דימה זבלב
אונ' בר-אילן

אינטגרלים מסויימים

הגדרה:

תהי f(x) המוגדרת ב- [a,b] ותהי $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ חלוקת של [a,b] נבחר בכל תת-קטע $[x_{i-1}, x_i]$ נק' $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ונבנה סכום (סופי) באופן הבא :

$\sigma(T, \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) * \Delta x_i$. ונקרא סיכום רימן של f(x) ב [a,b] עם חלוקות T והנ' α_i.

הגדרה:

נאמר כי סכום רימן $\sigma(T, \alpha_i)$ שואפים לגבול I – כאשר $\lambda(t) \longrightarrow 0$ אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כש אם $\lambda(t) < \delta$ אז לכל בחירה נקודות α_i עבור חלוקות T יתקיים :

$|\sigma(T, \alpha_i) - I| < \varepsilon$

הערה :

אינטגרל מסוים הוא גבול ולכן מספר(שטח)

הגדרה:

נתבונן בסדרה אינסופית של חלוקות של הקטע [a,b] $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ לכל חלוקה יש פרמטר חלוקה $\lambda(T_m)$ שהוא מספר ולכן לכל סדרת חלוקות $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ בעצם מותאמת סדרת מספרים $(\lambda(T_m))_{m=1}^{\infty}$ נאמר כי $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ היא סגרה חלוקות נורמלית אם $\lim_{m \to \infty} \lambda(T_m) = 0$

הגדרה :

נאמר כי f(x) אינט' ע"פי רימן ב- [a,b] אם קיים $I \in \Re$ כך שלכל סגרה נורמלית של חלוקות $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ של הקטע - [a,b] ולכל בחירה נק' $\alpha_{m,i}$ סדרת סכומי מקיימת :

$\lim_{m \to \infty} \sigma(T, \alpha_{m,i}) = I$

משפט:

אם f(x) אינטגרבילי ב- [a,b] עפ"י רימן אזי חסומה ב- [a,b]

הגדרת אינטגרל ע"פי רימן : $\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T, \alpha_i)$

הגדרת אינטגרל *דרבו:*

תהי f(x) חסומה ב- [a,b], T חלוקות של הקטע ל $\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i * \Delta x_i$ נקרא סכום תחתון של דרבו עבור T ל- $\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i * \Delta x_i$ נקרא סכום עליון של דרבו עבור T.

הערה: $\overline{S}(T), \underline{S}(T)$ לא תלויים בבחירה של נק' α_i

---

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

למה:
תהי T חלוקות של [a,b], ותהי $A=\{\sigma(T,\alpha_i)\}$ אזי A חסומה ומתקיים :
$\overline{S}(T)=\sup A, \underline{S}(T)=\inf A$

הגדרה:
האמר שחלוקה T' היא העדנה של העדנה של חלוקה *T* אם *T'* מתקבלת מ- T ע"י הוספת מספר סופי של נק' או ש *T'=T*

למה:
תהי *T'* העדנה של *T* אזי : $\overline{S}(T)\geq\overline{S}(T'), \underline{S}(T)\leq\underline{S}(T')$

למה:
תהי *T'* העדנה של *T* המתקבלת מ- *T* ע"י הוספת *p* נק' אזי :
$\underline{S}(T)\geq\underline{S}(T')-p\lambda(T)\omega$ $\overline{S}(T)\leq\overline{S}(T')+p\lambda(T)\omega$

סימון :
$m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי $\omega=M-m$

מסקנה:
לכל חלוקה T של $[a,b]$ מתקיים :

$$m(b-a)=\sum_{i=1}^{n} m\cdot\Delta x_i \underset{m\leq m_i}{\leq} \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i=\underline{S}(T)\leq\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i \underset{M_i\leq M}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M\cdot\Delta x_i=M(b-a)$$

הגדרה:
תהי $f(x)$ פונק' חסומה ב- $[a,b]$ נאמר כי $f(x)$ אינט' ע"פי דרבו בקטע אם $\underline{I}=\overline{I}$.
ונסמן $\int_a^b f(x)\cdot dx=\underline{I}=\overline{I}$

משפט(לבש מוחלש):
אם נתון ש $f(x)$ מוגדרת ב- $[a,b]$ ויש לה מס' בן מניה (שאפשר לסדר אותם בסדרה $((a_n)_{n=1}^{\infty}$
של נקי אי רציפות אזי $f(x)$ אינטגרבילית .

משפט(גרסה מוחלשת לבש מוחלש):
אם נתון ש $f(x)$ מוגדרת ב- $[a,b]$ ורציפה פרט למס' סופי *k* ישל נק' אזי $f(x)$ אינטגרבילית .

משפט (פונקציות מונו')
תהי $f(x)$ מונו'(חסומה) ב - $[a,b]$ אזי $f(x)$ אנט' בקע.

