חשבון אינפיניטסימלי 1

יובל קפלן

סיכום הרצאות פרופ׳ צליל סלע בקורס ״חשבון אינפיניטסימלי 1״ (80131)
באוניברסיטה העברית, 7–2006.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ב־15 בפברואר 2008.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־/http://www.limsoup.net. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

2006–7	חשבון אינפיניטסימלי 1	אלגברה לינארית 1
	חשבון אינפיניטסימלי 2	אלגברה לינארית 2
	תורת הקבוצות	
2007–8	מבנים אלגבריים 1	תורת ההסתברות 1

תוכן עניינים

1 $\mathbb{R}$ – המספרים הממשיים

1.1 שדות

1.1.1 אקסיומות השדה

23.10.2006 **הגדרה.** $(\mathbb{F},+,\cdot)$[1] תיקרא **שדה** אם מתקיימות התכונות הבאות: שדה

1. $\forall x,y\in\mathbb{F}\quad x\cdot y=y\cdot x,\ \ x+y=y+x$

(חילוף – קומוטטיביות)

2. $\forall x,y,z\in\mathbb{F}\quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(x\cdot y),\ \ (x+y)+z=x+(y+z)$

(קיבוץ – אסוציאטיביות)

3. $\forall x,y,z\in\mathbb{F}\quad x\cdot(y+z)=xy+xz$

(פילוג – דיסטריבוטיביות[2])

4. $\exists 0\in\mathbb{F}\ :\ \forall x\in\mathbb{F}\quad x+0=0+x=x$

$\exists 1\in\mathbb{F}\ :\ \forall x\in\mathbb{F}\quad 1\cdot x=x\cdot 1=x$

(קיום איברים נייטרליים)

5. $\forall x\in\mathbb{F}\quad \exists y\in\mathbb{F}\ :\ x+y=y+x=0$

(קיום איברים נגדיים; האיבר הנגדי יחיד, לכן נוכל לסמנו $y=-x$)

6. $\forall 0\neq x\in\mathbb{F}\quad \exists y\in\mathbb{F}\ :\ x\cdot y=y\cdot x=1$

(קיום איברים הפכיים; האיבר ההפכי יחיד, לכן נוכל לסמנו $y=x^{-1}$)

1.1.2 תכונות שדה

24.10.2006 מסקנות מהאקסיומות:

1. $\forall x,y,a\in\mathbb{F}\quad x+a=y+a\Longrightarrow x=y$

הוכחה. נחבר את האיבר הנגדי:

$$x+a=y+a\quad\Longrightarrow\quad (x+a)+(-a)=(y+a)+(-a)$$

על־פי חוק הקיבוץ ותכונת הנגדי, נקבל

$$\Longrightarrow\quad x+(a+(-a))=y+(a+(-a))$$
$$\Longrightarrow\quad x=y$$

2. (א) $\forall x\quad x\cdot 0=0$

הוכחה. $0=0+0\quad\Longrightarrow\quad x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$

נחבר $-x\cdot 0$, ועל־פי תכונת הנגדי, נקבל

$$\Longleftrightarrow\quad x\cdot 0+(-x\cdot 0)=x\cdot 0+x\cdot 0+(-x\cdot 0)$$
$$\Longleftrightarrow\quad 0=x\cdot 0$$

[1] קבוצה שמוגדרות בה הפעולות הבינאריות $+:\mathbb{F}\times\mathbb{F}\mapsto\mathbb{F}$ ("חיבור") ו־$\cdot:\mathbb{F}\times\mathbb{F}\mapsto\mathbb{F}$ ("כפל").

[2] במערכות שאינן שדה, לעתים תתקיים תכונה זו רק מימין או משמאל; כאן אין זה משנה, בגלל חוק החילוף.

(ב) $\forall x \quad x \cdot (-1) = -x$

3. $\forall a \neq 0, b, c \in \mathbb{F} \quad \exists! x \in \mathbb{F} \ : \ ax + b = c$

הוכחה. נניח כי x קיים ונוכיח כי הוא יחיד.

$$\begin{aligned} ax + b = c \quad &\Longrightarrow \quad a^{-1}(ax+b) = a^{-1}c \\ &\Longrightarrow \quad x + a^{-1}b = a^{-1}c \\ &\Longrightarrow \quad x + a^{-1}b + (-a^{-1}b) = a^{-1}c + (-a^{-1}b) \\ &\Longrightarrow \quad x = a^{-1}c - a^{-1}b = a^{-1}(c-b) \end{aligned}$$

יחידות x נובעת מהמוגדרות־היטב של הכפל. כדי להוכיח קיום, נציב במשוואה או נטען שניתן להפוך את הגרירות.

4. (א) $-0 = 0$

(ב) $1^{-1} = 1$

5. $-(x+y) = (-x) + (-y)$
6. $-(-x) = x$
7. $\forall x, y \in \mathbb{F} \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \neq 0, \ \ (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$
8. $\forall x \neq 0 \quad (x^{-1})^{-1} = x$
9. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
10. $\forall x \neq 0 \quad (-x)^{-1} = -(x^{-1})$

1.1.3 תכונת הסדר

שדה סדור

הגדרה. שדה $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ייקרא **שדה סדור** אם על $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ניתן להגדיר יחס סדר המקיים את התכונות הבאות:

1. לכל $x, y \in \mathbb{F}$, אחת משלוש האפשרויות $x < y$, $y < x$, $x = y$ מתקיימת;
2. תורשתיות (טרנזיטיביות): $\forall x, y, z \in \mathbb{F} \quad x > y \wedge y > z \Longrightarrow x > z$ [3]
3. תאימות לפעולות $+$ ו־$\cdot$: $\forall x, y, z \in \mathbb{F} \quad x < y \Longrightarrow x + a < y + a$

   $\forall x, y \in \mathbb{F} \quad \forall a > 0 \quad x < y \Longrightarrow a \cdot x < a \cdot y$

דוגמה. $\mathbb{R}$ הוא שדה סדור.

מתקיימות התכונות:

1. $x < y, \ u < v \Longrightarrow x + u < y + v$

הוכחה.

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Longrightarrow \quad x + u < y + u \\ u < v \quad &\Longrightarrow \quad y + u < y + v \end{aligned}$$

לכן, מטרנזיטיביות, $x + u < y + v$.

2. $x < y \iff -y < -x$

[3] תכונה דומה עבור שוויון קיימת אף בשדה לא־סדור, כמובן.

הוכחה. אם $x < y$ אזי $x + (-(x+y)) < y + (-(x+y))$, ולכן $-y < -x$.

3. $x \neq 0 \Longrightarrow x > 0 \vee -x > 0$
4. $a < 0 \Longrightarrow (x < y \iff ax > ay)$
5. $x < 0,\ y < 0 \Longrightarrow 0 < x \cdot y$
6. $x \neq 0 \Longrightarrow x \cdot x > 0$ [4]
7. $x < 0 \Longrightarrow x^{-1} < 0 \qquad x > 0 \Longrightarrow x^{-1} > 0$
8. אם $y > x$ שווי סימן, $y^{-1} > x^{-1}$

טענה 1 (צפיפות הסדר): יהי $(\mathbb{F}, +, \cdot, <)$ שדה סדור, ויהיו $x < y \in \mathbb{F}$. אזי קיים איבר $z \in \mathbb{F}$ המקיים $x < z < y$.

הוכחה. ידוע כי ל־$2 = 1 + 1 \in \mathbb{F}$ יש איבר הפוך. נגדיר $z = 2^{-1}(x+y)$.

למה 1.1: $x < z < y$

הוכחה.
$$\begin{aligned} x < y \quad &\Longrightarrow \quad x + x < x + y = 2 \cdot 2^{-1}(x+y) < y + y \\ &\Longrightarrow \quad x < 2^{-1}(x+y) < y \end{aligned}$$

26.10.2006 **הגדרה.** יהי $x \in \mathbb{F}$. **הערך המוחלט** של x מוגדר על־ידי $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$. ערך מוחלט

טענה 2 (אי־שוויון המשולש): $\forall x, y \in \mathbb{F} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$ אי־שוויון המשולש

הוכחה. אם $x = 0$ או $y = 0$ או x ו־y שווי סימן, הטענה טריוויאלית (ויתקבל שוויון).

כעת נניח כי x ו־y שוני סימן. בלי הגבלת הכלליות, נניח $x > 0 > y$. נניח בנוסף $x + y \geq 0$. אזי $|x+y| = x + y = |x| + (-|y|) < |x| + |y|$.

הגדרה. יהי $(\mathbb{F}, +, \cdot, <)$ שדה סדור. תהי $A \subseteq \mathbb{F}$. איבר $a_0 \in A$ ייקרא **האיבר המקסימלי** ב־A אם $\forall a \in A \quad a \leq a_0$. איבר $a_1 \in A$ ייקרא **האיבר המינימלי** ב־A אם $\forall a \in A \quad a \geq a_1$. איבר מקסימלי איבר מינימלי

הגדרה. יהי $(\mathbb{F}, +, \cdot, <)$ שדה סדור. יהיו $a_1 < a_2 \in \mathbb{F}$. תת־הקבוצה $I \subseteq \mathbb{F}$ המוגדרת על־ידי $I = \{f \in \mathbb{F} \mid a_1 < f < a_2\}$ נקראת **קטע פתוח** ב־$\mathbb{F}$. אילו a_1 ו־a_2 היו נכללים בקטע (אי־שוויון חלש במקום חריף בהגדרת הקבוצה), הקטע היה נקרא **קטע סגור**. (קטע יכול, כמובן, להיות חצי פתוח וחצי סגור.) קטעים

אם גבולות הקטע בשדה, הקטע נקרא **קטע חסום**. (קטע לא־חסום יהיה, למשל, מהצורה $I = \{f \in \mathbb{F} \mid a_1 > f\}$.)

[4] זהו מקרה פרטי של תכונה 5.

1.2 קבוצות אינדוקטיביות

קבוצה אינדוקטיבית

הגדרה. תת־קבוצה $I \subseteq \mathbb{R}$ נקראת **קבוצה אינדוקטיבית** אם $1 \in I$ ומתקיים לכל x כי $x \in I \Longrightarrow x+1 \in I$.

הטבעיים

הגדרה. הקבוצה $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ – **קבוצת המספרים הטבעיים** – היא הקבוצה בין כל הקבוצות האינדוקטיביות: $\mathbb{N} = \bigcap_{\text{אינד' } I} I$.

טענה 3: $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה. $I \subseteq \mathbb{R}$ אינדוקטיבית $\Longleftarrow 1 \in I$. מכאן, $1 \in \bigcap_{\text{אינד' } I} I = \mathbb{N}$. כעת, יהי $x \in \mathbb{N}$. אז לכל I אינדוקטיבית, $x \in I$. לפי התנאי השני, $x+1 \in I$. מכאן $x+1 \in \bigcap I$ ולכן $x+1 \in \mathbb{N}$. הראינו $1 \in \mathbb{N}$ וכן $\forall x \in \mathbb{N}\ x+1 \in \mathbb{N}$; לכן $\mathbb{N}$ אינדוקטיבית.

30.10.2006

טענה 4: אם $I \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה אינדוקטיבית, $I = \mathbb{N}$.

משפט 5: ב־$\mathbb{N}$ מתקיימות הטענות הבאות:

א. $\forall m,n \in \mathbb{N} \quad m+n \in \mathbb{N}$

ב. $\forall m,n \in \mathbb{N} \quad m \cdot n \in \mathbb{N}$

ג. $\forall m,n \in \mathbb{N} \quad (n > m \Longrightarrow n-m \in \mathbb{N})$

ד. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \neg\exists \hat{n} \in \mathbb{N}\ :\ n < \hat{n} < n+1$

הוכחה. א. יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $I_n = \{m \in \mathbb{N} \mid n+m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

למה 1.5: I_n היא קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה. אם $n \in \mathbb{N}$ אז $n+1 \in \mathbb{N}$, ולכן $1 \in I_n$. כעת, יהי $m \in I_n$; נראה כי $m+1 \in I_n$. מכך ש־$m \in I_n$, מתקיים $n+m \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N}$ אינדוקטיבית ולכן $n+(m+1) \in \mathbb{N}$. אז $m+1 \in I_n$. הראינו כי $I_n \subseteq \mathbb{N}$ קבוצה אינדוקטיבית, ולכן $I_n = \mathbb{N}$.

ב. יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $J_n = \{m \in \mathbb{N} \mid n \cdot m \in \mathbb{N}\}$.

למה 2.5: J_n היא קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה. $1 \cdot n = n \in \mathbb{N}$, לכן $1 \in J_n$. כעת, יהי $m \in J_n$. אז $n \cdot m \in \mathbb{N}$, ולפי 5א גם $n \cdot m + n = n(m+1) \in \mathbb{N}$. כלומר, $m+1 \in J_n$.

ג. נגדיר $K = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} \quad (n > m \Longrightarrow n-m \in \mathbb{N})\}$.

למה 3.5: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

הוכחה. נגדיר $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\} \subseteq \mathbb{N}$. מתקיים $1 \geq 1$, לכן $1 \in I$. עבור $n \geq 1$, מתקיים $n+1 \geq 1$, ולכן גם $n+1 \in I$. אז $I \subseteq \mathbb{N}$ אינדוקטיבית, ומכאן $I = N$. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

לפי הלמה, $\{m \in \mathbb{N} \mid m < 1\} = \varnothing$ – כלומר, התנאי מתקיים באופן ריק לגבי $n = 1$, ולכן $1 \in K$.

כעת, נניח כי $n \in K$ ונראה כי $n + 1 \in K$. מכך ש־$n \in K$, $n - m \in \mathbb{N} \quad \forall m < n$.
נתבונן ב־$n+1$, ויהי $s < n + 1$. נראה כי $n + 1 - s \in \mathbb{N}$ ויִנבע ש־$n + 1 \in K$: אם $s = 1$, מתקיים $n + 1 - 1 = n \in \mathbb{N}$; אחרת, $s > 1$.

למה 4.5: לכל $1 < n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \in \mathbb{N}$.

הוכחה. נניח כי קיים $\hat{n} > 1$ שעבורו $\hat{n} - 1 \notin \mathbb{N}$. אזי $J = \mathbb{N} \setminus \{\hat{n}\}$ קבוצה אינדוקטיבית: $\hat{n} \neq 1$ ולכן $1 \in J$; עבור $n \in \mathbb{N} \setminus \{\hat{n}\}$, $n + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{\hat{n} + 1\}$.[5] אז J אינדוקטיבית $\Longleftarrow J = \mathbb{N}$ – סתירה, והלמה מתקיימת.

לפי הלמה, $s - 1 \in \mathbb{N}$. בנוסף, $s < n + 1$ ולכן $s - 1 < n$; אז על־פי ההנחה, $n - (s - 1) = n + 1 - s \in \mathbb{N}$.

ד. נניח כי קיים $\mathbb{N} \ni x$ כך ש־$n < x < n + 1$. אז בפרט $x < n + 1$; לכן מתקיים $x - n < n + 1 - n = 1$. אבל $n < n + 1$ ולכן, מהטענה הקודמת, $x - n$ טבעי וקטן מ־1 – סתירה ללמה 3.5.

הגדרה. הקבוצה $\mathbb{Z}$ – **קבוצת המספרים השלמים** – היא הקבוצה השלמים

$$\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbb{N}\}$$

טענה 6: מספר ממשי $x \in \mathbb{R}$ הוא מספר שלם $\iff x = n - m$ עבור $n, m \in \mathbb{N}$.

הוכחה. ($\Longrightarrow$) ראשית, נראה כי לכל $\mathbb{N} \ni m, n$, $n - m$ שלם. אם $n > m$, על־פי טענה 5ד $n - m \in \mathbb{N}$. אם $n = m$, $n - m = 0 \in \mathbb{Z}$. אם $n < m$, $m - n = -(n - m) \in \mathbb{N}$, ואז $n - m \in \mathbb{Z}$.

($\Longleftarrow$) יהי $x \in \mathbb{Z}$. נראה כי קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש־$x = n - m$. אם $x > 0$, $x = n = (n+1) - 1$ טבעי. אם $x = 0$, $x = 1 - 1$. אם $x < 0$, $-x = n \in \mathbb{N}$ ונוכל לכתוב $x = 1 - (n + 1)$.

טענה 7: המספרים השלמים סגורים לכפל ולחיבור.

הוכחה. כתרגיל.

הגדרה. הקבוצה $\mathbb{Q}$ – **קבוצת המספרים הרציונאליים** – היא הקבוצה הרציונאליים

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \begin{matrix} \exists m, n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0 \end{matrix} \quad x = \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1} \right\}$$

טענה 8: קבוצת המספרים הרציונאליים עם פעולות הכפל והחיבור ויחס הסדר של המספרים הממשיים מהווה שדה סדור: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

[5] יש לשים לב שאנו לא מניחים ש־$n - 1$ קיים ב־J; אם $n \in J$, ודאי $n + 1 \in J$ קיים, והרי אם נניח $\hat{n} = n + 1$ מראש $n \notin \mathbb{N}$, לפי ההנחה.

הוכחה. מספיק להוכיח סגירות (ביחס לכפל, חילוק, לקיחת נגדי ולקיחת הופכי) – כל השאר נורש מ־$\mathbb{R}$. קיום 0, 1 נובע מיידית מההגדרה.

1.3 עקרון ההוכחה באינדוקציה

1.3.1 אינדוקציה פשוטה

אינדוקציה **משפט 9 (אינדוקציה פשוטה):** תהי $P(n)$ סדרת טענות ($n \in \mathbb{N}$). אם $P(1)$ טענה נכונה ולכל 31.10.2006
$n \in \mathbb{N}$ מתקיים ($P(n)$ נכונה $\Longleftarrow$ $P(n+1)$ נכונה), $P(n)$ נכונה לכל n.

הוכחה. נגדיר $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{טענה נכונה } P(n)\}$. על־פי הנתון, $1 \in I$ ו־$n \in I \implies n+1 \in I$. אז I אינדוקטיבית. בנוסף, $I \subseteq \mathbb{N}$, ולכן $I = \mathbb{N}$.

1.3.2 אינדוקציה מלאה

משפט 10: תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$. אזי ב־$A$ קיים איבר מינימלי.

הוכחה. נניח בשלילה כי לקבוצה A אין מינימום. אם $A = \mathbb{N}$ אזי $\min A = 1$, לכן נניח בנוסף $A \neq \mathbb{N}$. תהי $B = \{b \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A \quad a \geq b\}$.

למה 1.10: B קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה. $1 \in B$, כי $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$ ובפרט $\forall a \in A \subset \mathbb{N} \quad a \geq 1$. כעת נניח כי $n \in B$. אזי $\forall a \in A \quad a \geq n$. אך אם $n \in A$, n איבר מינימלי ב־A – סתירה; לכן $n \notin A$. (כלומר, אי־השוויון הופך לחריף.)

למה 2.10: $\forall a \in A \quad a \geq n+1$ (כלומר, $n+1 \in B$)

הוכחה. לפי טענה 5ד, $\forall x \in \mathbb{N} \quad x > n \implies x \geq n+1$. מכאן נקבל כי מתקיים $\forall a \in A \quad a > n \implies a \geq n+1$, ולכן $n+1 \in B$.

כעת, $B \subseteq \mathbb{N}$ אינדוקטיבית $\Longleftarrow$ $B = \mathbb{N}$. לכן $A = \varnothing$,[6] בסתירה להנחה.[7]

טענה 11: לכל קבוצה סופית לא־ריקה של מספרים טבעיים יש מקסימום.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על מספר איברי הקבוצה. עבור $n = 1$, הטענה טריוויאלית. נניח כי הטענה נכונה עבור n. תהי B קבוצה בת $n+1$ איברים: $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$. נגדיר $A = \{b_1, \ldots, b_n\}$. על־פי הנחת האינדוקציה, ל־A קיים מקסימום $\max A = a$. נפריד לשני מקרים:

$$\max B = \begin{cases} b_{n+1} & a < b_{n+1} \\ a & a \geq b_{n+1} \end{cases}$$

[6] כפי שהוסבר בהוכחת למה 1.10, $n \in B \implies n \notin A$.
[7] כלומר, לא קיימת $A \neq \varnothing$ כך של־A אין איבר מינימלי.

משפט 12 (אינדוקציה מלאה): תהי $P(n)$ סדרת טענות ($n \in \mathbb{N}$). אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(P(n)$ נכונה $\Longleftarrow$ $P(k)$ נכונה $\forall k < n)$, $P(n)$ נכונה לכל n.[8] אינדוקציה מלאה

הוכחה. תהי $B = \{b \in \mathbb{N} \mid P(b)$ איננה נכונה$\}$. נניח בשלילה $B \neq \varnothing$. מכאן, ל־B קיים איבר מינימלי b_0. אז לכל $k < b_0$ $P(k)$ נכונה, ולכן $P(b_0)$ נכונה – סתירה לכך ש־$b_0 \in B$ (כלומר, $P(b_0)$ איננה נכונה).

1.4 תכונת השלמות

1.4.1 שלמות $\mathbb{R}$

טענה 13: לא קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש־$r^2 = 2$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים $r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 2$. $r = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$)[9]. בלי הגבלת הכלליות, נוכל להניח כי p או q אי־זוגי. אז

$$r^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{זוגי } p \wedge \text{אי־זוגי } q$$

מכיוון ש־p זוגי, ניתן לכתוב $p = 2m$, ואז

$$(2m)^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad 2m^2 = q^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{זוגי } q$$

– סתירה.

משפט 14 (אקסיומת השלמות): תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\varnothing \neq$ כך ש־$a \geq b \quad \forall a \in A, b \in B$. אזי קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־$a \geq r \quad \forall a \in A$, $b \leq r \quad \forall b \in B$. (כלומר, קיים איבר ממשי שמפריד, במובן החלש, בין A לבין B.)

דוגמה. ברציונאליים האקסיומה לא מתקיימת: נבחר, למשל, $A = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q > \sqrt{2}\right\}$ ו־$B = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sqrt{2}\right\}$.

1.4.2 חסמים

הגדרה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. איבר $b \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלעיל** של A אם $a \leq b \quad \forall a \in A$. איבר $c \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם מלרע** של A אם $a \geq c \quad \forall a \in A$. חסמים

הגדרה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. איבר $r \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם עליון** של A ($\sup A$) אם r הוא חסם מלעיל של A ולכל חסם מלעיל b של A, $r \leq b$.[10] איבר $r \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם תחתון** של A ($\inf A$) אם r הוא חסם מלרע של A ולכל חסם מלרע b של A, $r \geq b$.

דוגמה. אם $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ אז $\sup A = 1$. אם $B = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sqrt{2}\right\}$ אז $\sup B = \sqrt{2}$. אם $C = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ אז $\sup C = 1$.

[8] באופן מובלע מוכח ש־$P(1)$ נכונה – מכיוון שאין טבעי קטן מ־1, באופן ריק מתקיים שלכל $k < 1$ $P(k)$ נכונה.
[9] אפשר להניח זאת, כי r חיובי.
[10] כלומר, r הוא החסם־מלעיל הקטן ביותר.

משפט 15: לכל קבוצה חסומה מלעיל $A \subseteq \mathbb{R}$ קיים חסם עליון יחיד.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר B להיות קבוצת החסמים־מלעיל של A: $B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{R} \quad b \geq a\}$. אז $A, B \neq \varnothing$. לפי אקסיומת השלמות, קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־$\forall a \in A \quad a \leq r$ ו־$\forall b \in B \quad b \geq r$.

למה 1.15: r הוא חסם עליון של A.

הוכחה. (נובעת משני האי־שוויונים המגדירים את r.)

למה 2.15: חסם עליון של קבוצה חסומה מלעיל $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ הוא יחיד.

הוכחה. יהיו r_2, r_1 חסמים עליונים של A. r_1, r_2 הם בפרט חסמים מלעיל של A.

$$\overset{\text{עליון}}{r_1}\overset{\text{מלעיל}}{\leq r_2} \wedge \overset{\text{מלעיל}}{r_1}\overset{\text{עליון}}{\geq r_2} \implies r_1 = r_2$$

טענה 16: תהי A קבוצה חסומה מלעיל. איבר $r \in \mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A אם ורק אם – 6.11.2006

א. r חסם מלעיל של A;

ב. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$r - \varepsilon < a$.

