דימה זבלב
אונ' בר-אילן

חסמים

הגדרה:
תהי $\phi \neq S \in R$ אזי אם קיים $M \in R$ $(m \in R)$ כך שלכל $x \in S$ מתקיים $x \leq M$ $(x \geq m)$
נאמר כי M (m) חסם מלעיל (מלרע) של S.

הגדרה:
תהי $\phi \neq S \in R$ אזי אם קיים $M \in R$ $(m \in R)$ כך שמתקיים:
1. לכל $x \in S$ $x \leq M$ $(x \geq m)$.
2. לכל $M' < M$ $(m < m')$ קיים $x \in S$ כך ש- $M' < x$ $(m' > x)$.

נאמר כי M (m) הוא חסם עליון (תחתון) של S. נסמן: $M = \sup S$ $(m = \inf S)$.

משפט 6 (משפט השלמות):
תהי $\phi \neq S \in R$ חסומה מלעיל אזי יש ל- S חסם עליון (לקבוצת חסמי המלעיל יש מינימום).

משפט 7:
תהי $\phi \neq S \in R$ חסומה מלרע אזי יש ל- S חסם תחתון.

סדרות

<u>הגדרה</u>:
הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא קבוצה סדורה של מספרים, דהיינו קבוצת מספרים שלכל מספר יש מקום.

<u>הגדרה</u>:
לקבוצה $\{x \in R : |x-a| < \varepsilon\}$ קוראים סביבת ε של a עבור $0 < \varepsilon$ כלשהו.

<u>הגדרה</u>:
סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תיקרא מתכנסת לגבול l אם לכל $0 < \varepsilon$ יש $n_0 \in N$ כך שלכל $n > n_0$ $|a_n - l| < \varepsilon$.

<u>הגדרה</u>:
לסדרה שאין לה גבול נקרא מתבדרת.

<u>משפט 8</u>:
לסדרה מתכנסת גבול יחיד.

<u>משפט 9</u>:
אם יש $l \in R$ כך שלכל n $a_n = l$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

<u>משפט 10</u>:
תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ ונניח שיש $n_0 \in N$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n = b_n$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

למה: $||a| - |b|| \le |a - b|$

<u>משפט 11</u>:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} l$ אזי $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |l|$.

<u>הגדרה</u>:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר $B = \{a_n : n \in N\}$. אם הקבוצה B חסומה מלעיל (מלרע) נאמר כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל (מלרע).

<u>משפט 12</u>:
כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

משפט 13 (4 הפעולות):

אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ אזי:

1. $(a_n + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} (a+b)$.
2. $(a_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} (a-b)$.
3. $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow{n\to\infty} (a\cdot b)$.
4. $(c\cdot a_n) \xrightarrow{n\to\infty} (c\cdot a)$.
5. $\frac{1}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{b}$ $(b_n \neq 0, b\neq 0)$.
6. $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0, b\neq 0)$.

הערה: ניתן להכליל את משפט 13 ליותר מ-2 סדרות כל עוד מספר הסדרות סופי.

משפט 14:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ו- $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ אזי $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

הרחבת מושג הגבול

הגדרה:

נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתבדרת ל- $\infty(-\infty)$ אם לכל $M\in R$ יש $n_0 \in N$ כך שלכל $n>n_0$ $a_n > M$ $(a_n < M)$.

הגדרה:

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = l/\infty/-\infty$ נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.

משפט 15:

אם $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ וכן $a_n \neq 0$ $\forall n$ אזי $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ וכן $a_n \neq 0$ $\forall n$ אזי $\frac{1}{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

משפט 16-א:

אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, $a<b$ אזי יש $n_0 \in N$ כך שלכל $n>n_0$ $a_n < b_n$.

מסקנות: 1. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ וכן $a<b$ אזי כמעט לכל n $a_n < b$.

2. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ וכן $a>b$ אזי כמעט לכל n $a_n > b$.

משפט 16-ב:

תהיינה $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, אם כמעט לכל n $a_n \le b_n$ אזי $a\le b$.

מסקנות: 1. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a_n \le b$ כמעט לכל n אזי $a \le b$.

2. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $a_n \ge b$ כמעט לכל n אזי $a\ge b$.

