חשבון אינפיניטסימלי 2

יובל קפלן

סיכום הרצאות פרופ׳ רות לורנס־נאימרק בקורס ״חשבון אינפיניטסימלי 2״ (80132) באוניברסיטה העברית, 7–2006.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראית לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX 2_\varepsilon$ ב־24 ביולי 2007.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־http://www.limsoup.net/. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

2006–7	חשבון אינפיניטסימלי 1	אלגברה לינארית 1
	חשבון אינפיניטסימלי 2	אלגברה לינארית 2
	תורת הקבוצות	
2007–8	מבנים אלגבריים 1	תורת ההסתברות 1

תוכן עניינים

1 כלל לופיטל

1.1 כלל לופיטל

25.2.2007 ידוע שאם f, g רציפות ו־$g(a)\neq 0$, מתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$.

מה קורה כאשר $f(a)=0$ ו־$g(a)=0$? אנו יודעים כי בסביבה של a ניתן לקרב את ערך הפונקציות כ־$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+o(h)$ ו־$g(a+h)=g(a)+hg'(a)+o(h)$.
מכיוון ש־$f(a)=g(a)=0$, נקבל $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a)+o(h)}{g'(a)+o(h)}$.

דוגמה. • $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{2}{9}$

על־פי הכלל: $f(x)=x^2-9$, $g(x)=x^3-27 \Longleftarrow f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2$; $\lim_{x\to 3}\frac{2x}{3x^2}=\frac{2}{9}$.

• $\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2\sin x)$. לפי לופיטל, נקבל שזה שווה ל־$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x}{1+2\sin x}}{1}=2$.

• $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $a=0$. כאן $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$, אך $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

משפט 1 (לופיטל ($\frac{0}{0}$)): תהיינה f, g גזירות בסביבה מנוקבת של a כך ש־$g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$ ו־$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$. אם $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (אולי לא אמיתי), אזי גם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים, ומתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

הוכחה. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=M$. אז לכל סביבה B של M קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-a|<\delta$ אז $\frac{f'(x)}{g'(x)}\in B$.[1] יהי $h<\delta$. f ו־g גזירות על $[a-h,a+h]\setminus\{a\}$ ו־$g'(x)\neq 0$; על־פי משפט הערך הממוצע של קושי[2], קיימים $c\in(a,a+h)$ כך ש־$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}$ ו־$d\in(a-h,a)$ כך ש־$\frac{f'(d)}{g'(d)}=\frac{f(a-h)-f(a)}{g(a-h)-g(a)}$. אז $B\ni\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}$ ו־$B\ni\frac{f'(d)}{g'(d)}=\frac{f(a-h)-f(a)}{g(a-h)-g(a)}$. לכן $\frac{f(a+h)}{g(a+h)}\in B$ ו־$\frac{f(a-h)}{g(a-h)}\in B$, ומהגדרת הגבול, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=M$. □

מסקנה 2: אם f, g גזירות n פעמים ב־a, $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1))}(a)=0$, $g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1))}(a)=0$, $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ רציפות $\Longleftarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

כלל לופיטל מתקיים גם עבור גבולות חד־צדדיים ב־a וכאשר $a=\pm\infty$. למשל, אם $a=\infty$, נגדיר $h(x)=f(\frac{1}{x})$, $k(h)=g(\frac{1}{x})$. h ו־k גזירות בסביבת 0^+, $k'(x)=-\frac{1}{x^2}g'(\frac{1}{x})\neq 0$ לכל x, $\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}k(x)=0$, $\frac{h'(x)}{k'(x)}=\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}$. $\lim_{x\to 0^+}\frac{h'(x)}{k'(x)}$ קיים $\Longleftarrow$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)}{k(x)}$ קיים ושווה לו. לכן $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים, $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.
□

[1] ניתן להוכיח במקרה ש־$a=\pm\infty$ לפי ההגדרות.

[2] אם f ו־g אינן רציפות ב־a, נוכל להתייחס אליהן כאילו היו רציפות: אין התייחסות ל־$f(a)$ או ל־$g(a)$ ממש.

משפט 3 (לופיטל ($\frac{*}{\infty}$)): תהיינה f, g גזירות על $(a,b]$ כך ש־$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$, $g'(x)\neq 0$ לכל $(a,b]$. אם $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (אולי לא אמיתי), אזי גם $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים, ומתקיים $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

27.2.2007

הוכחה. ראשית, נניח ש־$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\in\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty \Longleftarrow \exists h>0\ \forall x\in(a,a+h]\ g(x)>0$. כעת, נבחר $\varepsilon>0$. $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K \Longleftarrow \exists x_0\in(a,a+h)\ \forall x\in(a,x_0)\ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. בנוסף, $\exists\delta\in(0,x_0-a)\ \forall x\in(a,a+\delta)\ g(x)>\max(g(x_0),\frac{2}{\varepsilon}\left|f(x_0)-Kg(x_0)\right|)$. מספיק להוכיח ש־$\left|\frac{f}{g}-K\right|<\varepsilon$ על הקטע $(a,a+\delta)$. יהי $x\in(a,a+\delta)$. נקבל

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right| &= \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-K\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}-K\cdot\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\\
&\leq^{3} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right|\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}-K\cdot\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|+\frac{|f(x_0)-Kg(x_0)|}{g(x)}\\
&<^{4} \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

כעת נניח ש־$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$.

$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty \Longleftarrow \exists h>0\ \forall x\in(a,a+h]\ g(x)>0$

נבחר $M>0$. $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \Longleftarrow \exists x_0\in(a,a+h)\ \forall x\in(a,x_0)\ \frac{f'(x)}{g'(x)}>2M$
$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty \Longleftarrow \exists\delta\in(0,x_0-a)\ \forall x\in(a,a+\delta)\ g(x)>\max(3g(x_0),\frac{3|f(x_0)|}{M})$
מספיק להוכיח ש־$\frac{f}{g}>M$ על הקטע $[a,a+\delta)$. נניח ש־$x\in(a,a+\delta)$. קיים $c\in(x,x_0)$ כך ש־

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}\\
&= \frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}\\
&> 2M\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{M}{3}=M
\end{aligned}$$

דוגמה.
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x}\neq\frac{1}{1}$ (אי־אפשר $\frac{*}{0}$)
- $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} -x=0$

2 טורי טיילור

2.1 פולינום טיילור

נוסחת מקלורן לפולינומים

יהי p הפולינום $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. אז $p(0)=a_0$. נגזור את הפולינום ונקבל $p'(x)=a_1+a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$, ו־$p'(0)=a_1$. נמשיך כך ונקבל, לאחר r גזירות, $p^{(r)}(0)=\frac{d^r}{dx^r}(a_rx^r)\mid_{x=0}=r!a_r$. כלומר, $a_r=\frac{p^{(r)}(0)}{r!}$, ונוכל לכתוב את הפולינום כ־

$$p(x)=\sum_{r=0}^{n}a_rx^r=\sum_{r=0}^{n}\frac{p^{(r)}(0)}{r!}x^r$$

קיים פולינום יחיד ממעלה n עם ערכי הפונקציה ונגזרותיה ב־$x=0$ עד n פעמים.