הוכחה. ($\Longleftarrow$) נניח כי $r \in \mathbb{R}$ הוא חסם עליון של A. ראשית, על־פי הגדרה, r חסם מלעיל של A. נניח בשלילה כי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $a \in A$ $a \leq r - \varepsilon$. במקרה זה, $r - \varepsilon$ חסם מלעיל; אך $r - \varepsilon < r$, בסתירה לכך ש־r חסם עליון.

($\Longrightarrow$) נניח כי $r \in \mathbb{R}$ מקיים את התנאים א׳+ב׳. ראשית, r חסם מלעיל על־פי תנאי א׳. נניח בשלילה שקיים $u \in \mathbb{R}$ שהוא חסם מלעיל של A, $u < r$. נגדיר $\varepsilon_0 = r - u$. לכל $a \in A$, $a \leq u$ ולכן $r - \varepsilon_0 \geq a$, בסתירה לתנאי ב׳.

הגדרה. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$. אזי –

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A\, b \in B\} \\ A \cdot B &= \{a \cdot b \mid a \in A\, b \in B\} \\ -A &= \{-a \mid a \in A\} \\ A \geq 0 &\iff \forall a \in A\, a \geq 0 \end{aligned}$$

טענה 17: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות חסומות מלעיל. אז –

א. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

ב. $\inf(-A) = -\sup A$;

ג. אם $A, B \geq 0$ אזי $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

הוכחה. כתרגיל.

1.4.3 ארכימדיות הממשיים

2.11.2006 **משפט 18 (ארכימדיות של המספרים הממשיים):** $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;:\; x < n$ ארכימדיות הממשיים

הוכחה. נניח בשלילה כי $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל; לכל קבוצה חסומה מלעיל קיים חסם עליון. יהי $a \in \mathbb{R}$ החסם העליון של $\mathbb{N}$.

למה 1.18: קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a - \frac{1}{2} < n \leq a$.

הוכחה. ראשית, a חסם עליון של $\mathbb{N}$ ולכן $\forall n \in \mathbb{N}\; n \leq a$. אם לא קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $a - \frac{1}{2} < n$ אז $a - \frac{1}{2}$ חסם מלעיל של $\mathbb{N}$, בסתירה לכך ש־a ($< a - \frac{1}{2}$) חסם עליון.

באמצעות הלמה, בפרט $\exists n \in \mathbb{N} \;:\; a - \frac{1}{2} < n$ ולכן $a < a + \frac{1}{2} \leq n + 1 \in \mathbb{N}$,[11] בסתירה לכך ש־$a$ חסם עליון של $\mathbb{N}$.

מסקנה 19: לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. אזי לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. קיבלנו שמספר ממשי גדול מכל טבעי, בסתירה לארכימדיות הממשיים.

1.4.4 צפיפות

טענה 20: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$a < a + 1 < b$. אזי קיים מספר שלם $z \in \mathbb{Z}$ כך ש־$z \in (a, b)$.

הוכחה. ראשית, מספיק להוכיח את הטענה עבור $a, b \geq 0$: אם $a < 0 < b$, $0 \in (a, b)$, ואם $a < b \leq 0$, נחליף את האינטרוול (a, b) ב־$(-b, -a)$. כעת, $0 \leq a < a + 1 < b$. נתבונן ב־$L = \{s \in \mathbb{Z} \mid s \leq a\}$ – קבוצת השלמים שחסומים מלעיל על־ידי a.

למה 1.20: יהי u חסם עליון של L. אזי $a - 1 \leq u$.

הוכחה. נניח $u < a - 1$. אם נחליף כל $s \in L$ ב־$t = s + 1$, עדיין יתקיים $t \leq a$, בסתירה לכך ש־u חסם עליון.[12] לכן $a - 1 \leq u$.

למה 2.20: $a - 1 < u$.

קיים $s \in L$ כך ש־$a - 1 < s \leq u \leq a$. אחרת, $a - 1$ חסם מלעיל – סתירה. לכן $a < s + 1 \leq a + 1 < b$. בנוסף, $s + 1 \in \mathbb{Z}$, ולכן $s + 1 \in (a, b)$.

6.11.2006 **הגדרה.** תת־קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ נקראת **צפופה** אם $\forall b, c \in \mathbb{R} \quad c > b \Longrightarrow A \cap (b, c) \neq \varnothing$. תת־קבוצה צפופה

טענה 21: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה צפופה.

---

[11] חיברנו 1 לשני האגפים.

[12] החסם העליון על $L + 1$ גדול ב־1 מזה של L – למעשה, "הזזנו" כל איבר ב־L קדימה ב־1.

הוכחה. יהיו $b,c \in \mathbb{R}$ כך ש־$c > b$. אז $c - b > 0$; נתבונן ב־$0 < \frac{1}{c-b}$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n > \frac{1}{c-b}$, לפי הארכימדיות. אז $nc - nb > 1$, ואם נסמן $c' = nc$, $b' = nb$, נקבל $c' - b' > 1$.
לכן, מהטענה הקודמת, קיים מספר שלם $\hat{z} \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\hat{z} \in (b', c')$. אז $\frac{\hat{z}}{n} \in (\frac{b'}{n}, \frac{c'}{n}) = (b,c)$.
כלומר, לפחות מספר רציונאלי אחד, $\frac{\hat{z}}{n}$, קיים באינטרוול (b,c).

טענה 22: יהיו $b, c \in \mathbb{R}$. אם $c > b$, אזי (b,c) מכיל אינסוף מספרים רציונאליים.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים אינטרוול (b,c) שמכיל מספר סופי של מספרים רציונאליים. יהיו $a_1, \ldots, a_n$ כל המספרים הרציונאליים באינטרוול (b,c). לכל קבוצה סופית של מספרים ממשיים קיים מקסימום; יהי $q = \max a_i$. אז $b < q < c$ ו־$(q,c) \subseteq (b,c)$ לא מכיל נקודות רציונאליות, בסתירה לצפיפות $\mathbb{Q}$.

1.5 שורשים וחזקות

טענה 23: קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־$r^2 = 2$.[13]

הוכחה. נגדיר $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\right\}$.[14] U חסומה מלעיל (למשל, על־ידי 2), לכן קיים ל־U חסם עליון. יהי $r \in \mathbb{R}$ החסם העליון של U.

למה 1.23: $r^2 = 2$

הוכחה. נניח בשלילה כי $r^2 > 2$. עבור $\varepsilon > 0$, נתבונן ב־$(r-\varepsilon)^2$:

$$(r-\varepsilon)^2 = r^2 - 2\varepsilon r + \varepsilon^2 \geq r^2 - 2\varepsilon r$$

עבור ε מספיק קטן, גם $r^2 - 2\varepsilon r > 2$: אם ניקח $2\varepsilon r < r^2 - 2$, נקבל $\varepsilon < \frac{r^2-2}{2r}$ ו־$r^2 < (r-\varepsilon)^2 < 2$. לכן $r - \varepsilon$ הוא חסם מלעיל של U, בסתירה לכך ש־$\sup U = r$.
כעת נניח בשלילה כי $r^2 < 2$. נתבונן ב־$(r+\varepsilon)^2$, עבור $0 < \varepsilon < r$:

$$(r+\varepsilon)^2 = r^2 + 2\varepsilon r + \varepsilon^2 = r^2 + \varepsilon(2r+\varepsilon) \leq r^2 + 3\varepsilon r$$

אם $\varepsilon < \frac{2-r^2}{3r}$ מתקיים $3\varepsilon r < 2 - r^2$ ולכן $(r+\varepsilon)^2 \leq r^2 + 3\varepsilon r < 2$. אז $(r+\varepsilon)^2 \in U$ ו־r איננו חסם מלעיל – סתירה.

הגדרה. יהי $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. נסמן $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{פעמים } n}$. בנוסף, נגדיר עבור $a \neq 0$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (a^n)^{-1}$. חזקה

טענה 24:
$$\begin{aligned} a^{n+m} &= a^n \cdot a^m \\ a^{kn} &= (a^n)^k \end{aligned}$$

[13] עד כה, הראינו ש־$\sqrt{2}$ אינו רציונאלי, אך לא הוכחנו ממשיות. על־מנת להוכיח זאת, נשתמש בתכונה היחידה שהממשיים מקיימים אך לא הרציונאליים – שלמות (או, באופן שקול, קיום סופרמום).
[14] אפשר גם לקחת רק את החיוביים; זה לא משנה.

הגדרה. יהי $0 < a$, $n \in \mathbb{N}$. $r = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ הוא המספר הממשי החיובי המקיים $r^n = a$. שורש

טענה 25: יהי $0 < a$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < x, y \in \mathbb{R}$. אז $x^n = y^n = a \Longrightarrow x = y$.[15]

הוכחה. נניח בשלילה כי $0 < y < x$. מכאן, $y^n < x^n$, בסתירה להנחה $x^n = y^n$.

משפט 26: לכל $0 < n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש־$r^n = a$ ($r = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$).

הוכחה. ניתן להכליל את טענה 23 לקיום שורש ריבועי לכל ממשי חיובי.

למה 1.26: לכל $1 < u$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $1 < x \in \mathbb{R}$ כך ש־$1 < x^n < u$.

הוכחה. $n \geq 1$, לכן $n < 2^n$ ומכאן לכל $x > 1$, $x^n < x^{2^n}$. אז מספיק להוכיח כי קיים $u \ni \mathbb{R}$ כך ש־$x^{2^n} < u$. נוכיח באינדוקציה על n. אם $n = 1$, נבחר $x = \frac{\sqrt{1+u}}{2}$ ומתקיים $1 < x^2 < u$ $\forall u > 1$. כעת נניח כי ל־$n \in \mathbb{N}$ נתון, לכל $0 < u$ קיים x כך $1 <$ ש־$x^{2^n} < u$: לפי הנחת האינדוקציה, קיים $1 < x \in \mathbb{R}$ כך ש־$x^{2^{n+1}} < u$ ונמצא x כך ש־$1 < x^{2^n} < \sqrt{u}$,[16] ולכן $x^{2^{n+1}} = (x^{2^n})^2 < u$.

7.11.2006 יהי $1 < a$ ויהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר $L = \{x > 0 \mid x^n \leq a\}$. זו קבוצה חסומה מלעיל, לכן קיים $r = \sup L$.

למה 2.26: $r^n = a$

הוכחה. נניח בשלילה כי $r^n < a$. אזי $\frac{a}{r^n} > 1$. לפי למה 1.26, קיים $1 < \lambda$ כך ש־$1 < \lambda^n < \frac{a}{r^n}$, ובפרט $\lambda^n < \frac{a}{r^n}$ ו־$(\lambda r)^n = r^n \lambda^n < a$. אז $\lambda r \in L$, בסתירה לכך ש־r הוא חסם מלעיל.

כעת נניח בשלילה כי $r^n > a$. אזי $\frac{a}{r^n} < 1$. לפי למה 1.26, קיים $1 < \delta$ כך ש־$1 < \delta^n < \frac{r^n}{a}$, ובפרט $\delta^n < \frac{r^n}{a}$ ו־$a < \frac{r^n}{\delta^n} = (\frac{r}{\delta})^n$, בסתירה לכך ש־$r$ חסם עליון.[17]

לכן $r^n = a$.

עבור $0 < a < 1$, מתקיים $1 < \frac{1}{a}$ ו־$\exists r \ : \ r = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$; אז $r^n = \frac{1}{a}$ ו־$(\frac{1}{r})^n = a$.

טענה 27: א. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ב. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

ג. $a < b$ $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

ד. $1 < a$, $m < n$ $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$

הוכחה. כתרגיל.

הגדרה. $a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$

טענה 28: $a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}$ ($a < 0$, $k, m, n \in \mathbb{N}$)

הוכחה. כתרגיל.

[15] טענה זו מוכיחה את יחידות השורש.

[16] נשים לב כי $x^{2^{n+1}} = x^{2^n \cdot 2} = (x^{2^n})^2$.

[17] מתקיים $1 < \delta \Longrightarrow \frac{r}{\delta} < r$

2 סדרות

סדרה

איברי הסדרה $a_i \in \mathbb{R}$; מסמנים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$[18]. ניתן להגדיר סדרה כהעתקה $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

דוגמה (סדרה קבועה). $\forall n \; a_n = c \in \mathbb{R}$

דוגמה (סדרה הרמונית). $a_n = \frac{1}{n}$

דוגמה (סדרה חשבונית). $\forall n > 1 \; a_n - a_{n-1} = t$

דוגמה (סדרה גיאומטרית). $a_1, q \neq 0 \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

סביבה של נקודה

הגדרה. יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon > 0$. הקטע הפתוח $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ נקרא **סביבה** (סביבת ε) של הנקודה a.

גבול של סדרה

הגדרה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. איבר $b \in \mathbb{R}$ הוא גבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; |a_n - b| < \varepsilon$.

הגדרה. תהי P טענה. נאמר שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את הטענה P **כמעט לכל** n אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ הטענה מתקיימת עבור a_n.

גבול של סדרה: הגדרה שקולה

הגדרה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. איבר $b \in \mathbb{R}$ הוא גבול של הסדרה (a_n) אם לכל $\varepsilon > 0$ איברי הסדרה שייכים לסביבת ε של b כמעט לכל n.

סדרה מתכנסת

סדרה מתבדרת

הגדרה. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **סדרה מתכנסת** אם קיים לה גבול. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שאין לה גבול נקראת **סדרה מתבדרת**.

דוגמה. 0 היא נקודת גבול של הסדרה ההרמונית, $(a_n = \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה. צ״ל כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $a_n - 0 < \varepsilon$.

יהי נתון $\varepsilon > 0$. הראינו (מסקנה 19) כי קיים n_0 כך ש־$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. לכל $n > n_0$ מתקיים $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, כנדרש. $\square$

דוגמה. $(a_n = \frac{(-1)^n}{n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0.

הוכחה. (אותה הוכחה, כי $\frac{1}{n} = |\frac{(-1)^n}{n} - 0|$.)

דוגמה. סדרה גיאומטרית מתבדרת אם $q > 1$ ומתכנסת ל־0 אם $q < 1$.

למה 1.28: ($q > 1$.) לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$q^n > x$.

הוכחה. $q > 1 \Leftarrow q = 1 + c$ ($c > 0$). כעת, על־פי אי־שוויון ברנולי[19], $q^n = (1+c)^n \geq 1 + nc$. יהי $x \in \mathbb{R}$. אזי קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $(1+c)^n > x$ $(1+c)^{n_0} \geq 1 + n_0 c > x$. נבחר $n_0 > \frac{x}{c}$.

[18] או $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

[19] **אי־שוויון ברנולי:** $\forall n \in \mathbb{N} \; (1+x)^n \geq 1 + nx$ ($x \geq -1$). ניתן להוכחה באינדוקציה.

בהינתן $x \in \mathbb{R}$, על־פי הלמה, $\exists n_0 \; \forall n > n_0 \; q^n > x$. לכן הסדרה מתבדרת.

למה 2.28: ($0 < q < 1$). לכל $0 < \varepsilon$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $q^n < \varepsilon$.

הוכחה. $1 > q > 0 \Longleftarrow 1 < \frac{1}{q}$. כעת, לפי הלמה הקודמת, מתקיים $\forall n > n_0 \; \frac{1}{\varepsilon} < (\frac{1}{q})^n \Longleftarrow q^n < \varepsilon$.

משפט 29: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. אם a ו־b הן נקודות גבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אזי $a = b$.

הוכחה. נניח בשלילה כי $a \neq b$. בה"כ, $a < b$. יהי $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. אזי

$$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b < b + \varepsilon \Longrightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \varnothing$$

a נקודת גבול, לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. b נקודת גבול, לכן קיים n_1 כך שלכל $n > n_1$ $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. לכן אם ניקח $n > max(n_0, n_1)$, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, בסתירה לכך שהחיתוך ריק.

טענה 30: תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות. אם $a_n = b_n$ כמעט לכל n, אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Longleftrightarrow$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. אם הן מתכנסות, יש להן אותו גבול.

הוכחה. נסמן ב־$\hat{n}$ את האינדקס שהחל ממנו שתי הסדרות משתוות.
אם (a_n) מתכנסת, אזי $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \; |a_n - a| < \varepsilon$. כעת:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 = \max(n_0, \hat{n}) \; \forall n > n_1 \; |b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$$

9.11.2006

הגדרה. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **חסומה מלעיל** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq M$. סדרה חסומה מלעיל
סדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **חסומה מלרע** אם קיים $C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $b_n \geq C$. סדרה חסומה מלרע
סדרה $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלעיל ומלרע. סדרה חסומה

טענה 31: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.

הוכחה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. אזי יש לה גבול. נסמנו ב־a. נבחר $\varepsilon = 1$. מהתכנסות (a_n) נובע שקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $|a_n - a| < 1$.
נגדיר $M = \max\{a + 1, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$, $C = \min\{a - 1, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$.

טענה 32: תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות. אם קיים $\hat{n}$ כך שלכל $n > \hat{n}$ מתקיים $b_n \leq a_n$, אז $\lim b_n \leq \lim a_n$.

הוכחה. נסמן $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. נניח בשלילה כי $a < b$. מהתכנסות הסדרות נקבל שקיים $n_1 = \max(n_0^a, n_0^b)$ כך שלכל $n > n_1$ $|a_n - a| < \varepsilon$ ו־$|b_n - b| < \varepsilon$. נבחר $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. כלומר, $a_n < a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < b_n$ כמעט לכל n, בסתירה לכך שכמעט לכל n $b_n \leq a_n$.

13.11.2006

משפט 33 (משפט הסנדוויץ'): תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש־(a_n) ו־(c_n) מתכנסות לאותו גבול L. נניח כי $\exists M\ \forall n>M\ a_n\le b_n\le c_n$. אזי $\lim b_n=L$.

הוכחה. צ"ל $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ |b_n-L|<\varepsilon$.

יהי נתון ε. (a_n) ו־(c_n) מתכנסות ל־L, לכן קיימים n_1, n_2 כך שמתקיים $\forall n>n_1\ |a_n-L|<\varepsilon$, $\forall n>n_2\ |c_n-L|<\varepsilon$. נגדיר $n_0=\max(n_1,n_2,M)$. אזי $\forall n>n_0\ L-\varepsilon<a_n\le b_n\le c_n<L+\varepsilon\Longrightarrow|b_n-L|<\varepsilon\Longrightarrow b_n\overset{n\to\infty}{\to}L$.

דוגמה. יהי $1<\alpha\in\mathbb{Q}$. אזי $\lim\frac{1}{n^\alpha}=0$.

הוכחה. $\forall n\in\mathbb{N}\ (0\leftarrow)0\le\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{n}(\to0)$. לפי למת הסנדוויץ', $\lim\frac{1}{n^\alpha}=0$.

דוגמה. יהי $0<\alpha<1$. אזי $\lim\sqrt[n]{a}=1$.

הוכחה. ראשית, $a\le a_n=\sqrt[n]{a}<1$. נרצה להראות כי $\lim\sqrt[n]{a}=1$. נניח בשלילה שהסדרה אינה מתכנסת ל־1. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שקיימים אינסוף אינדקסים n שעבורם $\sqrt[n]{a}<1-\varepsilon$.[20] כלומר, קיימים אינסוף אינדקסים n_k כך ש־$\sqrt[n_k]{a}<1-\varepsilon\Longleftarrow a<(1-\varepsilon)^{n_k}\to0$. אולם לכל $\delta>0$ (ובפרט, לכל $0<\delta<a$) קיים k_0 כך שלכל $k_0<k$ $(1-\varepsilon)^{n_k}<\delta<a$, בסתירה להנחת השלילה. לכן הסדרה מתכנסת ל־1.

דוגמה. $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

הוכחה. נניח כי הסדרה אינה מתכנסת ל־1. אזי קיים $\varepsilon>0$ וסדרה אינסופית של אינדקסים $n_1,n_2,\ldots$ כך ש־$\sqrt[n_k]{n_k}>1+\varepsilon$.

$$\forall k\ 1+\varepsilon<\sqrt[n_k]{n_k}\iff(1+\varepsilon)^{n_k}<n_k$$

על־פי נוסחת הבינום:

$$(1+\varepsilon)^{n_k}=1+n_k\varepsilon+\binom{n_k}{2}\varepsilon^2+\ldots>\binom{n_k}{2}\varepsilon^2=\frac{n_k(n_k-1)}{2}\varepsilon^2$$

$$\forall k\ \frac{n_k(n_k-1)}{2}\varepsilon^2<(1+\varepsilon)^{n_k}<n_k\Longrightarrow\frac{n_k-1}{2}\varepsilon^2<1\Leftrightarrow0<\varepsilon^2<\frac{2}{n_k-1}$$

בסתירה לכך שהסדרה אינה מתכנסת ל־1 – לא יכול להיות שכל איברי סדרה ששואפת ל־0 ($\frac{n_k-1}{2}$) יהיו גדולים ממספר חיובי (ε^2).

למה 34: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הטענות הבאות שקולות:

א. $\lim a_n=a$

[20] יש לשים לב שמדובר כאן על אי־התכנסות הסדרה למספר מסויים, לא על התבדרותה (אי־התכנסותה לכל מספר שהוא).

ב. $\lim(a_n - a) = 0$
ג. $\lim |a_n - a| = 0$

הוכחה. השקילות נובעת מיידית מההגדרה:
א. $\lim a_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$
ב. $\lim(a_n - a) = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$
ג. $\lim |a_n - a| = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$

טענה 35: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. $\lim a_n = a \Longrightarrow \lim |a_n| = |a|$.

הוכחה. $\lim a_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$

צ"ל כי $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ ||a_n| - |a|| < \varepsilon$. על־פי אי־שוויון המשולש, $||a_n - |a|| \leq |a_n - a|$. לכן $|a_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon$.

2.1 אריתמטיקה של גבולות

משפט 36: תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות. אזי

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

הוכחה. צ"ל $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

על־פי הנתון, $\exists n_1\ \forall n > n_1\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ וכן $\exists n_2\ \forall n > n_2\ |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

$$\forall n > n_0\ |(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

משפט 37: תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות. אזי

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

הוכחה. צ"ל $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |(a_n \cdot b_n) - ab| < \varepsilon$.

נגדיר $c = \max(|a| + 1, |b| + 1) \geq 1$. (מכאן, $|a| < c$ ועל־פי אי־שוויון המשולש, $|b_n - b| < \min(\frac{\varepsilon}{2c}, 1) \leq 1 \Longrightarrow |b_n| < |b| + 1 \leq c$.)

על־פי הנתון, מתקיים $(\leq \frac{\varepsilon}{2c})$ $\exists n_1\ \forall n > n_1\ |a_n - a| < \min(\frac{\varepsilon}{2c}, 1)$ וכן $\exists n_2\ \forall n > n_2\ |b_n - a| < \min(\frac{\varepsilon}{2c}, 1)$. נגדיר $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

$$\begin{aligned}\forall n > n_0\ |(a_n \cdot b_n) - ab| &= |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \\ &\leq |(a_n - a)b_n| + |(b_n - n)a| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2c}|b_n| + \tfrac{\varepsilon}{2c}|a| \\ &< 2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon\end{aligned}$$

משפט 38: תהיינה (a_n), (b_n) סדרות מתכנסות כך ש־$\lim b_n \neq 0$ ולכל n $b_n \neq 0$. אזי

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

הוכחה. מספיק להוכיח כי $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{lim b_n}$ ($\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < \varepsilon$). מהתכנסות b_n, קיים n_1 כך שלכל $n > n_1$ $|b - b_n| < \min(\varepsilon|b| \cdot \frac{|b|}{2}, \frac{|b|}{2})$. כמו־כן, עבור n מספיק גדול, $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. לכן $|b - b_n| < \varepsilon|b| \cdot \frac{|b|}{2} < \varepsilon|b||b_n|$, ומכאן,

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{b \cdot b_n}| = |b - b_n| \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} < \varepsilon$$

14.11.2006

טענה 39: תהי (a_n) מתכנסת, $\forall n\ a_n > 0$, $\lim a_n \neq 0$, ויהי $r \in \mathbb{Q}$[21]. אזי

$$\lim a_n^r = (\lim a_n)^r$$

הוכחה. א. נניח כי $r \in \mathbb{N}$.

$$\lim a_n^r = \lim \underbrace{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{r\ \text{פעמים}} = (\lim a_n) \cdot \ldots \cdot (\lim a_n) = (\lim a_n)^r$$

ב. נניח כי $r \in \mathbb{Z}$. אם $r = 0$, $\lim a_n^0 = \lim 1 = 1 = (\lim a_n)^0 \Longleftarrow \forall n\ a_n^0 = 1$.