משפט 17 (משפט הסנדביץ'):

אם הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימות כמעט לכל n כי $a_n \le b_n \le c_n$, וכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$ אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

משפט 18 (משפט הסנדביץ' המורחב):

1. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ וכן כמעט לכל n $a_n \le b_n$ אזי $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.
2. אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} (-\infty)$ וכן כמעט לכל n $a_n \ge b_n$ אזי $b_n \xrightarrow{n\to\infty} (-\infty)$.

סדרות מונוטוניות

הגדרה:

1. אומרים כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית לא יורדת אם לכל n $a_{n+1} \ge a_n$.
2. אומרים כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש אם לכל n $a_{n+1} > a_n$.
3. אומרים כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת ממש אם לכל n $a_{n+1} < a_n$.
4. אומרים כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית לא עולה אם לכל n $a_{n+1} \le a_n$.

משפט 19:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית, אזי הסדרה מתכנסת $\Leftrightarrow$ הסדרה חסומה.
אם הסדרה לא עולה (או יורדת ממש) גבולה הוא חסמה התחתון.
אם הסדרה לא יורדת (או עולה ממש) גבולה הוא חסמה העליון.

משפט 20:

1. סדרה לא יורדת (או עולה ממש) שאינה חסומה מלעיל מתבדרת ל- ∞.
2. סדרה לא עולה (או יורדת ממש) שאינה חסומה מלרע מתבדרת ל- $-\infty$.

משפט 21:

סדרה מונוטונית תמיד מתכנסת במובן הרחב.

משפט 22 (הלמה של קנטור):

תהי $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים המוכלים כל אחד בתוך קודמו $(I_1 \ge I_2 \ge I_3 \ge \dots \ge I_n)$ כך שאורכי הקטעים הם סדרת מספרים השואפת ל-0, אזי יש $c \in R$ יחיד המקיים $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

תת-סדרות

הגדרה:

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי ותהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים טבעיים עולה ממש, אזי נקרא ל- $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

משפט 23:

1. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול l, אזי כל תת-סדרה שלה תתכנס ל- l.
2. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל- ∞ ($-\infty$), אזי כל תת-סדרה שלה תתכנס ל- ∞ ($-\infty$).

מסקנה:
אם לסדרה נתונה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש 2 תת-סדרות המתכנסות לגבולות שונים (במובן הרחב) אזי לא קיים לסדרה גבול (במובן הרחב).

הגדרה:
המספר l (∞, $-\infty$) נקרא גבול חלקי של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת-סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-l (∞, $-\infty$).

משפט 24 (אפיון לגבול חלקי):
1. l הוא גבול חלקי של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של l מכילה אינסוף איברים מ-$(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. ∞ ($-\infty$) הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של ∞ ($-\infty$) מכילה אינסוף מאיברי הסדרה.

משפט 25 (בולצנו-ויירשטראס):
1. לכל סדרה אינסופית חסומה יש תת-סדרה המתכנסת לגבול סופי.
2. לכל סדרה אינסופית שאינה חסומה מלעיל יש תת-סדרה המתכנסת ל- ∞.
3. לכל סדרה אינסופית שאינה חסומה מלרע יש תת-סדרה המתכנסת ל- $-\infty$.

משפט 26:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (במובן הצר) $\Leftrightarrow$ ל- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש גבול-חלקי יחיד.

משפט 27:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב $\Leftrightarrow$ ל- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש גבול-חלקי יחיד במובן הרחב.

הגדרה:
הגבול העליון (תחתון) של סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הוא החסם העליון (תחתון) של קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נסמן: גבול עליון - $\overline{\lim} a_n$, גבול תחתון - $\underline{\lim} a_n$.

משפט 28:
הגבול העליון והגבול התחתון של סדרה נתונה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הם בעצמם גבולות חלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, לכן הם בעצם ה-max וה-min של קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

משפט 29:
סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר ל- l או במובן הרחב ל- $\pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $-\infty$, ∞, l = $\underline{\lim} a_n$ = $\overline{\lim} a_n$.