נוסחת טיילור לפולינומים

יהי p פולינום ממעלה n, ויהי x_0. נגדיר q על־ידי $q(x)=p(x+x_0)$. אז $q(0)=p(x_0)$, $q'(0)=p'(x_0)$ וכו'. אז כמו קודם, $q(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{q^{(r)}(0)}{r!}x^r$. נקבל

$$p(x)=q(x-x_0)=\sum_{r=0}^{n}\frac{q^{(r)}(0)}{r!}(x-x_0)^r=\sum_{r=0}^{n}\frac{p^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r$$

פולינום טיילור

הגדרה. **פולינום טיילור** ממעלה m של פונקציה f בסביבת x_0 הוא הפולינום

$$p_m^f(x)=\sum_{r=0}^{m}\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r$$

אם f פולינום ממעלה n, $p_n^f(x)=f(x)$.

דוגמה.

	$x_0=0$	$x_1=1$
$f(x)=x^3+x^2+4$	$f(0)=4$	$f(1)=6$
$f'(x)=3x^2+2x$	$f'(0)=0$	$f'(1)=5$
$f''(x)=6x+2$	$f''(0)=2$	$f''(1)=8$
$f'''(x)=6$	$f'''(6)=0$	$f'''(1)=6$

על־פי $x_0=0$, קיבלנו $p_0(x)=4+0\cdot x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{6}{3!}x^3$; על־פי $x_1=1$, קיבלנו $p_1(x)=6+5(x-1)+\frac{8}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3$. ניתן לראות שמתקיים $p_1\equiv p_2\equiv f$.

2.2 השארית

שארית

1.3.2007 **הגדרה.** **השארית** של פולינום טיילור היא $R_n(x)=f-p_n^f$ (כלומר, מתקיים – לפי הגדרה – $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+R_n(x)$).

טענה 4: $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

הוכחה. נסמן $g(x) = R_n(x)$, $h(x) = (x-x_0)^n$.
f גזירה n פעמים, לכן R_n גזירה n פעמים ב־x_0. לכל $0 \le r \le n$, מתקיים $R_n^{(r)}(x_0) = 0$, לכן $g(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$. בנוסף, $h(x_0) = \ldots = h^{(n-1)}(x_0) = 0$, $h^{(n)}(x_0) = n!$.
לפי כלל לופיטל, נקבל $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{n!} = 0$.

כלומר, $f(x) = p_n^f(x) + o((x-x_0)^n) = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + o(x-x_0)^n)$.[5]

מסקנה 5: קיים פולינום p_n^f יחיד ממעלה n כך ש־$f(x) = p_n^f(x) + o((x-x_0)^n)$.

הוכחה. יהי p פולינום ממעלה n המקיים את התנאי. נקבל $p(x) - p_n^f(x) = o((x-x_0)^n)$.
אבל $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = o(x^n) \Longleftarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ (הוכחה כתרגיל), ולכן $p \equiv p_n^f$.

דוגמה. $f(x) = x^3 + x^2 + 4$, $x_0 = 1$. נחשב את השארית: 6.3.2007
$R_2(x) = f(x) - p_2^f(x) = (x^3+x^2+1) - (4x^2-3x+5) = (x-1)^3 = o((x-1)^2)$

דוגמה. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(x_0) = 1$. אז $p_n^f(x) = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!}x^r$.
נרצה לדעת, למשל, מה גודל השארית ($o(x^n)$); מתי $R_n(0.1) < 10^{-4}$; האם $R_n(x) \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

משפט 6 (צורות השארית): תהי f מוגדרת על $[x_0, x_0+H]$ כך ש־$f', \ldots, f^{(n)}$ רציפות שם ו־$f^{(n+1)}$ קיימת על (x_0, x_0+H). בנוסף, יהי $x \in (x_0, x_0+H)$ ו־ψ פונקציה רציפה על $[x_0, x]$ וגזירה על (x_0, x) כך ש־$\psi'(x) \neq 0$ על (x_0, x). אזי קיים $c \in (x_0, x)$ כך שמתקיים $R_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

הוכחה. נגדיר φ על־ידי $\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$;
כמובן, $\varphi(x_0) = R_n(x)$ ו־$\varphi(x) = 0$.

φ גזירה ב־(x_0, x) ורציפה ב־$[x_0, x]$: אז ממשפט הערך הממוצע של קושי, קיים $c \in (x_0, x)$ כך ש־$-\frac{R_n(x)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$. נחשב את $\varphi'(c)$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(z) = 0 - f'(z) &- (f'(z)(-1) + f''(z)(x-z)) - \\
&- (\frac{f''(z)}{2!}(-2)(x-z) + \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2) - \ldots - \\
&- (\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(-n)(x-z)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n) = \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n
\end{aligned}$$

וקיבלנו, כנדרש, $R_n(x) = -\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}(\psi(x)-\psi(x_0)) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

צורת לגראנז' **מסקנה 7 (צורת לגראנז'):** נגדיר $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$. נקבל $\psi'(z) = -(n+1)(x-z)^n \neq 0$ לכל $z \neq x$. אז קיים $c \in (x_0, x)$ כך ש־$R_n(x) = \frac{0-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$ – כלומר, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

[5] הסימון $f(x) = o(x)$ משמעו, כזכור, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

מסקנה 8 (צורת קושי): נגדיר $\psi(z)=(x-z)$. נקבל $\psi'(z)=-1$. אז קיים $c\in(x_0,x)$ כך ש-$R_n(x)=\frac{0-(x-x_0)}{-1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$ - כלומר, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n$. צורת קושי
לעתים יותר נוח להגדיר $c=x_0+\theta(x-x_0)$ עבור $0<\theta<1$, ולטעון שיש $\theta\in(0,1)$ כך ש-$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$.[6]

מסקנה 9 (צורת האינטגרל): בהוכחת המשפט, הגדרנו פונקציה $\varphi(z)$ כך ש-$\varphi(x_0)=R_n(x)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$. מהמשפט היסודי, $\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^x\varphi'(z)dz$ - כלומר, $R_n(x)=\int_{x_0}^x\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^ndz$. צורת האינטגרל

דוגמה. אם $n=0$, יש $c\in(x_0,x)$ כך ש-$R_0(x)=\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)$, לפי צורת לגראנז'. נשים לב ש-$R_0(x)=f(x)-f(x_0)$: כלומר, קיבלנו צורה אחרת למשפט הערך הממוצע של לגראנז'.

2.3 שימושים לטורי טיילור

2.3.1 הפונקציה $f(x)=e^x$ בסביבת $x_0=0$

$p_n^f(x)=\sum_{r=0}^n\frac{x^n}{r!}$, וקיים $c\in(0,x)$ כך ש-$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (צורת לגראנז').
עבור $x>0$, $|R_n(x)|<\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ (כי $1<e^c<e^x$ ו-$\frac{a^n}{n!}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$[7]).
עבור $x<0$, $|R_n(x)|<\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
לכן, לכל x, $e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$.

מסקנה 10: $e\notin\mathbb{Q}$

הוכחה. עבור $x=1$, נקבל $e=1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$ לכל n, כאשר עבור $c\in(0,1)$ מתקיים $\frac{1}{(n+1)!}<R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}$.
נניח ש-$e=\frac{m}{n}$ עבור $n,m\in\mathbb{N}$. אז $\mathbb{N}\ni\frac{m}{n}\cdot n!=(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!})n!+R_n(1)\cdot n!$.
קיבלנו סתירה, כי $(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!})n!\in\mathbb{N}$ אך $R_n(1)\cdot n!\in(\frac{1}{n+1},\frac{e}{n+1})$, ועבור $n\leq 3$ זה גורר בהכרח $R_n(1)\cdot n!\notin\mathbb{N}$. (צריך לבדוק גם מה קורה ב-$n=1,2$.)