אם $r < 0$,

$$\begin{aligned}\lim a_n^r = \lim \frac{1}{\underbrace{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{-r\ \text{פעמים}}} &= (\lim \tfrac{1}{a_n}) \cdot \ldots \cdot (\lim \tfrac{1}{a_n}) \\ &= \tfrac{1}{\lim a_n} \cdot \ldots \cdot \tfrac{1}{\lim a_n} = (\lim a_n)^r\end{aligned}$$

ג. נניח כי $r = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}$). נטען כי $\sqrt[m]{\lim a_n} = \lim \sqrt[m]{a_n}$. נניח בשלילה כי הסדרה $\sqrt[m]{a_n}$ אינה מתכנסת ל־$\sqrt[m]{\lim a_n}$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלסדרה אינסופית של אינדקסים n_k $|\sqrt[m]{a_{n_k}} - \sqrt[m]{\lim a_n}| > \varepsilon$. נניח כי לכל k $\sqrt[m]{a_{n_k}} - \sqrt[m]{\lim a_n} > \varepsilon$ (האפשרות השנייה – כתרגיל). אזי לכל k $\sqrt[m]{a_{n_k}} > \sqrt[m]{\lim a_n} + \varepsilon$ ומכאן $a_{n_k} > (\sqrt[m]{\lim a_n} + \varepsilon)^m > \lim a_n + \varepsilon^m$, בסתירה להתכנסות a_n, לא קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $|a_n - \lim a_n| < \varepsilon^m$.

[21] עדיין לא הגדרנו חזקות ממשיות.

ד. נניח כי $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ ($0<q\in\mathbb{N}$). אזי על־פי הסעיפים הקודמים, $\lim {a_n}^{\frac{p}{q}} = (\lim a_n)^{\frac{p}{q}} = \left((\lim a_n)^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\lim {a_n}^{\frac{1}{q}})^p$, כנדרש.

טענה 40: א. תהי (a_n) סדרה מתכנסת. נגדיר $b_k=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}a_n$ (סדרת הממוצעים). אזי $\lim b_k=\lim a_n$ (התכנסות צזארו).[22]

ב. תהי (a_n) סדרה מתכנסת, $\forall n\ a_n>0$. נגדיר $c_k=\sqrt[k]{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}$ (סדרת הממוצעים הגיאומטריים). אזי $\lim c_k=\lim a_n$.

ג. תהי (a_n) סדרה, $\forall n\ a_n>0$. נניח כי הסדרה $q_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ מתכנסת. אזי $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

הוכחה. כתרגיל.

2.2 התכנסות במובן הרחב

הגדרה. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **סדרה מתכנסת (במובן הרחב) ל־$+\infty$** אם $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n>M$. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **סדרה מתכנסת (במובן הרחב) ל־$-\infty$** אם $\forall C\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n<C$. סדרה מתכנסת ל־$+\infty$ סדרה מתכנסת ל־$-\infty$

סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מתכנסת במובן הרחב** אם היא מתכנסת או מתכנסת במובן הרחב ל־$\pm\infty$. סדרה מתכנסת במובן הרחב

דוגמה. $a_n=n$, $a_n=2^n$, $a_n=\log n$ מתכנסות במובן הרחב (ל־$+\infty$). $b_n=(-1)^n$ מתבדרת, גם במובן הרחב.

טענה 41: אם סדרה מתכנסת במובן הרחב אזי הגבול (במובן הרחב) יחיד.

הוכחה. ראשית, נניח כי הסדרה (a_n) מתכנסת ל־$L\in\mathbb{R}$. הוכחנו כי סדרה מתכנסת היא חסומה. לכן קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש־$\forall n\in\mathbb{N}\ -M<a_n<M$, ולכן הסדרה איננה מתכנסת במובן הרחב ל־$\pm\infty$.

נניח כי (a_n) מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ (עבור $-\infty$ – כתרגיל). אזי $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n>M$. סדרה כזאת איננה חסומה, ולכן אין לה גבול ממשי. עם זאת, הסדרה (a_n) חסומה מלרע, ולכן איננה מתכנסת ל־$-\infty$.

טענה 42: תהי (a_n) סדרה המתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ ותהי (b_n) סדרה חסומה מלרע. אזי $\lim(a_n+b_n)=\infty$.

הוכחה. קיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש־$\forall n\in\mathbb{N}\ b_n>C$.

צ"ל $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n+b_n>a_n+C>M$.

מהתכנסות (a_n) (במובן הרחב) ל־$+\infty$ נובע כי $\exists n_0\ \forall n>n_0\ a_n>M-C \Longleftarrow$ $\forall n>n_0\ a_n+b_n>M$. $\square$

[22] ההיפך אני בהכרח נכון: למשל, סדרת הממוצעים של הסדרה (המתבדרת) $a_n=(-1)^n$ היא $-1,0,-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{5},\ldots\to 0$.

משפט 43: תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ ותהי (b_n) סדרה שעבורה $\exists K > 0\ \forall n\ b_n > K$. אזי $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$.

הוכחה. $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \cdot b_n > M$. מהתכנסות (a_n) במובן הרחב, $\forall n > n_0\ a_n \cdot b_n > a_n \cdot K > \max(M,0) \ge M \Longleftarrow \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n > \frac{\max(M,0)}{K}$.

טענה 44: תהיינה (a_n), (b_n) סדרות כך שלכל n $b_n \le a_n$. אזי –

א. $\lim a_n = \infty \Longleftarrow \lim b_n = \infty$

ב. $\lim b_n = -\infty \Longleftarrow \lim a_n = -\infty$

הוכחה. א. $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (b_n > M \Longrightarrow a_n \ge b_n > M)$

ב. כתרגיל.

טענה 45: תהי (a_n) סדרה, $\forall n\ a_n \neq 0$.

א. $\lim \frac{1}{a_n} = 0 \Longleftarrow \lim a_n = \pm\infty$

ב. $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty \Longleftarrow \lim a_n = 0$[23]

הוכחה. א. נניח ש־$\lim a_n = +\infty$. צ"ל $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0\ \forall n > n_0\ \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$. $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon \iff |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. לפי $\lim a_n = +\infty$, עבור $M = \frac{1}{\varepsilon}$ מתקיים $\exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n > M = \frac{1}{\varepsilon}$, כנדרש.

ב. כתרגיל.

16.11.2006

2.3 סדרות מונוטוניות

סדרה מונוטונית

הגדרה. סדרה (a_n) נקראת **מונוטונית עולה** אם $\forall n\ a_n \le a_{n+1}$; **מונוטונית עולה ממש** אם $\forall n\ a_n < a_{n+q}$; **מונוטונית יורדת** אם $\forall n\ a_n \ge a_{n+1}$; **מונוטונית יורדת ממש** אם $\forall n\ a_n > a_{n+1}$.

משפט 46: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית חסומה. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה. נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה (עבור מונוטונית יורדת – כתרגיל); אזי יש לה חסם עליון $L = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. נראה כי $\lim a_n = L$.

צ"ל $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |a_n - L| < \varepsilon$. L הוא חסם עליון של (a_n), לכן $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ L - \varepsilon < a_{n_0}$. כעת, $|a_n - L| < \varepsilon \Longleftarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n > n_0\ L - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le L$.
לכן הסדרה מתכנסת.

משפט 47: כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

[23] הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ יכולה להתבדר.

הוכחה. נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית עולה. אם (a_n) חסומה, לפי המשפט הקודם היא מתכנסת במובן הצר ולכן גם במובן הרחב.

כעת נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה (מלעיל). אזי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים n_0 כך ש־$M < a_{n_0}$. ממונוטוניות (a_n), $\forall n > n_0\ M < a_{n_0} \leq a_n$, כנדרש.

דוגמה. יהי $0 < q < 1$. אזי $(a_n = q^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0.

הוכחה. ראשית, הסדרה $a_n = q^n$ היא מונוטונית יורדת ממש וגדולה מ־0. לכן, על־פי המשפט הקודם, הסדרה מתכנסת. נותר לחשב את הגבול. יהי $L = \lim a_n = \lim q^n$. נקבל

$$\lim q^n = \lim q \cdot q^{n-1} = \lim q \cdot \lim q^{n-1} = q \cdot L \Longrightarrow L = qL$$

ומכיוון ש־$0 < q < 1$, בהכרח $L = 0$.

למה 48 (הלמה של קנטור): תהי $(I_n = [a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \subseteq I_n$ ו־$\lim |I_n| = \lim(b_n - a_n) = 0$. אזי קיימת נקודה יחידה $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל n $c \in I_n$.

הוכחה. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \Longleftarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1} \subseteq I_n = [a_n, b_n]$. כלומר, (a_n) מונוטונית עולה ו־(b_n) מונוטונית יורדת. הסדרות (a_n) ו־(b_n) חסומות (על־ידי b_1 ו־a_1, בהתאמה). נוכל לסמן $c_1 = \lim a_n$, $c_2 = \lim b_n$.

למה 1.48: $c_1 = c_2$

הוכחה. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $|a_n - c_1| < \varepsilon$ ו־$|b_n - c_2| < \varepsilon$; עבור n מספיק גדול, $|a_n - b_n| < \varepsilon$. כעת:

$$\forall \varepsilon > 0\ |c_1 - c_2| \leq |c_1 - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - c_2| < 3\varepsilon$$

לכן $c_1 = c_2$.

לכל n מתקיים $a_n \leq c_1 = c_2 \leq b_n$. לכן $\forall n\ c_1 = c_2 \in [a_n, b_n]$. נותר להוכיח יחידות.

20.11.2006 נניח בשלילה כי, בה"כ, $c_1 < c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ $c_1, c_2 \in I_n$: $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$ $\Longleftarrow$ $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n$. לפי משפט הסנדוויץ', $b_n - a_n \to 0$ ו־$0 \to 0$ $\Longleftarrow$ $c_2 - c_1 \to 0$, בסתירה לכך ש־$0 < c_2 - c_1$.

2.4 המספר e

נתבונן בסדרה $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

טענה 49: הסדרה $(a_n = (n + \frac{1}{n}))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה. נראה כי הסדרה $(1 + \frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה (ממש) וחסומה.

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{n}\right)^k\cdot 1^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\cdot\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

כאשר $C_{n,k}=\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}$.

למה 1.49: א. $C_{n,k}\le 1$

ב. $C_{n+1,k}\ge C_{n,k}$

הוכחה. א. כל גורם קטן או שווה ל־1, לכן גם המכפלה.

ב. באופן כללי, אם $i<n$ אז $\frac{n-i}{n}\le\frac{(n+1)-i}{n+1}$ (הוכחה כתרגיל). לכן כל אחד מגורמי $C_{n+1,k}=\frac{(n+1)-k+1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)-k+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+1}$ גדול או שווה לגורם המקביל ב־$C_{n,k}=\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}$, לכן גם המכפלה.

למה 2.49: א. $\forall n\ (n+\frac{1}{n})^n\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

ב. $\forall n\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<3$ (הסדרה חסומה)

ג. $\forall n\ (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^n$ (הסדרה מונוטונית)

הוכחה. א. $\forall n\ (1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\cdot\frac{1}{k!}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

ב.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\ &\le 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)<3\end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} &> (1+\tfrac{1}{n})^n\\ \iff \sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1,k}\cdot\frac{1}{k!} &> \sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\cdot\frac{1}{k!}\\ \frac{1}{(n+1)!}+\sum_{k=0}^{n}C_{n+1,k}\cdot\frac{1}{k!} &\overset{\text{ב1.49}}{>} \sum_{k=0}^{n}C_{n,k}\cdot\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

המספר e

הגדרה. $e\overset{\text{def}}{=}\lim(1+\frac{1}{n})^n$. ($e$ איננו רציונאלי; e איננו אלגברי[24].)

2.5 תת־סדרות

תת־סדרה

הגדרה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ותהי נתונה סדרה עולה ממש של אינדקסים $1\le n_1<n_2<\ldots<n_k<n_{k+1}<\ldots$. הסדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ נקראת **תת־סדרה** של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

דוגמה. $(a_n=n)_{n=1}^{\infty}$. $1,2,2^2,2^3,2^4,\ldots$ היא תת־סדרה של הטבעיים.

דוגמה. תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$b_n=(-1)^n$. לסדרה זו ישנן תת־סדרות קבועות: $-1,-1,\ldots$ ו־$1,1,\ldots$.

גבול חלקי

הגדרה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ותהי $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת־סדרה של (a_n). אם תת־הסדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת [במובן הרחב], גבולה נקרא **גבול חלקי** [במובן הרחב] של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

[24] מספר אלגברי הוא פתרון של פולינום כלשהו שמקדמיו רציונאליים.

משפט 50: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת במובן הרחב. אזי כל תת־סדרה של $(a_n)_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת (במובן הרחב) לאותו גבול.

הוכחה. ראשית, נניח כי $L = \lim a_n \in \mathbb{R}$. תהי $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת־סדרה של (a_n).

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |a_n - L| < \varepsilon \Longleftarrow \forall \varepsilon > |a_{n_k} - L| < \varepsilon \Longleftarrow \forall k > k_0 = n_0$ (כי לכל k $k \leq n_k$, ומכאן $n_0 \leq n_{k_0}$).

כעת נניח כי $\lim a_n = \infty$.

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n > M \Longleftarrow \forall k > k_0 = n_0\ a_{n_k} > M$$

טענה 51: תהי (a_n) סדרה. אם לסדרה (a_n) קיימים גבולות חלקיים (במובן הרחב) שונים, אזי הסדרה (a_n) מתבדרת.

הוכחה. נניח כי לסדרה (a_n) גבולות חלקיים $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. ראשית, לא ייתכן שהסדרה (a_n) מתכנסת (במובן הרחב) ל־$+\infty$, שכן סדרה המתכנסת ל־$+\infty$ לא מכילה תת־סדרה חסומה מלעיל. (באופן דומה עבור $-\infty$.)

כעת, נניח כי $a_n \to u \in \mathbb{R}$. אם $u \neq L_1, L_2$, קיימות סביבות זרות של u, L_1, L_2, ולכן לאינסוף אינדקסים n האיברים a_n נמצאים מחוץ לסביבה הנתונה של u, בסתירה להתכנסות (a_n) ל־u. אם $u = L_1$ או $u = L_2$, נקבל סתירה להתכנסות, באותו אופן.[25]

משפט 52: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. איבר $L \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n) אס"ם כל סביבת ε של L מכילה אינסוף איברים מהסדרה (a_n).

הוכחה. ראשית, אם L גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז קיימת תת־סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L; על־פי הגדרת התכנסות תת־סדרה (a_{n_k}), כל סביבה של L מכילה את כל איברי תת־הסדרה החל ממקום מסויים, ולכן מכילה אינסוף איברים מהסדרה המקורית.

להיפך, יהי $L \in \mathbb{R}$ איבר שכל סביבה שלו מכילה אינסוף איברים מהסדרה (a_n). נבחר $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. סביבת $\varepsilon_1 = 1$ של L מכילה אינסוף איברים מהסדרה; נבחר n_1 להיות האינדקס המינימלי של איבר בסביבה זו. נבחר n_2 להיות האינדקס המינימלי הגדול מ־n_1 כך ש־a_{n_2} נמצא בסביבת $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ של L, וכו'.

למה 1.52: $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־L ($L \Longleftarrow$ גבול חלקי של (a_n)).

21.11.2006

משפט 53: תהי (a_n) סדרה. $+\infty$ הוא גבול חלקי של (a_n) אס"ם הסדרה (a_n) איננה חסומה מלעיל.

הוכחה. $+\infty$ הוא גבול חלקי של (a_n); אזי ישנה תת־סדרה (a_{n_k}) המתכנסת ל־$+\infty$ ולכן איננה חסומה מלעיל. מכאן, הסדרה (a_n) כולה איננה חסומה מלעיל.

[25] יכולנו גם להניח בשלילה כי (a_n) מתכנסת ויש לה גבולות חלקיים $L_1 \neq L_2$; לפי המשפט הקודם, היינו מקבלים $L_1 = L_2$, בסתירה להנחה.

להיפך, נניח כי (a_n) איננה חסומה מלעיל. לכל n טבעי קיים איבר בסדרה, $a_s > n$. נבנה תת־סדרה המתכנסת (במובן הרחב) ל־$+\infty$. נבחר n_1 כך ש־$a_{n_1} > 1$; נבחר n_2 כך ש־$n_2 > n_1$ ו־$a_{n_2} > 2$. ברקורסיה, בהינתן $n_1, \ldots, n_k$, נבחר אינדקס $n_k < n_{k+1}$ כך ש־$a_{n_k} > k$.

למה 1.53: תת־הסדרה (a_{n_k}) מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

הוכחה. כתרגיל.

משפט 54 (בולצ׳אנו־ויירשטראס): לכל סדרה חסומה (a_n) ישנה תת־סדרה מתכנסת.

הוכחה. תהי (a_n) סדרה חסומה. קיימים מספרים ממשיים b_0, c_0 כך שלכל n $c_0 \le a_n \le b_0$. לפחות אחד מהאינטרוולים I_1^L, I_1^R מכיל אינסוף איברים מהסדרה (a_n). נבחר a_1 מתוך אינטרוול זה. לפחות אחד מהאינטרוולים I_2^L, I_2^R מכיל אינסוף איברים מהסדרה (a_n). בהינתן האינטרוול I_k, נחצה אותו לאינטרוולים $I_{k+1}^R < I_{k+1}^L$. לפחות אחד מהם מכיל אינסוף איברים מהסדרה (a_n). נבחר $a_{n_{k+1}}$ שייך לאינטרוול המכיל אינסוף איברים, כך ש־$n_{k+1} > n_k$.

למה 1.54: הסדרה (a_{n_k}) שנבחרה מתכנסת.

הוכחה. יהי $L = \lim a_{n_k} = \bigcap_k I_k \in I_k$. על־פי הלמה של קנטור, חיתוך זה הוא נקודה בודדת. לכל k, $L \in I_k$. לפי בחירת האיברים (a_{n_k}), לכל k $a_{n_k} \in I_k$. לכן $\forall k \; |L - a_{n_k}| \le |I_k| = \frac{b_0 - c_0}{2^k}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \; \forall k > k_0 \; |L - a_{n_k}| \le \frac{b_0 - c_0}{2^k} < \frac{b_0 - c_0}{2^{k_0}} < \frac{b_0 - c_0}{k_0} < \varepsilon$$

מסקנה 55: לכל סדרה (a_n) קיימת תת־סדרה המתכנסת במובן הרחב.

הוכחה. (נובע משני המשפטים הקודמים.)

משפט 56: סדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב אס״ם יש לה גבול חלקי בודד.

הוכחה. (a_n) מתכנסת במובן הרחב $\Leftarrow$ כל תת־סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול, ולכן יש לה גבול חלקי בודד.

להוכחת הכיוון השני, נותר להראות כי לסדרה מתבדרת (במובן הרחב) יש לפחות שני גבולות חלקיים. תהי (a_n) סדרה מתבדרת במובן הרחב. נניח, בנוסף, כי (a_n) חסומה.לפי משפט קודם, ל־(a_n) קיים גבול חלקי L. (a_n) מתבדרת, לכן $a_n \not\to L$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך שקיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך ש־$|a_{n_k} - L| \ge \varepsilon$. תת־הסדרה (a_{n_k}) בעצמה חסומה, לכן לפי בולצ׳אנו־ויירשטראס יש לה גבול חלקי $\hat{L}$. $L \neq \hat{L}$ כי בכל סביבה של $\hat{L}$ ישנם אינסוף איברים מתת־הסדרה (a_{n_k}) אך בסביבת ε של L אין בכלל איברים מתת־הסדרה (a_{n_k}).

כעת נניח כי (a_n) איננה חסומה. אם (a_n) לא חסומה מלעיל ולא חסומה מלרע, אזי $\pm\infty$ הם גבולות חלקיים שלה. לכן ניתן להניח כי (a_n) חסומה מלרע ולא חסומה מלעיל. (a_n) איננה חסומה מלעיל, לכן $+\infty$ הוא גבול חלקי שלה. אבל (a_n) מתבדרת במובן הרחב – $a_n \not\to \infty$, לכן

קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שקיימים אינסוף איברים מהסדרה (a_n) הקטנים מ־M, ולכן קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) כך שלכל k $M < a_{n_k}$. תת־סדרה זו חסומה, לכן לפי בולצ'אנו־ויירשטארס יש לה גבול חלקי L. מכאן, L ו־$+\infty$ הם גבולות חלקיים של הסדרה (a_n).

2.6 גבולות עליונים ותחתונים

הגדרה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. גבול עליון ותחתון

$$\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{M \in \mathbb{R} \mid \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \le M\} = \inf U$$

$$\liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{C \in \mathbb{R} \mid \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \ge C\} = \sup L$$

אם (a_n) איננה חסומה מלעיל, אזי $\overline{\lim}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$; אם (a_n) איננה חסומה מלעיל, אזי $\underline{\lim}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$.

דוגמה.

$-1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$	$\overline{\lim} = +\infty$	$\underline{\lim} = -\infty$
$5, 7, -1, 1, -1, 1, \ldots$ או $a_n = (-1)^n$	$\overline{\lim} = 1$	$\underline{\lim} = -1$
$a_n = 1 + \frac{1}{n}$	$\overline{\lim} = 1$	$\underline{\lim} = 1$

משפט 57: תהי (a_n) סדרה חסומה. אזי $\liminf a_n \le \limsup a_n$.

הוכחה. יהי $M \in U$, $C \in L$. אזי קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$ $C \le a_{n_1}$ וגם $a_{n_1} \le M$. מכאן, $C \le a_{n_1} \le M \Longleftarrow C \le M \Longleftarrow L \le U \Longleftarrow \sup L \le \inf U$.

23.11.2006

טענה 58: יהי $L = \overline{\lim}\, a_n$. אזי לכל $L < t$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $a_n < t$.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיים $L < t$ כך שלאינסוף אינדקסים $n \in \mathbb{N}$ $t \le a_n$. אזי אם $\hat{t} < t$, $\hat{t} \notin U = \{M \in \mathbb{R} \mid \exists n_0\ \forall n > n_0\ a_n \le M\}$. לכן נוכל לכתוב $U \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid t \le x\} \Longleftarrow$ $L < t \le \inf U$ – סתירה.

משפט 59: תהי (a_n) סדרה חסומה. אזי $\overline{\lim}\, a_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של (a_n) ו־$\underline{\lim}\, a_n$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר של (a_n).

הוכחה. נוכיח עבור $\overline{\lim}\, a_n$.

למה 1.59: אם $\overline{\lim}\, a_n < t$, t איננו גבול חלקי של הסדרה (a_n).

הוכחה. לפי הטענה הקודמת, יש מספר סופי של איברים כך ש־$\overline{\lim}\, a_n < t < a_n$. לכן סביבת ε של t תכיל לכל היותר מספר סופי של איברים, ו־t איננו גבול חלקי.

למה 2.59: בסביבת ε של $\overline{\lim}\, a_n$ ישנם אינסוף אינדקסים.

הוכחה. נניח בשלילה כי עבור ε כלשהו יש מספר סופי של איברים בסביבת $\overline{\lim}\, a_n$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$(\overline{\lim}\, a_n - \varepsilon, \overline{\lim}\, a_n + \varepsilon)$ מכיל לכל היותר מספר סופי של איברים מהסדרה (a_n). לפי טענה קודמת, גם עבור $\overline{\lim}\, a_n + \varepsilon$ יש מספר סופי של איברים שגדולים ממנו. מכאן, יש לכל היותר מספר סופי של איברים מ־(a_n) המקיימים $\overline{\lim}\, a_n - \varepsilon < a_n$, ולכן $\overline{\lim}\, a_n - \varepsilon \in U$. כלומר, $\inf U \leq \overline{\lim}\, a_n - \varepsilon$ – סתירה.

