\rangle-\langle T\beta,\alpha\rangle=0 \end{aligned}$$

נחבר את המשוואות ונקבל $\langle T\alpha,\beta\rangle=0$.

משפט 58: אם $T,S\in \hom(V,V)$, $a\in F$,

א. $(T+S)^*=T^*+S^*$

ב. $(aT)^*=\overline{a}T^*$

ג. $(TS)^*=S^*T^*$

ד. $(T^*)^*=T$

ה. $T\mapsto T^*$ העתקה חח״ע מ־$\hom(V,V)$ על $\hom(V,V)$.

הוכחה. א. לכל $\alpha,\beta\in V$, $\langle (T+S)\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,(T+S)^*\beta\rangle$. במקביל,

$$\begin{aligned} \langle T\alpha+S\alpha,\beta\rangle &= \langle T\alpha,\beta\rangle+\langle S\alpha,\beta\rangle \\ &= \langle\alpha,T^*\beta\rangle+\langle\alpha,S^*\beta\rangle \\ &= \langle\alpha,T^*\beta+S^*\beta\rangle \end{aligned}$$

כלומר, לכל α $\langle\alpha,T^*\beta+S^*\beta\rangle = \langle\alpha,(T+S)^*\beta\rangle$, ולכן לכל β מתקיים, כנדרש, $(T+S)^*\beta=(T^*+S^*)\beta$.

ב. יהיו $\alpha,\beta\in V$. אז $\langle aT\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,(aT)^*\beta\rangle$. מצד שני, $\langle aT\alpha,\beta\rangle = a\langle T\alpha,\beta\rangle =$ $\langle\alpha,\overline{a}T^*\beta\rangle = a\langle\alpha,T^*\beta\rangle$. זה נכון לכל $\alpha,\beta\in V$, לכן $(aT)^*=\overline{a}T^*$.

ג. יהיו $\alpha,\beta\in V$. אז $\langle TS\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,(TS)^*\beta\rangle$. במקביל, $\langle TS\alpha,\beta\rangle=\langle T(S\alpha),\beta\rangle=$ $\langle S\alpha,T^*\beta\rangle=\langle\alpha,S^*(T^*\beta)\rangle$. לכן בסך־הכל $\langle\alpha,(TS)^*\beta\rangle=\langle\alpha,S^*T^*\beta\rangle$.

ד. הוכח כבר.

ה. חח״ע – אם $T^*=S^*$ אז $(T^*)^*=(S^*)^*$, ולפי ד׳, $T=S$; לכן זו העתקה חח״ע. בנוסף, זוהי העתקה על: תהי $T\in\hom(V,V)$. אז $(T^*)^*=T$. כלומר, לכל T יש מקור.

3.9.2 טרנספורמציות צמודות לעצמן

טרנספורמציה צמודה לעצמה **הגדרה.** T תיקרא **צמודה לעצמה** אם $T=T^*$ (לכל $\alpha,\beta\in V$ $\langle T\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,T\beta\rangle$).

טרנספורמציה סימטרית
טרנספורמציה הרמיטית
ט״ל צמודה לעצמה מעל $\mathbb{R}$ נקראת **טרנספורמציה סימטרית**. ט״ל צמודה לעצמה מעל $\mathbb{C}$ נקראת **טרנספורמציה הרמיטית**.

דוגמה. הט״ל הצמודה ל־0 היא 0; הט״ל הצמודה ל־I היא I. לכן אלה ט״ל צמודות לעצמן.

אם נעבור למטריצות ונניח שהבסיס הנבחר הוא אורתונורמלי, אם T צמודה לעצמה והמטריצה שלה לפי בסיס זה היא A, אז $A = A^*$. כלומר, אם $A = (a_{ij})$, אז לכל i, j $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

אם $F = \mathbb{R}$, המטריצה סימטרית ($a_{ji} = a_{ij}$). כלומר, T סימטרית אס"ם A סימטרית. אם $F = \mathbb{C}$, T הרמיטית אס"ם לכל i, j $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, ומטריצה כזו תכונה מטריצה הרמיטית. נשים לב שבמטריצה הרמיטית כל איברי האלכסון חייבים להיות ממשיים.

טענה 59: כל ט"ל T היא מהצורה $T_1 + iT_2$ כאשר T_1 ו־T_2 הרמיטיות ($F = \mathbb{C}$).

הוכחה. $T + T^*$ היא הרמיטית: $(T + T^*)^* = T^* + T^{**} = T + T^*$.

$T - T^*$ אינה בהכרח הרמיטית: $(T - T^*)^* = T^* - T^{**} = -(T - T^*)$. אבל $\frac{T-T^*}{i}$ הרמיטית: $\left(\frac{T-T^*}{i}\right)^* = \frac{T^*-T}{\bar{i}} = \frac{T-T^*}{i}$.