הגדרה:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אינסופית. נסמן ב-S את קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
מסקנה:
משפט בולצנו-ויירשטראס קובע כי S אינה ריקה.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

משפט 30:

1. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אזי $\overline{\lim} a_n$ = maxS.
2. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אזי $\underline{\lim} a_n$ = minS.

משפט 31:

1. אם $\underline{\lim} a_n$ >c, אזי כמעט לכל n a_n >c.
2. אם $\overline{\lim} a_n$ <c, אזי כמעט לכל n a_n <c.

סדרות קושי

הגדרה:

אומרים שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות אם לכל ε >0 קיים n_0 כל שלכל n_0 < m,n מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

משפט 32:

סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

קבוצות של נקודות ב-R

הגדרה:
תהי A קבוצת נקודות ב-R. נאמר כי $\alpha \in R$ היא נקודת הצטברות של A אם לכל $\varepsilon>0$ יש $x \in A$ המקיים $x \neq \alpha$ וגם $|x-\alpha|<\varepsilon$.

הערה:
אם $\alpha \in R$ נקודת הצטברות של $A \subseteq R$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות אינסוף נקודות שונות ב-A עבורן מרחקן מ-α קטן מ-ε.

הגדרה:
אם $A \subseteq R$, לנקודה $\alpha \in A$ המקיימת כי α אינה נקודת הצטברות קוראים נקודה מבודדת.

משפט 33 (בולצנו-ויירשטראס עבור קבוצות של נקודות):
לכל קבוצה אינסופית חסומה יש נקודת הצטברות.

משפט 34:
תהי $A \subseteq R$ ותהי $\alpha \in R$ נקודת הצטברות של A, אזי יש סדרה של איברים מתוך A כך שלכל n $a_n \in A$ ומתקיים $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

הגדרה:
קבוצה המכילה את כל נקודות ההצטברות שלה נקראת קבוצה סגורה.

הגדרה:
אם $A \subseteq R$, A תיקרא פתוחה אם המשלים של A: $A^c = R \setminus A$ היא קבוצה סגורה.

משפט 35:
לכל קבוצה סגורה, חסומה ולא ריקה יש max ו-min.

משפט 36:
תהי $\phi \neq A \subseteq R$, אזי קבוצת נקודות ההצטברות של A היא קבוצה סגורה.

הערה:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהי α נקודת הצטברות של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אזי α גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

טורים

הגדרה:

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים אינסופית. לסכום הפורמלי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קוראים טור.

הגדרה:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. לסכום $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ קוראים הסכום החלקי ה-n של הטור:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. לסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ קוראים סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הגדרה:

אם $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-l נגדיר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = l$.

אם $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת נאמר כי הטור מתבדר.

אם $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ נאמר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

משפט 37 (קריטריון קושי להתכנסות טורים):

תנאי הכרחי ומספיק לכך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יתכנס במובן הצר הוא שלכל $0 < \varepsilon$ קיים $n_0 \in N$ כך שלכל $m, n > n_0$ (בה"כ $m > n$) מתקיים: $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

משפט 38 (תנאי הכרחי להתכנסות טורים):

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in R$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

משפט 39:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. אם יש m כך שהטור $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט 40:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $c \in R$ אזי:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$.

טורים חיוביים

<u>הגדרה</u>:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ יקרא חיובי אם $a_n \geq 0$ $\forall n$ (מספיק כמעט $\forall n$ בשביל התיאוריה)

מסקנה: $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ לא יורדת $\Leftarrow$ $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$ או $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

<u>משפט 41</u>:

אם $a_n \geq 0$ $\forall n$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, סדרת הסכומים החלקיים שלו (הסס"ח) חסומה.

<u>משפט 42 (מבחן ההשוואה ה-I)</u>:

אם $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n$ אזי:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

<u>משפט 43 (מבחן ההשוואה ה-II)</u>:

אם $0 \leq a_n, b_n$ וכן $b_n \neq 0$, אזי אם קיימים $\alpha, \beta > 0$ כך שלכל n $0 < \alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$ אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים ביחד (טורים חברים).

<u>משפט 44 (מבחן קושי להתכנסות טורים חיוביים – ניסוח א')</u>:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אזי:

1. אם קיים $0 \leq q < 1$ ו- $n_0 \in N$ כך שלכל $n > n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ הטור מתכנס.
2. אם עבור אינסוף ח-ים מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ הטור מתבדר.