מסקנה 60: תהי (a_n) סדרה חסומה. (a_n) מתכנסת אס"ם $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

טענה 61: תהיינה (a_n) ו־(b_n) סדרות חסומות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $b_n \leq a_n$. אזי –
א. $\overline{\lim}\, a_n \geq \overline{\lim}\, b_n$
ב. $\underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}\, a_n$

טענה 62: תהיינה (a_n) ו־(b_n) סדרות חסומות. אזי –
א. $\overline{\lim}\, a_n = -\underline{\lim} -a_n$
ב. $\underline{\lim}\, a_n = -\overline{\lim} -a_n$
ג. $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$
ד. $\underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$
ה. אם לכל n $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\overline{\lim}(a_n \cdot b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$
ו. אם לכל n $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\underline{\lim}\, a_n \cdot b_n \geq \underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n$

טענה 63: תהי (b_n) סדרה חסומה ותהי (a_n) סדרה מתכנסת. אזי בטענות ג', ד', ה' וו' מתקיים שוויון.

2.7 סדרות קושי

27.11.2006

סדרת קושי

הגדרה. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n \geq n_0$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

משפט 64: כל סדרה מתכנסת (במובן הצר) היא סדרת קושי.

הוכחה. תהי (a_n) סדרה מתכנסת. $L = \lim a_n$. יהי נתון $\varepsilon > 0$. הסדרה מתכנסת, לכן עבור $\frac{\varepsilon}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכל $m, n > n_0$, $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן, על־פי אי־שוויון המשולש,

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

טענה 65: תהי (a_n) סדרת קושי. אזי (a_n) סדרה חסומה.

הוכחה. ניקח $\varepsilon = 1$. קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ $1 > |a_m - a_n|$. נגדיר $M = \max(a_1, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0+1} + 1)$, $C = \min(a_1, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0+1} - 1)$. אזי מתקיים $\forall n\; C \le a_n \le M$.

משפט 66: תהי (a_n) סדרה. אזי (a_n) סדרה מתכנסת אס"ם (a_n) סדרת קושי.

הוכחה. ($\Longleftarrow$) הוכחנו כי אם (a_n) מתכנסת, (a_n) קושי.

($\Longrightarrow$) נניח כי (a_n) קושי. סדרת קושי היא בפרט סדרה חסומה. לפי בולצ׳אנו־ויירשטראס, לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת – $a_{n_k} \to L$. יהי נתון $\varepsilon > 0$. קיים k_0 כך שלכל $k > k_0$ $\frac{\varepsilon}{2} > |a_{n_k} - L|$. הסדרה (a_n) היא סדרת קושי, לכן קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. נבחר $n_1 = \max(n_0, n_{k_0+1})$. יהי $k_1 \ge k + 1$ אינדקס שעבורו $n_0 \le n_1 < n_{k_1}$. אזי $\frac{\varepsilon}{2} > |a_{n_{k_1}} - L|$, כי $n_{k_1} > n_1$, ו־$\frac{\varepsilon}{2} > |a_n - a_{n_{k_1}}|$ $\forall n > n_1$, כי $n_{k_1} > n_0$. מכאן,

$$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_{k_1}}) - (a_{n_{k_1}} - L)| \le |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - L| < \varepsilon$$

(יתרון תנאי קושי על תנאי ההתכנסות הוא שאין צורך לדעת מה הגבול על־מנת לקבוע התכנסות.)

2.8 חזקות עם מעריך ממשי

עד כה, דנו ב־a^q ($q \in \mathbb{Q}$, $0 < a \in \mathbb{R}$).

הגדרה. $a^x = \lim a^{r_n}$, $0 < a \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x \in \mathbb{R}$ חזקה ממשית

טענה 67: יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהיינה (r_n), (s_n) סדרות של מספרים רציונאליים כך ש־$\lim r_n = \lim s_n = x$. אם הסדרות (a^{r_n}), (a^{s_n}) מתכנסות, אזי מתקיים $\lim a^{r_n} = \lim a^{s_n}$.

הוכחה. **למה 1.67:** נניח כי (v_n) היא סדרה שעבורה $\lim v_n = 0$; אזי (a^{v_n}) מתכנסת, ו־$\lim a^{v_n} = 1$.

הוכחה. $\mathbb{Q} \ni v_n \to 0$. יהי $k \in \mathbb{N}$. אזי קיים $n(k)$ כך שלכל $n > n(k)$ $\frac{1}{k} > |v_n|$. אזי $a^{-\frac{1}{k}} < a^{v_n} < a^{\frac{1}{k}}$. בהינתן $\varepsilon > 0$, נבחר k כך ש־$a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$. עבור $n > n(k)$, נקבל $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{v_n} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$.

כעת, נתון $s_n \to x$, $r_n \to x$. $(a^{r_n}) \to L_1 > 0$, $(a^{s_n}) \to L_2 > 0$.

$$\frac{L_1}{L_2} = \lim \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim a^{r_n - s_n} \overset{\text{למה}}{=} 1 \Longrightarrow L_1 = L_2$$

טענה 68: $a > 1$, $\mathbb{Q} \ni r_n \to x$. אזי הסדרה (a^{r_n}) מתכנסת.

הוכחה. $r_n \to x$. לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $[x] - 2 < r_n < [x] + 2$. לכן נקבל $\forall n > n_0\ a^{[x]-2} < a^{r_n} < a^{[x]+2}$, ו־$(a^{r_n})$ סדרה חסומה. לפי משפט בולצ'אנו־ויירשטראס, קיימת תת־סדרה $(a^{r_{n_k}})$ המתכנסת לגבול L.

למה 1.68: $\lim a^{r_n} = L$

הוכחה. $b_k = a^{r_{n_k}} \to L$. $r_n \to x$; לכן $r_{n_k} \to x$, ומכאן $c_k = a^{r_k} \to L$.

טענה 69: יהי $a > 0$, ותהי (x_n) סדרה כך ש־$\lim x_n = x$. אזי $\lim a^{x_n} = a^x$.

הוכחה. לכל n נבחר רציונאלי r_n המקיים $|r_n - x_n| < \frac{1}{n}$, $|a^{r_n} - a^{x_n}| < \frac{1}{n}$.

למה 1.69: $\lim a^{r_n} = a^x$

הוכחה. (r_n) היא סדרת מספרים רציונאליים. $x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n + \frac{1}{n}$. לפי משפט הסנדוויץ', נקבל $r_n \to x$. כעת, $\lim r_n = x \Longleftarrow \lim a^{r_n} = a^x$.

$a^{r_n} - \frac{1}{n} < a^{x_n} < a^{r_n} + \frac{1}{n}$. לפי משפט הסנדוויץ', נקבל $a^{x_n} \to a^x$.

28.11.2006

הראינו $2 \le \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \le 3$.

משפט 70: $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

הוכחה. למה 1.70: תהי (b_n) סדרה עולה של מספרים טבעיים כך ש־ $b_n \to \infty$. אזי $\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e$.

הוכחה. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ b_n > k$. אזי –

$$e - \varepsilon \le \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \le \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} < e$$

למה 2.70: תהי (a_n) סדרה עולה[26] של מספרים ממשיים כך ש־$a_n \to \infty$. אזי $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

הוכחה. מכך ש־$[a_n] \le a_n < [a_n] + 1$,

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

על־מנת להעריך את הגבול, נשתמש במשפט הסנדוויץ'. עבור צד שמאל (ועבור צד ימין, באופן דומה) נקבל –

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = \overbrace{\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1}}^{\to e} \cdot \overbrace{\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{-1}}^{\to 1} \to e$$

[26] לא באמת דרוש; שאיפה ל־∞ מספיקה.

למה 3.70: יהי $x \in \mathbb{R}$, $0 < a$, ותהי (a_n) סדרת ממשיים חיוביים כך ש־$a_n \to a$. אזי $a_n^x \to a^x$.

הוכחה. נתבונן בסדרה $\left(\frac{a_n}{a}\right)^x$. לכל $0 < \varepsilon$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ $1 - \varepsilon < \frac{a_n}{a} < 1 + \varepsilon$. עבור $x > 0$, $(1-\varepsilon)^{[x]+1} \le \left(\frac{a_n}{a}\right)^x \le (1+\varepsilon)^{[x]+1}$. לכן $\left(\frac{a_n}{a}\right)^x \to 1$.[27]

למה 4.70: יהי $x > 0$. אזי $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

הוכחה. אם $a_n \to a = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}} = e$,

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = a^x = e^x$$

למה 5.70: תהי ε_n סדרה אי־שלילית, $n\varepsilon_n \to 0$. אזי $\lim(1+\varepsilon_n)^n = 1$.

הוכחה.
$$\lim(1+\varepsilon_n)^n = \lim\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right]^{n\varepsilon_n}}_{\to e}$$

$3 \le \left(1+\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}$ $\exists n_0\ \forall n > n_0$ $\Longleftarrow$ $1 \leftarrow 3^{n\varepsilon_n} \ge \left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right]^{n\varepsilon_n} \ge 1$.
הטענה נובעת לפי משפט הסנדוויץ'.

למה 6.70: תהי ε_n סדרה אי־שלילית, $n\varepsilon_n \to 0$. אזי $\lim(1-\varepsilon_n)^n = 1$.

הוכחה. עבור $0 < u < 1$, $1-u = \left(1+\frac{u}{1-u}\right)^{-1}$. לכן, לפי משפט הסנדוויץ', מכיוון שמתקיים $1 \leftarrow (1+\varepsilon_n)^n \le \left(1+\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)^n \le (1+2\varepsilon_n)^n \to 1$, נקבל -

$$\lim(1-\varepsilon_n)^n = \lim\left[\left(1+\frac{\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)^n\right]^{-1} = 1$$

למה 7.70: יהי $x < 0$. אזי $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

הוכחה. נוכל לכתוב $\frac{1-\frac{x^2}{n^2}}{1-\frac{x}{n}} = \frac{(1+\frac{x}{n})(1-\frac{x}{n})}{1-\frac{x}{n}} = 1+\frac{x}{n}$. בנוסף, אם $\varepsilon_n = \frac{x^2}{n^2}$, נקבל $n\varepsilon_n \to 0$. לכן, על־פי הלמות והמשפט עבור $0 < x$,

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\frac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n} = \frac{\lim(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{\lim(1+\frac{(-x)}{n})^n} = \frac{1}{e^{-x}}$$

[27] לא על־פי משפט הסנדוויץ': הערכים התוחמים מימין ומשמאל קבועים.

3 טורים

טור — תהי (a_n) סדרת מספרים ממשיים. נסמן $S_N = a_1 + \ldots + a_N$ (**הרישא** של הטור).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} S_N$$

3.1 טורים מתכנסים

טור מתכנס — נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הגבול $\lim S_N$ קיים.

דוגמה. $a_1, \ldots, a_{n_0}, 0, 0, 0, \ldots$
$\forall N > n_0\ S_N = S_{n_0} = a_1 + \ldots + a_{n_0}$. במקרה זה, סדרת הסכומים החלקיים קבועה החל ממקום מסויים, ולכן היא מתכנסת.

דוגמה. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$; סדרת הסכומים החלקיים – $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ ($q \neq 1$).
אם $-1 < q < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
אם $q \geq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ – לא מתכנס במובן הצר.
אם $q = -1$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ לא מתכנס: $S_N = \begin{cases} 1 & N \text{ זוגי} \\ 0 & N \text{ אי־זוגי} \end{cases}$ מתבדרת.
אם $q < -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ מתבדר: S_N ($1, -|q|, |q|^2, -|q|^3, \ldots$) מתבדרת.

דוגמה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1$ מתכנס ($S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$).

טענה 71: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\lim a_n = 0$.

הוכחה. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, לכן $\lim S_N = L$. יהי נתון $\varepsilon > 0$. אזי קיים N_0 כך שלכל $N > N_0$ $|S_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. $a_n = S_n - S_{n-1}$. עבור $n > N_0 + 1$, $|S_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ו־$|L - S_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$.
לכן, על־פי אי־שוויון המשולש, נקבל כנדרש $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

דוגמה. נבנה טור מתבדר $\sum a_n$ כך ש־$a_n \to 0$. נתבונן ב־$\sum \frac{1}{n}$.

למה 1.71: לכל $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2}$.

הוכחה. $\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2k}, \ldots, \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k}$. לכן $\frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} \leq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$.

למה 2.71: $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

הוכחה. אם $\sum \frac{1}{n}$ מתכנס, אזי S_N מתכנסת ולכן S_N קושי.
יהי $\varepsilon = \frac{1}{10}$. אם S_N סדרת קושי, קיים N_0 כך שלכל $N_0 < m, n$ $|S_m - S_n| < \frac{1}{10}$.
יהי $k > N_0$. אזי גם $2k > N_0$. נקבל $\frac{1}{2} \leq |S_{2k} - S_k| < \frac{1}{10}$ – סתירה.

30.11.2006

משפט 72: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (במובן הצר) אם"ם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $N > 0$ כך שלכל $m > N$, $k > 0$ מתקיים $|a_m + \ldots + a_{m+k}| < \varepsilon$. קריטריון קושי להתכנסות

הוכחה. $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\lim S_N$ קיים $\iff$ S_N היא סדרת קושי. כלומר, לכל $0 < \varepsilon$ קיים n_0 כך שלכל $n_0 < m_1, m_2$ $|S_{m_1} - S_{m_2}| < \varepsilon$. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי $m_2 < m_1$; לכן $|S_{m_1} - S_{m_2}| = |a_{m_2+1} + \ldots + a_{m_1}| < \varepsilon$.

הגדרה. יהי $\sum a_n$ טור. נגדיר $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ **זנב הטור** של $\sum a_n$. זנב טור

משפט 73: תהי (a_n) סדרה ויהי $\sum a_n$ טור. אזי –

א. $\sum a_n$ מתכנס אם"ם כל זנב של הטור מתכנס;[28]

ב. $\sum a_n = \infty$ אם"ם כל זנב מתכנס במובן הרחב ל־∞.[29]

הוכחה. א. יהי $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס. לכן r_m מקיים את תנאי קושי, ולכן כל הטור מקיים את תנאי קושי. בנוסף, אם טור מתכנס אזי הוא מקיים את תנאי קושי, ולכן גם הזנב.

ב. נניח $\sum a_n = \infty$. אזי $\lim S_N = \infty$. נתבונן בזנב הטור $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ובסכים $\tilde{S}_N = \sum_{n=m+1}^{N} a_n$; נרצה להראות ש־$\lim \tilde{S}_N = \infty$.
$\tilde{S}_N = S_N - C$, כאשר C קבוע. על־פי טענה 42, מכיוון ש־$-C$ סדרה חסומה ו־S_N שואפת ל־∞, $\tilde{S}_N$ שואפת ל־∞.

טענה 74: תהיינה (a_n) ו־(b_n) סדרות הנבדלות אחת מהשנייה במספר סופי של איברים ($|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}| < \infty$). אזי $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ מתכנס.

הוכחה. החל ממקום מסויים a_n ו־b_n זהות, לכן נקבל שיש M כך שלכל $m > M$, $ra_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = rb_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n$.

טענה 75: $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\lim r_m = 0$.

הוכחה. ($\Longrightarrow$) ברור ממה שהראינו קודם.

($\Longleftarrow$) $\sum a_n$ מתכנס. אזי $\lim S_N = L$. ניתן לכתוב $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = L - S_m$; לכן, כנדרש, $\lim r_m = \lim(L - S_m) = L - \lim S_m = 0$.

4.12.2006

טענה 76: (a_n), (b_n) סדרות; $\sum a_n = S$, $\sum b_n = T$, ויהי $c \in \mathbb{R}$. אזי –

א. $\sum (a_n + b_n) = S + T$;

ב. $\sum c a_n = c \sum a_n = cS$.

[28] ניתן גם לטעון שהטור מתכנס אם"ם קיים זנב של הטור שמתכנס.

[29] גם הטענה המקבילה לגבי $-\infty$ נכונה.

הוכחה. א. $S_N=\sum_{n=1}^N a_n$, $T_N=\sum_{n=1}^N b_n$. $S=\lim S_N$, $T=\lim T_N$.
נגדיר $M_N=\sum_{n=1}^N(a_n+b_n)=S_N+T_N$.
$$\sum_{n=1}^\infty(a_n+b_n)=\lim M_N=\lim(S_N+T_N)=\lim S_N+\lim T_N=S+T$$
ב. נגדיר $U_N=\sum_{n=1}^N ca_n=cS_N$.
$$\sum_{n=1}^\infty ca_n=\lim U_N=\lim cS_N=c\lim S_N=cS=c\sum a_n$$

3.2 טורים חיוביים

טור חיובי

הגדרה. טור $\sum a_n$ נקרא **טור חיובי** אם $\forall n\; a_n>0$.

אם $S_N=\sum_{n=1}^N a_n$, נקבל $\forall N\geq 1 S_N\leq S_{N+1}$. כלומר, סדרת הסכומים החלקיים S_N היא סדרה מונוטונית עולה (ממש).

טענה 77: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אזי $\sum a_n$ מתכנס במובן הרחב, ואם סדרת הסכומים החלקיים חסומה (מלעיל) אזי $\sum a_n$ מתכנס.

מבחן ההשוואה

משפט 78 (מבחן ההשוואה): יהיו $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים כך ש־$\forall n\; a_n\leq b_n$ ($\sum b_n$ **שולט** על $\sum a_n$). אזי –
א. $\sum b_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס (במובן הצר);
ב. $\sum a_n$ מתבדר $\Longleftarrow$ $\sum b_n$ מתבדר.

הוכחה. א. $\sum b_n$ מתכנס, לכן סדרת הסכומים החלקיים $S_N=\sum_{n=1}^N b_n$ חסומה, ולכן הסדרה $T_N=\sum_{n=1}^N a_n$ חסומה. כמו־כן, T_N מונוטונית. מכאן, T_N מתכנסת, ולכן, על־פי הגדרה, $\sum a_n$ מתכנס.
ב. (כשלילת א׳, או, בדרך החיוב, לפי כך שסד׳ מונוטונית בלתי־חסומה מתבדרת.)

משפט 79: $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים חיוביים.
א. אם קיים $u>0$ כך ש־$\forall n\; \frac{a_n}{b_n}\leq u$, אזי אם $\sum b_n$ מתכנס $\sum a_n$ מתכנס.
ב. אם קיימים $u>v>0$ כך ש־$\forall n\; v\leq\frac{a_n}{b_n}\leq u$, אזי $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum b_n$ מתכנס.

הוכחה. א. נניח $\forall n\; a_n\leq u\cdot b_n$. $\sum b_n$ מתכנס $\iff$ $\sum u\cdot b_n$ מתכנס. ממשפט קודם, $\sum u\cdot b_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.
ב. $\forall n\; 0<v\leq\frac{a_n}{b_n}\leq u$. מסעיף א׳, $\sum b_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.
$\forall n\; v\leq\frac{a_n}{b_n}\implies\frac{b_n}{a_n}\leq\frac{1}{v}$. מסעיף א׳, $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum b_n$ מתכנס.
לכן $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum b_n$ מתכנס.

מבחן השורש של קושי

משפט 80 (מבחן השורש של קושי): יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם קיים $0<q<1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n}\leq q<1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. $\forall n\; \sqrt[n]{a_n}<q\implies a_n<q^n$. על־פי מבחן ההשוואה, $\sum q^n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

דוגמה. $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{(n^2)}}{2^{(n^3)}}$

$\sqrt[n]{\frac{3^{(n^2)}}{2^{(n^3)}}} = \sqrt[n]{\frac{(3^n)^n}{(2^{(n^2)})^n}} = \frac{3^n}{2^{n^2}} = \left(\frac{3}{2^n}\right)^n$

$\forall n \geq 2\ \frac{3}{2^n} \leq \frac{3}{4} < 1 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2^n}\right)^n \leq \frac{3}{4} < 1$. לכן ה־2־זנב $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{(n^2)}}{2^{(n^3)}}$ מתכנס, לפי מבחן קושי, ולכן הטור כולו מתכנס.

מסקנה 81: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אזי –
א. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$ אזי $\sum a_n$ מתבדר;
ב. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. א. נניח כי $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$. אם $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \infty$, (a_n) איננה חסומה; מכאן, סדרת הסכומים החלקיים איננה חסומה, ו־$\sum a_n$ מתבדר. כעת, נניח כי $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$. L הוא בפרט גבול חלקי; לכן ישנם אינסוף אינדקסים n שעבורם $1 < L-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon$. כלומר, לאינסוף אינדקסים n $(L-\varepsilon)^n < a_n$. הסדרה (a_n) איננה חסומה (היא מונוטונית עולה ושואפת ל־∞, על־פי אי־השוויון האחרון), לכן סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ איננה חסומה והטור מתבדר.

ב. $L = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$.

למה 1.81: כמעט לכל n $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$.

הוכחה. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon$. לכן, לפי הגדרת גבול עליון, מעבר ל־$L+\varepsilon$ יש לכל היותר מספר סופי של איברים מהסדרה $\sqrt[n]{a_n}$.

קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon < 1$. נתבונן בזנב – $\forall n \geq N_0 + 1\ \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon < 1$. לפי מבחן השורש של קושי, זנב זה מתכנס, ולכן $\sum a_n$ מתכנס.

משפט 82 (מבחן המנה): יהי $\sum a_n$ טור חיובי (ממש). מבחן המנה
א. אם $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס;
ב. אם $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אזי $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה. א. $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 q^{n-1}$

לכן $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1}{q} \cdot q^n} = \sqrt[n]{\frac{1}{q}} \cdot q$. מכיוון ש־$\lim\ \sqrt[n]{\frac{a_1}{q}} = 1$,

$$\exists N_0\ \forall n > N_0\ \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1}{q}} \cdot q < (1+\varepsilon)q < 1$$

ולפי מבחן השורש $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_n$ מתכנס. לכן $\sum a_n$ מתכנס.

ב. $\forall n\ a_1 \leq a_n$. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ מתבדר $\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

טענה 83: $\sum a_n$ חיובי. $\overline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס; $\underline{\lim}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתבדר.

הוכחה. כתרגיל.

5.12.2006 **משפט 84 (מבחן העיבוי):** תהי (a_n) סדרה חיובית מונוטונית יורדת ($a_n \to 0$). לכל $j \in \mathbb{N}$ נגדיר $b_j = 2^j a_{2^j}$. אזי $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum b_j$ מתכנס. מבחן העיבוי

הוכחה. תהי (a_n) סדרה מונוטונית יורדת, $\forall n\ a_n > 0$. עבור $n > m$,

$$(n-m)a_n = \sum_{k=m}^{n-1} a_n \le \sum_{k=m}^{n-1} a_k \le \sum_{k=m}^{n-1} a_m = (n-m)a_m$$

כעת, נבחר $n = 2^k$, $m = 2^{k-1}$:

$$2^{k-1} \cdot a_{2^k} \le 2^{k-1} \cdot a_{2^k-1} \le \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k-1} a_s \le 2^{k-1} \cdot a_{2^{k-1}}$$

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $\left(\sum_{2^{j-1}}^{2^j-1} a_s\right)$ $S_{2^k-1} = \sum_{s=1}^{2^k-1} a_s = \sum_{j=1}^{k}$. אם נסמן $b_j = 2^j a_{2^j}$, נקבל

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{k} b_j \le \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{2^{j-1}}^{2^j-1} a_s\right) \le \sum_{j=1}^{k} b_{j-1} = a_1 + \sum_{j=1}^{k-1} b_j$$

דוגמה. תהי $\left(a_n = \frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(0 < \alpha)$ סדרה מונוטונית יורדת, $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$. נגדיר $b_j = 2^j a_{2^j} = 2^j \cdot \frac{1}{(2^j)^\alpha} = 2^{j(1-\alpha)}$. על־פי מבחן העיבוי, $\sum a_n$ מתכנס $\iff \sum_{j=1}^{\infty}(2^{1-\alpha})^j$ מתכנס. זהו טור גיאומטרי, $q = 2^{1-\alpha}$ – לכן הוא מתכנס אס"ם $q < 1 \iff 2^{1-\alpha} < 1 \iff 1 < \alpha$.