כעת: $\frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i} = \frac{T+T^*+i(\frac{T-T^*}{i})}{2} = T$. נסמן $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$, $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$; שתיהן הרמיטיות, ו־$T = T_1 + iT_2$.

טענה 60: אם T צמודה לעצמה ולכל α מתקיים $\langle T\alpha, \alpha\rangle = 0$, אז $T = 0$.

הוכחה. ב־$\mathbb{C}$, זה נכון תמיד; נוכיח לגבי $\mathbb{R}$. נראה שלכל $\alpha, \beta \in V$ $\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$.

לכל α, β, $\langle T(\alpha+\beta), \alpha+\beta\rangle = 0 \Longleftarrow \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\beta, \alpha\rangle = 0$. לכן $\langle T\alpha, \beta\rangle + \langle \beta, T\alpha\rangle = \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle \beta, T^*\alpha\rangle = 0$. המכפלה הסקאלארית סימטרית מעל $\mathbb{R}$, ולכן נקבל $\langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\alpha, \beta\rangle = 0$. מכאן, $\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$, כנדרש.

משפט 61: יהי V מרחב אוניטרי[18] ו־T ט"ל. T הרמיטית אס"ם לכל $\alpha \in V$ $\langle T\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{R}$.

הוכחה. אם T צמודה לעצמה, $\alpha \in V$, נקבל $\overline{\langle T\alpha, \alpha\rangle} = \langle \alpha, T\alpha\rangle = \langle \alpha, T^*\alpha\rangle = \langle T\alpha, \alpha\rangle$. המספר שווה לצמוד לו, לכן הוא ממשי.

כעת נניח שלכל $\alpha \in V$ $\langle T\alpha, \alpha\rangle$ ממשי. מכיוון שכך, $0 = \langle T\alpha, \alpha\rangle - \overline{\langle T\alpha, \alpha\rangle}$; נקבל

$$\begin{aligned}
\langle (T - T^*)\alpha, \alpha\rangle &= \langle T\alpha, \alpha\rangle - \langle T^*\alpha, \alpha\rangle \\
&= \langle T\alpha, \alpha\rangle - \langle \alpha, T\alpha\rangle \\
&= \langle T\alpha, \alpha\rangle - \overline{\langle T\alpha, \alpha\rangle} \\
&= 0
\end{aligned}$$

לכן לכל α $\langle (T - T^*)\alpha, \alpha\rangle = 0$, ומטענה קודמת $T - T^* = 0$. כלומר, $T = T^*$.

3.9.3 טרנספורמציות אנטי סימטריות ואנטי הרמיטיות

18.6.2007 **הגדרה.** T נקראת **אנטי־סימטרית** (מעל $\mathbb{R}$) או **אנטי־הרמיטית** (מעל $\mathbb{C}$) אם $T^* = -T$. טרנספורמציה אנטי־סימטרית/הרמ

המטריצה של טרנספורמציה אנטי־סימטרית או אנטי־הרמיטית היא אנטי־סימטרית או אנטי־הרמיטית, בהתאמה.

דוגמה. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה אנטי־סימטרית; $\begin{pmatrix} 0 & 3+4i \\ 4i-3 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה אנטי־הרמיטית.

[18] כזכור, הכוונה לממ"פ מעל $\mathbb{C}$.

טענה 62: במטריצה אנטי־סימטרית יש באלכסון רק אפסים.

3.9.4 טרנספורמציות אורתוגונליות ואוניטריות

טרנספורמציה אוניטרית/אורתוגונלית

הגדרה. T נקראת **אוניטרית** אם היא שומרת על המכפלה הפנימית ($\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$). טרנספורמציה אוניטרית מעל $\mathbb{R}$ נקראת **אורתוגונלית**.

T אוניטרית אס"ם היא שומרת על הנורמה (אורך) של וקטורים.

משפט 63: התנאים הבאים שקולים:

א. T אוניטרית;

ב. $T^*T = TT^* = I$ (כלומר, $T^{-1} = T^*$);

ג. T מעבירה כל בסיס א"נ לבסיס א"נ;

ד. T מעבירה בסיס א"נ כלשהו לבסיס א"נ.

הוכחה. נניח ש־T אוניטרית. אז לכל α $\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$. לכן $\langle\alpha, T^*T\alpha\rangle = \langle T\alpha, T\alpha\rangle$ = $\langle\alpha,\alpha\rangle$. מכאן, $\langle\alpha, T^*T\alpha\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle = 0$, לכן $\langle\alpha,(T^*T-I)\alpha\rangle = 0$. זה נכון לכל α. מכיוון ש־T^*T-I צמודה לעצמה, לפי טענה קודמת $T^*T-I=0$, ולכן $T^*T=I$. T ט"ל ממרחב סוף־מימדי לעצמו, לכן נובע ש־T הפיכה ו־$T^{-1} = T^*$. לכן גם $TT^* = I$.