דוגמה. עבור איזה n נוכל לחשב את $e^{0.1}$ כך ש-$|R_n(0.1)|<\frac{1}{2}\times10^{-4}$? קיים $0<c<0.1$ כך ש-$R_n(0.1)=\frac{e^c}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}<\frac{e^{0.1}}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}$. $n=2$ לא מספיק, כי נקבל $R_2(0.1)<\frac{e^{0.1}}{6}(0.1)^3\not<\frac{1}{2}\times10^{-4}$. עבור $n=3$, $R_3(0.1)<\frac{e^{0.1}}{4!}(0.1)^4<\frac{1}{2}\cdot10^{-4}$, כנדרש. נקבל $e^{0.1}\cong1+0.1+\frac{(0.1)^2}{2}+\frac{(0.1)^3}{6}=1+0.1+0.005+0.0001\bar{6}\cong1.1052$ (בדיוק של ארבע ספרות לאחר הנקודה).

[6] $x-c=(x-x_0)-\theta(x-x_0)=(1-\theta)(x-x_0)$.
[7] מכיוון ש-$\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!}=\frac{a}{n+1}\to0$ (למעשה, מספיק שהיחס ישאף למספר שערכו המוחלט קטן מ-1).

2.3.2 הפונקציה $f(x)=\cos x$ בסביבת $x_0=0$

$f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$ וכו' - אז $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0)=0$ ו־$p_n^f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r=\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^s}{(2s)!}x^{2s}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$.
קיים $c\in(0,x)$ כך ש־$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$. מכיוון ש־$|f^{(n+1)}(c)|\le 1$, מתקיים $|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, ולכן הטור מתכנס לפונקציה – $\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

2.3.3 דוגמאות נוספות

תהי $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. $f^{(n)}(0)=0$, אז $p_n^f(x)\equiv 0$. אבל עבור $x\neq 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}p_n^f(x)=0\neq f(x)$ – ואכן $R_n(x)=f(x)=o(x^n)$.

דוגמה נוספת: $f(x)=\frac{1}{1-x}$. הנגזרות הן $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, ..., $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. נקבל $f^{(n)}(0)=n!$, לכן $p_n^f(x)=1+x+\dots+x^n$ (בסביבת $x_0=0$). נבדוק שעבור $|x|<1$ $\sum_{r=0}^{\infty}x^r=\frac{1}{1-x}$.

לפי לגראנז': עבור $0<c<x$,

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\frac{(n+1)!}{(1-c)^{n+2}}}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}<\frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

אם $\frac{x}{1-x}<1$ ($0<x<\frac{1}{2}$). אבל צורת לגראנז' לא עוזרת לנו עבור $\frac{1}{2}\le x<1$.
נשתמש בצורת קושי. $\exists\theta\in(0,1):R_n(x)=\frac{(n+1)}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}(1-\theta)^n$. אז (מכיוון ש־$1-\theta<1-\theta x$) נקבל $|R_n(x)|\le\frac{n+1}{(1-x)^2}x^{n+1}\to 0$ אם $|x|\neq 1$, ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=f(x)$ לכל $|x|<1$.

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, עבור $-1<x\le 1$ (את ההתכנסות ב־$x=1$ מקבלים לפי לגראנז'). [8] 8.3.2007

[8] התכנסות הטור אינה גוררת התכנסותו לערך הפונקציה – ההתכנסות לפונקציה נובעת מבדיקת השארית.

3 אינטגרלים ואינטגרציה

3.1 האינטגרל המסויים

11.3.2007 נגדיר $\mathcal{B}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \exists m, M\ \forall x \in [a,b]\ m \le f(x) \le M\}$ – קבוצת הפונקציות החסומות על $[a,b]$. לכל $f \in \mathcal{B}$ קיימים $\inf_{[a,b]} f$, $\sup_{[a,b]} f$.

הגדרה. **חלוקה** של $[a,b]$ היא קבוצת נקודות $T = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. חלוקה

3.1.1 סכומי רימן

בהינתן חלוקה T של $[a,b]$, $f \in \mathcal{B}[a,b]$, נגדיר $\underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1},x_i)} f$ – **סכום תחתון** של f על־ידי T, ו־$\bar{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1},x_i)} f$ – **סכום עליון**.

הגדרה. $\underline{\int}_a^b f \equiv \sup_T \underline{S}_T(f)$ – **האינטגרל התחתון** של f. אינטגרל תחתון, לפי רימן

הגדרה. $\bar{\int}_a^b f \equiv \inf_T \bar{S}_T(f)$ – **האינטגרל העליון** של f. אינטגרל עליון, לפי רימן

הגדרה. f נקראת **אינטגרבילית** (לפי רימן) אם $\bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$. פונקציה אינטגרבילית

הגדרה. תהיינה T, U שתי חלוקות של $[a,b]$. U היא **עדינה** מ־T אם $T \subseteq U$ (כקבוצות של נקודות). חלוקה עדינה

דוגמה. בהינן שתי חלוקות U ו־T, $U \cup T$ היא חלוקה עדינה משותפת לשתיהן.

משפט 11: $T \subseteq U \Longleftarrow \bar{S}_U(f) \ge \bar{S}_T(f)$, $\underline{S}_U(f) \le \underline{S}_T(f)$.

הוכחה. T, U חלוקות סופיות, אז מספיק להוכיח אם $U = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, $T = (x_0 < \ldots < x_{i-1} < y < x_i < \ldots < x_n)$.

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1}) \sup_{(x_{i-1},x_i)} f &= [(x_i - y) + (y - x_{i-1})] \sup_{(x_{i-1},x_i)} f \\ &\ge (x_i - y) \sup_{y,x_i)} f + (y - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1},y)} f \end{aligned}$$

לכן $\bar{S}_U(f) \ge \bar{S}_T(f)$. באופן דומה, $\underline{S}_U(f) \le \underline{S}_T(f)$.

במקרה הכללי, $T \subseteq U$ – אפשר לבחור חלוקות־ביניים $U = T_r \subsetneq \ldots \subsetneq T_1 \subsetneq T_0 = T$ כך ש־$|T_{i-1}| - |T_i| = 1$, ומקבלים $\bar{S}_T(f) = \bar{S}_{T_0}(f) \le \ldots \le \bar{S}_{T_r}(f) = \bar{S}_U(f)$.

דוגמה. $f(x) = x$ על $[0,4]$:

עבור $T = (0 < 2 < 4)$, נקבל $\underline{S}_T(f) = (2-0)\cdot 0 + (4-2)\cdot 2 = 4$, $\bar{S}_T(f) = (2-0)\cdot 2 + (4-2)\cdot 4 = 12$.

עבור $U = (0 < 1 < 2 < 3 < 4)$, נקבל $\underline{S}_U(f) = 6$, $\bar{S}_U(f) = 10$.

3.1.2 סכומי דרבו

פונקציית מדרגות

הגדרה. פונקציית מדרגות על קטע $[a,b]$ היא פונקציה f כך שקיימת חלוקה $T=(x_i)_{i=0}^n$ של $[a,b]$ כך ש־$f\mid_{(x_{i-1},x_i)}$ פונקציה קבועה. נסמן ב־$\mathcal{S}[a,b]$ את אוסף פונקציות המדרגות על $[a,b]$.

לכל $f,g\in\mathcal{S}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$, $cf\in\mathcal{S}[a,b]$, $f+g\in\mathcal{S}[a,b]$, $fg\in\mathcal{S}[a,b]$.