הערה :
אם לפונקציה יש נקודת אי רציפות שבה לא מוגדרת נק' אזי אין משמעות למושג אינטגרל.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

משפט(תנאים הכרחיים ומספיקים לאינט'):
תהי $f(x)$ פונק אנט' ב- $[a,b]$ אזי **1)** $f(x)$ חסומה שם **2)** לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל זוג חלוקות T_1,T_2 של - $[a,b]$ עבורן $\lambda(T_1) < \delta, \lambda(T_2) < \delta$ מתקיים $|\overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_2)| < \varepsilon$

משפט:
תהי $f(x)$ פונק' המוגדרת ב- $[a,b]$ אזי $f(x)$ אנט' בקטע אם"ם:
1) $f(x)$ רציפה בקטע ולכן חסומה
2) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$ כאשר - $M_i - m_i = \omega_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x)) - \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x))$

משפט (פונקציות רציפות):
תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ אזי $f(x)$ אנט' בקטע.

משפט :
נניח כי $f(x)$ אנט' ב- $[a,c]$ וגם אנט' בקטע $[c,b]$ אזי $f(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ ומתקיים :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$

משפט:
תהי $f(x)$ אנט' בקטעים $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$ אזי $f(x)$ אנט' ב- $[x_0,x_n]$ ומתקיים:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\cdot dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cdot dx$$

משפט(דרבו) :
תהי $f(x)$ חסומה ב- $[a,b]$ $\underline{I} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}(T)$ $\overline{I} = \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(T)$

משפט (השקילות בין אינטגרל רימן ודרבו):
תהי $f(x)$ פונק' חסומה ב- $[a,b]$ אזי $f(x)$ אנטג' ע"פי רימן אם"ם היא אינטג' ע"פי דרבו ואם כך אינטג' לפי רימן ולפי דרבו שווים.

משפט(תכונות של פונק' אנט'):
תהי $f(x)$ אינט' ב- $[a,b]$ ותהי $g(x)$ פונק' פונק' המקיימת $f(x) = g(x)$ פרט אולי למס' סופי של נק' k נקודות מתוך $[a,b]$ אזי $g(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ וגם $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b g(x)\cdot dx$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

פעולות חשבון:

1) $c\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx=\int_a^b c\cdot f(x)\cdot dx$

2) $\int_a^b (f\pm g)(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx\pm\int_a^b g(x)\cdot dx$

3) אם $f(x)\cdot g(x)$ אינט' ב-$[a,b]$ אז גם $(f\cdot g)(x)$ אינטגרבילית

4) אם $g(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ וגם יש c קבוע כך שלכל $x\in[a,b]$ $0\le c\le g(x)$ אזי $\left[\frac{1}{g(x)}\right](x)$ אנט' ב - $[a,b]$

משפט :
אם $f(x)$ אינט' ב- $[a,b]$ אז $f(x)$ אנט' בכל $[a,b]\supseteq[\alpha,\beta]$

משפט:
תהי $f(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ ו $f(x)\ge 0$ **(** $f(x)\le 0$ **)** בקטע אז
$\int_a^b f(x)\cdot dx\ge 0$ **(** $\int_a^b f(x)\cdot dx\le 0$ **)**

משפט:
תהי $f(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ ו $f(x)>0$ **(** $f(x)<0$ **)** בקטע אז
$\int_a^b f(x)\cdot dx>0$ **(** $\int_a^b f(x)\cdot dx<0$ **)**

משפט:
תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ו $f(x)\ge 0$ בקטע **אם"ם** $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)>0$ אזי
$\int_a^b f(x)\cdot dx>0$

משפט (אי שיוויון משולש לאינטגרלים):
תהי $f(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ אזי $f(x)$ אנט' שם ומתקיים $\left|\int_a^b f(x)\cdot dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\cdot dx$

משפט:
תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ו תהי $g(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ ומקיימת $g(x)>0$ **(** $g(x)<0$ **)**
$\forall x\in[a,b]$
אזי יש $c\in[a,b]$ שעבורה $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot dx=f(c)\int_a^b g(x)\cdot dx$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

מסקנה :

אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ אזי יש $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)\cdot dx$

משפט (בונה):

תהי $f(x)$ מונו ב- $[a,b]$ ואנט' בקטע, ו $g(x)\ge 0$ או $g(x)\le 0$ אזי יש נק' $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot dx = f(a)\int_a^c g(x)\cdot dx + f(b)\int_c^b g(x)\cdot dx$$

אינטגרלים הלא מסוימים

הגדרה:

תהי $f:\Re\to\Re$ פונק' כלשהי ותהי $F:\Re\to\Re$ פונק אשר מתקיים כי $\forall x\in\Re$ $F'(x)=f(x)$ אזי נקרא ל $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$.