נניח שב' נכון. אז $TT^* = T^*T = I$. יהי $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ בסיס א"נ, ונוכיח ש־$(T\varepsilon_1,\ldots,T\varepsilon_n)$ גם הוא בסיס א"נ. $\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle\varepsilon_i, T^*T\varepsilon_j\rangle = \langle\varepsilon_i, I\varepsilon_j\rangle = \langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}$. לכן התמונה היא בסיס א"נ.

באופן טריוויאלי, ג' גורר את ד'. נראה שד' גורר את א' וסיימנו. יהי $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ בסיס א"נ אשר T מעבירה לבסיס א"נ. נראה שלכל α,β $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$.

$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n$, אז $T\alpha = a_1T\varepsilon_1 + \ldots + a_nT\varepsilon_n$. $\beta = b_1\varepsilon_1 + \ldots + b_n\varepsilon_n$, אז $T\beta = b_1T\varepsilon_1 + \ldots + b_nT\varepsilon_n$. על־פי טענה קודמת, $\langle\alpha,\beta\rangle = a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}$. מכיוון שגם $(T\varepsilon_1,\ldots,T\varepsilon_n)$ בסיס א"נ, גם $\langle T\alpha, T\beta\rangle = a_1\overline{b_1} + \ldots + a_n\overline{b_n}$. לכן מתקיים השוויון.

מטריצה אוניטרית/אורתוגונלית

הגדרה. מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$ (מעל $\mathbb{R}$) נקראת **אוניטרית (אורתוגונלית)** אם $A^*A = I$.

תנאי זה שקול לכך ש־$AA^* = I$, לכן מקבלים שכל מטריצה אוניטרית (אורתוגונלית) היא הפיכה.

מסקנה 64: אם A מייצגת את T ביחס לבסיס א"נ מסויים, אז T אוניטרית (אורתוגונלית) אס"ם A אוניטרית (אורתוגונלית).

מסקנה 65: A מטריצה אוניטרית (אורתוגונלית) אס"ם קיים ממ"פ V מעל F כך ש־A מטריצת המעבר בין בסיסים א"נ.

מסקנה 66: A אוניטרית אס"ם שורותיה הן בסיס א"נ של F^n עם המ"פ הסטנדרטית וכן אס"ם עמודותיה בסיס א"נ ל־F^n.

הוכחה. נוכיח לשורות. A אוניטרית אס"ם $AA^* = I$. נניח $A = (a_{ij})$, $A^* = (b_{ij})$. $AA^* = I$ אס"ם לכל i, j $\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij}$. אנו יודעים ש־$b_{kj} = \overline{a_{jk}}$. לכן לכל i, j, $\sum_{k=1}^n a_{ik}\overline{a_{jk}} = \delta_{ij}$. לכן השורות הן מערכת אורתונורמלית עם n איברים, ומכאן היא בסיס א"נ של F^n.

טיעונים אלה תקפים גם בכיוון ההפוך, לכן מתקבל הכיוון השני.

קל לראות (כתרגיל) שאם A אוניטרית גם A^t אוניטרית; לכן A אוניטרית אס"ם A^t אוניטרית, וזה אס"ם שורות A^t הן בסיס א"נ – וזה אס"ם עמודות A הן בסיס א"נ.

3.9.5 טרנספורמציות נורמליות

טרנספורמציה נורמלית

הגדרה. T נקראת **נורמלית** אם $T^*T = TT^*$.

דוגמה. כל טרנספורמציה צמודה לעצמה היא נורמלית.

דוגמה. כל טרנספורמציה אנטי־סימטרית מעל $\mathbb{R}$, ואנטי־הרמיטית מעל $\mathbb{C}$, היא נורמלית: $T^* = -T$ אז $T^*T = -TT = -T^2$ ו־$TT^* = T(-T) = -T^2$.

דוגמה. כל טרנספורמציה אוניטרית היא נורמלית, כי $T^*T = I = TT^*$.

משפט 67: יהי V מרחב אוניטרי מעל $\mathbb{C}$, $T : V \to V$ טרל"נ. אז יש ל־V בסיס א"נ שכל וקטוריו הם וקטורים עצמיים של T אס"ם T נורמלית.[19]

הוכחה. בכיוון אחד, נניח ש־$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס אורתונורמלי שכל וקטוריו הם ו"ע של T. תהי A המטריצה של T לפי בסיס זה; אז A אלכסונית, כאשר האיבר ה־i על האלכסון הוא הע"ע המתאים ל־α_i. מתקיים $A^* = \overline{A^t}$ – בפרט, A^* אלכסונית, ולכן $AA^* = A^*A$. מכאן, $T^*T = TT^*$ – כלומר, T נורמלית.

בכיוון השני, נניח ש־T נורמלית ונראה שיש בסיס א"נ של ו"ע שלה.