<u>משפט 45 (מבחן קושי להתכנסות טורים חיוביים – ניסוח ב')</u>:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אזי:

1. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$ אזי הטור מתכנס.
2. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$ אזי הטור מתבדר.
3. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 1$ אזי לא ניתן להכריע.

<u>משפט 46 (מבחן דלאמבר להתכנסות טורים חיוביים):</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אזי:

1. אם $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אזי הטור מתכנס.
2. אם $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אזי הטור מתבדר.
3. אחרת לא ניתן להכריע.

הערה: כל טור שנוכל לבדוק את התכנסותו ע"י מבחן דלאמבר, נוכל לבדוק את התכנסותו גם ע"י מבחן קושי.

טיפ: שיש עצרת באיבר כללי

<u>משפט 47 (מבחן העיבוי / הניפוה):</u>

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית לא עולה של מספרים חיוביים אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

טיפ: אם יש *log* באיבר כללי של הטור נא להתשמש במבחן עיבוי

טורים כלליים

<u>הגדרה:</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כללי. אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הוא טור מתכנס נאמר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר אבל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס נאמר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי.

<u>משפט 48:</u>

טור המתכנס בהחלט מתכנס (ללא ערך מוחלט).

<u>משפט 49 (לייבניץ):</u>

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית לא עולה, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.
2. סכום הטור S מקיים $0 \le S \le a_1$.
3. לכל m $\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right| \le a_{m+1}$ וכן $(-1)^m \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right) \ge 0$.

<u>משפט 50 (מבחן קושי להתכנסות טורים כלליים):</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו.

1. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ אזי הטור מתבדר.
3. אחרת לא ניתן להכריע.

משפט 51 (מבחן דלאמבר להתכנסות טורים כלליים):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור כלשהו, אזי:

1. אם $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ הטור מתבדר.
3. אחרת לא ניתן להכריע.

משפט 52 (חוק הצירוף):

אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי כל טור שיתקבל ממנו ע"י הוספת סוגריים יתכנס לאותו סכום.

הערה: המשפט ההפוך אינו נכון.

משפט 53:

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור אחר המתקבל מ- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י ערבוב סדר האיברים, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (במובן הרחב).

הגדרה:

יהי $x \in R$, נסמן: $x^+ = \max\{x,0\} = \frac{|x|+x}{2}$, $x^- = -\min\{x,0\} = \frac{|x|-x}{2}$ $\Leftarrow$ $x = x^+ - x^-$,

$|x| = x^+ + x^-$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

נגדיר: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^+ - a_k^-\right)$, $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$ $\Leftarrow$ $S_n = P_n - Q_n$.

מסקנה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ הסס"ח שלו חסומה.

משפט 54:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים כטורים חיוביים, ומתקיים:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

מסקנה: אם $P_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $Q_n \xrightarrow{n\to\infty} l$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

אם $P_n \xrightarrow{n\to\infty} l$, $Q_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

<u>משפט 55:</u>

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אזי $P_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, $Q_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

<u>משפט 56 (משפט רימן):</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור המתכנס בתנאי, אזי לכל $l \in R$ או ∞ או $-\infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שהוא יתכנס ל- l או ל- ∞ או ל- $-\infty$, או אפילו שלא יתכנס כלל.

מסקנה: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מקיים שלכל ערבוב סדר איברים הטור מתכנס לאותו סכום אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

<u>מכפלות טורים:</u>

<u>משפט 57 (קושי):</u>

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט ל-A ו- B בהתאמה אזי כל טור שיורכב מכל המכפלות $a_i b_j$ $(i, j \in N)$ יתכנס בהחלט וסכומו AB.

<u>משפט 58:</u>

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט ל-A ו- B בהתאמה אזי:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j = AB = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_i .$$

<u>משפט 59 (מרטנס):</u>

אם לפחות אחד מהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט ואילו השני מתכנס, וסכומם A ו- B בהתאמה, נסמן $d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ אזי $\sum_{n=2}^{\infty} d_n = AB$.