הערה : *כל פונקציה קדומה היא גזירה ולכן כל פונקציה קדומה היא רציפה.*

משפט:

אם $f(x)$ פונק' כך $f'(x)=0$ $\forall x\in\Re$ **אם"ם** $f(x)$ קבוע .

משפט :

תהי $f(x)$ רציפה ב- $[x_0,x_0+\varepsilon]$ וגזירה ב- $(x_0,x_0+\varepsilon)$ אם קיים $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=L$ אזי יש נגזרת ב - x_0 ל $f(x)$ ומתקיים כי $f_+(x)=L$

משפט:

אם $f(x)$ רציפה בסביבה של x_0 וגזירה שם פרט לנקי x_0 עצמה אזי אם מתקיים $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=L$ אזי $f(x)$ גזירה ב- x_0 ומתקיים $f'(x_0)=L$

מסקנה:

תהי $f(x)$ פונק' גזירה ב- (a,b) אזי אין נק' אי רציפות של הנגזרת $f'(x)$

<u>שיטת אינטגרציה בחלקים :</u>

$$(U\cdot V)'=dU\cdot V+U\cdot dV$$
$$U\cdot dV=d(U\cdot V)-VdU$$
$$\int U\cdot dV=\int d(U\cdot V)-\int V\cdot dU=UV-\int V\cdot dU$$

<u>שיטת הצבות אוילר:</u> $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

1. **מקרה a>0**

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x$$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\cdot\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b},\qquad dx=2\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\cdot\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\cdot t+b)^2}dt$$

2. מקרה c>0

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t\pm\sqrt{c}$$

$$x=\frac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\cdot\sqrt{c}}{a-t^2},\qquad dx=2\frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\cdot\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt$$

הערה: *המקרים קודמים אפשר להעביר מאחד לשני* $x=\frac{1}{z}$ *, לכן תמיד אפשר למנוע את שימוש בשיטה שניה .*

3. מקרה $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},\qquad dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a^2)^2}dt$$

<u>שיטה MNP</u> $x^m(a+bx^n)^p$

1. מקרה כאשר p שלם

אזי $q=\frac{m+1}{n}-1$ כאשר הוא כופל משתוף של n ו- m , ונעשה הצבה $z=x^n$

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q dz$$

2. מקרה כאשר $\frac{m+1}{n}\in Z$ **נציב** $t=\sqrt[q]{a+bx^n}$ ***כאשר q המכנה של p כשהוא מצומצם***

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz$$

3. מקרה כאשר $p+q\in Z$ **נציב** $t=\sqrt[q]{ax^{-n}+b}$

<u>הצבות טריגונומטריות</u> $R(\sin x,\cos x)dx$

מקרה כללי

נעשה הצבה $t=tg\frac{x}{2}$ אזי $dx=\frac{2dt}{1+t^2},x=2arctg(t),\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

ז"א $R(\sin x,\cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$

(1 מקרה פרטי כאשר פונקציה $R(u,v)dx$ משנה את סימנה כאשר משנים סימן ל u-

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

אזי במקרה כזה נציב $t=\cos x$,

$$R(\sin x,\cos x)\cdot dx=-R(1-\cos^2 x,\cos x)\cdot d\cdot\cos x=-R(1-t^2,t)\cdot dt$$

2) מקרה פרטי כאשר פונקציה $R(u,v)dx$ משנה את סימנה כאשר משנים סימן ל v-

אזי במקרה כזה נציב $t=\sin x$,

$$R(\sin x,\cos x)\cdot dx=-R(\sin x,1-\sin^2 x)\cdot d\cdot\sin x=R(t,1-t^2)\cdot dt$$

3) מקרה פרטי כאשר פונקציה $R(u,v)dx$ משנה את סימנה כאשר משנים סימן ל v- ו u-

אזי במקרה כזה נציב $t=tgx$, $R(\sin x,\cos x)\cdot dx=R(tgx,\dfrac{1}{1+tg^2x})$

משפט (נוסחה היסודית של חשבון האינטגרלי)

תהי $f(x)$ <u>רציפה ב</u>- $[a,b]$ ותהי $G(x)$ פונק קדומה של $f(x)$ ב- $[a,b]$ אזי :

$$\int_a^b f(x)=G(b)-G(a)$$

משפט :

תהי $f(x)$ אנט' ב- $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ אזי וגזירה ב-(a,b) פרט אולי למס' סופי של נק' ומקיימת $F'(x)=f(x)$ פרט אולי למס' נקודות אזי

$$\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$$

אינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון

אינטגרל סוג 1 : אנט' על קטע לא חסום אבל עם פונק' כן חסומה.

הגדרה :

אם $f(x)$ מוגדרות ב $(-\infty,\infty)$ ואינט' בכל תת-קטע סגור של $\Re$ אז נגדיר :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx-\int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

כאשר $c\in\Re$ כלשהוץ ונאמר כי $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ מתכנס אם"ם שני האנט $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ ו $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ מתכנסים כל אחד בנפרד.