למה 1.67: אם T טרנספורמציה נורמלית ו־α ו"ע שלה השייך לע"ע a, אז α ו"ע של T^* השייך לע"ע $\bar{a}$.

הוכחה. $T\alpha = a\alpha$. לכל וקטור β מתקיים

$$\|T^*\beta\|^2 = \langle T^*\beta, T^*\beta\rangle = \langle \beta, TT^*\beta\rangle = \langle \beta, T^*T\beta\rangle = \langle T\beta, T\beta\rangle = \|T\beta\|^2$$

כעת, נסתכל בטרנספורמציה $T - aI$. אם T נורמלית, ודאי גם $T - aI$ נורמלית.

$$\|(T - aI)\alpha\| = \|(T - aI)^*\alpha\| = \|(T^* - \bar{a}I)\alpha\| = \|T^*\alpha - \bar{a}\alpha\|$$

לכן אם $T\alpha = a\alpha$ ו־$\|T\alpha - a\alpha\| = 0$, גם $\|T^*\alpha - \bar{a}\alpha\| = 0$. מכאן, $T^\alpha - \bar{a}\alpha = 0$, ולכן $T^*\alpha = \bar{a}\alpha$. כלומר, $\bar{a}$ ע"ע של T השייך ל־α.

[19] כלומר, ל־V יש בסיס א"נ לפיו המטריצה של T אלכסונית. במילים אחרות: אם A מטריצה נורמלית מעל $\mathbb{C}$, קיימת מטריצה אוניטרית U כך ש־U^*AU־$B = U^{-1}AU = U^*AU$ אלכסונית.

20.6.2007

למה 2.67: אם T ט״ל נורמלית, אז ו״ע של T השייכים לע״ע שונים ניצבים זה לזה.

הוכחה. נניח ש־$T\alpha = a\alpha$, $T\beta = b\beta$, $a \neq b$. נוכיח $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$:

$$a\langle \alpha, \beta \rangle = \langle a\alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle = \langle \alpha, \bar{b}\beta \rangle = b\langle \alpha, \beta \rangle$$

מכאן, $(a-b)\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. אבל $a \neq b$, לכן $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

למה 3.67: יהי V ממ״פ מעל $\mathbb{C}$ שאינו מרחב האפס. תהי $T : V \to V$ ט״ל. אז ל־T יש ו״ע אחד לפחות.

הוכחה. הפולינום האופייני של T הוא ממעלה 1 לפחות, לכן יש לו שורש אחד לפחות (כי $\mathbb{C}$ סגור אלגברית). שורש כזה הוא ע״ע של T. יש ע״ע, לכן יש ו״ע.

יהיו $a_1, \ldots, a_k$ כל הע״ע של T. לכל $1 \leq l \leq k$, יהי V_l המרחב העצמי של a_l. לכל V_l נמצא בסיס א״נ $(\varepsilon_1^l, \ldots, \varepsilon_{n_l}^l)$. יהי $U = \operatorname{span} \bigcup_{l=1}^k \{\varepsilon_1^l, \ldots, \varepsilon_{n_l}^l\}$.

למה 4.67: $\bigcup_{l=1}^k \{\varepsilon_1^l, \ldots, \varepsilon_{n_l}^l\}$ הוא בסיס א״נ של U.

הוכחה. קודם כל, איחוד זה פורש את U. שנית, האיחוד הוא מערכת א״נ: האורך של כל וקטור באיחוד הוא 1, כי הוא שייך לבסיס א״נ כלשהו; ואם $i \neq j$, $\langle \varepsilon_i^l, \varepsilon_j^l \rangle = 0$, כי שניהם באותו בסיס א״נ של V_l, ואם $l_1 \neq l_2$ אז $\varepsilon_i^{l_1}$ ו־$\varepsilon_j^{l_2}$ נמצאים ב־V_{l_1} וב־V_{l_2}, בהאמה, ולכן הם ו״ע השייכים לע״ע השונים זה מזה, ולכן ניצבים זה לזה. מכיוון שזוהי מערכת א״נ, היא בת״ל; לכן האיחוד הוא בסיס אורתונורמלי של U, שכל איברים ו״ע של T.

אנו יודעים כי $U \subseteq V$. אם נוכיח $U = V$, קיבלנו את המבוקש. די להוכיח ש־$U^\perp = \{0\}$.