לכל חלוקה $T=(a=x_0<\ldots<x_n=b)$, נגדיר $\mathcal{S}_T[a,b]$ – קבוצת כל הפונקציות הקבועות על הקטעים שמגדירה החלוקה. אז לכל $T\subseteq U$ מתקיים $\mathcal{S}_T[a,b]\subseteq\mathcal{S}_U[a,b]$. בנוסף, $\bigcup_T\mathcal{S}_T[a,b]=\mathcal{S}[a,b]$ (איחוד לא־זר).

נגדיר העתקה $I_{[a,b]}:\mathcal{S}[a,b]\to\mathbb{R}$ על־ידי $I_{[a,b]}(f)=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})c_i$, כאשר c_i הוא הערך של f על (x_{i-1},x_i).

$I_{[a,b]}$ מוגדרת היטב (לא תלויה בחלוקה): נניח ש־$f\in\mathcal{S}_U[a,b]\cap\mathcal{S}_T[a,b]$, כאשר T, U חלוקות של $[a,b]$. צריך להוכיח שהסכומים לפי T ולפי U שווים. מספיק להוכיח שמתקבל אותו מספר לפי T ולפי $T\cup U$ (ומסימטריה, הסכום לפי U ולפי $T\cup U$ גם שווה). לכן גם מספיק להוכיח שוויון בין הסכומים מ־T ומ־V כך ש־$V=(x_0<\ldots<x_{i-1}<y<x_i<\ldots<x_n)$. ואכן, מכיוון ש־$f\mid_{(x_{i-1},y)}=f\mid_{(y,x_i)}=f\mid_{(x_{i-1},x_i)}$, הסכומים לפי V ולפי T שווים.

תכונות:

1. $I_{[a,b]}(f+g)=I_{[a,b]}(f)+I_{[a,b]}(g)$, $I_{[a,b]}(c\cdot f)=cI_{[a,b]}(f)$ (לינאריות)
2. $(a<c<b)$ $I_{[a,c]}(f)+I_{[c,b]}(f)=I_{[a,b]}(f)$ (אדיטיביות)
3. $f\geq 0\Longrightarrow I_{[a,b]}(f)\geq 0$ (חיוביות)
4. $f\geq g\in\mathcal{S}[a,b]\Longrightarrow I_{[a,b]}(f)\geq I_{[a,b]}(g)$ (מונוטוניות[9])
5. $f\in\mathcal{S}[a,b]$, $g(x)=f(x-c)\Longrightarrow g\in\mathcal{S}[a+c,b+c]$, $I_{[a+c,b+c]}(g)=I_{[a,b]}(f)$ (הזזה)
6. $f\in\mathcal{S}[a,b]$, $g(x)=f(\frac{x}{c})$ $(c>0)$ $\Longrightarrow g\in\mathcal{S}[ac,bc]$, $I_{[ac,bc]}(g)=I_{[a,b]}(f)$ (מתיחה)
7. $I_{[a,b]}(1)=b-a$

כעת, לכל $f\in\mathcal{B}[a,b]$, נגדיר:

אינטגרל תחתון, לפי דרבו

הגדרה. $\underline{\int}_a^b f=\sup_{f\geq g\in\mathcal{S}[a,b]}I_{[a,b]}(g)$ – **האינטגרל התחתון** של f.

אינטגרל עליון, לפי דרבו

הגדרה. $\overline{\int}_a^b f=\inf_{f\leq g\in\mathcal{S}[a,b]}I_{[a,b]}(g)$ – **האינטגרל העליון** של f.

אלה מוגדרים היטב: $f\in\mathcal{B}[a,b]\Longrightarrow\exists m,M\ \forall x\in[a,b]\ m\leq f(x)\leq M$, ולכן, למשל, $\{g\in\mathcal{S}[a,b]:g\geq f\}$ לא ריקה (הפונקציה הקבועה M נמצאת בה).

[9] תכונה זו נובעת מהחיוביות ומהלינאריות: $f-g\geq 0\Longrightarrow I_{[a,b]}(f-g)=I_{[a,b]}(f)-I_{[a,b]}(g)\geq 0$.

3.1.3 שקילות ההגדרות

משפט 12: $\bar{\int}_a^b f = \inf_T \bar{S}_T(f)$, $\underline{\int}_a^b f = \sup_T \underline{S}_T(f)$

הוכחה. עבור $\bar{\int}$: לפי הגדרה, $\bar{\int}_a^b f = \inf_{f\le g\in\mathcal{S}[a,b]} = \inf_T(\inf_{f\le g\in\mathcal{S}_T[a,b]} I_{[a,b]}(g))$. אבל $\inf_{f\le g\in\mathcal{S}_T[a,b]} I_{[a,b]}(g) = \inf\{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i : f\le g\in\mathcal{S}[a,b], c_i = g\mid_{(x_{i-1},x_i)}\}$ - ומכיוון ש־$f(x)\le c_i$ לכל $x\in(x_{i-1},x_i)$, האינפימום יתקבל עבור $c_i = \sup_{(x_{i-1},x_i)} f$.
כלומר, קיבלנו $\bar{\int}_a^b f = \inf_T \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\sup_{(x_{i-1},x_i)} f = \inf_T \bar{S}_T(f)$, כנדרש.

3.1.4 אינטגרביליות ותכונות האינטגרל

13.3.2007 **טענה 13:** אם $f\in\mathcal{S}[a,b]$, אז $\bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f = I_{[a,b]}(f)$ (כל פונקציית מדרגה אינטגרבילית).

הוכחה. עבור $\underline{\int}$: $\underline{\int}_a^b f = \sup_{f\ge g\in\mathcal{S}[a,b]} I_{[a,b]}(g) \ge I_{[a,b]}(f)$, כי f היא אחת מהפונקציות $\{g\in\mathcal{S}[a,b] : g\le f\}$; מצד שני, לכל פונקציה $g\le f$, $g\in\mathcal{S}[a,b]$, נקבל ממונוטוניות I $I_{[a,b]}(g)\le I_{[a,b]}(f) \Longleftarrow \sup I_{[a,b]}(g)\le I_{[a,b]}(f)$. לכן $\underline{\int}_a^b f = I_{[a,b]}(f)$.

טענה 14: $f\in\mathcal{B}[a,b]$, $a<c<b \Longleftarrow \bar{\int}_a^b f = \bar{\int}_a^c f + \bar{\int}_c^b f$, $\underline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$.

הוכחה. עבור $\underline{\int}$: $g\le f$, $g\in\mathcal{S}[a,b] \Longleftarrow g\mid_{[a,c]} = \mathcal{S}[a,c]$, $g\mid_{[c,b]} = \mathcal{S}[c,b]$. אז מתקיים $I_{[a,c]}(g)\le\underline{\int}_a^c f$, $I_{[c,b]}(g)\le\underline{\int}_c^b f$, ולכן $I_{[a,b]}(g) = I_{[a,c]}(g) + I_{[c,b]}(g)\le\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$.
מכאן, $\underline{\int}_a^b f = \sup_{f\ge g\in\mathcal{S}[a,b]} I_{[a,b]}(g)\le\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$.