משפט :

תהי $f(x)$ מוגדרת $[a,\infty)$ ואנט' בכל $[a,b]$ ונניח כי $0\le f(x)$ לכל $x\in[a,\infty)$

אזי: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ אם"ם האנט החלקיים $\int_a^b f(x)dx$ ($a\le b\le\infty$) חסומים מלעל.

משפט(מבחן השוואה האנט' ה- 1)

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות מוגדרות ב- $[a,\infty)$ אנט' בכל $[a,b]$ כך $x\in[a,\infty)$ ו $0\le f(x)\le g(x)$ אזי

1. אם $\int_a^{\infty} g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתכנס .

2. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

מסקנה(מבחן השוואה האנט' ה- 2):

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות מוגדרות ב- $[a,\infty)$ אנט' בכל $[a,b]$ כך $x\in[a,\infty)$ ו $0\le f(x)$ ו $0\le g(x)$ ב- $[a,\infty)$ אם קיימות α,β כך ש:

$$0<\alpha<\frac{f(x)}{g(x)}\le\beta$$

אזי אינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחד.

אינט' בחלת

הגדרה (דומה לטור מתכנס):

נניח כי $f(x)$ מוגדרת ב- $[a,\infty]$ ואנט' ב- $[a,b]$ עבור כל $a<b$ נאמר כי $f(x)$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f(x)|\cdot dx$ מתכנס. ואם $\int_a^\infty |f(x)|\cdot dx$ מתבדר אבל $\int_a^\infty f(x)\cdot dx$ מתכנס נאמר שאינט' מתכנס בתנאי.

משפט:

אם f(x) אנט' בהחלט ב - $[a,\infty)$ אזי , $f(x)$ אינט' בלי ערך מוחלט ב - $[a,\infty)$.

<u>מבחן דריכלה</u> : (קיים רק עבור אינטגרל לא אמיתי מסוג 1)

א. $f(x)$ ו - $g(x)$ רציפות
ב. $f(x)$ יורדת ל – 0 (מונוטונית יורדת)
ג. הנגזרת של $f(x)$ רציפה
ד. G(x) חסומה

אזי, $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס

כדי לעבור מאינטגרל סוג 2 לאינטגרל סוג 1 נציב $x=a+\frac{1}{y}$

אינטגרלים לא אמיתיים מסוג II

כאשר הקטע חסום אבל פונק' חסומה
הגדרה : באופן דומה ניתן להגדיר עבור $f(x)$ מוגדרת ב- $[a,\infty)$ ואנט' בכל $[c,b]$

$a<c<b$ ו $f(x)$ כי $\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$

משפט :

תהי $f(x)$ מוגדרת ב $[a,b)$ אנט' בכל $[a,c]$ $a<c<b$ בנוסף $0\le f(x)$ $x\in[a,b]$ אזי $f(x)$ אנט' ב $[a,b)$ אם"ם האנט' החלקיים חסומים כולם ע"י חסם כלשהוא.

טורים ידועים :

1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}=\infty$, $\sum_{n=1}^\infty n=\infty$
2. $\sum_{n=1}^\infty q^n<\infty \Leftrightarrow |q|<1$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}<\infty \Leftrightarrow a>1$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

מבחן ההשוואה ראשון :

אם $0 \le b_n \le a_n$ אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

מבחן ההשוואה הגבולי :

$b_n, a_n \ge 0$ ו - $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

אם $L = 0$ אזי אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (אם $0 < L < \infty$ - הם מתכנסים ומתבדרים יחדיו).

<u>מבחן ראבה</u> :

אם $a_n > 0$ נסמן $R = \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$

1. אם $R > 1$ הטור מתכנס
2. אם $R < 1$ הטור מתבדר
3. אם $R = 1$ לא ניתן להכריע

<u>משפט ליבניץ</u> :

אם $a_n \ge 0$ מונוטונית יורדת ל – 0 ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) אזי :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס וסכומו מקיים $0 \le S \le a_1$
2. השארית קטנה יותר מהאיבר הבא

<u>מבחן קושי (שורש)</u> :

אם $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ הטור מתכנס

אם $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$ הטור מתבדר

אחרת, לא ניתן להכריע

<u>מבחן דלאמבר/מנה</u> :

אם $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הטור מתכנס בהחלט

אם $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ הטור מתבדר

אחרת, לא ניתן להכריע

<u>מבחן דריכלה ואבל</u> :

דריכלה :

אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסום ו - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מונוטונית שואפת ל – 0 אז, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

אבל :

אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ו - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מונוטונית חסומה אז, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

<u>מבחן האינטגרל</u> :

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. $f(x)$ פונקציה לא עולה כך ש - $f(n) = a_n$ ב - $[1,\infty)$ אזי,

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו - $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