טענה 85: תהי (a_n) סדרה מונוטונית היורדת ל־0 כך ש־$\sum a_n$ מתכנס. אזי $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 11.12.2007

הוכחה. (יהי $n > 1$).

$$\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{\infty} a_k \ge \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n} a_k \ge \sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{k} a_n \ge \frac{n}{2}a_n \ge 0$$

מכיוון ש־$\sum a_n$ מתכנס, הזנב $\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{\infty} a_k$ שואף ל־0; לכן, על־פי משפט הסנדוויץ', $\frac{na_n}{2} \to 0$ ו־$na_n \to 0$.

דוגמה (הכרחיות המונוטוניות). נגדיר $a_n = n$ אם $n = k^3$ עבור k טבעי כלשהו, $a_n = 0$ אחרת; אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ומתכנס, אולם ל־na_n יש שני גבולות חלקיים (1 ו־0), ולכן אין לה גובל.

3.3 טורים עם סימנים מתחלפים

התכנסות בהחלט

הגדרה. תהי (a_n) סדרה ויהי $\sum a_n$ טור. נמאר שהטור $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. 5.12.2006

משפט 86: $\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. נניח כי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Longleftarrow$ $\sum |a_n|$ מתכנס. לכן, לפי תנאי קושי להתכנסות, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0\ \forall m > N_0, k \geq 0\ \left|\sum_{n=m}^{m+k} |a_n|\right| < \varepsilon$. על־פי אי־שוויון המשולש, $|\sum_{n=m}^{m+k} a_n| \leq \sum_{n=m}^{m+k} |a_n| < \varepsilon$. לכן $\sum a_n$ מקיים את תנאי קושי להתכנסות.

דוגמה. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס בהחלט (כי $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס), לכן מתכנס.

דוגמה. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ איננו מתכנס בהחלט, אך מתכנס.

משפט 87: א. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Longleftarrow$ $\sum ca_n$ מתכנס בהחלט;

ב. $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתכנסים בהחלט $\Longleftarrow$ $\sum(a_n + b_n)$ מתכנס בהחלט.

הוכחה. א. $\sum |a_n|$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum |c||a_n|$ מתכנס.

ב. $\forall n\ |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$. לכן $\sum (|a_n| + |b_n|)$ שולט על $\sum |a_n + b_n|$, ולפי מבחן ההשוואה, מכיוון ש־$\sum (|a_n| + |b_n|) = \sum |a_n| + \sum |b_n|$ מתכנס, $\sum |a_n + b_n|$ מתכנס.

הגדרה. תהי (a_n) סדרה אי־שלילית מונוטונית יורדת כך ש־$\lim a_n = 0$. טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ נקרא **טור לייבניץ**. טור לייבניץ

משפט 88: טור לייבניץ מתכנס.

דוגמה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$ ($0 < \alpha$) מתכנס.

הוכחה. למה 1.88: תהי S_N סדרת הסכומים החלקיים של טור לייבניץ ($S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} a_n$). אזי –

א. S_{2N} היא סדרה מונוטונית עולה;

ב. S_{2N-1} היא סדרה מונוטונית יורדת;

ג. $\forall j, k \in \mathbb{N}\ S_{2j} \leq S_{2k-1}$.

הוכחה. א. $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} a_n = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2N-1} - a_{2N})$. מכיוון ש־$a_n$ מונוטונית יורדת, $a_1 \geq \ldots \geq a_{2N-1} \geq a_{2N}$. לכן S_{2N} היא סכום של איברים אי־שליליים, ולכן S_N מונוטונית עולה.

ב. $S_{2N-1} = \sum_{n=1}^{2N-1} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2N-2} - a_{2N-1})$. זוהי סדרה מונוטונית יורדת.

ג. יהיו $j, k \in \mathbb{N}$. נחבר $t > j, k$. S_{2N} סדרה מונוטונית עולה, לכן $S_{2j} \leq S_{2t}$. S_{2N-1} סדרה מונוטונית יורדת, לכן $S_{2t-1} \leq S_{2k-1}$. בנוסף, $S_{2t} - S_{2t-1} = (-1)^{2t+1} a_{2t} = -a_{2t} \leq 0$. לכן $S_{2t} \leq S_{2t-1}$. מכאן, $S_{2j} \leq S_{2t} \leq S_{2t-1} \leq S_{2k-1}$.

מהלמה, S_{2N} חסומה ולכן מתכנסת; S_{2N-1} חסומה ולכן מתכנסת. נקבל – $\lim S_{2N} - \lim S_{2N-1} = \lim(S_{2N} - S_{2N-1}) = \lim a_{2N} = 0$ (הנחנו $a_n \to 0$).

7.12.2006 $\forall N\ S_{2N+1} \le S_1 = a_1$ ו־$\forall N\ S_{2N} \le a_1$. לכן $\lim S_N \le a_1$.
הזנב $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ אף הוא טור לייבניץ. לכן, מאי־השוויון הקודם, נקבל $|r_m| \le a_{m+1}$.

טור חסום **הגדרה.** טור $\sum a_n$ נקרא **טור חסום** אם סדרת הסכומים החלקיים $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ היא סדרה חסומה.

דוגמה. $\sum(-1)^n$ טור חסום – הסכומים החלקיים הם 0 או 1.

בהינתן $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ ו־$(b_i)_{i=1}$ סדרות, נרצה להעריך (כלומר, לחסום) את הסכום $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$. נניח ש־(a_i) סדרה יורדת. נסמן $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ ($B_0 = 0$).

טענה 89: תחת תנאים אלה, $\sum_{i=1}^{m} a_ib_i = a_m \cdot B_m + \sum_{i=1}^{m-1} B_i(a_i - a_{i+1})$.

הוכחה. נשים לב כי $b_i = B_i - B_{i-1}$. אז

$$\sum_{i=1}^{m} a_ib_i = \sum_{i=1}^{m}(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} a_iB_i - \sum_{i=1}^{m} a_iB_{i-1}$$

על־ידי שינוי אינדקסים והוצאת האיבר ה־m־י מהטור הראשון, נקבל

$$\sum_{i=1}^{m} a_ib_i = a_mB_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_iB_i - \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}B_i$$

אבל $B_0 = 0$, ולכן למעשה קיבלנו

$$\sum_{i=1}^{m} a_ib_i = a_mB_m + \sum_{i=1}^{m-1} B_i(a_i - a_{i+1})$$

כעת נוכל להעריך את הסכום: $|\sum_{i=1}^{m} a_ib_i| = |a_mB_m + \sum_{i=1}^{m-1} B_i(a_i - a_{i+1})| \le |a_mB_m| + |\sum_{i=1}^{m-1} B_i(a_i - a_{i+1})| \le \sum_{i=1}^{m-1} |B_i|(a_i - a_{i+1})$. (מכיוון ש־$(a_i)$ מונוטונית יורדת, כל ההפרשים $a_i - a_{i+1}$ חיוביים.)

נניח שהטור $\sum b_i$ חסום ונבחר T כך ש־$\forall 1 \le i \le n\ |B_i| \le T$. אז נקבל $|\sum_{i=1}^{m-1} a_ib_i| \le |a_m|T + T\sum_{i=1}^{m-1}(a_i - a_{i+1}) = T(|a_m| + a_1 - a_m) \le T(|a_m| + |a_1| + |a_m|)$. כלומר, $\sum_{i=1}^{m-1} a_ib_i \le T(2|a_m| + |a_1|)$.

מבחן דיריכלה **משפט 90 (מבחן דיריכלה):** תהי (a_n) סדרה מונוטוניתת יורדת השואפת ל־0 ותהי (b_n) סדרה שעבורה הטור $\sum b_n$ חסום. אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

הוכחה. נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות טורים. קיים T כך שלכל N מתקיים $|\sum_{i=1}^{N} b_i| \le T$. אז לכל $u_1 < u_2$, $|\sum_{i=u_1+1}^{u_2}| = |S_{u_2} - S_{u_1}| \le T + T = 2T$. לפי הערכת הסכום, נקבל $\sum_{i=t}^{t+m} a_ib_i \le 2T(2|a_{t+m}| + |a_t|)$. אבל (a_i) מתכנסת ל־0, ולכן לכל $\delta > 0$ מתקיים $\exists N_0\ :\ \forall t > N_0\ 2|a_{t+m}| + |a_t| < \delta$. בפרט, עבור $\varepsilon > 0$ נתון, נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2T}$ ונקבל שכמעט תמיד $|\sum_{i=t}^{t+m} a_nb_n| \le 2T \cdot \frac{\varepsilon}{2T} = \varepsilon$, כנדרש.

11.12.2006 **מסקנה 91:** טור לייבניץ מתכנס.

הוכחה. הסדרה (a_n) יורדת מונוטונית ל־0 והטור $\sum(-1)^{n+1}$ חסום. לכן, לפי מבחן דיריכלה, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

משפט 92 (מבחן אבל): תהי (a_n) סדרה מונוטונית מתכנסת ויהי $\sum b_n$ טור מתכנס. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס. מבחן אבל

הוכחה. נניח $a_n \to L$ ונכתוב $\sum a_n b_n = \sum((a_n-L)+L)b_n = \sum(a_n-L)b_n - \sum Lb_n$. מכך ש־$\sum b_n$ מתכנס, גם הטור $\sum Lb_n$ מתכנס. הסדרה $(a_n - L)$ מתכנסת מונוטונית ל־0. נניח ש־$a_n - L \searrow 0$; $\sum b_n$ מתכנס ובפרט חסום, לכן מתקיימים תנאי מבחן דיריכלה ו־$\sum a_n b_n$ מתכנס. אחרת, $a_n - L \nearrow 0$ ולכן $L - a_n \searrow 0$; הטור $\sum -b_n$ מתכנס ולכן חסום, אז $\sum(a_n - L)b_n = \sum(L - a_n)(-b_n)$ מתכנס.

מסקנה 93: $\sum b_n$ מתכנס $\Longleftarrow \sum b_n \cdot \frac{n}{n+1}$ מתכנס.

3.4 קיבוץ איברים

בסכומים סופיים, חוק הקיבוץ מבטיח שללא תלות בשימת סוגריים תתקבל אותה תוצאה. אך אם נתבונן בטור $\sum(-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ ונקבץ כל זוג איברים, נקבל $(1+(-1)) + (1+(-1)) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$, על־אף שהטור אינו מתכנס כלל – ויותר מכך, נוכל גם לקבל $1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

הגדרה. יהי $\sum a_n$ טור ותהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה־ממש של מספרים טבעיים כך ש־$n_1 = 1$. נגדיר $b_k = \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_n$. הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ הוא הטור המתקבל מהטור $\sum a_n$ ל־ידי הכנסת סוגריים במקומות $n_1, n_2, \ldots$.

משפט 94: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס במובן הרחב. לכל סדרה מונוטונית עולה־ממש $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש־$n_1 = 1$, הטור $\sum b_k$ המתקבל מ־$\sum a_n$ על־ידי הכנסת סוגריים במקומות n_k מתכנס במובן הרחב, ו־$\sum a_n = \sum b_k$.

הוכחה. נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, $\sum a_n = L$. מכאן, $\lim S_N = L$ (S_N היא סדרת הסכומים החלקיים). סדרת הסכומים החלקיים של $\sum b_k$ היא $T_M = \sum_{k=1}^{M} b_k = S_{n_{M+1}-1}$; בפרט, (T_M) תת־סדרה של (S_N). אז גם $\lim T_M = L$.

ההוכחה להתכנסות במובן הרחב זהה.

משפט 95: יהי $\sum a_n$ ויהי $\sum b_k$ הטור המתקבל מהטור $\sum a_n$ על־ידי הכנסת סוגריים במקומות n_k. נניח כי לכל k קבוצת האיברים $a_{n_k}, \ldots, a_{n_{k+1}-1}$ הם כולם אי־שליליים או אי־חיוביים. אזי $\sum b_k$ מתכנס $\Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס ו־$\sum a_n = \sum b_k$.

הוכחה. $\sum b_k$ מתכנס, לכן $\lim S_{N_{M+1}-1} = \lim T_M = L$. יהי נתון N. קיים M יחיד כך ש־$n_M \le N \le n_{M+1} - 1$. מתקיים $S_N = T_{M-1} + a_{n_M} + \ldots + a_N$ ו־$|S_N - T_{M-1}| =$ $|a_{n_M} + \ldots + a_N| \le |a_{n_M} + \ldots + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{n_{M+1}-1}| = |T_M - T_{M-1}|$.

למה 1.95: $\lim S_N = L = \lim T_M$.

הוכחה. קיים M_0 כך שלכל $M \geq M_0$ מתקיים $|T_M - L| < \frac{\varepsilon}{4}$. נבחר $N_0 = n_{M_0+1}$. אז לכל $N > N_0$, מתקיים $|S_N - L| = |S_N - T_{M-1} + T_{M-1} - L| \leq |S_N - T_{M-1}| + |T_{M-1} - L|$. על־פי מה שהראינו למעלה, $|S_N - T_{M-1}| \leq |T_M - T_{M-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$,[30] ולכן נקבל $|S_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$, כנדרש.

3.5 שינוי סדר הסכימה

12.12.2006 באופן דומה לשימת סוגריים, חוק החילוף מבטיח שבסכומים סופיים תתקבל אותה תוצאה גם אם נשנה את סדר האיברים לסכימה. אך אם נתבונן בטור $L = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ונשנה את סדר האיברים, נוכל לקבל, למשל, $(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots) = \frac{1}{2}L \neq L$.[31]

הגדרה. סדרת מספרים טבעיים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ נקראת **תמורה** (פרמוטציה) של המספרים הטבעיים אם כל מספר טבעי מופיע בדיוק פעם אחת בסדרה.

משפט 96: תהי (a_n) סדרה כך ש־$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, ותהי $(n_k)_{k=1}^{n}$ תמורה של הטבעיים. אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס ו־$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחה. יהי נתון $\varepsilon > 0$. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, כלומר $\sum |a_n|$ מתכנס; לכן קיים N_0 כך ש־$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן באינדקסים $1, \ldots, N_0$: לכל $i \in \{1, \ldots, N_0\}$ קיים $k(i)$ כך ש־$n_{k(i)} = i$. יהי $T = \max_{1 \leq i \leq N_0} k(i)$, ויהי $t > T$.

$$|\sum_{n=1}^{t} a_n - \sum_{k=1}^{t} a_{n_k}| = |\sum_{n=N_0+1}^{t} a_n - \sum_{\substack{k=1 \\ n_k > N_0}}^{t} a_{n_k}| \leq |\sum_{n=N_0+1}^{t} a_n| + |\sum_{\substack{k=1 \\ n_k > N_0}}^{t} a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

כלומר, קיבלנו כי $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \forall t > T \ |S_t - M_t| < \varepsilon$ (כאשר $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ו־$M_N = \sum_{k=1}^{N} a_{n_k}$), כנדרש.

נסמן לכל $a \in \mathbb{R}$ $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \max(-a, 0)$. מתקיים $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$.

נניח ש־$L = \sum a_n$ מתכנס בתנאי. אז $\lim a_n = 0$. ניתן לכתוב $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$. הטורים $\sum a_n^+$ ו־$\sum a_n^-$ מונוטוניים, לכן מתכנסים במובן הרחב. שניהם מתכנסים ל־∞ (ובפרט, יש אינסוף אינדקסים n כך ש־$a_n > 0$ ואינסוף אינדקסים כך ש־$a_n < 0$): נניח כי $\sum a_n^-$, למשל, מתכנס ל־M. אזי $\sum a_n^+ = \sum a_n + \sum a_n^- = M + L$ ובפרט מתכנס, ולכן $\sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^- = 2M + L$, בסתירה לאי־התכנסות $\sum |a_n|$.

[30] כי $|T_M - T_{M-1}| \leq |T_M - L| + |L - T_{M-1}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$.

[31] אנו בעצם מניחים בשלילה שעל־ידי שינוי סדר הסכימה ההתכנסות לסכום נשמרת, ולכן מותר להסתמך על המשפט לגבי קיבוץ איברים בטורים מתכנסים.

משפט 97 (רימן): תהי (a_n) סדרה כך ש־$\sum a_n$ מתכנס בתנאי. יהי $M \in \mathbb{R}$. אזי קיימת תמורה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ של הטבעיים עבורה $\sum a_{n_k} = M$.[32]

הוכחה. יהי $M \in \mathbb{R}$. נבנה ברקורסיה תמורה (n_k) כך ש־$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = M$. נגדיר $n_1 = 1$. נניח כי הגדרנו כבר את $n_1, \dots, n_k$ ונסמן $T_k = \sum_{m=1}^{k} a_{n_m}$.

במקרה ש־$T_k \leq M$, נקבע n_{k+1} להיות האינדקס הקטן ביותר שעבורו מתקיים $a_{n_{k+1}} \geq 0$ ו־$n_{k+1} \neq n_1, \dots, n_k$. (יש אינסוף אינדקסים כאלו.)

במקרה ש־$T_k > M$, נקבע n_{k+1} להיות האינדקס הקטן ביותר שעבורו מתקיים $a_{n_{k+1}} < 0$ ו־$n_{k+1} \neq n_1, \dots, n_k$.

כל אחת מאפשרויות אלה יכולה להיות מופעלת רק מספר פעמים סופי ברציפות, מהתבדרות $\sum a_n^-$ ו־$\sum a_n^+$.

למה 1.97: הסדרה (n_k) היא תמורה של הטבעיים.

הוכחה. ראשית, כל אינדקס יכול להיבחר לכל היותר פעם אחת. יהי s אינדקס כך ש־$a_s \geq 0$, בה"כ. הצעד הראשון בבניית הסדרה מופעל אינסוף פעמים, אך לאחר s הפעלות של צעד זה, s חייב היה להיבחר. לכן כל אינדקס נבחר.

למה 2.97: הסדרה T_k מתכנסת, ו־$\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_m} = \lim T_k = M$.

הוכחה. בכל צעד שבו $T_k - M$ משנה סימן, $|T_k - M| \leq |a_{n_k}|$. עבור k כללי, אם k_1 ו־k_2 הם האינדקסים הסמוכים ל־k בהם $T_k - M$ שינה סימן, $|T_k - M| \leq \max(|a_{n_{k_1}}|, |a_{n_{k_2}}|)$. מכיוון ש־$\sum a_n$ מתכנס, $a_n \to 0$. (n_k) תמורה, אז $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$.[33] ממשפט הסנדוויץ', נקבל $|T_k - M| \to 0$, כנדרש.

3.6 מכפלת טורים

14.12.2006 **משפט 98 (קושי):** יהיו $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ טורים מתכנסים בהחלט, ותהי $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה כך שלכל אינדקס k קיים זוג אינדקסים $n(k)$, $m(k)$ עבורם $c_k = a_{n(k)} b_{m(k)}$ וכן לכל זוג אינדקסים n, m קיים אינדקס k יחיד כך ש־$c_k = a_n b_m$. אזי $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = AB$.

הוכחה. ראשית, נראה כ־$\sum c_k$ מתכנס בהחלט. מכיוון שסדרת הסכומים החלקיים $S_t = \sum_{k=1}^{t} |c_k|$ מונוטונית עולה, מספיק להראות שהיא חסומה. נסמן $U = \sum |a_n|$, $V = \sum |b_m|$.

למה 1.98: לכל t, $\sum_{k=1}^{t} |c_k| \leq VU$.

הוכחה. נגדיר $n_0 = \max_{1\leq k\leq t} n(k)$, $m_0 = \max_{1\leq k \leq t} m(k)$, $M = \max(n_0, m_0)$.

$$\sum_{k=1}^{t} |c_k| = \sum_{k=1}^{t} |a_{n(k)} b_{m(k)}| \leq (\sum_{n=1}^{M} |a_n|)(\sum_{m=1}^{M} |b_n|) \leq UV$$

[32] הטענה נכונה גם עבור $M = \pm\infty$ או עבור $\sum a_{n_k}$ מתבדר; ההוכחה כתרגיל.

[33] יש רק מספר סופי של איברים מחוץ לסביבת ε של הגבול, ולכן כל פרמוטציה של הסדרה תתכנס אף היא לאותו גבול.

כנדרש.[34]

הראינו התכנסות בהחלט, ולכן אין חשיבות לסדר הסכימה. נסדר מחדש את האיברים: $c_1 = a_1b_1$, $c_2 = a_1b_2$, $c_3 = a_2b_2$, $c_4 = a_2b_1$ וכו'.[35] ידוע שסדרת הסכומים החלקיים $S_t = \sum_{k=1}^t c_k$ מתכנסת, ולכן גם תת־הסדרה S_{r^2} מתכנסת לאותו סכום. מסידור האינדקסים, $S_{r^2} = \sum_{n=1}^r a_n \cdot \sum_{m=1}^r b_m$.[36] אז $\sum c_k = \lim S_t = \lim S_{r^2} = \lim A_rB_r = AB$.

משפט 99 (מרטנס): יהי $A = \sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס בהחלט, $B = \sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס. נגדיר $d_1 = 0$, $d_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$. אזי $\sum_{n=1}^\infty d_n = AB$. 18.12.2006

הוכחה. נסמן $A_n = \sum_{s=1}^n a_s$, $B_n = \sum_{t=1}^n b_t$, $D_n = \sum_{l=1}^n d_l = \sum_{l=1}^n \sum_{i+j=l} a_ib_j$

$$\sum_{i+j=l} a_ib_j = \sum_{i=1}^{l-1} a_ib_{l-i} = a_1(b_1+\ldots+b_{l-1})+\ldots+a_{n-1}b_1 = a_1B_{l-1}+\ldots+a_{n-1}B_1$$

נגדיר $\gamma_n = B_n - B$; אז נוכל לכתוב

$$D = a_1(B-\gamma_{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(B-\gamma_1) = B\sum_{s=i}^{n-1} a_s - (a_1\gamma_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\gamma_1)$$

נרצה להראות כי $a_1\gamma_{n-1} + \ldots + a_n\gamma_1 \to 0$. ראשית, $a_n \to 0$, לכן (a_n) חסומה, $\gamma_n \to 0$ ולכן גם (γ_n) חסומה; נניח כי $\forall n\ |a_n| < M, |\gamma_n| < M$. יהי נתון $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. הטור $\sum a_s$ מתכנס בהחלט, לכן קיים N_0 כך ש־$\sum_{s=N_0+1}^\infty |a_s| < \frac{\varepsilon}{2M} = \delta$.

$$\begin{aligned} T_n &= a_1\gamma_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\gamma_1 \\ &= (a_1\gamma_{n-1} + \ldots + a_{N_0}\gamma_{n-N_0}) + (a_{N_0+1}\gamma_{n-(N_0+1)} + \ldots + a_{n-1}\gamma_1) \end{aligned}$$

אבל $a_1\gamma_{n-1} \to 0, \ldots, a_{N_0}\gamma_{n-N_0} \to 0$, וגם

$$\begin{aligned} |a_{N_0+1}\gamma_{n-(N_0+1)} + \ldots + a_{n-1}\gamma_1| &\le |a_{N_0+1}||\gamma_{n-(N_0+1)}| + \ldots + |a_{n-1}||\gamma_1| \\ &\le M(|a_{N_0+1}| + \ldots + |a_{n-1}|) \\ &\le M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon \end{aligned}$$

לכן $T_n \to 0$.

דוגמה (חשיבות ההתכנסות בהחלט). נבחר $A = B = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. אלו טורי לייבניץ, לכן מתכנסים; $d_n = \sum a_ib_j = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}}{\sqrt{i}\sqrt{j}} = (-1)^{n+2}\sum_{i+j=n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}}$, אבל $i, j < n$ תמיד ולכן $\frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$. לכן $|d_n|$ אינו מתכנס ל־0, ו־$\sum d_n$ לא קיים.

---

[34] הסיבה לאי־שוויון היא שבמכפלת הסכומים החלקיים של הטורים נכללים כל האיברים שמופיעים בסכום החלקי של $\sum c_k$.

[35] למעשה, המטרה היא למלא ריבועים של זוגות אינדקסים, כך שבהגיענו לאינדקס n^2 עברנו על כל הזוגות המכילים טבעיים הקטנים מ־ או שווים ל־n.

[36] מכיוון שכך או כך עברנו על כל הזוגות האפשריים בריבוע $r \times r$, ואין כאן חשיבות לסדר הסכימה.

3.7 שברים עשרוניים

יהיו $a_i \in Z$, $0 \le a_i \le 9$. $0.a_1a_2a_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. זהו טור מתכנס, מכיוון שהוא נשלט על־ידי הטור הגיאומטרי המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ ($\frac{a_n}{10^n} < \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$).