פונקציות

הגדרה:
תהינה A ו-B שתי קבוצות כלשהן. פונקציה f מ-A ל-B (מסומן $f:A\to B$) היא כלל המתאים לאברים $x\in A$ איברים מ-B כך שלכל $x\in A$ אליו מותאם אבר יש רק אבר אחד ויחיד $f(x)\in B$ המתאים לו.
A יקרא התחום של f. B יקרא הטווח של f. $f(A)=\{f(x):x\in A\}\subseteq B$ יקרא התמונה של f.

הגדרה:
לתכונה שבה מתאימים לאיבר ב-A איבר יחיד ב-B קוראים חד ערכיות:
$x\neq y\Leftarrow f(x)\neq f(y)$.

הגדרה:
אם עבור $f:A\to B$ מתקיים כי אם $f(x)=f(y)$ אזי $x=y$, נאמר כי f היא חד-חד-ערכית.

הגדרה:
לקבוצת הערכים $x\in A$ שאפשר להכניס לתוך f נקרא תחום ההגדרה של f.

הגדרה:
$f:A\to B$ תקרא שלמה אם תחום ההגדרה שלה הוא כל A, והיא תקרא על אם $f(A)=B$.

הגדרה:
אם $f(x)$ חח"ע, שלמה ועל אז ניתן לדבר על הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ כך שאם $f:A\to B$ ו- $f(x)=y$ אזי $f^{-1}:B\to A$, $f^{-1}(y)=x$.
הערה: אם f לא חח"ע אזי f^{-1} לא תהיה חד ערכית ואז היא לא תענה על הגדרת הפונקציה.
הערה: אפשר לצמצם את התחום ואת הטווח לתחום ההגדרה של f והתמונה שלה ולקבל פונקציה שלמה ועל.

הגדרה:
$f:R\to R$ תיקרא מונוטונית...
1. עולה ממש, אם לכל $x<y$ $f(x)<f(y)$.
2. לא יורדת, אם לכל $x<y$ $f(x)\leq f(y)$.
3. לא עולה, אם לכל $x<y$ $f(x)\geq f(y)$.
4. יורדת ממש, אם לכל $x<y$ $f(x)>f(y)$.

הגדרה:
אם $f:A\to B$, $g:B\to A$, ניתן להגדיר את ההרכבה $g\circ f:A\to C$ ע"י $g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)$.

הגדרה:
תהי $0<\delta$ אזי לקבוצה $\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$ קוראים סביבה מנוקבת של x_0 ברדיוס δ.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

גבולות של פונקציות

הגדרה (הגדרת הגבול עפ"י קושי):

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נסמן את הגבול של f ב-x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (המתאים ל-ε ול-x_0) כך שאם x מקיים $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-l|<\varepsilon$.

הערה: גבול הפונקציה בנקודה x_0 אינו מושפע כלל מערך הפונקציה בנקודה x_0 גם אם הפונקציה מוגדרת בנקודה x_0.

<u>הגדרה (הגדרת הגבול עפ"י היינה):</u>

תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נאמר כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ וכן $x_n \neq x_0 \ \ \forall n$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

<u>משפט 60</u>:

הגדרת הגבול של קושי (הראשונה) והגדרת הגבול של היינה שקולות.

<u>הגדרה</u>:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(-\infty)$ אם לכל M יש $0<\delta$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ יתקיים $M<f(x)$ $\big(M>f(x)\big)$.

<u>הגדרה</u>:

$\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x)=l$ אם לכל $0<\varepsilon$ יש N כך שלכל N<X (X<N) יתקיים $|f(x)-l|<\varepsilon$.

<u>הגדרה</u>:

$\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x)=\infty(-\infty)$ אם לכל M יש N כך שאם X>N (X<N) אזי $M<f(x)$ $\big(M>f(x)\big)$.

הערה: באותו אופן ניתן גם להגדיר גבולות בסדרות עפ"י היינה.

<u>הגדרה</u>:

תהי f פונקציה המוגדרת ב-$(x_0,x_0+\delta)$ $\big[(x_0-\delta,x_0)\big]$ אזי הגבול מימין (משמאל) של $f(x)$ ב-x_0 הוא l אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta_1$ כך שאם x מקיים $x_0<x<x_0+\delta_1$ $(x_0-\delta_1<x<x_0)$ אזי $|f(x)-l|<\varepsilon$.