<u>הערה :</u>
טור שמתכנס בהחלט לא משנה איך נסדר אותו הוא יתכנס לאותו הגבול ואילו טוב שמתכנס בתנאי יתכנס לגבול שונה עבור סידורים שונים (אבל בטוח יתכנס)

סדרות וטורים של פונקציה

הגדרה :
תהינה $f_n(x)$ פונק המוגדרת בתחום משתוף X.
נתבונן בסדרה $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ ונאמר שזה סדרת פונק' . נאמר כי סדרת הפונק' $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ מתכנס בתחום X , אם לכל $x \in X$ סדרת מספרים $[f_n(x_0)]_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת מספרים מתכנסת כלומר יש l_{x_0} לכל $0<\varepsilon$ יש $n_{x_0} \in \mathrm{N}$ כך שלכל $n_{x_0} < n \in \mathrm{N}$ יתקיים $\left| f_n(x) - l_{x_0} \right| < \varepsilon$

הגדרה:
תהיינה $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונק' מוגדרות ף נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ שהוא טור מספרים (כאשר מציבים את x_0 -ב $f(x)$ מקבלים מספר)
אם לכל $x_0 \in X$ הטור $0<\varepsilon$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ במובן הצר נאמר שטור הפונק' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפונק' הסכום של הטור $S(x)$ ונסמן $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

הערה :
המשמעות של טור פונק' מתכנס היא שסדרת הפונק של הסכומים החלקיים שלו היא סדרת פונק' מתכנסת במובן של ההגדרה קודמת.
היינו : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ אזי : $S_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} S(x)$

התכנסות במ"ש

הגדרה :
תהי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונק' המוגדרות ב- X , ותהי פונקציה המוגדרת שפ, נאמר כי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ ב- X. אפ לכל $0<\varepsilon$ קיים n_0 טבעי כך שאם $n_0 < n$ אזי $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ לכל $x \in X$) n_0 משותף לכל ה- x-ים)

הגדרה :
פס ε מסביב ל $f(x)$ היא רצועה הכלואה בין $f(x)-\varepsilon$ ל $f(x)+\varepsilon$.
פונקציה $g(x)$ תהיה קרובה ל $f(x)$ עד כדי ε, אם $g(x)$ מוכלת כול בפס ε מסביב ל- $f(x)$, כלומר $\left| g(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ לכל $x \in X$.

משפט (מבחן ה- Sup להתכנסות במ"ש):
תהי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ו $f(x)$ המוגדרות כולן ב- X. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

במ"ש ב- x $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|)=0$

הגדרה:

תהי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות ב- X. נאמר כי סדרה המקיימת את תנאי קושי להתנסות במ"ש ב- X: אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in N$ כך שאם $m>n>n_0$ אזי $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in X$.

משפט:

הסדרה $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ב - X אם"ם היא מקיימת את תנאי קושי להתכנסות במ"ש שם.

משפט :

נניח $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ מתכנסת במ"ש ב- X.

א) אם כל $f_n(x)$ חסומה ב- X אז גם $f(x)$ חסומה שם .

ב) אם כל $f_n(x)$ רציפה ב- $X\ni x_0$ אז גם $f(x)$ רציפה ב- x_0.

הגדרה :

תהי $X\subseteq\Re$ קבוצה לכל $i\in I$ (a_i,b_i) משפחת קטעים כך ש- $X\subseteq U(a_i,b_i)$.
קיימת תת-קבוצה סופית $\{(a_{i_1},b_{i_1}),.....,(a_{i_n},b_{i_n})\}$ של תת-קטעים מתוך $I\ni j$ (a_j,b_j) עבורם מתקיים : $X\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}(a_{ij},b_{ij})$ נאמר ש ש- X קב' *קומפקטית*.

משפט :

קטע $x=[a,b]$ הוא *קומפקטית* .

משפט :

$\Re$ אינו *קומפקטית* .

משפט:

תהי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב- $[a,b]$ המקיימות $.....\le f_n(x).........\le f_2(x)\le f_1(x)$ לכל $x\in[a,b]$ המתכנסת לפונקציות הגבול $f(x)$ גם רציפה ב- $[a,b]$, אז $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ במ"ש בקטע.

משפט:

נניח $I\supseteq[a,b]$ ו $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונק' אינטגרליות ב- I כך שמתקיים :
$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ אזי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים : $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$

משפט:

נניח כי סדרת הפונק' $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ מוגדרות ובעלות נגזרת רציפה ב- $[a,b]$ ונניח שיש $x_0\in[a,b]$ כך ש- $y_0=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)$, נניח שקיימת $g(x)$ כך ש $\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x)$
וההתכנסות היא במ"ש בקטע אזי: $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$ נסמן בגבולה $f(x)$ ומתקיים $f'(x)=g(x)$.