משפט 100: לכל מספר ממשי $x \in [0,1]$ קיים ייצוג עשרוני (כלומר, סדרה (a_i) $(1 \le a_i \le 9)$ כך ש־$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$).

הוכחה. נגדיר את הספרות ברקורסיה.

נגדיר $x_n = 0.a_1a_2\ldots a_n$. הסדרה (x_n) מונוטונית עולה וחסומה, לכן היא מתכנסת. לכל n, $|x - x_n| \le \frac{1}{10^n}$, לכן ממשפט הסנדוויץ' $(x_n) \to x$.

קיימת בעיית יחידות: $0.999\ldots = 1.000\ldots$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{9} = 1$).

משפט 101: נניח כי למספר ממשי $x \in [0,1]$ שני הייצוגים העשרוניים $0.a_1a_2a_3\ldots = 0.b_1b_2b_3\ldots$. אזי לכל n מתקיים $a_n = b_n$ או קיים n_0 כך שמתקיים, בה"כ, עבור $n \le n_0 - 1$ $a_n = b_n$; $n = n_0$ $a_n = b_{n_0} + 1$; $n > n_0$ $b_n = 9$, $a_n = 0$.

הוכחה. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} \iff a_{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+n_0}}{10^n} = b_{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+n_0}}{10^n}$.[37] בה"כ $a_{n_0} > b_{n_0}$, לכן $a_{n_0} - b_{n_0} \ge 1$. נקבל $1 \le a_{n_0} - b_{n_0} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+n_0} - a_{n+n_0}}{10^n} \le 1$, ומתקיימים שוויונים. מתקיים לכל $n \ge 1$ כי $-9 \le b_{n+n_0} - a_{n+n_0} \le 9$; אז מתקיים $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+n_0} - a_{n+n_0}}{10^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$; מכאן, $b_{n+n_0} - a_{n+n_0} = 9$, לכן בהכרח $b_{n+n_0} = 9$ ו־$a_{n+n_0} = 0$.

הגדרה. סדרה (a_n) תיקרא **מחזורית** החל ממקום מסויים אם קיימים N, m כך ש־$\forall n > N$ $a_n = a_{n+m}$.

משפט 102: יהי $0 \le x < 1$. $x \in \mathbb{Q}$ אס"ם הייצוג העשרוני של x הוא מחזורי החל ממקום מסויים.

הוכחה. נניח כי ל־x יש ייצוג עשרוני מחזורי החל ממקום מסויים. נגדיר $V = 10^{N-1}x = a_1a_2\ldots a_{N-1}.a_N\ldots$, $U = 10^{N+m-1} = a_1a_2\ldots a_{N+m-1}.a_{N+m}\ldots$. מתקיים $U - V \in \mathbb{Z}$ (מחזורי הספרות לאחר הנקודה זהים ומתבטלים). אז $U - V = (10^{N+m-1} - 10^{N-1})x = z$, ונוכל לכתוב $x = \frac{z}{10^{N+m-1} - 10^{N-1}} \in \mathbb{Q}$.

להיפך, נניח כי $x = \frac{p}{q}$. נגדיר $r_0 = x$, $r_i = 10r_{i-1} - a_i$. נקבל $r_1 = 10 \cdot \frac{p}{q} - a_1 = \frac{m}{q}$, $r_2 = 10 \cdot \frac{m}{q} - a_2$ וכו'. לכל n, $0 \le r_n < 1$, לכן יש לכל היותר $q + 1$ אפשרויות ל־r_n; מכאן, יתקבל מחזור (מהמקום בו $r_n = r_{m+n}$).

[37] הוצאנו את האיבר הראשון בסכומים החוצה וכפלנו ב־10^{n_0}.

4 פונקציות, גבולות ורציפות

4.1 פונקציות

פונקציה **הגדרה.** תהיינה X, Y קבוצות. **פונקציה** (העתקה) $f : X \to Y$ היא התאמה של איבר (יחיד) ב־Y לכל איבר ב־X. 19.12.2006

תמונת f מוגדרת על־ידי $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$.

בהינתן $A \subseteq X$, $f\mid_A : A \to Y$ המוגדרת על־ידי $f\mid_A(a) = f(a)$ $\forall a \in A$ היא הצמצום של f ל־A.

גרף של פונקציה $f : X \to Y$ הוא אוסף הנקודות $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

הפונקציה $f : X \to Y$ תיקרא פונקציה ממשית אם $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.[38]

דוגמאות לפונקציות הן פונקציות קבועות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרות על־ידי $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{R}$ קבוע), פולינומים כמו $f(x) = p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), פונקציות מעריכיות $f(x) = a^x$ ($a > 0$) ופונקציות רציונאליות $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ עבור $p(x)$, $q(x) \not\equiv 0$ פולינומים.[39]

פונקציה זוגית **הגדרה.** פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ נקראת פונקציה **זוגית** אם מתקיים $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in X$.

פונקציה אי־זוגית הפונקציה f תיקרא **אי־זוגית** אם $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in X$.

טענה 103: כל פונקציה ממשית $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ניתנת לייצוג כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי־זוגית.

הוכחה. כתרגיל.

פונקציה מחזורית **הגדרה.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ תיקרא **מחזורית** אם קיים $P \in \mathbb{R}$ כך ש־$f(x) = f(x + P)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.2 גבולות

סביבה מנוקבת **הגדרה.** יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $r > 0$. הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < r\}$ היא **סביבה (מנוקבת)** של x_0 ברדיוס r. **סביבה (מלאה)** של x_0 ברדיוס r היא $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$. סביבה מלאה

הגדרה. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. נאמר של־$f(x)$ ישנו גבול ב־x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אם לכל סביבה (מלאה) U של L קיימת סביבה (מנוקבת) V של x_0 כך ש־$f(V) \subseteq V$. בלשון כמתים,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

[38] נעיר כי תמיד אפשר לכתוב $f : X \to \mathbb{R}$ עבור פונקציות ממשיות.

[39] במקרה האחרון, יש לשים לב שהכוונה ב־$q(x) \not\equiv 0$ היא ש־$q(x)$ לא יהיה פולינום האפס – לא לכך שלא תהיינה לו נקודות בו הוא מתאפס. למשל, עבור $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$, פשוט $X \not\ni \pm 1$.

טענה 104: אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=M$ אזי $L=M$.

הוכחה. נניח בה"כ כי $L<M$. נבחר $\varepsilon=\frac{M-L}{3}$. סביבות ε של L ו־M הן זרות. קיימת סביבה מנוקבת U_L של x_0 כך ש־$\forall x\in U_L\ |f(x)-L|<\varepsilon$ וקיימת סביבה מנוקבת U_M של x_0 כך ש־$\forall x\in U_M\ |f(x)-M|<\varepsilon$. $U_L\cap U_M$ גם סביבה מנוקבת של x_0. לכל $x\in U_L\cap U_M$, $|f(x)-L|<\varepsilon\wedge|f(x)-M|<\varepsilon$ – סתירה.

דוגמה. $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x)=c$. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)=c$. באופן כללי, לכל פולינום $p(x)$, $\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$.

דוגמה. $x_0=1$, $f(x)=x^2+3$. נראה כי $\lim_{x\to 1} f(x)=4$: יהי נתון $\varepsilon>0$. נמצא δ כך שלכל $|x-1|<\delta$, $|f(x)-4|<\varepsilon$. נציב $x=1+\delta$:[40] $|(1+\delta)^2+3-4|=|2\delta+\delta^2|<\varepsilon$. אם $|\delta|<1$, $\delta^2<|\delta|$; במקרה זה, $|2\delta+\delta^2|<|3\delta|<\varepsilon$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

טענה 105: התנאים הבאים שקולים: $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq L$; קיימת סביבה (מלאה) U של L כך שלכל סביבה (מנוקבת) V של x_0 קיים $x\in V$ כך ש־$f(x)\notin U$.

דוגמה. ל־$\operatorname{sgn}(x)$[41] אין גבול ב־0 (בשאר הנקודות, הגבול הוא 1 או -1).

דוגמה. פונקציית דיריכלה: $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. יהי $x_0\in\mathbb{R}$. אזי ל־$f(x)$ אין גבול ב־x_0, כי הרציונאלים צפופים בממשיים והאי־רציונאלים צפופים בממשיים.

טענה 106: תהיינה f ו־g פונקציות ממשיות כך ש־$f(x)=g(x)$ לכל נקודה x בסביבה מנוקבת של x_0. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים $\iff$ $\lim_{x\to x_0} g(x)$ קיים, ואם הם קיימים, הגבולות שווים.

הוכחה. תהי V_{x_0} הסביבה עליה מוגדרות f ו־g. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, כלומר לכל סביבה U של L קיימת סביבה מנוקבת V_U של x_0 כך שלכל $x\in V_U$ $f(x)\in U$. לכל U, $V_U\cap V_{x_0}$ היא סביבה של x_0 ו־$f|_{V_U\cap V_{x_0}}=g|_{V_U\cap V_{x_0}}$, כלומר לכל $x\in V_U\cap V_{x_0}$ $f(x)\in U$ $g(x)=f(x)\in U$. לכן $\lim_{x\to x_0} g(x)=L$.

הגדרה. יהי $x_0\in\mathbb{R}$. **סביבה ימנית** של x_0 ברדיוס r היא הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0<x<x_0+r\}$; **סביבה שמאלית** של x_0 ברדיוס r היא הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}\mid x_0-r<x<x_0\}$. סביבה ימנית סביבה שמאלית

[40] $|x-1|<\delta \iff 1-\delta<x<1+\delta$, ו־$f$ פונקציה עולה בסביבת $x_0=1$. אנו מתייחסים ל־δ כאן כאל השינוי, שיכול להיות חיובי או שלילי.

[41] פונקציית הסימן; מוגדרת על־ידי $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$

גבולות חד־צדדיים

הגדרה. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. נאמר כי ל־$f(x)$ **גבול ימני** ב־x_0, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ אם לכל סביבה U של L קיימת סביבה ימנית V (מנוקבת) של x_0 כך ש־$f(V) \subseteq U$. באופן דומה מוגדר **גבול שמאלי** ($\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$).

טענה 107: ל־$f(x)$ ישנו גבול ב־x_0 אס"ם יש ל־$f(x)$ גבולות חד־צדדיים ב־x_0, וגבולות אלה שווים.

הוכחה. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

תהי U סביבה של L; קיימות סביבות חד־צדדיות V_R, V_L של x_0 כך ש־$f(V_R) \subseteq U$, $f(V_L) \subseteq U$. יהי r הרדיוס המינימלי של הסביבות החד־צדדיות V_L ו־V_R. תהי V סביבה מנוקבת ברדיוס r של x_0. אזי $V \subseteq V_L \cup V_R$ ו־$f(V) \subseteq U$. לכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

4.3 רציפות

רציפות

הגדרה. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. נאמר ש־$f(x)$ **רציפה** ב־x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

דוגמה. $f(x) = p(x)$, כאשר p פולינום כלשהו. (בפרט, פונקציות קבועות.)

טענה 108: תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות ממשיות, ונניח כי $f(x) = g(x)$ בסביבה V_{x_0} של x_0. אזי $f(x)$ רציפה ב־x_0 אם ורק אם $g(x)$ רציפה ב־x_0.

הוכחה. (נובעת מיד מהטענה הקודמת לגבי שוויון הגבולות.)

טענה 109: $f(x)$ רציפה ב־x_0 אס"ם $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

רציפות חד־צדדית

הגדרה. $f(x)$ **רציפה מימין** ב־x_0 אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$; $f(x)$ **רציפה משמאל** ב־x_0 אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

הגדרה. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית שאיננה רציפה ב־x_0.

אי־רציפות סליקה

1. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים, אז x_0 נקראת נקודת אי־רציפות **סליקה**.[42]

אי־רציפות מסדר ראשון

2. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אינו קיים אך $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ו־$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ קיימים, x_0 נקראת נקודת אי־רציפות **מסדר ראשון**.

אי־רציפות מסדר שני

3. אם אחד לפחות מהגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ אינו קיים, x_0 נקראת נקודת אי־רציפות **מסדר שני**.

[42] על־ידי הגדרת $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, נקבל פונקציה רציפה.

4.4 תנאים לקיום גבול ולרציפות

4.4.1 תנאי היינה

21.12.2006 **משפט 110:** תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אס"ם $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ולכל סדרה $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$) מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. תנאי היינה לקיום גבול

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. תהי $x_0 \neq x_n \to x_0$ סדרת נקודות; נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

יהי נתון $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך ש־$0 < |x - x_0| < \delta$ גורר $|f(x) - L| < \varepsilon$. בהינתן $\delta > 0$, קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים $0 < |x_n - x_0| < \delta$[43], לכן $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ $\forall n > N_0$, כנדרש.

($\Rightarrow$) נניח כי לכל סדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ ונניח בשלילה כי $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$. מכאן, קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל סביבה מנוקבת V_{x_0} קיים $x \in V_{x_0}$ כך ש־$|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$. כעת, נבנה סדרת נקודות $x_0 \neq x_n \to x_0$ כך ש־$f(x_n) \not\to L$.

נתבונן בסדרה של סביבות מנוקבות של x_0, $V_{x_0}^n = \{x \in V \mid 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n}\}$ (V סביבה כלשהי של x_0). לכל n, קיימת נקודה $x_n \in V_{x_0}^n$ עבורה $|f(x_n) - L| > \varepsilon_0$. אז $x_0 \neq x_n \to x_0$, אך $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$, בסתירה.

משפט 111: תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. $f(x)$ רציפה ב־x_0 אס"ם $f(x)$ מוגדרת בסביבה מלאה של x_0 ולכל סדרה $x_n \to x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. תנאי היינה לרציפות

הוכחה. טריוויאלי, על־פי המשפט הקודם.

דוגמה. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ לא קיים: נתבונן בסדרה $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$, $x_{2n} = \frac{1}{2n}$.

דוגמה. $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$ רציפה בכל נקודה x_0, כי $x_n \to x_0$ ולכן $x_n^t \to x_0^t$ לכל t קבוע (כתרגיל), ולכן $a_t x_n^t \to a_t x_0^t$; ניתן לחבר סדרות מהצורה הזו ולקבל את הנדרש.

מסקנה 112: תהי $f(x)$ פונקציה ממשית. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אס"ם $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, לכל סדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x)$ ועבור סדרה כלשהי (x_n) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אז לכל סדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

($\Rightarrow$) נניח כי לכל סדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$ הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ קיים. נניח בשלילה כי קיימות סדרות $x_0 \neq x_n \to x_0$, $x_0 \neq y_n \to x_0$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

---

[43] אי־השוויון חריף כי $x_n \neq x_0$.

נתבונן בסדרה (z_n) המוגדרת על־ידי $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$. גם הנקודות x_n וגם הנקודות y_n שואפות ל־x_0, לכן $z_n \to x_0$. אולם $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ לא קיים, כי קיימות לסדרה $(f(z_n))$ תתי־סדרות המתכנסות לגבולות שונים, בסתירה.[44]

4.4.2 תנאי קושי

תנאי קושי לקיום גבול

25.12.2006

משפט 113: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה V_{x_0} של x_0. הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה מנוקבת V_ε של x_0 כך שלכל $x_1, x_2 \in V_\varepsilon$, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

הוכחה. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אז לכל ε קיימת סביבה מנוקבת $\hat{V}_\varepsilon$ כך שלכל $x \in \hat{V}_\varepsilon$ $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן אם $x_1, x_2 \in \hat{V}_\varepsilon$, $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - L + L - f(x_2)| < \varepsilon$.

להיפך, נניח את תנאי קושי לקיום הגבול. נתבונן בסדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$.

למה 1.113: $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיימת סביבה מנוקבת V_ε של x_0 כך שלכל $x_1, x_2 \in V_\varepsilon$ מתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. נתון כי $x_0 \neq x_n \to x_0$. אזי $\exists N_0 \; : \; \forall n > N_0 \; x_n \in V_\varepsilon$, ולכן $\forall m_1, m_2 > N_0 \; |f(x_{m_1}) - f(x_{m_2})| < \varepsilon$. לכן $(f(x_n))$ סדרת קושי.

על־פי הלמה, הסדרה $(f(x_n))$ מתכנסת, ועל־פי תנאי היינה $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים.

תנאי קושי לרציפות

משפט 114: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מלאה של x_0. $f(x)$ רציפה ב־x_0 אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה מלאה V_ε של x_0 כך שלכל $x_1, x_2 \in V_\varepsilon$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

הוכחה. אותה הוכחה.

4.5 חסימות

חסימות

הגדרה. תהי $f(x)$ מוגדרת מעל קבוצה D. נאמר ש־f **חסומה מלעיל** (על־ידי קבוע M) אם לכל $x \in D$, $f(x) \leq M$; f **חסומה מלרע** (על־ידי קבוע C) אם לכל $x \in D$, $f(x) \geq C$.

טענה 115: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0, ונניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. יהיו $A, B \in \mathbb{R}$ כך ש־$A < L < B$. אזי קיימת סביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0 כך שלכל $x \in V_{x_0}$ $A < f(x) < B$.

הוכחה. נבחר $0 < \varepsilon < \min(B - L, L - A)$ ונסתכל בסביבת x_0 ברדיוס δ המתקבלת על־פי הגדרת הגבול.

הגדרה. תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות המוגדרות מעל קבוצה D. נאמר כי $f \leq g$ מעל D אם לכל $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$.

---

[44] לכן כל הסדרות הנ"ל מביאות להתכנסות לאותו גבול, ומספיק להתבונן בגבול שמתקבל מסדרה כלשהי.

טענה 116: תהיינה $f(x)$, $g(x)$ המוגדרות בסביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0, ונניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ קיימים. $f \le g$ מעל $V_{x_0} \Longleftarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.[45]

הוכחה. ניקח $x_0 \ne x_n \to x_0$. בה"כ נניח כי $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq V_{x_0}$ (בכל מקרה, טענה זו מתקיימת החל ממקום מסויים.) לפי ההנחה, $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) \le g(x_n)$. מטענה קודמת לגבי סדרות, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, ועל־פי היינה, $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

טענה 117: תהיינה h, g, f פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0. נניח כי $f \le g \le h$ מעל V_{x_0}. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ אזי $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

הוכחה. ניקח $x_0 \ne x_n \to x_0$. בה"כ, $(x_n) \subseteq V_{x_0}$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$, לכן $L = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lim_{n\to\infty} g(x_n) \le \lim_{n\to\infty} h(x_n) = L$; לפי משפט הסנדוויץ' לסדרות, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = L$. כעת, מתנאי היינה, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

מסקנה 118: תהיינה h, g, f פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה V_{x_0} של x_0. אם $f \le g \le h$ מעל V_{x_0}, h, f רציפות ב־x_0 ו־$f(x_0) = h(x_0)$ אזי g רציפה ב־x_0.

הוכחה. מתקיים $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$. בנוסף, $f(x_0) \le g(x_0) \le h(x_0)$ ולכן $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$. אז $g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

טענה 119: $f, g : D \to \mathbb{R}$ ונניח כי f ו־g מוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, f חסומה ב־D ו־$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

הוכחה. נשתמש בקריטריון היינה. תהי סדרה $x_0 \ne x_n \to x_0$. אז $g(x_n) \to 0$, $|f(x_n)| \le M$. אז $|g(x_n)f(x_n)| \le M|g(x_n)| \to 0$, ולפי היינה, $0 = \lim_{x\to x_0} g(x)f(x)$.

4.6 אריתמטיקה של גבולות

טענה 120: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. אזי שלושת התנאים הבאים שקולים: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$; $\lim_{x\to x_0}(f(x) - L) = 0$; $\lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0$.

הוכחה. לפי היינה: $x_0 \ne x_n \to x_0$; $\lim f(x_n) = L \iff \lim(f(x_n) - L) = 0 \iff \lim |f(x_n) - L| = 0$.

טענה 121: g, f מוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

1. $\lim_{x\to x_0} cf(x) = cL$;
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = L + M$;
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$;
4. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$;

[45] גם אם מניחים $f < g$, המסקנה היא אי־שוויון חלש בלבד.

5. אם $M \neq 0$ אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

הוכחה. הטענות נובעות מיידית מנכונותן עבור סדרות. (להוכחת 5, קיימת סביבה מנוקבת $\hat{V}_{x_0}$ כך ש־$\forall x \in \hat{V}_{x_0}\ M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon$, ולכן g לא מתאפסת שם.)

טענה 122: תהיינה g, f מוגדרות בסביבת x_0 ורציפות ב־x_0. אזי cf, $f+g$, fg, $|f|$ רציפות ב־x_0. אם $g(x_0) \neq 0$, אזי גם $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0.

הוכחה (fg). $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x)g(x) = fg(x)$ (על־פי הטענה הקודמת ורציפות f ו־g).

4.7 הרכבת פונקציות

פונקציה חח"ע **הגדרה.** פונקציה $f: A \to B$ נקראת **חד־חד ערכית** אם $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

פונקציה על (או, באופן שקול, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$); **על** ($B$) אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש־$f(x) = y$ ($\mathrm{Im}(f) = B$); **חח"ע ועל** אם היא גם חח"ע וגם על.

הרכבת פונקציות **הגדרה.** $g: C \to D$, $f: A \to B$, $B \subseteq C$. אז $g \circ f(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(a))$.

דוגמה. $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(y) = \sqrt[3]{y}$; אז $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$.

טענה 123: 1. g, f חח"ע $\Longleftarrow$ $g \circ f$ חח"ע;

2. g, f על $\Longleftarrow$ $g \circ f$ על;

3. $g \circ f$ חח"ע $\Longleftarrow$ f חח"ע;

4. $g \circ f$ על $\Longleftarrow$ g על.

הוכחה. 1. נניח כי $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. g חח"ע, לכן $f(x_1) = f(x_2)$. f חח"ע, לכן $x_1 = x_2$, כנדרש.

2. $g: B \to D$, $f: A \to B$ על. יהי $y \in D$. g על, לכן קיים $z \in B$ כך ש־$g(z) = y$. f על, לכן קיים $x \in A$ כך ש־$f(x) = z$. אז $g(f(x)) = g(z) = y$, ו־$g \circ f$ על.

26.12.2006 אנו מעוניינים בקיום גבול וברציפות.

דוגמה. נתבונן ב־ $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ וב־ $g(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \neq 0 \end{cases}$. f רציפה ב־0 ($\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, כי $\sin x$ חסומה ו־$x \to 0$); g איננה רציפה ב־0 ($\lim_{y\to 0} g(y) = 1$).
האם כאשר $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים ו־$\lim_{y\to\lim_{x\to 0} f(x)} g(y)$ קיים אזי $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)$ קיים? בכל סביבה של 0 יש ל־f אינסוף נקודות שמתאפסות ואינסוף שלא; לכן להרכבה $g\circ f$ יש אינסוף נקודות שמקבלות 1 ואינסוף שלא, ולכן אין לה גבול, אך $\lim_{y\to\lim_{x\to 0} f(x)} g(y) = 1$.

משפט 124: תהיינה g, f פונקציות, f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ו־$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, g מוגדרת בסביבה מנוקבת של L ו־$\lim_{y\to L} g(y) = M$. אם אחד מהתנאים הבאים – 1) $g(y)$ רציפה ב־L; 2) קיימת סביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0 כך שלכל $x \in V_{x_0}$, $f(x) \neq L$ – מתקיים, אזי $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = M$.

הוכחה. לפי היינה, מספיק להוכיח כי לכל סדרה $x_0 \neq x_n \to x_0$, $(g\circ f)(x_n) \to M$.

ראשית, נניח כי $g(y)$ רציפה ב־L. נסמן $y_n = f(x_n)$. נתון כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, ולכן $y_n \to L$. g רציפה ב־L, לכן לפי תנאי היינה לרציפות $g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(L) = M$. מכאן, לפי היינה לגבולות, $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = M$.[46]

נניח את תנאי 2. תהי $x_0 \neq x_n \to x_0$. בה"כ ניתן נניח כי $(x_n) \subseteq V_{x_0}$. $y_n = f(x_n)$. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftarrow \lim y_n = \lim f(x_n) = L$ ו־$L \neq y_n \to L$. $\lim_{y\to L} g(y) = M$ אז לפי היינה $g(y_n) \to M$ (כי $L \neq y_n \to L$); קיבלנו, לפי היינה, $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = M$.