מצד שני, יש להראות ש־$\sup_{f\ge g\in\mathcal{S}[a,b]}(g)\ge\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$. נניח ש־$\varepsilon > 0$. מספיק להוכיח שקיימת $g\in\mathcal{S}[a,b]$, $g\le f$ כך ש־$I_{[a,b]}(g)\ge\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f - \varepsilon$.
$\underline{\int}_a^c f = \sup_{f\ge h\in\mathcal{S}[a,c]} I_{[a,c]}(h)$, לכן יש $h\in\mathcal{S}[a,c]$, $h\le f$, כך ש־$I_{[a,c]}(h)\ge\underline{\int}_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}$.
$\underline{\int}_c^b f = \sup_{f\ge k\in\mathcal{S}[c,b]} I_{[c,b]}(k)$, לכן יש $k\in\mathcal{S}[c,b]$, $k\le f$, כך ש־$I_{[c,b]}(k)\ge\underline{\int}_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}$.
נגדיר $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש־$g\mid_{[a,c]}\equiv h$, $g\mid_{[c,b]}\equiv k$. $h\in\mathcal{S}[a,c]$, $k\in\mathcal{S}[c,b]$, $k\le f$, $h\le f$, לכן $g\in\mathcal{S}[a,b]$, $g\le f$. נקבל $I_{[a,b]}(g) = I_{[a,c]}(h) + I_{[c,b]}(k)\ge(\underline{\int}_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}) + (\underline{\int}_c^b f - \frac{\varepsilon}{2})$, כנדרש.

טענה 15: $f,g\in\mathcal{B}[a,b]$, $\bar{\int}_a^b (f+g)\le\bar{\int}_a^b f + \bar{\int}_a^b g$, $\underline{\int}_a^b (f+g)\le\underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g$.

דוגמה ($\neq$ אפשרי). נגדיר $f\mid_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = g\mid_{\mathbb{Q}} = 1$, $f\mid_{\mathbb{Q}} = g\mid_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 0$. אז $f+g = 1$, ולכן $\bar{\int}_a^b (f+g) = b-a$, אבל $\bar{\int}_a^b f = \bar{\int}_a^b g = b-a$. ומצד שני, $\underline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b g = 0$, בעוד ש־$\underline{\int}_a^b (f+g) = b-a$.

הוכחה. עבור $\underline{\int}$: נניח ש־$h,k\in\mathcal{S}[a,b]$, $h\le f$, $k\le g$. אז $h+k\le f+g$ $\mathcal{S}[a,b]\ni$. לכן $\underline{\int}_a^b (f+g)\ge I_{[a,b]}(h+k) = I_{[a,b]}(h) + I_{[a,b]}(k)$, ומכאן, כנדרש,

$$\underline{\int}_a^b (f+g)\ge\sup_{h,k}(I_{[a,b]}(h) + I_{[a,b]}(k)) = \sup_h I_{[a,b]}(h) + \sup_k I_{[a,b]}(k) = \underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g$$

טענה 16: $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\underline{\int}_a^b cf = \begin{cases} c\underline{\int}_a^b f & c \geq 0 \\ c\bar{\int}_a^b f & c < 0 \end{cases}$, $\bar{\int}_a^b cf = \begin{cases} c\bar{\int}_a^b f & c \geq 0 \\ c\underline{\int}_a^b f & c < 0 \end{cases}$.

הוכחה. כתרגיל.

טענה 17: $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $f \geq 0 \Longleftarrow \underline{\int}_a^b f, \bar{\int}_a^b f \geq 0$.

הוכחה. $f \geq 0 \in \mathcal{S}[a,b] \Longleftarrow \underline{\int}_a^b f \geq I_{[a,b]}(0) = 0$.

טענה 18: $f \in \mathcal{B}[a,b]$, $\bar{\int}_a^b f \geq \underline{\int}_a^b f$.

הוכחה. נניח ש-$g, h \in \mathcal{S}[a,b]$, $g \leq f \leq h$. בפרט, $g \leq h \Longleftarrow I_{[a,b]}(g) \leq I_{[a,b]}(h)$, לכן $\underline{\int}_a^b f = \sup_g I_{[a,b]}(g) \leq I_{[a,b]}(h)$, ולכן $\underline{\int}_a^b f \leq \inf_h I_{[a,b]}(h) = \bar{\int}_a^b f$.

משפט 19: נניח ש-$f \in \mathcal{B}[a,b]$. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אס"ם $0 = \inf_T(\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f))$.

הוכחה. ($\Longrightarrow$) נניח ש-$0 = \inf_T(\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f))$, $\varepsilon > 0$. אז $\exists T : \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$. מכאן נקבל $\bar{\int}_a^b f \leq \bar{S}_T(f) < \underline{S}_T(f) + \varepsilon \leq \underline{\int}_a^b f + \varepsilon$. מכך שזה נכון לכל ε, נקבל $\bar{\int}_a^b f \leq \underline{\int}_a^b f$, ולפי הטענה הקודמת, נקבל $\bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f \iff f \in \mathcal{R}[a,b]$.

($\Longleftarrow$) נניח ש-$\underline{\int}_a^b f = \sup \int_a^b f$. נניח ש-$\varepsilon > 0$; צריך להראות $\exists T : \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$. ידוע ש-$\sup_T \underline{S}_T(f) = \inf_U \bar{S}_U(f) \Longleftarrow \inf_{T,U}(\bar{S}_U(f) - \underline{S}_T(f)) = 0$. כלומר, קיימות U, T חלוקות כך ש-$\bar{S}_U(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$. ניקח $W = U \cup T$. אז $\bar{S}_W(f) \leq \bar{S}_U(f)$, $\underline{S}_W(f) \geq \underline{S}_T(f)$, ולכן $\bar{S}_W(f) - \underline{S}_W(f) \leq \bar{S}_U(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$.

משפט 20: $\mathcal{S}[a,b] \subsetneq \mathcal{R}[a,b] \subseteq \mathcal{B}[a,b]$.

הוכחה. ($\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{B}$) דוגמה לפונקציה חסומה שאינה אינטגרבילית: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$:

$\underline{\int}_a^b f = 0$, $\bar{\int}_a^b f = b - a$.

($\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{R}$) דוגמה לפונקציה אינטגרבילית שאינה פונקציית מדרגות: $f(x) = x$. נראה $\inf_T(\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f)) = 0$. מספיק לבנות סדרה T_n של חלוקות כך ש-$\bar{S}_{T_n}(f) - \underline{S}_{T_n}(f) \to 0$. $\underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})x_{i-1}$, $\bar{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})x_i$ – לכן ההפרש הוא $\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2$. נגדיר חלוקה $T_n = (x_i)_{i=0}^n$ כך ש-$x_i = a + ih$, כאשר $h = \frac{b-a}{n}$. נקבל $\bar{S}_{T_n}(f) - \underline{S}_{T_n}(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2 = nh^2 = \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

משפט 21: $\mathcal{C}[a,b] \subseteq \mathcal{R}[a,b]$. ($\mathcal{C}[a,b]$ היא קבוצת הפונקציות הרציפות על $[a,b]$.) 15.3.2007

הוכחה. נניח ש-$f \in \mathcal{C}[a,b]$, $\varepsilon > 0$. f רציפה במ"ש, לכן קיים $\delta > 0$ כך ש-$|s - t| < \delta$ $\Longleftarrow$ $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. נבחר חלוקה T כך שהאורך של כל תת־קטע קטן מ-δ (כלומר, $\max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$). אז נקבל $\sup_{s,t \in (x_{i-1},x_i)}(f(s) - f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. כלומר, $\sup_{(x_{i-1},x_i)} f - \inf_{(x_{i-1},x_i)} f \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. מכאן, נחשב ונקבל $\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) =$

$\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
לכן $\inf_T(\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f))=0$, ו־$f\in\mathcal{R}[a,b]$.