משפט:

$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=S(x)$ **מתכנס במ"ש אם"ם** $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in[a,b]}|S(x)-S_n(x)|)=0$

הגדרה:

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

נאמר $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מקיים את תנאי קושי להתכנסות טורים של פונק' במ"ש בתחום $X \Leftrightarrow$ סדרת פונק' של הסכומים החלקיים של טור $[S_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ מקיימת תנאי קושי להתכנסות במ"ש של סדרות של פונק'

כלומר:

אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $n_0 \in N$ כך שאם $m>n>n_0$ אזי $\left|S_m(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$ לכל $x \in X$.

כלומר:

אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $n_0 \in N$ כך שאם $m>n>n_0$ אזי $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right|<\varepsilon$ לכל $x \in X$.

משפט:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- $X \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מקיים את תנאי קושי להתכנסות במ"ש של טורי פונקי.

משפט:

נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$ מתכנס במ"ש ב- X אזי :

א. אם לכל $f_n(x)$ חסומה ב- X אזי גם $S(x)$ חסומה ב- X.

ב. אם לכל $f_n(x)$ רציפה ב- X אז גם $S(x)$ רציפה ב- X.

משפט (אינטגרציה איבר איבר של טורי הפונק') :

נניח שלכל n $f_n(x)$ אינט' ב- $[a,b]$ ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$ **מתכנס ב-** $[a,b]$ **במ"ש אזי** $S(x)$ **אנט' ב-** $[a,b]$ **מתקיים** $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$

משפט : (מבחן ה-M של ווירשטרס)

תהי $[f_n(x)]_{n=1}^{\infty}$ סדרת של פונקציות עבורה לכל n יש a_n כך ש $\left|f_n(x)\right| \le a_n$ בתחום D . אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מספרים חיוביים מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בתחום D.

משפט (גזירה איבר איבר) :

אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **מתכנס בקטע** $[a,b]$ **ו** $f_n'(x)$ **רציפות שם והטור** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ **מתכנס במידע שווה בקטע** $[a,b]$ **אזי** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

ניסוח אנלוגי לסדרות : $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$

טורי חזקות

הגדרה :

לטור מהצורה כאשר $a_n \in \Re$ ומגדירים $1=0^0$ קוראים טור חזקות.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

משפט:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ טור חזקות . המתכנס עבור $x=\alpha$ אזי הוא מתכנס בהחלט עבור כל $|x|=|\alpha|$.

משפט (נוסחת קושי ודלמבר) :

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ טור החזקות אזי $c=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ($c=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$) במובן הרחב אזי רדיוס ההתכנסות שך טור החסקות הוא $R=\frac{1}{c}$ כאשר מזהים $\frac{1}{0}=\infty$ $\frac{1}{\infty}=0$.

משפט :

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ עם רדיוס התכנסות R, אזי לכל $0<r<R$ בקטע $[-r,r]$ היא מתנסת במ"ש.

משפט:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ טור החזקות עם תחום התכנסות $0<R$, נסמן $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ אזי $S(x)$ רציפה לכל $x\in(-R,R)$.

הערה: אבל אנחנו לא יודעים כלום בנק' $-R,R$

משפט:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ טור החזקות עם רדיוס ההתכנסות R :

א. הפונק' $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ גזירה ב- $(-R,R)$ ומתקיים $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n \cdot x^{n-1}$

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n \cdot x^{n-1}$ מתכנס עם אותו רדיוס התכנסות R.

משפט (אינטגרציה איבר איבר):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ **טור חזקות עם רדיוס** $0<R$ **ונגדיר** $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ **אזי:**

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt$$

לכל $|x|<R$.(ז"א קוראים רדיוס ההתכנסות ל- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n dt$).

פיתוח של טור החזקות :

נסמן $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ עם רדיוס התכנסות R.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\cdot(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-2}$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-k}$$

$$f(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x_0-x_0)^n$$

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x_0-x_0)^{n-1}=1\cdot a$$

$$f''(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot(x_0-x_0)^{n-1}=2\cdot 1\cdot a$$

$$f^{(k)}(x_0)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot a_n\cdot(x_0-x_0)^{n-k}=\frac{k!}{(k-k)!}\cdot a_n=k!\cdot a_k$$

אם כך הוכחנו שכאשר $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$ אזי עבור $|x-x_0|<R$ $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$\Leftarrow$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$

מסקנה:

שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$ ו - $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cdot(x-x_0)^n$ המתכנסים באותו רדיוס ההתנסות לאותה פונק' $f(x)$ יקיימו $a_n=b_n$ $\forall n\in(N\vee\{0\})$. למסקנה קוראים יחידות פיתוח של טור חזקות . הוכחה למסקנה מפיתוח לעיל $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=b_n$

הערה:

ייתכן כי $f(x)$ מוגדרת וגזירה אין סוף פעמים בסביבת x_0 $|x-x_0|<r$ אבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\neq f(x)$$

משפט:

תהי $f(x)$ גזירה אין סוף פעמים ב- $[-r,r]$ אם יש $0<M$ $[-r,r]$ $0<c<\frac{1}{r}$ כך ש $|f^{(n)}(x)|<M\cdot n!\cdot c$ לכל $x\in[-r,r]$ אז $f(x)$ מלכדת עם $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(0)\cdot(x-x_0)^n$ עבור $x\in[-r,r]$ וגם $r\leq R$.