מסקנה 125: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 ו־$g(y)$ מוגדרת בסביבת $f(x_0)$. אם f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$f(x_0)$, אזי $\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = g\circ f(x_0)$ – כלומר, $g\circ f$ רציפה ב־x_0.

הוכחה. לפי תנאי (1) בטענה קודמת ורציפות g,

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = \lim_{y\to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) = g\circ f(x_0)$$

מסקנה 126: תהי $g(x)$ מוגדרת בסביבת x_0, ונניח כי $\lim_{x\to x_0} g(x)$ קיים. אזי $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{h\to 0} g(x_0+h)$.

הוכחה. נגדיר $f : h \mapsto x_0 + h$. $g\circ f(h) = g(x_0+h)$. מתקיים $\lim_{h\to 0} f(h) = x_0$. לכל סביבה מנוקבת של 0, $x_0 \notin \{f(h) \mid h\neq 0\}$; לכן תנאי (2) של הטענה הקודמת מתקיים, ולכן $\lim_{h\to 0} g\circ f(h) = \lim_{y\to x_0} g(y)$.

4.8 משפט ערך הביניים

הגדרה. פונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע I נקראת **רציפה בקטע** I אם – 1) f רציפה בכל נקודה פנימית בקטע; 2) בנקודת קצה שמאלית/ימנית הפונקציה רציפה מימין/משמאל. רציפות בקטע

טענה 127: $f(x)$ רציפה ב־$I \Leftrightarrow$ לכל סדרה $(x_n) \subseteq I$ אם $x_n \to x_0 \in I$ אזי $f(x_n) \to f(x_0)$.

הוכחה. זהו תנאי היינה לכל הנקודות בקטע.

הגדרה. תהי $f(x)$ מוגדרת באינטרוול $[a,b]$. נאמר של־f **תכונת ערך הביניים** באינטרוול אם לכל c הנמצא בין $f(a)$ ל־$f(b)$ קיים $a \le x \le b$ כך ש־$f(x) = c$. תכונת ערך הביניים

[46] חשיבות הרציפות נובעת מכך שאיננו יודעים אם $L \neq y_n \to L$.

משפט 128 (ערך הביניים): תהי $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי ל־$f(x)$ תכונת ערך הביניים.

הוכחה. בה"כ נניח $f(a) \leq f(b)$. יהי $f(a) \leq c \leq f(b)$. אם $c = f(a)$ או $c = f(b)$ אזי נבחר $x = a$ או $x = b$ וסיימנו; לכן נניח $f(a) < c < f(b)$.

נתבונן בקבוצה $B = \{x \mid a \leq x < b, f(x) \leq c\}$; נגדיר $a \leq x_0 = \sup B \leq b$.

למה 1.128: $f(x_0) = c$

הוכחה. $f(x_0) \leq c$: $x_0 = \sup B$, לכן קיימת סדרת נקודות $(x_n) \subseteq B$ כך ש־$x_n \to x_0$. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, לכן לפי תנאי היינה לרציפות $c \geq f(x_n) \to f(x_0) \leq c$.

$f(x_0) \geq c$: נניח בשלילה כי $f(x_0) < c$. ($c < f(b)$, לכן $x_0 \neq b$.) f רציפה מימין ב־x_0, לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה ימנית של x_0 כך שלכל x בסביבה הימנית $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. נבחר ε כך ש־$f(x) < f(x_0) + \varepsilon < c$. אם קיימת סביבה ימנית של x_0 כך שלכל נקודה x בסביבה זו $f(x) < f(x_0) + \varepsilon < c$, לכל x בסביבה זו $x \in B$, ומתקבלת סתירה לכך ש־$\sup B = x_0$.

מסקנה 129: יהי I קטע ותהי $f(x)$ רציפה ב־I. אזי $f(I)$ הוא קטע.

הוכחה. (תת־קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}$ היא קטע אם"ם לכל זוג נקודות $d_1, d_2 \in D$ D מכילה את הקטע הסגור $[d_1, d_2]$.)

תהיינה $d_1, d_2 \in f(I)$. אזי קיימות נקודות $a, b \in I$ כך ש־$f(b) = d_2$, $f(a) = d_1$. לפי משפט ערך הביניים, לכל $d_1 \leq c \leq d_2$ קיים x באינטרוול הסגור $[a,b]$ (או $[b,a]$) כך ש־$f(x) = c$. כלומר, $[d_1, d_2] \subseteq f(I)$.

דוגמה. $p(x) = x^3 + 3x + 3$; נרצה להראות כי ל־$p(x)$ יש שורשים (פתרונות למשואה $p(x) = x^3 + 3x + 3 = 0$). עבור $x = 1$, $p(1) = 1^3 + 3 + 3 = 7 > 0$; עבור $x = -1$, $p(-1) = (-1)^3 - 3 + 3 = -1 < 0$. כל פולינום רציף על כל הישר הממשי, לכן נוכל להשתמש במשפט ערך הביניים עבור הקטע $[-1, 1]$ כדי לקבל שיש ל־$p(x)$ שורש $-1 < x_0 < 1$. 28.12.2006

דוגמה. יהי $p(x)$ פולינום ממעלה אי־זוגית; אזי ל־$p(x)$ ישנו שורש; בנוסף, $p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא על:

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots + a_0 = x^{2n+1}(a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^{2n+1}})$$

הביטוי בסוגריים שואף ל־a_{2n+1} כאשר x שואף ל־$\pm\infty$. עבור $x \to +\infty$, כל הפולינום שואף ל־$+\infty$; עבור $x \to -\infty$, כל הפולינום שואף ל־$-\infty$ (הסימן של הפולינום הוא כסימן x^{2n+1}, בהנחה ש־a_{2n+1} חיובי).

(באופן כללי יותר, המשפט היסודי של האלגברה טוען כי לכל פולינום לא־קבוע $p(x)$ ישנו שורש מרוכב.)

דוגמה. לפונקציה (הרציפה) $f(x)=3x+\cos x+2\sin x$ יש שורש $-2<x_0<2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 6+\cos 2+2\sin 2\geq 6-1-2\geq 3>0 \\ f(-2) &= -6+\cos(-6)+2\sin(-6)\leq -3<0 \end{aligned}$$

משפט 130 (ויירשטראס): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי קיימות נקודות $x_m,x_M\in[a,b]$ בהן מקבלת $f(x)$ ערכי מקסימום ומינימום.[47]

הוכחה. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהי $M=\sup_{a\leq x\leq b}f(x)$.

למה 1.130: תהי $f(x):D\to\mathbb{R}$ פונקציה. נגדיר $M=\sup f(x)$ ($M=\infty$ אם f אינה חסומה מלעיל). אז קיימת סדרת נקודות $D\supseteq(x_n)$ כך ש־$f(x_n)\to M$.

הוכחה. יהי נתון ε. אזי קיים $x_\varepsilon\in D$ כך ש־$f(x_\varepsilon)\geq M-\varepsilon$. נבחר $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ ונקבל כך סדרה $D\supseteq(x_n)$ שעבורה $M\geq f(x_n)\geq M-\frac{1}{n}$, ולכן $f(x_n)\to M$.

לפי הלמה, קיימת סדרה $[a,b]\supseteq(x_n)$ כך ש־$f(x_n)\to M$. לפי משפט בולצ'אנו־ויירשטראס, קיימת תת־סדרה (x_{n_k}) שמתכנסת ל־x_0 כלשהו; כל הנקודות ב־x_{n_k} שייכות ל־$[a,b]$, ומרציפות f ב־$[a,b]$ נובע כי $f(x_{n_k})\to f(x_0)$. כל תת־סדרה של $f(x_n)$ תשאף ל־M, לכן $f(x_{n_k})\to M$; לכן $M=f(x_0)$.

4.9 פונקציות מונוטוניות

4.9.1 הגדרה ותכונות

1.1.2007 **הגדרה.** פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ נקראת – פונקציה מונוטונית

מונוטונית עולה אם $\forall x_1,x_2\in A\ x_1<x_2\implies f(x_1)\leq f(x_2)$;

מונוטונית יורדת־ממש אם $\forall x_1,x_2\in A\ x_1<x_2\implies f(x_1)<f(x_2)$;

מונוטונית יורדת אם $\forall x_1,x_2\in A\ x_1<x_2\implies f(x_1)\geq f(x_2)$;

מונוטונית יורדת־ממש אם $\forall x_1,x_2\in A\ x_1<x_2\implies f(x_1)>f(x_2)$;

טענה 131: תהי $f(x)$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל בסביבה (שמאלית מנוקבת) של $x_0\in\mathbb{R}$. אזי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\sup_{x<x_0}f(x)$.

הוכחה. נגדיר $L=\sup_{x<x_0}f(x)$. יהי נתון $\varepsilon>0$. לפי הגדרת הסופרמום, קיים x_ε שעבורו $L-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leq L$. הפונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה, לכן לכל $x_\varepsilon<x<x_0$ מתקיים $L-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leq f(x)\leq L$. לכן קיימת סביבה שמאלית של x_0 בה לכל x מתקיים, כנדרש, $0\leq L-f(x)<\varepsilon$.

טענה 132: תהי $f(x)$ מונוטונית עולה וחסומה מלרע בסביבה (ימנית מנוקבת) של $x_0\in\mathbb{R}$. אזי $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\inf_{x>x_0}f(x)$.

[47] נ"א: $\forall x\in[a,b]\ f(x_m)\leq f(x)\leq f(x_M)$.

מסקנה 133: תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0. אזי $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.[48]

הוכחה. $\forall x < x_0\; f(x) \le f(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) \le f(x_0)$

מסקנה 134: נקודת אי־רציפות של פונקציה מונוטונית היא תמיד מסדר ראשון.

טענה 135: יהי I קטע, ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית; אזי $f(x)$ רציפה ב־I אס"ם $f(I)$ היא קטע ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. אם $f(x)$ רציפה ב־I, $f(I)$ היא קטע.

נניח כי $f(x)$ איננה רציפה ב־I. ל־$f(x)$ ישנה נקודת אי־רציפות $x_0 \in I$. נניח כי x_0 פנימית ב־I. $f(x)$ מונוטונית (עולה), $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. $f(x)$ אינה רציפה ב־$f(x_0)$, לכן $\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. עבור δ מספיק קטן, $x_0+\delta, x_0-\delta \in I$. $f(x_0-\delta) \le \lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0+\delta)$. נבחר נקודה c עבורה $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le c \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ כך ש־$c \ne f(x_0)$. אזי $\forall x \in I\; f(x) \ne c$. בנוסף, $f(x_0-\delta) < c < f(x_0+\delta)$. הראינו כי $f(I)$ מכיל זוג נקודות כך ש־$f(I)$ איננה מכילה נקודה c הנמצאת ביניהן; לכן $f(I)$ איננו קטע.

4.9.2 פונקציות הפוכות למונוטוניות

פונקציה הפוכה **הגדרה.** נניח כי $f : A \to B$ חח"ע ועל. **הפונקציה ההפוכה** ל־f היא f^{-1} כך שמתקיים $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.

דוגמה. עבור $-\infty < x < \infty$, $f(x) = x^3$ אז $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. עבור $0 \le x < \infty$, $g(x) = x^4$ אז $g^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}$.

דוגמה. $id_A = f^{-1}\circ f : A \to A;\, id_B = f\circ f^{-1} : B \to B;\, f = (f^{-1})^{-1} : A \to B$.

טענה 136: תהי $f : A \to B$ פונקציה מונוטונית ממש מ־A ל־B. אזי $f^{-1} : B \to A$ קיימת והיא מונוטונית ממש באותו כיוון של f. 2.1.2007

הוכחה. נניח כי f עולה ממש. ראשית, f חח"ע: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ובפרט $x_1 \ne x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$. נראה כי $f^{-1} : B \to A$ עולה ממש. נניח כי $y_1 < y_2 \in B$. נסמן $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

לא ייתכן ש־$x_1 = x_2$, כי מכך ינבע $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. נניח בשלילה $x_2 < x_1$. f מונוטונית עולה ממש, לכן $y_2 = f(x_2) < f(x_1) = y_1$, בסתירה ל־$y_1 < y_2$. לכן בהכרח $x_1 < x_2$. הראינו כי $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$ עבור $y_1 < y_2$, לכן f^{-1} עולה ממש.

[48] אם מוגדרת בסביבה מנוקבת, אי־השוויון מתקיים רק לגבי הגבולות; בסביבה שמאלית מלאה, אי־השוויון $f(x_0) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ חריף, וכו'.

משפט 137: $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע, ותהי $f : I \to \mathbb{R}$ מונוטונית ממש ורציפה. אזי תמונת f היא קטע ב־$\mathbb{R}$, שנסמנו U; הפונקציה $f : I \to U$ הפיכה ו־f^{-1} רציפה (ומונוטונית ממש).

הוכחה. ראשית, f רציפה על קטע, לכן תמונתה קטע. נתבונן ב־$f : I \to U$: זוהי פונקציה מונוטונית ממש ועל. לפי משפט קודם, f הפיכה ו־f^{-1} מונוטונית ממש. $f^{-1} : U \to I$ מונוטוניות ממש, ופונקציה מונוטונית המוגדרת על קטע U היא רציפה אס"ם תמונתה קטע. תמונת f^{-1} היא הקטע I, לכן f^{-1} רציפה.

משפט 138: תהי $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה והפיכה. אזי תמונת f היא קטע U ולהעתקה $f : I \to U$ קיימת פונקציה הפיכה, ופונקציה זו רציפה.

הוכחה. **למה 1.138:** בתנאי המשפט, f מונוטונית ממש.

הוכחה. נניח בשלילה כי f איננה מונוטונית ממש. ראשית, $f(x_i) \neq f(x_j)$ $i \neq j$. נניח בשלילה כי קיימות שלוש נקודות $x_1 < x_2 < x_3$ שעבורן, בה"כ, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_3)$. אם $f(x_1) < f(x_3)$, מתכונת ערך הביניים קיימת נקודה $x_1 < x < x_2$ שעבורה $f(x) = f(x_3)$ – סתירה לחח"ע.

מהלמה, $f : I \to \mathbb{R}$ מונוטונית ממש ורציפה. לכן תמונת f היא קטע U. $f : I \to U$ רציפה, מונוטונית ממש ועל, לכן לפי משפט קודם יש לה פונקציה הופכית שהיא מונוטונית ממש ורציפה.

4.10 פונקציות אלמנטריות

הגדרה. פונקציה נקראת **פונקציה אלמנטרית** אם היא מתקבלת באמצעות פעולות אלגבריות והרכבות של פולינומים, הפונקציה המעריכית, הפונקציות הטריגונומטריות והפונקציות ההפוכות להן. פונקציה אלמנטרית

טענה 139: פונקציה אלמנטרית היא רציפה בקטעים בהם היא מוגדרת.

4.10.1 הפונקציה המעריכית והלוגריתם

$f(x) = a^x$, כאשר $a > 0$. a^x רציפה על הישר. אם $a > 1$, f מונו' עולה ממש;[49] אם $a < 1$, f מונו' יורדת ממש.

הגדרה. יהי $0 < a \neq 1$. נגדיר $\log_a y \stackrel{\text{def}}{=} (a^x)^{-1}(y)$.

תכונות הלוגריתם: ($1 \neq a > 0$,$x_1, x_2 > 0$)

1. $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a x_1 x_2$

הוכחה. $a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2} = x_1 x_2$. נוציא לוגריתם ונקבל את הנדרש, מכיוון ש־$f^{-1}(f(x)) = x$.

[49] אם $x_1 < x_2$, $1 < \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$, לכן $a^{x_1} < a^{x_2}$.

2. $r\log_a x = \log_a x^r$

הוכחה. $a^{r\log_a x} = (a^{\log_a x})^r = x^r$

3. $\log_a x = \log_a b \log_b x$

הוכחה. $a^{(\log_a b)(\log_b x)} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x$

4.10.2 הפונקציות הטריגונומטריות

$\sin(x) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\cos(x) : [0,\pi] \to [-1,1]$ חח״ע ורציפות על הקטעים הללו.
נגדיר את הפונקציות ההפוכות: $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
$\sin(\arcsin(x)) = x$; נחשב את $\cos(\arcsin(x))$: ידוע כי $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; נציב $\alpha = \arcsin(x)$ ונקבל $\cos^2(\arcsin(x)) + (\sin(\arcsin(x)))^2 = \cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1$ - כלומר, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

באופן דומה, מוגדרות עבור $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty,\infty)$, $\text{cotan} : (0,\pi) \to (-\infty,\infty)$ הפונקציות ההפוכות $\tan^{-1} = \arctan$, $\text{cotan}^{-1} = \text{arccotan}$.[50]

4.11 גבולות במובן הרחב

הגדרה. תהי $f : [r,\infty) \to \mathbb{R}$. נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סביבה U של L קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$, $f(x) \in U$. ($\forall\varepsilon > 0\ \exists M > r : x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$) 4.1.2007

תנאי היינה לקיום גבול במובן הרחב

משפט 140: תהי $f : A \to \mathbb{R}$, ונניח כי f מוגדרת על הקרן $[r,\infty)$ עבור $r \in \mathbb{R}$. אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אס״ם לכל סדרה $(x_n) \subseteq A$, $x_n \to \infty$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

הוכחה. ($\Leftarrow$) נניח כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. יהי נתון $\varepsilon > 0$. אזי קיים $M > r$ כך שלכל $x > M$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. תהי $(x_n) \subseteq A$, $x_n \to \infty$. קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$, $x_n > M$. מכאן ש־$\forall n > N_0\ |f(x_n) - L| < \varepsilon$, ולכן $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

($\Rightarrow$) נניח את תנאי היינה ונניח בשלילה כי $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל M קיים $x_M > M$ עבורו $|f(x_M) - L| \geq \varepsilon$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x_n > n$ שעבורו $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. נקבל כי $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ו־$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$, בסתירה לתנאי היינה.

דוגמה. עבור $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. לעומת זאת, $g(x) = \cos x$ היא פונקציה מחזורית, ולפונקציה מחזורית יש גבול באינסוף אס״ם היא קבועה.

הגדרה. תהי $f : A \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ אם לכל $M > 0$ קיימת סביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0 שעבורה $\forall x \in V_{x_0}\ f(x) > M$.

[50] כזכור, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.

משפט 141: תהי $f : A \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ אם״ם לכל סדרת נקודות $x_0 \neq x_n \to x_0$, $(x_n) \subseteq A$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. תנאי היינה לקיום גבול במובן הרחב בנקודה

משפט 142: תהיינה g, f פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. אזי –

1. אם $f \le g$ על סביבה מנוקבת של x_0, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$;
2. אם $g(x)$ חסומה מלרע בסביבת x_0, $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty$;
3. אם $g(x)$ חסומה מלרע על־ידי מספר חיובי $M > 0$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \infty$;
4. אם $g(x)$ חסומה מלרע על־ידי מספר שלילי $C < 0$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$;

טענה 143: $f : A \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת x_0.

1. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$;
2. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ וקיימת סביבה מנוקבת V_{x_0} של x_0 שבה $f(x) > 0$, אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

משפט 144: תהיינה g, f פונקציות ממשיות, $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} g(y) = L$ (כאשר $x_0, y_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). אם קיימת סביבה מנוקבת של x_0 שבה $f(x) \neq y_0$, אזי מתקיים $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = L$.

טענה 145: תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה המוגדרת בסביבה שמאלית של $x_0 \in \mathbb{R}$. אזי קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ו־$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$ אם f חסומה או $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ אם f אינה חסומה. 8.1.2007

הוכחה. במקרה ש־f חסומה, הוכחנו כבר.

נניח כי $f(x)$ מונוטונית ולא חסומה מלעיל. כלומר, לכל M קיים $x < x_0$ כך ש־$M < f(x)$. לכל $x < y < x_0$, $M < f(x) \le f(y)$. כלומר, לכל $M \in \mathbb{R}$ קיימת סביבה שמאלית מנוקבת של x_0, V_{x_0}, שבה לכל $y \in V_{x_0}$, $M < f(y)$.

4.12 רציפות במידה שווה

הגדרה. תהי $f(x)$ מוגדרת על אינטרוול I. נאמר ש־$f(x)$ **רציפה במידה שווה** באינטרוול I אם רציפות במ״ש

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in I\ |x_1-x_2|<\delta \Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

ההבדל בין רציפות לרציפות במידה שווה הוא שמודולוס הרציפות δ אינו תלוי בנקודות הנבחרות אלא רק ב־ε.

דוגמה. $f(x) = x^2$, $0 \le x < \infty$. f רציפה. יהי נתון $\varepsilon > 0$; נניח בשלילה כי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 > 0$ $|x_1 - x_2| < \delta \Longleftarrow \varepsilon > |f(x_1) - f(x_2)|$. נבחר $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. אז $f(x_2) - f(x_1) = (x_1 + \frac{\delta}{2})^2 - x_1^2 = \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4} \to \infty$ כאשר $x_1 \to \infty$. (כלומר, על גודל הסביבה δ לקטון ככל ש־$x \to \infty$.)

טענה 146: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במ״ש על קטע חסום I. אזי $f(x)$ חסומה ב־I.

הוכחה. נבחר $\varepsilon = 1$. קיים $\delta = \delta(1) > 0$ כך ש־$|x_1 - x_2| < \delta \Longleftarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 1$.
נבחר סדרת נקודות ב־I, $a < x_1 < \ldots < x_l < b$, כך ש־$|x_{i+1} - x_i| < \delta$, $|a - x_1| < \delta$, $|b - x_l| < \delta$. נגדיר $M = \max(f(x_1), \ldots, f(x_l)) + 1$.

למה 1.146: לכל $x \in I$, $f(x) < M$. (כלומר, זהו חסם מלעיל.)

הוכחה. נבחר $x \in I$. אז $x \in [x_i, x_{i+1}]$ עבור $1 \le i \le l-1$ או $x \in [a, x_1]$ ($i = 1$) או $x \in [x_l, b]$ ($i = l$). בכל אחד מהמקרים, $|f(x) - f(x_i)| < 1$; לכן $f(x) < M$.

דוגמה. $f(x) = \frac{1}{x}$ על $0 < x \le 1$ איננה רציפה במ״ש, מכיוון שאיננה חסומה. (לעומת זאת, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ על $0 < x \le 1$ חסומה ואיננה רציפה במ״ש.)

משפט 147 (קנטור): פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במ״ש.

הוכחה. תהי $f(x)$ רציפה על הקטע $[a, b]$. נניח בשלילה כי $f(x)$ איננה רציפה במ״ש. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיימים x_1^δ, x_2^δ כך ש־$|x_1^\delta - x_2^\delta| < \delta$ אך $|f(x_1^\delta) - f(x_2^\delta)| \ge \varepsilon$. עבור $\delta = \frac{1}{n}$, נבחר נקודות α_n, β_n כך ש־$|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$, $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \ge \varepsilon$. נתבונן בסדרות (α_n), (β_n). לפי משפט בולצ׳אנו־ויירשטראס, קיימת תת־סדרה $\alpha_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. מתקיים גם $\beta_{n_k} \to x_0$, כי $|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$. $f(x)$ רציפה ב־$[a, b]$, לכן לפי היינה $f(\alpha_{n_k}) \to f(x_0)$ ו־$f(\beta_{n_k}) \to f(x_0)$. כלומר, לכל $\gamma > 0$ קיים N_γ כך שלכל $k > N_\gamma$, $|f(\alpha_{n_k}) - f(x_0)| < \gamma$, $|f(\beta_{n_k}) - f(x_0)| < \gamma$. מכאן, $\varepsilon \le |f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| < 2\gamma$. נבחר $\gamma = \frac{\varepsilon}{10}$, למשל, ונקבל סתירה.

5 חשבון דיפרנציאלי

5.1 הנגזרת

9.1.2007 **הגדרה.** תהי $f(x)$ רציפה ב־x_0 (ובפרט מוגדרת בסביבת x_0).**הנגזרת** של $f(x)$ ב־x_0 מוגדרת כ־ נגזרת

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

אם g, f פונקציות ממשיות; אם קיימת סביבה מלאה V_{x_0} של x_0 כך ש־$f\mid_{V_{x_0}} \equiv g\mid_{V_{x_0}}$ אזי $f'(x_0) = g'(x_0)$.[51]

דוגמה. עבור $f(x) = ax+b$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a$$

עבור $g(x) = \frac{1}{x}$, $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$,

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0-(x_0+h)}{hx_0(x_0+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

טענה 148: אם $f(x)$ גזירה ב־x_0 אזי $f(x)$ רציפה ב־x_0.