למה 5.67: $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$

הוכחה. יהי $\beta \in U^\perp$, ונוכיח ש־$T\beta \in U^\perp$. כלומר, יש להראות ש־$T\beta$ ניצב לכל וקטור ב־U. די להוכיח ש־$T\beta$ ניצב לכל ε_i^l: $\langle \varepsilon_i^l, T\beta \rangle = \langle T^*\varepsilon_i^l, \beta \rangle = \overline{a_l}\langle \varepsilon_i^l, \beta \rangle$. אבל $\beta \in U^\perp$ ו־$\varepsilon_i^l \in U$, לכן $\langle \varepsilon_i^l, \beta \rangle = 0$, ו־$\langle \varepsilon_i^l, T\beta \rangle = 0$. לכן $T\beta \in U^\perp$ ו־$T(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

רצינו להוכיח $U^\perp = \{0\}$. נניח בשלילה ש־$U^\perp \neq \{0\}$ ונסתכל בצמצום של T ל־$U^\perp$: $T' = T\,|_{U^\perp}$ היא ט״ל נורמלית על $U^\perp$. מלמה קודמת, יש ל־T' ו״ע ב־$U^\perp$. נסמנו ב־β. $\beta \in U^\perp$ והוא ו״ע של T – בסתירה: כל הו״ע של T נמצאים ב־U, לכן $\beta \in U \cap U^\perp = \{0\}$. אבל β ו״ע ולכן $\beta \neq 0$.

משפט 68: יהי V ממ״פ מעל F, ותהי $T : V \to V$ ט״ל נורמלית. אז –

א. T צמודה לעצמה אס״ם כל שורשי הפולינום האופייני הנמצאים ב־$\mathbb{C}$ הם ממשיים;

ב. T אוניטרית אס״ם כל שורשי הפולינום האופייני הנמצאים ב־$\mathbb{C}$ הם בעלי ערך מוחלט 1.

הוכחה. תהי A מטריצה אלכסונית המייצגת את T בבסיס א״נ מסויים (קיים כזה, לפי המשפט הקודם). אז

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

כאשר $a_1, \dots, a_n$ הם שורשי הפולינום האופייני.

(א) T צמודה לעצמה אס"ם $A = A^*$. כלומר, T צמודה לעצמה אם לכל $1 \le i \le n$ $\overline{a_i} = a_i$ – כלומר, a_i ממשי.

(ב) T אוניטרית אס"ם $AA^* = I$, כלומר אס"ם

$$\begin{pmatrix} a_1\overline{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n\overline{a_n} \end{pmatrix} = I$$

כלומר, $a_i\overline{a_i} = |a_i|^2 = 1$, כלומר $|a_i| = 1$.

25.6.2007 **טענה 69:** נניח ש־T ט"ל צמודה לעצמה ו־U אוניטרית; נניח גם $TU = UT$. אז TU נורמלית.

הוכחה. מצד אחד, נקבל $(TU)(TU)^* = TUU^*T^* = T(I)T^* = TT^* = T^2$. מצד שני, נקבל $(TU)^*(TU) = (UT)^*(UT) = T^*U^*UT = T^*T = T^2$.

טענה 70: אם S נורמלית, יש טרנספורמציה צמודה לעצמה T וטרנספורמציה אוניטרית U כך ש־$S = TU = UT$.

4 פונקציונלים לינאריים

פונקציונל לינארי

הגדרה. אם V מרחב מעל F, **פונקציונל לינארי** על V הוא ט"ל מ־V ל־F.

דוגמה. פונקציונל האפס הוא הפונקציונל φ שלכל α מקיים $\varphi(\alpha) = 0$.

ב־F^n, הטלה על הקואורדינטה ה־k היא פונקציונל לינארי.

ב־F^n, הפונקציונל $\varphi : V \to F$ המוגדר על־ידי $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ (עבור $a_1, \ldots, a_n \in F$) הוא פונקציונל לינארי.

ב־$F[x]$, מרחב הפולינומים מעל F, ההצבה של $a \in F$ בפולינומים היא פונקציונל לינארי: כלומר, הפונקציונל $\varphi : F[x] \to F$ שלכל פולינום p מקיים $\varphi(p) = p(a)$.

יהי V ממ"פ, $\beta \in V$. אז $\varphi(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$ הוא פונקציונל לינארי.

$\psi(\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle$ הוא פונקציונל לינארי מעל $\mathbb{R}$, בגלל הסימטריות; אך מעל $\mathbb{C}$, זה נכון רק אם $\beta = 0$, בגלל ההרמיטיות ($\psi(z\alpha) = \langle \beta, z\alpha \rangle = \overline{z}\langle \beta, \alpha \rangle$).

טענה 71: א. אם φ פונקציונל לינארי, אז $\varphi(0) = 0$.

ב. φ פונקציונל לינארי אס"ם הוא שומר על צירופים לינאריים. כלומר, φ פונקציונל לינארי אס"ם $\varphi(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_1\varphi(\alpha_1) + \ldots + a_n\varphi(\alpha_n)$.

משפט 72: יהי V מ"ו ממימד n מעל F, ויהי $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ בסיס של V. אז לכל בחירה של סקאלארים $a_1, \ldots, a_n$ מתוך F קיים פונקציונל לינארי יחיד φ כך שלכל $1 \leq k \leq n$ $\varphi(\alpha_k) = a_k$.