משפט :

אם $f(x)=f'(x)$ אזי $f(x)=c\cdot e^x$

משפט (אבל) :

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

נניח $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

מסקנה :

אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ מתכנס אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ כלומר טור חזקות רציף משמאל בכל נק' שבה הוא מתכנס .

פונק' בעלות השתנות חסומה

הגדרה :

תהי $f(x)$ פונק' מוגדרות ב- $[a,b]$ ותהי T חלוקה של $[a,b]$.

$V(t) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i - 1)|$ נתבונן בקבוצה $\{V(t) \mid T \text{ חלוקה של } [a,b]\}$ אם קבוצה הזו חסומה

מלעל ף נאמר כי $f(x)$ בעלת השתנות חסומה ב- $[a,b]$ ונסמן $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup\{V(T)\}$ ל - $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$

קוראים השתנות הכללית של f ב- $[a,b]$.

משפט :

אם $f(x)$ בעלת השתנות חסומה אז $f(x)$ חסומה.

משפט:

תהיינה f,g **פונק' בעלת השתנות חסומה ב-** $[a,b]$ **אזי** $c\cdot f$ **וכן** $f\pm g$ **בעלת השתנות חסומה ב-** $[a,b]$ **ומתקיים:** $\overset{b}{\underset{a}{V}} cf = |c| \overset{b}{\underset{a}{V}}$, $\overset{b}{\underset{a}{V}} f\pm g = \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g$

משפט:

תהי f השתנות חסומה ב- $[a,b]$ אזי f בעלת השתנות חסומה בכל $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ בפרט אם $a<c<b$ אז $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$

משפט (ז'ורדן):

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $f(x)$ בעלת השתנות חסומה ב- $[a,b]$ הזו שניתן לרשום את $f(x)$ כהפרש של שתי פונק' לא יורדת.

טופולוגיה

הגדרה:

- כדור פתוח שמרכזו $x_0 \in X$ ורדיוס r היא קבוצה $B(x_0,r) = \{x\in X \mid d(x,x_0) < r\}$
- כדור סגור שמרכזו $x_0 \in X$ ורדיוס r היא קבוצה $\overline{B}(x_0,r) = \{x\in X \mid d(x,x_0) < r\}$
- כדור מנוקב פתוח(סגור שמרכזו $x_0 \in X$ ורדיוס r היא קבוצה $B\_(x_0,r) \subset \{x\in X \mid d(x,x_0) < r\}$

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

משפט (אי שיוויון קושי שוורץ) :

יהיה $a_1,a_2...a_n$ ו $b_1,b_2...b_n$ מספרים ב - R אזי: $\sum_1^n a_ib_i \le \sqrt{\sum_1^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n b_i}$

סוגים של נקודות

הגדרה:

נק' $x_0 \in X$ תקרא נקודות הצטברות של $A \subseteq X$ אם לכל $0<r$ יש $x \in A$ כך ש $x \in B\_(x_0,r)$

הגדרה :

נק' $x_0 \in X$ תקרא נקודה פנימית של $A \in X$ אמ"מ $0<r$ כך ש $B(x_0,r) \le A$

הגדרה :

נק' $x_0 \in X$ תקרא נקודה מבודד של $A \in X$ אם יש $0<r$ כך ש $B(x_0,r) \cap A = \{X_0\}$

הגדרה :

יהי (X,d) מ"מ וגם $A \subseteq X$ קבוצה.נאמר כי A קבוצה פתוחה אם ????

הגדרה :

תהי $(\overrightarrow{X}_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת של נקודות ב- R^n.נאמר כי סדרה מתכנסת לגבול $\overrightarrow{x_0}$ אם $\overrightarrow{x_0} = (x_0^1, x_0^2,...x_0^n)$ אם לכל $0<\varepsilon$ יש $k_0 \in N$ כך שלכל $k_0 < k$ יתקיים $d_k(\vec{x}_k, \vec{x}_0) < \varepsilon$

משפט:

$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0$ אמ"מ לכל $i=1,2,...n$ $\lim_{k\to\infty} x_k^i = x_0^i$

משפט : (בולצנו ווירשטראס ל- R^n)

תהי $(\overrightarrow{X}_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ב- R^n. אזי יש ל $(\overrightarrow{X}_k)_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת ב- R^n.