הוכחה. ראשית, $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. נניח כי $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{hf(x_0+h)-fh(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= 0 \cdot f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

דוגמה. תהי $f(x) = |x|$. נראה כי ב־$x_0 = 0$ היא איננה גזירה. נגזרת משמאל היא $\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = -1$ והנגזרת מימין היא $\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-0}{h} = 1$; כלומר, יש נגזרת מימין ויש נגזרת משמאל, אך אין נגזרת ב־0.

דוגמה. תהי $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ עבור $x \neq 0$, $f(0) = 0$. מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ולכן פונקציה זו רציפה, אך הגבול $\lim_{h\to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h}$ אינו קיים והפונקציה אינה גיזרה ב־0.

[51] נגזרת היא תכונה מקומית, ולכן תמיד אפשר להסתכל רק על סביבה קטנה יותר; אם $f = g$ בסביבה זו, מתקבל שוויון בנגזרות.

5.2 הנגזרת כשיפוע המשיק

פונקציה אפסית

הגדרה. פונקציה $f(x)$ נקראת **פונקציה אפסית** אם $f(x)=x\hat{f}(x)=o(x)$ עבור $\hat{f}(x)$ רציפה ב־0, $\hat{f}(0)=\lim_{x\to 0}\hat{f}(x)=0$.

טענה 149: $f(x)$ פונקציה אפסית אס"ם $f(x)$ מוגדרת בסביבת 0, $f(0)=0$ ו־ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

הוכחה. נניח כי $f(x)$ אפסית. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\hat{f}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\hat{f}(x)=0$.

להיפך, נגדיר $\hat{f}(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. אז $\lim_{x\to 0}\hat{f}(x)=0=\hat{f}(0)$, ועל־פי הגדרה $f(x)=x\hat{f}(x)$.

דוגמה. $f(x)=x^2$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $f(x)=x^2\sin x+x^3\cos x$, $f(x)=\sin^2 x$ כולן פונקציות אפסיות.

טענה 150: סכום שתי פונקציות אפסיות ומכפלת פונקציה אפסית בפונקציה חסומה הן אפסיות.

הוכחה. $f(x)=x\hat{f}(x)$, $g(x)=x\hat{g}(x)$. אז $g(x)+f(x)=x(\hat{g}(x)+\hat{f}(x))$. אם $h(x)$ חסומה, $h(x)f(x)=x(\hat{f}(x)h(x))$.

טענה 151: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. אזי $f'(x_0)=\beta$ אם ורק אם, בסביבה של x_0, מתקיים $f(x_0+h)=f(x_0)+h\beta+o(h)$.

הוכחה. נניח כי $f(x_0+h)=f(x_0)+h\beta+hu(h)$ (כאשר $o(h)=hu(h)$). אזי מתקיים $\beta=\lim_{h\to 0}\frac{h\beta+hu(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.
נניח כי $f'(x_0)=\beta$. נתבונן בפונקציה $g(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-h\beta$. כעת, $g(0)=0$ ו־ $0=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{h\beta}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h\beta}{h}$. לכן $g(h)$ אפסית, ואכן $f(x_0+h)=f(x_0)+h\beta+g(h)$.

הגדרה. **ישר** – $a(x-x_0)+l(x_0)=l(x)=ax+b$

משיק בנקודה

הגדרה. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0. נאמר שישר $l(x)$ **משיק** ל־$f(x)$ בנקודה x_0 אם קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x_0+h)=l(x_0+h)+o(h)$.

טענה 152: ישר $l(x)$ משיק ל־$f(x)$ בנקודה x_0 אס"ם $f(x)$ גזירה ב־x_0 ו־ $l(x)=f'(x)(x-x_0)+f(x_0)$.

הוכחה. ראשית, אם $l(x)=a(x-x_0)+l(x_0)$ משיק ל־$f(x)$ בנקודה x_0 אזי, לפי הגדרה, $f(x_0+h)=l(x_0+h)+o(h)=l(x_0)+ah+o(h)$. לפי טענה קודמת, אם ניתן לרשום את $f(x)$ בצורה כזו אזי $f(x)$ גזירה ב־x_0 ו־ $f'(x_0)=a$.

להיפך, $f(x)$ גזירה ב־x_0, אזי לפי טענה קודמת $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+o(h)$. נגדיר $l(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ואז $f(x_0+h)=l(x_0+h)+o(h)$, ולכן $l(x)$ משיק ל־$f(x)$ בנקודה x_0.

5.3 אריתמטיקה של נגזרות

טענה 153: תהיינה $g(x)$, $f(x)$ גזירות בנקודה x_0. אזי – 1) $(f'+g')(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$; 2) עבור $c\in\mathbb{R}$, $(c\cdot f)'(x_0)=cf'(x_0)$.

הוכחה. (1)

$$\begin{array}{rl} & f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+o_1(h) \\ + & g(x_0+h)=g(x_0)+hg'(x_0)+o_2(h) \\ \hline & (f+g)(x_0+h)=(f+g)(x_0)+h(f'(x_0)+g'(x_0))+(o_1+o_2)(x_0) \end{array}$$

לכן, על־פי טענה קודמת, $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

טענה 154 (כלל לייבניץ): f, g גזירות ב־x_0. אזי $(f\cdot g)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$.

הוכחה. $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+o_1(h)$, $g(x_0+h)=g(x_0)+hg'(x_0)+o_2(h)$. אזי

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x_0+h) &= (f\cdot g)(x_0)+h(f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)) \\ &+ o_1(h)(g(x_0)+hg'(x_0)+o_2(h)) \\ &+ o_2(h)(f(x_0)+hf'(x_0)+o_1(h)) \\ &+ h\cdot h\cdot f'(x_0)\cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

$o_1(h)$ אפסית ו־$g(x_0)+hg'(x_0)+o_2(h)$ חסומה, לכן מכפלתן אפסית; $o_2(h)$ אפסית ו־$f(x_0)+hf'(x_0)+o_1(h)$ חסומה, לכן מכפלתן אפסית; $h\cdot h\cdot f'(x_0)\cdot g'(x_0)$ אפסית. קיבלנו $(f\cdot g)(x_0+h)=(f\cdot g)(x_0)+h(f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0))+o(h)$.

11.1.2007 **משפט 155 (כלל השרשרת):** תהי $f(x)$ רציפה וגזירה ב־x_0, $g(x)$ רציפה וגזירה ב־$f(x_0)$. אזי $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

הוכחה. **למה 1.155:** תהי $g(x)$ פונקציה אפסית ותהי $f(x)=cx+\hat{f}(x)$, כאשר $\hat{f}$ פונקציה אפסית. אזי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ גם פונקציה אפסית.

הוכחה. נסמן $g(x)=x\hat{g}(x)$, $\hat{f}(x)=xu(x)$. אז $f(x)=x(c+u(x))$. מתקיים $\lim_{x\to 0}f(x)=0$. נתבונן ב־$g\circ f$: $g(f(x))=f(x)\hat{g}(f(x))=x(c+u(x))\hat{g}(f(x))$. נותר להראות כי $t(x)=(c+u(x))\hat{g}(f(x))$ רציפה ב־0, $\lim_{x\to 0}t(x)=0$.

$$\lim_{x\to 0}t(x)=\lim_{x\to 0}(c+u(x))\lim_{x\to 0}\hat{g}(x(c+u(x)))=c\hat{g}(f(0))=c\hat{g}(0)=0=t(0)$$

לכן $(g\circ f)(x)=xt(x)$ פונקציה אפסית.

מהגדרה, $(g\circ f)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h}$. נשתמש בקירובים הלינאריים $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\hat f(h)$ ו־$g(x_0+v)=g(x_0)+vg'(x_0)+\hat g(v)$. נגדיר $y=f(x_0)$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_0+h) &= g(f(x_0+h))\\ &= g(y+[hf'(x_0)+\hat f(h)])\\ &= g(y)+g'(y)[hf'(x_0)+\hat f(h)]+\hat g(hf'(x_0)+\hat f(h))\end{aligned}$$

$hg'(y)f'(x_0)$ הוא גורם מסדר ראשון; $g'(y)\hat f(h)$ אפסית; על־פי הלמה, גם $\hat g(hf'(x_0)+\hat f(h))$ אפסית. אז $(g\circ f)(x_0+h)=(g\circ f)(x_0)+hf'(x_0)g'(y)+o(h)$ ולכן, כנדרש, $(g\circ f)'(x)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.

דוגמה. תהיינה $g(y)=y^2$, $u(x)=1+x^2$ ותהי $f(x)=(g\circ u)(x)=(1+x^2)^2$. אז $f'(x)=(g\circ u)'(x)=g'(u(x))u'(x)=2(1+x^2)\cdot 2x$.

טענה 156: תהיינה f, g גזירות ב־x_0, $g(x_0)\neq 0$. אזי $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

הוכחה. מספיק להוכיח $(\frac{1}{g})'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, ואז נוכל להוכיח את הטענה על־ידי שימוש במכפלה. נגדיר $u(y)=\frac{1}{y}$.

$$(\frac{1}{g})'(x_0)=(u(g(x)))'(x_0)=u'(g(x_0))g'(x_0)=g'(x_0)\cdot\frac{-1}{(g(x_0))^2}$$

5.4 נגזרת הפונקציה ההפוכה

15.1.2007

משפט 157: תהי $f(x)$ רציפה והפיכה בסביבה מלאה V_{x_0} של x_0. אם $f'(x_0)\neq 0$ אזי מתקיים $(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$.

הוכחה. נסמן $y_0=f(x_0)$.

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}\right)^{-1}\end{aligned}$$

ידוע כי $\frac{1}{\lim_{x\to x_0}x}=\frac{1}{x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}$ עבור $x_0\neq 0$. אז –

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{h}{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}\right)^{-1}\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{y_0+h-y_0}{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}\right)^{-1}\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(f^{-1}(y_0+h))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}\right)^{-1}\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(f^{-1}(y_0+h))-f(x_0)}{f^{-1}(y_0+h)-x_0}\right)^{-1}\end{aligned}$$

מרציפות f^{-1}, $\lim_{h\to 0}f^{-1}(y_0+h)=f^{-1}(y_0)=x_0$; אז $f^{-1}(y_0+h)=x_0+u$.

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{u\to 0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{x_0+u-x_0}\right)^{-1} \\ &= (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

הערה: פונקציה יכולה להינתן בהגדרה מפורשת - למשל, $f(x) = \sin^3(x) + x^5 + 7$ - או בהגדרה סתומה - למשל, $u^5(t) + 7u(t) + t^3 + t = 7$. נניח כי $u'(t)$ קיימת. נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל $(u^5(t))' + 7u'(t) + (t^3)' + t' = 5u^4(t)u'(t) + 7u'(t) + 3t^2 + 1 = 0$.

דוגמה. פולינומים : $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

באינדוקציה על n, נראה כי $(x^n)' = nx^{n-1}$. עבור $n = 1$, $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$. נניח עבור n. אז $(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n x' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$. אז $(p(x))' = (\sum_{k=0}^n a_k x^k)' = \sum_{k=0^n} (a_k x^k)' = \sum_{k=0}^n a_k (x^k)' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ (עבור $k = 0$, המחובר מתאפס).

דוגמה. נראה כי $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

$$\begin{aligned} (\ln x)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln(\frac{x_0+h}{x_0}) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}}) \\ &= \lim_{h\to 0} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

עבור $0 \neq h_n \to 0^+$, $a_n = \frac{1}{h_n} \to +\infty$. אז $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{c}{a_n})^{a_n} = e^c$. מכאן,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{h}} &= \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{\frac{1}{h_n}})^{\frac{1}{h_n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{a_n})^{a_n} \\ &= \ln \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\frac{1}{x_0}}{a_n})^{a_n} \\ &= \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

(על פי טענה קודמת, אם g רציפה אז $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(\lim_{x\to x_0} x) = g(x_0)$.) עד כאן חישבנו נגזרת ימנית. חישוב הנגזרת השמאלית ($a_n \to -\infty$) כתרגיל.

$\ln x = \ln a \log_a x$; נגזור ונקבל $\frac{1}{x} = \ln a (\log_a x)'$, ולכן $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

דוגמה. נראה כי $(e^x)'(x_0) = e^{x_0}$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

$(e^x)^{-1} = \ln x$, אז אם נגדיר $f(x) = \ln x$, $f^{-1}(y) = e^y$, נוכל להשתמש במשפט ולקבל $(e^y)'(y_0) = \frac{1}{\ln'(e^{y_0})} = \frac{1}{\frac{1}{e^{y_0}}} = e^{y_0}$

$a^x = e^{\ln ax}$; מכלל השרשרת נקבל $(a^x)' = (e^{\ln ax})' = e^{\ln ax} \ln a = a^x \ln a$.

מכאן, נוכל להכליל את הכלל $(x^n)' = nx^{n-1}$: עבור $\beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$, נחשב את $(x^\beta)'$.

$x^\beta = e^{\ln x\beta}$, אז נגזור ונקבל $(x^\beta)' = (e^{\beta \ln x})' = e^{\beta \ln x} \cdot \beta \cdot \frac{1}{x} = \beta x^{\beta-1}$.

5.5 משפטי ערך ממוצע

הגדרה. נאמר שפונקציה $f(x)$ **גזירה בקטע** I אם $f(x)$ רציפה ב־I וגזירה בכל נקודה פנימית בו. גזירות בקטע

הגדרה. נאמר שפונציה **עולה** בסביבת x_0 אם – 1) $x > x_0 \Longleftarrow f(x_0) \le f(x)$; 2) $x < x_0 \Longleftarrow f(x) \le f(x_0)$. (באופן דומה – **עולה ממש**, **יורדת**, **יורדת ממש**.)

טענה 158: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0, ונניח כי $f'(x_0) > 0$. אזי $f(x)$ עולה ממש בסביבת x_0.

הוכחה. מהגדרה, $f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. נבחר $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < h < \delta$, $\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \frac{f'(x_0)}{2}$. כלומר, לכל $0 < h < \delta$ $\frac{3}{2}f'(x_0) > \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > \frac{f'(x_0)}{2} > 0$. אז בפרט $\forall\, 0 < h < \delta\; f(x_0+h) - f(x_0) > 0$.

אותו דבר בסביבה שמאלית (h שלילי).

נקודת קיצון

הגדרה. תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת V_{x_0} של x_0. נאמר כי x_0 נקודת **מקסימום מקומי** של $f(x)$ אם קיימת סביבה (מלאה) של x_0 $U_{x_0} \subseteq V_{x_0}$ כך שלכל $x \in U_{x_0}$, $f(x) \le f(x_0)$. (באופן דומה – **מינימום מקומי**.) 16.1.2007

נאמר ש־x_0 **נקודת קיצון** של $f(x)$ אם x_0 היא נקודת מקסימום או מינימום מקומי.

משפט 159 (פרמה): תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. אם x_0 נקודת קיצון של $f(x)$ ו־$f(x)$ גזירה ב־x_0, אזי $f'(x_0) = 0$.

דוגמה. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 3x^2 |_{x=0} = 0$ אך עבור $x > 0$, $x^3 > 0$, ועבור $x < 0$, $x^3 < 0$. לכן התנאי מספיק אך לא הכרחי.

הוכחה. נניח כי $f'(x_0) > 0$. לפי טענה קודמת, $f(x)$ עולב ממש ב־x_0, אז עבור $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$, בסתירה לכך ש־x_0 מקסימום מקומי. עבור $x < x_0$, $f(x) < f(x_0)$, בסתירה לכך ש־x_0 מינימום מקומי.

משפט 160 (רול): תהי $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $f(a) = f(b)$. אזי קיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f'(c) = 0$.

הוכחה. $f(x)$ רציפה ב־$[a,b]$, לכן לפי משפט ויירשטראס ל־$f(x)$ קיימים מקסימום c_1 ומינימום c_2 בקטע $[a,b]$. אם c_1, c_2 נקודות קצה, $\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ – כלומר, $f(x) = d$ ולכן, בכל נקודה $x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$. אחרת, בה"כ c_1 איננה נקודת קצה; לכן c_1 נקודת קציון, ולפי פרמה $f'(c_1) = 0$.

דוגמה. נטען כי לפולינום ממעלה k ישנם לכל היותר k שורשים ממשיים. אם לפולינום ישנם k שורשים, לנגזרת יש לפחות $k-1$ שורשים. נוכיח באינדוקציה. עבור $k = 1$, $p(x) = ax + b$ וישנו שורש אחד לכל היותר. אם $\deg p(x) = k + 1$, $p'(x)$ פולינום ממעלה k ולפי הנחת האינדוקציה יש לו לכל היותר k שורשים.

משפט 161 (ערך הביניים של לגראנז'): תהי $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$. אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה. נגדיר $l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$[52] ו־$u(x)=f(x)-l(x)$. הפונקציה $u(x)$ גזירה ב־$[a,b]$, $u(a)=0$, $u(b)=0$. לכן, לפי רול, $\exists c\in(a,b)\ :\ u'(c)=f'(c)-l'(c)=0$ – כלומר, $f'(c)=l'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a)}(x-a)'+(f(a))'|_{x=c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, כנדרש.

מסקנה 162: תהי $f(x)$ גזירה ב־$[a,b]$. $f(x)=d \Longleftarrow \forall a<x<b\ f'(x)=0$.

הוכחה. תהיינה $a\le x_1,x_2\le b$. לפי לגראנז', יש c_{x_1,x_2} כך ש־$0=f'(c_{x_1,x_2})=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\Longleftarrow$ $\forall a\le x_1,x_2\le b\ f(x_1)=f(x_2)$.

מסקנה 163: תהי $f(x)$ גזירה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $\forall a<x<b\ f'(x)=f(x)$. אזי $f(x)=ce^x$.

הוכחה. נתבונן בפונקציה $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. אז $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}=0$, לכן $g(x)=c$ ו־$f(x)=ce^x$.

מסקנה 164: תהי $f(x)$ גזירה ב־$[a,b]$, $f'(x)=p(x)$ פולינום. אזי $f(x)$ פולינום ממעלה $\deg p(x)+1$.

הוכחה. $f'(x)=p(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$. נמצא פולינום $u(x)$ כך ש־$u'(x)=p(x)$: נגדיר $u(x)=\sum_{k=0}^n\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$. נתבונן ב־$g(x)=f(x)-u(x)$. אז $g'(x)=f'(x)-u'(x)=0$, לכן $f(x)=u(x)+c$ פולינום ממעלה $\deg p(x)+1$.

18.1.2007 **משפט 165 (ערך הביניים של קושי):** תהיינה $f(x)$, $g(x)$ גזירות ב־$[a,b]$ כך ש־$g(b)-g(a)\neq 0$. אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך שאחד מהבאים מתקיים – 1) $f'(c)=g'(c)=0$; 2) $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.[53]

הוכחה. נגדיר פונקציה $u(x)=(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))+(f(a)-f(x))(g(b)-g(a))$. מתקיים $u(a)=0$, $u(b)=0$. לפי משפט רול, קיימת נקודה $a<c<b$ בה הנגזרת מתאפסת – $0=u'(c)=g'(c)(f(b)-f(a))-f'(c)(g(b)-g(a))$.

אם $g'(c)=0$, אזי $-f'(c)(g(b)-g(a))=0$; מכיוון ש־$g(b)-g(a)\neq 0$, נקבל $f'(c)=0$.

אם $g'(c)\neq 0$, נעביר אגפים ונקבל $g'(c)(f(b)-f(a))=f'(c)(g(b)-g(a))$. נחלק ב־$g'(c)\neq 0$ וב־$g(b)-g(a)\neq 0$ ונקבל $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

משפט 166 (דרבו): תהי $f(x)$ גזירה ב־$[a,b]$, ונניח כי קיימים $f'_+(a)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f'_-(b)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$. נניח בה"כ כי $f'_+(a)<f'_-(b)$. אזי לכל s באינטרוול $[f'_+(a),f'_-(b)]$ קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש־$f'(c)=s$.[54]

[52] זהו הישר העובר דרך $(a,f(a))$ ו־$(b,f(b))$.

[53] ישנן פונקציות בהן שני התנאים מתקיימים – כל תנאי בנקודה נפרדת.

[54] כלומר, הנגזרת מקיימת את תכונת ערך הביניים.

הוכחה. נגדיר $v(x) = f(x) - sx$. $0 > s - (a)'_+f = (a)'_+v$, $v'_-(b) = f'_-(b) - s > 0$. לכן v יורדת בסביבה ימנית של a (ובפרט יש $a_1 > a$ כך ש-$v(a_1) < v(a)$) ועולה בסביבה שמאלית של b (ובפרט יש $b_1 < b$ כך ש-$v(b_1) < v(b)$). נחפש נקודה שבה $v'(x) = 0$ ויינבע $f'(x) = s$ ($v'(x) = f'(x) - (sx)' = 0$).

אם $v(a) = v(b)$, לפי משפט רול קיימת $a < c < b$ כך ש-$v'(c) = 0$.

אם $v(a) > v(b)$, נתבונן ב-$v(x)$ ב-$[a, b_1]$. ידוע כי $v(b_1) < v(b) < v(a)$, לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת $a < d < b_1$ כך ש-$v(d) = v(b)$. לפי משפט רול, קיימת $d < c < b$ כך ש-$v'(c) = 0$.

אם $v(a) < v(b)$, נתבונן ב-$v(x)$ ב-$[a_1, b]$. קיימת $a_1 < d < b$ כך ש-$v(d) = v(a)$. לפי משפט רול, קיימת $a < c < d$ כך ש-$v'(c) = 0$.

דוגמה. נגדיר $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. f גזירה בכל הישר אך נגזרתה איננה רציפה ב-0: הנגזרת ב-0 היא $\lim_{h\to0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to0} h \sin\frac{1}{h} = 0$, אך עבור $x \neq 0$ נקבל $f'(x) = (x^2 \sin\frac{1}{x})' = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$; הגבול $\lim_{x\to0} \cos\frac{1}{x}$ איננו קיים, לכן גם $\lim_{x\to0} f(x)$ איננו קיים.

5.6 נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות

5.6.1 גבולות שימושיים

טענה 167: עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$.

טענה 168: $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 22.1.2007

הוכחה. עבור $x > 0$, $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, על-פי הטענה הקודמת; מכאן, לפי משפט הסנדוויץ', $\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$\sin(-x) = -\sin x$, אז $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x}$ ו-$1 = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x}$.

עוד גבול שכדאי לדעת: $\lim_{h\to0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.[55]

5.6.2 $\sin(x)$ ו-$\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h\to0} \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \lim_{h\to0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \cos(x) \end{aligned}$$

[55] באמצעות הגבול הזה ובאמצעות הזהות $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ניתן לחשב, למשל, את הגבול $\lim_{h\to0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = \lim_{h\to0} \frac{-2\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$.

ומתקיים $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, לכן, על־פי כלל השרשרת,

$$\cos'(x) = \sin'(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$$

5.6.3 $\tan(x)$ ו־$\cotan(x)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, אז

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

ומתקיים $\cotan(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$, אז

$$\cot'(x) = \tan'(\frac{\pi}{2} - x)(-1) = \frac{-1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

5.6.4 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$. על־פי המשפט, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$. נגדיר $\theta = \arcsin(x)$ ($0 < \theta < \pi$); אז $\sin\theta = x$ ואז $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta + x^2 = 1$, לכן $\cos^2\theta = 1 - x^2$ ומכאן $\cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$. לכן $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\arcsin(x) = \theta$ אז $\sin\theta = x = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$. אז $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$,
ומכאן $\arccos'(x) = -\arcsin'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \cos^2(\arctan(x))$. נגדיר $\theta = \arctan(x)$; אז מתקיים $\tan^2\theta + 1 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$. אז $\cos^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{x^2+1}$. לכן $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$\arctan(x) = \theta$ אז $\tan\theta = x = \cotan(\frac{\pi}{2} - \theta)$. אז $\operatorname{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$,
ומכאן $\operatorname{arccotan}'(x) = (\frac{\pi}{2} - \arctan(x))'$ ו־$\operatorname{arccotan}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.