הוכחה. זה מקרה פרטי של המשפט המקביל לטרנספורמציות לינאריות.

מסקנה 73: אם $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בסיס של V, φ פונקציונל לינארי המקיים לכל k $\varphi(\alpha_k) = 0$, אז $\varphi \equiv 0$.

מסקנה 74: לכל וקטור $\alpha \neq 0$ ב־V קיים פונקציונל לינארי φ כך ש־$\varphi(\alpha) \neq 0$.

הוכחה. נשנה את שמו של α ל־α_1 ונשלים לבסיס $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. לפי המשפט, יש פונקציונל לינארי כך שלכל k $\varphi(\alpha_k) = 1$; אז ברור ש־$\varphi(\alpha_1) \neq 0$, כלומר $\varphi(\alpha) \neq 0$.

מסקנה 75: יהי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בסיס של V. כל פונקציונל לינארי על V ניתן להצגה יחידה כ־$\varphi(\alpha) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, כאשר $a_1, \ldots, a_n$ סקאלארים קבועים ו־$x_1, \ldots, x_n$ הן הקואורדינטות של α לפי הבסיס.[20]

הוכחה. יהי φ פונקציונל לינארי. נסמן $a_i = \varphi(\alpha_i)$. יהי $\alpha \in V$. אז $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$, ואז $\varphi(\alpha) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. היחידות ברורה.

[20] כלומר, לכל פונקציונל φ יש $a_1, \ldots, a_n \in F$ הנקבעים באופן יחיד כך שלכל $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ מתקיים $\varphi(\alpha) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

4.1 המרחב הדואלי

הגדרה. מרחב הפונקציונלים הלינאריים מעל V ($\hom(V,F)$) נקרא **המרחב הדואלי** ל־V, וסימונו V^*. מרחב דואלי

אם V הוא n־מימדי, אז גם המימד של V^* הוא n: $\dim\hom(V,F)=\dim V\cdot\dim F$. לכן V איזומורפי ל־V^*.

יהי $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ בסיס של V; נבנה בסיס של V^* שייקרא **הבסיס הדואלי** ל־$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$: בסיס דואלי
ממשפט קודם, לכל $1\le i\le n$ קיים פונקציונל לינארי יחיד α_i^* המקיים לכל $1\le j\le n$ $\alpha_i^*(\alpha_j)=\delta_{ij}$.

טענה 76: $(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ בסיס של V^*.

הוכחה. נוכיח שזה בסיס. קודם כל, נוכיח אי־תלות. נניח ש־$a_1\alpha_1^*+\ldots+a_n\alpha_n^*=0$. נציב α_1 ונקבל $(a_1\alpha_1^*+\ldots+a_n\alpha_n^*)(\alpha_1)=0$. לכן $a_1\alpha_1^*(\alpha_1)+\ldots+a_n\alpha_n^*(\alpha_1)=0$. כל המחוברים הם 0 פרט לראשון, לכן מקבלים $a_1=0$. באופן דומה מראים ש־$a_2=\ldots=a_n=0$. לכן $\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*$ בת״ל. קיבלנו n וקטורים בת״ל ב־V^*, שהוא n־מימדי; לכן זה בסיס.

27.6.2007 V מ״ו מעל F, V^* מרחב הפונקציונלים הלינאריים על V. אם V ממימד סופי, $\dim V^*=\dim V$.

נניח $\dim V=n$. יהי $B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ בסיס של V. דיברנו על $B^*=(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$, הבסיס הדואלי של V^* ($\alpha_i^*(\alpha_j)=\delta_{ij}$).

מסקנה 77: יהי $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ בסיס של V ו־$(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*)$ בסיס של V^* שהוא הבסיס הדואלי. יהי $\alpha\in V$ ויהי $\alpha^*\in V^*$. אם $\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$, $\alpha^*=a_1\alpha_1^*+\ldots+a_n\alpha_n^*$, אזי $\alpha^*(\alpha)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$.

הוכחה. $\alpha^*(\alpha)=(a_1\alpha_1^*+\ldots+a_n\alpha_n^*)(x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, מכיוון ש־$\alpha_i^*(\alpha_j)=\delta_{ij}$.

לעתים כותבים $\langle\varphi,\alpha\rangle$ במקום $\varphi(\alpha)$.

אם V מרחב סופי, V^* הוא המרחב הדואלי ל־V, ו־V^{**} יהיה המרחב הדואלי של V^*. נגדים איבר של V^{**} – כלומר, פונקציונל לינארי מ־V^* ל־F: יהי $\alpha\in V$. נגדיר פונקציונל לינארי $\overline{\alpha}$ כך שלכל $\varphi\in V^*$ $\langle\overline{\alpha},\varphi\rangle=\langle\varphi,\alpha\rangle$.