הגדרה :

יהי (X,d) מ"מ וגם $A \subseteq X$ קבוצה. נקוטר של A מוגדרת להיות :
$d(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ ז"א מרחק הכי גדול בין שתי נקודות בקבוצה.

משפט (הלמנ של קנטור ב- 2 מימדים):

ב- (R^2, d_2): $R_n = [a_n,b_n] \times [c_n,d_n]$ סדרה של מלבנים סגורים שמקיימים :

$R_{n+1} \le R_n$ וגם $d(R_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \{x_0, y_0\}$

גבולות נשנים :

הגדרה:

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) . נתבונן $g(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$
הפונקציה. $g(x)$ היא פונקציה של משתנה יחיד (x) המוגדרת בסביבת של x_0 לכן נחשב
עבורם גבול כאשר $x \to x_0$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. ונסמן $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = L$.

משפט:

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

תהי $f(x,y)$ **פונק' המוגדרות בסביבת** (x_0,y_0) **ונניח שקיים הגבול הכפול** $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ **, ונניח כי קיים הגבול** $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ **ולכל** $x\neq x_0, y\neq y_0$ **אזי קיים הגבול החוזר** $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$ **.**

הגדרה:

לפונק' $\gamma:[0,1]\to R^n$ קוראים עקום כלשהו לפי הפרמטר t ומגדירים אותו באופן הבא $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t)....\gamma_n(t))$ או מכנים את t פרמטריזציה של עקום γ.

הגדרה:

תהי f פונק מוגדרות ב- R^n ובסביבת $\bar{x}_0\in R^n$ ויהי $\gamma:[0,1]\to R^n$ עקום כלשהו העובר דרך $\bar{x}_0$ בנק' $t_0\in(0,1)$ וכל $\gamma_1(t),\gamma_2(t)....,\gamma_n(t)$ רציפות כפונק' של משתנה יחיד t.

אזי רציפה נאמר ש $f(x)$ רציפה לפי γ בנק' $\bar{x}_0$ את

$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = f(\vec{x}_0) = f(\gamma(t_0))$$

משפט (ערך ביניים):

תהי $f(x,y)$ פונק' רציפה ב - $D\subseteq R^2$ (D קשיר ז"א ניתן לעבור מנק' $\bar{x}\in D$ לנק' $\vec{y}\in D$ ע"י עקום רציף γ המוכל כולו ב- D, לכל זוג נק' $\bar{x}\in D$ ו $\vec{y}\in D$)

ותהיינה $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in D$ כך ש $A=f(\bar{x}_1), B=f(\bar{x}_2)$ ונניח $A\le B$ אזי לכל $A\le C\le B$ יש $\bar{x}_0\in D$ כך ש $f(x_0)=C$

משפט:

תהי $S\subseteq R^n$ קבוצה סגורה וחסומה ותהי f רציפה מוגדרת ב- S אזי:

א. f חסומה ב- S

ב. f מחזירה ב- S מקסימום ומינימום .

הגדרה :

f **תיקרא רציפה במ"ש ב** $S\subseteq R^n$ **אם לכל** $0<\varepsilon$ **יש** $0<\delta$ **כך שאם** $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in S$ **ומקיימים** $d_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)<\delta$ **אזי** $|f(\bar{x}_1)-f(\bar{x}_2)|<\varepsilon$

משפט:

תהי $S\subseteq R^n$ קבוצה סגורה החסומה ו f פונק' רציפה המוגדרת ב- S אזי f רציפה במ"ש ב- S

דיפרנציאביליות

הגדרה:

הנורמל של $\bar{x}$ מ"מ $(\underline{x},d)$ היא $d_2(\bar{x},0)$ ובו- R^n $\|\bar{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

הגדרה:

תהי f מוגדרות בסביבת $\bar{x}_0=(x_0^1,...,x_0^n)$ נאמר כי f <u>דיפרנציאבילית</u> ב - $\bar{x}_0$ אם יש $\bar{a}\in R^n$ כך שמתקיים $f(\bar{x}_0+\bar{h})=f(\bar{x}_0)+\bar{a}\bar{h}+O(\|h\|)$

כלומר :

$$f(x_0^1+h_1,...x_0^n+h_n)=f(x_0^1,...x_0^n)f+(a_1h_1+....+a_nh_n)+O(\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2})$$

משפט:

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

אם f דיפ' ב- $\bar{x}_0$ אזי היא רציפה ב- $\bar{x}_0$

משפט:

אם f דיפ' ב- $\bar{x}_0$ אזי כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$ קיימת ומתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = a_i$$

משפט:

נניח כי $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ קיימת ב- $\bar{x}$ ורציפות שם (בהגדרת רציפות של פונק' היות ממשתנה אחד) וגם רציפה שם אז f דיפ' ב- $\bar{x}_0$.

משפט :

נניח שקיימות $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ו - $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ בסביבת (x_0, y_0) ושהן רציפות ב- (x_0, y_0) אזי :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$