משפט 22: אם f מונוטונית על $[a,b]$, היא אינטגרבילית.

הוכחה. נניח ש־f מונוטונית עולה.
$\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)$, אך ממונוטוניות f נקבל $\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f\le f(x_i)-f(x_{i-1})$.

הגדרה. **פרמטר החלוקה** הוא אורך הקטע הגדול ביותר: $\Delta T=\max(x_i-x_{i-1})$. פרמטר החלוקה

בהינתן $\varepsilon>0$, נבחר T כך ש־$\Delta T<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, ונקבל, כנדרש,

$$\begin{aligned}
\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f) &= \sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)\\
&\le \Delta T\sum_{i=1}^n=(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)\\
&\le \Delta T\sum_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\\
&\le \Delta T(f(b)-f(a))<\varepsilon
\end{aligned}$$

משפט 23: $f,g\in\mathcal{R}[a,b] \Longleftarrow f+g\in\mathcal{R}[a,b]$; $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $\lambda\in\mathbb{R} \Longleftarrow \lambda f\in\mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה. $\underline{\int}_a^b(f+g)\le\underline{\int}_a^b f+\underline{\int}_a^b g=\bar{\int}_a^b f+\bar{\int}_a^b g\ge\bar{\int}_a^b(f+g)$. לכן $\bar{\int}_a^b(f+g)=\underline{\int}_a^b(f+g)$, ו־$f+g\in\mathcal{R}[a,b]$ (וגם $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$).
אם $\lambda\ge0$, $\bar{\int}_a^b\lambda f=\lambda\bar{\int}_a^b f=\lambda\underline{\int}_a^b f=\underline{\int}_a^b\lambda f$.
אם $\lambda\le0$, $\bar{\int}_a^b\lambda f=\lambda\underline{\int}_b^a f=\lambda\bar{\int}_b^a f=\underline{\int}_a^b\lambda f$.
בשני המקרים, $\lambda f\in\mathcal{R}[a,b]$, ו־$\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$.

משפט 24: נניח ש־$f,g\in\mathcal{B}[a,b]$, $f(x)=g(x)$ לכל $x\in[a,b]$ למעט מספר סופי של נקודות.
אז $f\in\mathcal{R}[a,b] \Longleftarrow g\in\mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה. נניח ש־$\varepsilon>0$. $f\in\mathcal{R}[a,b]\Longleftarrow \exists T\ :\ \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\varepsilon$. נניח ש־$f(x)=g(x)$ לכל $x\notin\{y_1,\dots,y_n\}$, וניקח חלוקה $\hat{T}=T\cup\{y_1,\dots,y_n\}$. מכיוון ש־$T\subseteq\hat{T}$, מתקיים $\bar{S}_{\hat{T}}(f)-\underline{S}_{\hat{T}}(f)\le\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\varepsilon$. בנוסף, נקבל $\bar{S}_{\hat{T}}(f)-\underline{S}_{\hat{T}}(f)=\bar{S}_{\hat{T}}(g)-\underline{S}_{\hat{T}}(g)$, כי $\forall i,j\ y_i\notin(x_{j-1},x_j)$ (ובהגדרת $\bar{S}$, $\underline{S}$ דיברנו על קטעים פתוחים).

18.3.2007 **משפט 25:** אם $f\in\mathcal{B}[a,b]$ וגם $f\in\mathcal{R}[c,d]$ לכל $a<c<d<b$, אז $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה. $f\in\mathcal{B}[a,b]\Longleftarrow \exists m,M\ \forall x\in[a,b]\ m\le f(x)\le M$. נניח ש־$\varepsilon>0$, ונגדיר $\delta=\frac{\varepsilon}{4(M-m)}$.
$f\in\mathcal{R}[a+\delta,b-\delta]\Longleftarrow \exists T\ :\ \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\frac{\varepsilon}{2}$. מספיק להוכיח שקיימת חלוקה U של $[a,b]$ כך ש־$\bar{S}_U(f)-\underline{S}_U(f)<\varepsilon$. נגדיר $U=T\cup\{a,b\}$.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_U(f)-\underline{S}_U(f) &= \textstyle\sum_i (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)\\
&= \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)+\delta(\sup_{(a,a+\delta)} f-\inf_{(a,a+\delta)} f)+\\
&\quad +\delta(\sup_{(b-\delta,b)} f-\inf_{(b-\delta,b)} f)\\
&< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{4(M-m)}(M-m)+\tfrac{\varepsilon}{4(M-m)}(M-m)\\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{4}=\varepsilon
\end{aligned}$$

משפט 26: אם $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $\forall x\ m\le f(x)\le M$, $g\in\mathcal{C}[m,M]$, אז $g\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.[10]

הוכחה. נניח ש־$\varepsilon>0$.

$g\in\mathcal{C}[a,b]$, אז $\exists\delta>0\ :\ \forall s,t\in[a,b]\ |s-t|<\delta\Longrightarrow|g(s)-g(t)|<\varepsilon$.

$g\in\mathcal{C}[a,b]$, אז $\exists l,L\in\mathbb{R}\ \forall x\in[a,b]\ l\le g(x)\le L$.

$f\in\mathcal{R}[a,b]$, אז $\exists T=(x_0<\ldots<x_n)\ :\ \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\varepsilon\cdot\delta$.

נגדיר $A=\{i:\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f\ge\delta\}$.

למה 1.26: $\sum_{i\in A}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$

הוכחה.

$$\begin{aligned}
\varepsilon\cdot\delta &> \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)\\
&\ge \textstyle\sum_{i\in A} (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f)\\
&\ge \textstyle\sum_{i\in A} (x_i-x_{i-1})\delta
\end{aligned}$$

למה 2.26: $i\notin A\Longleftarrow\sup_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)-\inf_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)\le\varepsilon$

הוכחה. יהי $i\notin A$. $f((x_{i-1},x_i))\subseteq[c=\inf_{(x_{i-1},x_i)} f,\sup_{(x_{i-1},x_i)} f=d]\Longleftarrow$ $g(f((x_{i-1},x_i)))\subseteq g([c,d])$. אז $c-d<\delta$ (כי $\sup_{(x_{i-1},x_i)} f-\inf_{(x_{i-1},x_i)} f<\delta$), ו־$\sup_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)-\inf_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)=\sup_{s,t\in(x_{i-1},x_i)}(g(f(s))-g(f(t)))\le\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\bar{S}_T(g\circ f)-\underline{S}_T(g\circ f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)-\inf_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f))\\
&= \textstyle\sum_{i\in A} (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)-\inf_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f))+\\
&\quad +\textstyle\sum_{i\notin A} (x_i-x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f)-\inf_{(x_{i-1},x_i)}(g\circ f))\\
&\le (L-l)\textstyle\sum_{i\in A}(x_i-x_{i-1})+\varepsilon\sum_{i\notin A}(x_i-x_{i-1})\\
&< \varepsilon(L-l+b-a)
\end{aligned}$$

לכן $\inf_T \bar{S}_T(g\circ f)-\underline{S}_T(g\circ f))=0$, ו־$g\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.

דוגמה. אם $f\in\mathcal{R}[a,b]$, גם $e^f,f^2,f^\alpha\in\mathcal{R}[a,b]$ ($\alpha>0$).

דוגמה. אם $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, גם $f+g\in\mathcal{R}[a,b]$; מהמשפט, $f^2,g^2,(f+g)^2\in\mathcal{R}[a,b]$, ומכאן $f\cdot g=\frac{(f+g)^2-f^2-g^2}{2}\in\mathcal{R}[a,b]$.