מדוע זה פונקציונל לינארי? נבדוק עבור חיבור (עבור כפל בסקאלאר הבדיקה דומה): כנדרש, נקבל $\langle\overline{\alpha},\varphi_1+\varphi_2\rangle=\langle\varphi_1+\varphi_2,\alpha\rangle=\langle\varphi_1,\alpha\rangle+\langle\varphi_2,\alpha\rangle=\langle\overline{\alpha},\varphi_1\rangle+\langle\overline{\alpha},\varphi_2\rangle$.

משפט 78: אם V בעל מימד סופי (ואז $\dim V=\dim V^*=\dim V^{**}$), לכל $\psi\in V^*$ קיים $\alpha\in V$ כך ש־$\psi=\overline{\alpha}$ (כפי שהגודר בדוגמה קודם).

הוכחה. יהי $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ בסיס של V. נסתכל בווקטורים $\overline{\alpha_1},\ldots,\overline{\alpha_n}$ ב־V^{**}. ראשית, אם $a_1,\ldots,a_n\in F$, אז $\overline{a_1\alpha_1+\ldots+a_n\alpha_n}=a_1\overline{\alpha_1}+\ldots+a_n\overline{\alpha_n}$. (הוכחה כתרגיל.)

שנית, אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בת״ל, גם $\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}$ בת״ל. (הוכחה כעוד תרגיל.)

קיבלנו ש־$\operatorname{span}\{\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}\}$ הוא תת־מרחב של V^{**} שכל איבריו הם מהצורה $\overline{\alpha}$. המימד של תת־מרחב זה הוא n, כשל V^{**}, לכן תת־מרחב זה הוא V^{**} כולו. כלומר, כל וקטור ב־V^{**} הוא מהצורה $\overline{\alpha}$ עבור $\alpha \in V$.

ההעתקה $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ מ־V ל־V^{**} היא בבירור איזומורפיזם – האיזומורפיזם הטבעי מ־V ל־V^{**}. מתכונה זו, אפשר לזהות את α עם $\overline{\alpha}$ ואת V עם V^{**}, ולרשום $\langle \alpha, \varphi \rangle$ במקום $\langle \varphi, \overline{\alpha} \rangle$. כמובן, $\langle \alpha, \varphi \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle$.

4.2 מאפסים

יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל F. אם $\alpha \in V$, $\varphi \in V^*$, נאמר ש־φ מאפס את α אם $\langle \varphi, \alpha \rangle = 0$.

הגדרה. תהי $A \subseteq V$. **המאפס** של A הוא קבוצת הפונקציונלים הלינאריים המאפסים את כל איברי A. כלומר, $A^0 = \{\varphi \in V^* : \forall \alpha \in A \; \varphi(\alpha) = 0\}$. מאפס

דוגמה. יהי V מרחב וקטורי השורה באורך n מעל F. הכפל בווקטור עמודה מסויים y באורך n הוא פונקציונל לינארי $x \cdot (y^t)$, ואלה כל הפונקציונלים הלינאריים על V. תהי $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq V$. A^0 היא קבוצת וקטורי העמודה x הפותרים את מערכת המשוואות $a_1 x^t = 0, \dots, a_k x^t = 0$. כלומר, A^0 הוא מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה.

גם V^* מרחב, ומימדו כשל V. תהי $B \subseteq V^*$. המאפס של B הוא $B^0 = \{\alpha \in V : \forall \varphi \in B \; \langle \alpha, \varphi \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle = 0\}$.

דוגמה. $V^0 = \{0\}$, $\{0\}^0 = V^*$.

טענה 79: אם $A \subseteq B$ אז $B^0 \subseteq A^0$.

הוכחה. אם $\varphi \in B^*$, אז לכל $\alpha \in B$ $\langle \varphi, \alpha \rangle = 0$. לכן ודאי לאל $\alpha \in A$ גם $\langle \varphi, \alpha \rangle = 0$, ולכן $\varphi \in A^0$ ו־$B^0 \subseteq A^0$.

טענה 80: $A^0 = (\operatorname{span} A)^0$.

הוכחה. אם $\varphi \in A^0$, אז לכל $\alpha \in A$ $\langle \varphi, \alpha \rangle = 0$. נראה שלכל $\beta \in \operatorname{span} A$ $\langle \varphi, \beta \rangle = 0$.

$\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$.

$\langle \varphi, \beta \rangle = \langle \varphi, a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \rangle = a_1\langle \varphi, \alpha_1 \rangle + \ldots + a_n \langle \varphi, \alpha_n \rangle = 0$. לכן $\varphi \in (\operatorname{span} A)^0$. כלומר, $A^0 \subseteq (\operatorname{span} A)^0$.

כידוע, $A \subseteq \operatorname{span} A$; אז לפי הטענה הקודמת, $(\operatorname{span} A)^0 \subseteq A^0$, ומכאן מתקבל השוויון.