[10] אם $f,g\in\mathcal{C}$, $g\circ f\in\mathcal{C}$ ואז $g\circ f\in\mathcal{R}$.

מסקנה 27: $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\inf_{[a,b]} f > 0 \Longleftarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה. $g(x) = \frac{1}{x}$ רציפה על $[m,M]$, כאשר $m = \inf_{[a,b]} f > 0$, $M = \sup_{[a,b]} f$. אז מהמשפט, $g \circ f = \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

דוגמה. $f(x) = x^2$, $f \in \mathcal{R}[1,2]$; מהו $\int_1^2 f$?
נגדיר חלוקה $T_n = (1 < 1 + \frac{1}{n} < \ldots < 1 + \frac{n-1}{n} < 2)$. נחשב:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{T_n}(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{(x_{i-1},x_i)} f \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(x_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(1 + \frac{i-1}{n})^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n+i-1)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}(n^2 + \ldots + (2n-1)^2) \\
&= \frac{1}{n^3}(S(2n-1) - S(n-1)) \\
&= \frac{1}{6n^3}((2n-1)(2n)(4n-1) - (n-1)n(2n-1)) \\
&= \frac{1}{6n^3}(2(2n-1)(4n-1) - (n-1)(2n-1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{14}{6} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

(כאשר $S(N) = \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$). מצאנו חלוקות T_n כך ש-$\underline{S}_{T_n}(f) \to \frac{7}{3}$. נראה ש-$\bar{S}_{T_n}(f) - \underline{S}_{T_n}(f) \to 0$:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{T_n}(f) - \underline{S}_{T_n}(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\sup_{(x_{i-1},x_i)} f - \inf_{(x_{i-1},x_i)} f) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}(1 + \frac{i}{n} + 1 + \frac{i-1}{n}) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n (2 + \frac{2i-1}{n}) < \frac{1}{n^2} \cdot 4n = \frac{4}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

3.1.5 סכום רימן כללי

20.3.2007 בהינתן f פונקציה, $T = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ חלוקה, **סכום רימן** של f הוא סכום מהצורה $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$, כאשר $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$. סכום רימן

משפט 28: נניח ש-f מוגדרת על $[a,b]$. אז $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אם"ם $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \overset{\Delta T \to 0}{\longrightarrow} I$ ו-$I = \int_a^b f$.[11]

הוכחה. ($\Longleftarrow$) נניח ש-$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \overset{\Delta T \to 0}{\longrightarrow} I$, $\varepsilon > 0$. אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל T כך ש-$\Delta T < \delta$ מתקיים $|\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)| < \varepsilon$ $\forall t_i \in (x_{i-1}, x_i)$. נבחר חלוקה T בעלת פרמטר קטן מ-δ. אז $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$ $\forall t_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

$$\bar{S}_T(f) = \sum_{i=1}^n \sup_{(x_{i-1},x_i)} f = \sup_{t_i}(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)) \in [I - \varepsilon, I + \varepsilon]$$
$$\underline{S}_T(f) = \inf_{t_i}(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)) \in [I - \varepsilon, I + \varepsilon]$$

$\Longleftarrow I - \varepsilon \le \underline{S}_T(f) \le \underline{\int}_a^b f \le \bar{\int}_a^b f \le \bar{S}_T(f) \le I + \varepsilon$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$, $I - \varepsilon \le \underline{\int}_a^b f \le \bar{\int}_a^b f \le I + \varepsilon$, ולכן $I = \underline{\int}_a^b f = \bar{\int}_a^b f$.

[11] כלומר, אינטגרל רימן מוגדר היטב.

($\Longrightarrow$) נניח ש־$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $I = \int_a^b f$. נניח ש־$\varepsilon > 0$. $\inf_T(\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f)) = 0$, אז קיימת חלוקה $T = (x_0 < \ldots < x_n)$ כך ש־$\bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$.

$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftarrow f \in \mathcal{B}[a,b] \Longleftarrow \exists m, M\ \forall x \in [a,b]\ m \le f(x) \le M$.

נגדיר $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2n(M-m)}, \frac{1}{2}\min_i(x_i - x_{i-1}))$. נניח ש־$U = (u_0 < \ldots < u_k)$ חלוקה כך ש־$\Delta U < \delta$. צריך להוכיח ש־$\underline{S}_U(f)$, $\bar{S}_U(f)$ "קרובים" ל־I.

לכל i ו־j, $u_j - u_{j-1} \le \Delta U < \delta < \min_i(x_i - x_{i-1}) \le x_i - x_{i-1}$. לכן אי־אפשר ש־$x_{i-1}, x_i \in (u_{j-1}, u_j)$, ובין u_{j-1} ל־u_j יש רק אחד מה־x_i־ים.

נגדיר $A = \{j : \exists i\ (u_{j-1}, u_j) \subseteq (x_{i-1}, x_i)\}$. לכל $j \in A$, נסמן את ה־i (היחיד) ב־i_j.

למה 1.28: $\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) < \delta n$

הוכחה. לכל $1 \le i \le n$, נגדיר j_i כך ש־$u_{j_i - 1} < x_i \le u_{j_i}$.

אז $\{1, \ldots, k\} \setminus A \subseteq \{j_i : 1 \le i \le n\}$, ולכן $\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \le \sum_{i=1}^n(u_{j_i} - u_{j_i - 1}) < \delta n$.

למה 2.28: $(x_i - x_{i-1}) - 2\delta \le (x_i - x_{i-1}) - (x_i - u_{j_i - 1}) - (u_{j_{i-1}} - x_{i-1}) = \sum_{j \in A, i_j = i}(u_j - u_{j-1})$

$$\begin{aligned}
S_U(f) &= \sum_{j=1}^n (u_j - u_{j-1})(\inf_{(u_{j-1},u_j)} f) \\
&= \sum_{j \in A}(u_j - u_{j-1})(\inf_{(u_{j-1},u_j)} f + \sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1})(\inf_{(u_{j-1},u_j)} f \\
&\ge \sum_{j \in A}(u_j - u_{j-1}) \inf_{(x_{j-1},x_j)} f + \sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1})m \\
&= \sum_{i=1}^n [\sum_{j \in A, i_j = i}(u_j - u_{j-1})](\inf_{(x_{i-1},x_i)} f) + m\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1}) - (x_i - u_{j_i - 1}) - (u_{j_{i-1}} - x_{i-1})] \inf_{(x_{i-1},x_i)} f + m\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
&= \underline{S}_T(f) - \sum_{i=1}^n ((x_i - u_{j_i - 1}) + (u_{j_{i-1}} - x_{i-1})) \inf_{(x_{i-1},x_i)} f + m\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
&\ge \underline{S}_T(f) - M\sum_{i=1}^n ((x_i - u_{j_i - 1}) + (u_{j_{i-1}} - x_{i-1})) + m\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
\Longrightarrow &\quad S_U(f) \ge \underline{S}_T(f) - M\sum_{j \in A}(u_j - u_{j-1}) + m\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
&= \underline{S}_T(f) - (M-m)\sum_{j \notin A}(u_j - u_{j-1}) \\
&> \underline{S}_T(f) - (M-m)\delta n \ge \underline{S}_T(f) - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

באופן דומה, $\bar{S}_U(f) < \bar{S}_T(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

לכל חלוקה U כך ש־$\Delta U < \delta$, נקבל $\bar{S}_U(f) - \underline{S}_U(f) < \bar{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

לכל סכום רימן לפי חלוקה U, נקבל $I \le \bar{S}_U(f)$, $\underline{S}_U(f) \le \sum_{j=1}^n (u_j - u_{j-1}) f(t_i)$.