טענה 81: $A \subseteq A^{00}$.

הוכחה. אם $\alpha \in A$, לכל $\varphi \in A^0$ $\langle \varphi, \alpha \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle = 0$. לכן $\alpha \in A^{00}$, וקיבלנו ש־$A \subseteq A^{00}$.

טענה 82: A^0 תת־מרחב של V^*.

הוכחה. $0 \in A^0$. אם $\varphi_1, \varphi_2 \in A^0$ אז לכל $\alpha \in A$ מתקיים $\langle \varphi_1, \alpha \rangle = 0$ ו־$\langle \varphi_2, \alpha \rangle = 0$. לכן $\langle \varphi_1 + \varphi_2, \alpha \rangle = 0$, ולכן $\varphi_1 + \varphi_2 \in A^0$. באופן דומה מראים עבור כפל בסקאלאר.

משפט 83: אם $\dim V = n$ ו־U תת־מרחב של V, אז $\dim U + \dim U^0 = n$.

הוכחה. נניח ש־$\dim U = r$, ויהי $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ בסיס של U. נשלים אותו לבסיס של V: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$. נסתכל בבסיס הדואלי של V^*, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)$.

למה 1.83: $(\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)$ הוא בסיס של U^0.

הוכחה. ראשית, $(\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)$ בלתי־תלויים, כי הם חלק מבסיס. נוכיח שהם פורשים את U^0.

2.7.2007 לכל $r + 1 \le k \le n$ ולכל $1 \le i \le r$, $\varphi_k(\alpha_i) = 0$. כל איבר ב־U הוא מהצורה $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_r\alpha_r$, לכן $\varphi_k(\alpha) = a_1\varphi_k(\alpha_1) + \ldots + a_r\varphi_k(\alpha_r) = 0$. לכן $\operatorname{span}\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\} \subseteq U^0$.

בכיוון ההפוך, יהי $\varphi \in U^0$. אז $\varphi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$. נבחר α_i, $1 \le i \le r$. אז $\langle \varphi, \alpha_i \rangle = 0$ (כי $\varphi \in U^0$ ו־$\alpha \in U$), ומצד שני $\langle \varphi, \alpha_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \varphi_j, \alpha_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ji} = a_i$. לכן לכל $1 \le i \le r$ $a_i = 0$. אז $\varphi = a_{r+1}\varphi_{r+1} + \ldots + a_n\varphi_n$, ולכן $\varphi \in \operatorname{span}\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$.

קיבלנו שוויון, כנדרש. לכן $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ קבוצה בלתי־תלויה שפורשת את U^0, לכן היא בסיס של U^0.

ברור ש־$\dim U^0 = n - r$, כנדרש.

מסקנה 84: אם U תת־מרחב, אז $U = U^{00}$.

הוכחה. אנחנו יודעים ש־$U \subseteq U^{00}$. אם $\dim U = r$, אז $\dim U^0 = n - r$. לפי אותו משפט, $\dim U^{00} = n - \dim U^0 = n - (n - r) = r$. אז U תת־מרחב של U^0 ושווה לו במימד, ולכן $U = U^{00}$.

מסקנה 85: אם $A \subseteq V$, $A^{00} = \operatorname{span} A$.

הוכחה. למדנו ש־$A^0 = (\operatorname{span} A)^0$, לכן $A^{00} = (\operatorname{span} A)^{00} = \operatorname{span} A$.

מסקנה 86: אם U_1 ו־U_2 תתי־מרחבים שונים, אז U_1^0, U_2^0 שונים.

הוכחה. אם $U_1^0 = U_2^0$ אז $U_1^{00} = U_2^{00}$, כלומר $U_1 = U_2$.

משפט 87: (1) $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$; (2) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.

הוכחה. $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$, $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$. לכן $U_1^0, U_2^0 \subseteq (U_1 \cap U_2)^0$. אגף ימין הוא תת־מרחב, לכן $U_1^0 + U_2^0 \subseteq (U_1 \cap U_2)^0$.

$U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, לכן $(U_1 + U_2)^0 \subseteq U_1^0 \cap U_2^0$ ולכן $(U_1^0 \cap U_2^0)^0 \subseteq U_1 + U_2$. נציב את המאפסים ונקבל $(U_1 \cap U_2)^0 \subseteq U_1^0 + U_2^0$. קיבלנו הכלה הדדית, ולכן שוויון. זו הטענה (1).

מכאן, נכון גם $(U_1^0 \cap U_2^0)^0 = U_1^{00} + U_2^{00}$, לכן $(U_1^0 \cap U_2^0)^0 = U_1 + U_2$. ניקח מאפס משני האגפים ונקבל $U_1^0 \cap U_2^0 = (U_1 + U_2)^0$. זו הטענה (2).