לכל חלוקה U כך ש־$\Delta U < \delta$, $|\sum_{j=1}^n (u_j - u_{j-1}) f(t_i) - I| \le |\bar{S}_U(f) - \underline{S}_U(f)| < 2\varepsilon$, לכל בחירה של $t_j \in (u_{j-1}, u_j)$, כנדרש.

3.2 המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי

משפט 29 (המשפט היסודי): $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $t_0 \in [a,b]$, f רציפה ב־t_0, $F(t) = \int_a^t f$. אז F 22.3.2007

גזירה ב־t_0, וגם $F'(t_0) = f(t_0)$.[12]

הוכחה. נניח ש־$\varepsilon > 0$. f רציפה ב־$t_0 \Longleftarrow \varepsilon > |f(t) - f(t_0)| \Longleftarrow \delta > |t - t_0| \, \forall t \, \exists\delta > 0$.
ניקח $\delta > h > 0$. אז בקטע $[t_0, t_0 + h]$, המוכל בסביבת δ של t_0, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} F(t_0+h) - F(t_0) &= \int_a^{t_0+h} f - \int_a^{t_0} f \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} f \\ &\in [\int_{t_0}^{t_0+h}(f(t_0) - \varepsilon), \int_{t_0}^{t_0+h}(f(t_0) + \varepsilon)] \\ &= [h(f(t_0) - \varepsilon), h(f(t_0) + \varepsilon)] \end{aligned}$$

מכאן, $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} \in [f(t_0) - \varepsilon, f(t_0) + \varepsilon]$, ולכן $F'_+ = f(t_0)$. באותו אופן, על־ידי בחירת $-\delta < h < 0$, נקבל $F'_- = f(t_0)$.

מסקנה 30: אם f פונקציה רציפה על $[a, b]$, אז $F(t) = \int_a^t f$ פונקציה קדומה של f. אז $\int_a^b f = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ (אם גם G פונקציה קדומה של f – כלומר, $G'(t) = f(t)$ לכל $t \in (a, b)$, $G'_-(b) = f(b)$, $G'_+(a) = f(a)$), מכיוון שההפרש בין שתי פונקציות קדומות קבוע.

דוגמה. $\int_1^2 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^2 = \frac{7}{3}$

דוגמה. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \end{cases} \Longleftarrow F(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$. (כך אפשר להרחיב את הגדרת הפונקציה הקדומה גם עבור פונקציות שאינן רציפות במספר סופי של נקודות.)

3.3 שיטות אינטגרציה

3.3.1 אינטגרציה בחלקים

$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'v + uv' \Longleftarrow \int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + uv')$; אם $(uv)'$ רציפה – כלומר, u ו־v גזירות ברציפות – $\int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$. לכן $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.
אפשר גם כך: $\int_a^b u(x)v(x)dx = [u(x) \int v(x)dx]_a^b - \int_a^b u'(x)(\int v(x)dx)dx$.

3.3.2 שיטת ההצבה

$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$, עבור f רציפה ו־φ גזירה ברציפות; אז

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [f(\varphi(t))]_\alpha^\beta = f(\varphi(B)) - f(\varphi(A)) = [f(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$$

[12] אם t_0 הוא אחד מהקצוות, אז הגזירות חד־צדדית.

משפט 31: f רציפה על $[a,b]$, φ גזירה ברציפות על $[\alpha,\beta]$, b $a \le \varphi(t) \le b$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$ $\Longleftarrow$ $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

הוכחה. f רציפה $\Longleftarrow$ $f \in \mathcal{R}[a,b]$. נגדיר F על־ידי $F(t) = \int_a^t f$. על־פי המשפט היסודי, $F' = t$.

f, φ רציפות, אז $f \circ \varphi$ רציפה; φ גזירה ברציפות, אז φ' רציפה. לכן $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ רציפה, ומהמשפט היסודי נקבל $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt]_\alpha^\beta = [F \circ \varphi]_\alpha^\beta =$ $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$.

3.3.3 פירוק לשברים חלקיים

כיצד לחשב $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$? ניתן לפרק $p(x) = \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{m_i}$, וקיימים פולינומים g_i בעלי מעלה קטנה מ־m_i ופולינום r כך ש־$\frac{q(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{g_i(x)}{(x-\alpha_i)^{m_i}} + r(x)$. ניתן לעשות אינטגרציה על איברי הסכום. 25.3.2007

4 סדרות וטורי פונקציות

4.1 התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה

4.1.1 סדרות פונקציות

24.5.2007 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של פונקציות, כאשר $f_n : X \to \mathbb{R}$. אנו מעוניינים לדבר על התכנסותה והתכנסות הטור $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$.

הגדרה. נאמר ש־$\{f_n\}$ **מתכנסת נקודתית** ל־f ($f_n \overset{\text{נק'}}{\to} f$) אם $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ לכל $x_0 \in X$. כלומר, $\forall x_0 \in X \,\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. התכנסות נקודתית

דוגמה. $f_n(x) = x^n$, $X = [0,1]$. אז $f(x) \equiv \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

הגדרה. נאמר ש־$\{f_n\}$ **מתכנסת במידה שווה** ל־f ($f_n \overset{\text{במ"ש}}{\to} f$) אם התכנסות במידה שוהו

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall x \in X\, \forall n > N\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(באופן שקול, $\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\, \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, או, שוב באופן שקול, $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} |f_n - f|) = 0$.)

הגדרה. נאמר ש־$f(x) \overset{\text{בממוצע}}{\longrightarrow} f_n(x)$ אם $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$. התכנסות בממוצע

דוגמה. בדוגמה הקודמת, $\begin{cases} x^n & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} = (f_n - f)(x) = f_n(x) - f(x)$. אז $0 \overset{n\to\infty}{\not\to} \sup_X |f_n - f| = 1$, ולכן $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\not\to} f$.

טענה 32: $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\to} f \Longleftarrow f_n \overset{\text{נק'}}{\to} f$

הוכחה. נניח $x \in X$. אז $|f_n(x) - f(x)| < \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \Longleftarrow f_n \overset{\text{נק'}}{\to} f$.

טענה 33: $f_n \overset{\text{נק'}}{\to} f$, $f_n \overset{\text{נק'}}{\to} g \Longleftarrow f = g$

טענה 34: f_n מתכנסת במ"ש, $f_n \overset{\text{נק'}}{\to} f \Longleftarrow f_n \overset{\text{במ"ש}}{\to} f$.

4.1.2 טורי פונקציות

אומרים ש־$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית/במ"ש אם הסדרה $\{\sum_{i=1}^{n} f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית/במ"ש (בהתאמה).

דוגמה. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$: $\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x^{N+1}-x}{x-1}$. אנו יודעים שיש התכנסות כאשר $|x| < 1$, והפונקציה הגבולית היא $F(x) = \frac{x}{1-x}$. אך ההתכנסות אינה במידה שווה: אם נגדיר $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x^{N+1}-x}{x-1}$, $F_N - F = \frac{x^{N+1}}{x-1}$, אך $\lim_{x\to 1}(F_N - F)(x) \to -\infty$.

דוגמה. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $X = [0,1]$. אפשר להוכיח $f_n \xrightarrow{\text{נק'}} 0$, אבל $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\not\to} 0$ ($\sup_X |f_n| = \frac{1}{4}$).