<u>משפט 61</u>:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת ב-$0<|x-x_0|<r$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$.

משפט 62:

אם נתון כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ וכן $P<l$ $(P>l)$ אזי יש סביבה מנוקבת של x_0 שבה $P<f(x)$ $.(P>f(x))$

משפט 63:

1. $\lim_{x\to x_0} c=c$.
2. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=F$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=G$, אזי:
   1. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=F\pm G$.
   2. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=F\cdot G$.
   3. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F}{G}$ $(G\neq 0\,, g(x)\neq 0)$.

בסביבה מנוקבת של x_0 .

משפט 64:

אם $g(x)\le f(x)\le h(x)$ עבור כל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ ($0<\delta$ כלשהו), אזי אם $\lim_{x\to x_0} g(x)=l=\lim_{x\to x_0} h(x)$ נקבל $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$.

הגדרה:

תהי f פונקציה המוגדרת באיזשהי קבוצה ב- $S\in R$. נתבונן בקבוצה $\{f(x):x\in S\}$ אזי נוכל לדבר על:

1. חסימות הפונקציה.
2. חסם מלעיל וחסם עליון.
3. חסם מלרע וחסם תחתון.
4. מקסימום ומינימום (גלובליים).

משפט 65:

תהי $f:R\to R$. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אזי יש ל- x_0 סביבה שבה $f(x)$ חסומה.

רציפות

הגדרה:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 (לא מנוקבת). נאמר כי $f(x)$ רציפה ב- x_0 (רציפות נקודתית) אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

במתמטית: לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (שתלוי ב-ε וב-x_0) כך שלכל x המקיים $|x-x_0|<\delta$ יתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. f תיקרא רציפה מימין אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ ותקרא רציפה משמאל אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$. אם f מוגדרת ב-$[a,b]$ ומתקיים כי לכל $x\in(a,b)$ $f(x)$ רציפה ב-x_0 וכן $f(x)$ רציפה מימין ב-a ורציפה משמאל ב-b נאמר כי $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$.

משפט 66:

תהיינה f ו-g שתי פונקציות רציפות ב-x_0 אזי $f\cdot g$, $f\pm g$, $\frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ רציפות ב-x_0.

משפט 67:

אם f מוגדרת ב-(a,b) ואילו g מוגדרת ב-(c,d) כך שמתקיים $f((a,b))\subseteq(c,d)$ אזי אם $f(x)$ רציפה ב-$x_0\in(a,b)$ וכן $g(x)$ רציפה ב-$f(x_0)=y_0\in(c,d)$ אזי $g\circ f(x)$ רציפה ב-x_0.

סיווג נקודות אי-רציפות

תהי $f(x)$ פונקציה ו-x_0 נקודת אי-רציפות שלה אזי:

1. אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אזי אם $f(x_0)$ לא מוגדרת או ש-$f(x_0)\neq l$, נקרא ל-x_0 נקודת אי-רציפות סליקה.
2. אם קיימים וסופיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l^+$ וכן $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l^-$ ומתקיים $l^+\neq l^-$ נקרא ל-x_0 נקודת אי-רציפות מסוג I.
3. כל שאר נקודות אי הרציפות נקראות מסוג II.

משפט 68:

אם $f(x)$ רציפה בסביבה של x_0 וכן $0<f(x_0)$ $(0>f(x_0))$ אזי יש $0<\delta$ כך שלכל x בסביבת δ (לא מנוקבת) של x_0 יתקיים $0<f(x)$ $(0>f(x))$.

משפט 69:

תהי f פונקציה רציפה המוגדרת ב-$[a,b]$ כך שמתקיים $f(a)f(b)<0$, אזי קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=0$.

משפט 70 (משפט ערך הביניים):

תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ ונניח כי $f(a)\leq f(b)$, אזי לכל $f(a)\leq\gamma\leq f(b)$ קיימת c בקטע $[a,b]$ עבורה $f(c)=\gamma$.

משפט 71:

תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, אזי f חסומה בקטע.

משפט 72 (ויירשטראס):

אם f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ אזי f מחזירה שם $\max$ ו-min.

הערה: משפטים 71 ו-72אינם נכונים אם $f(x)$ מוגדרת בקטע פתוח.

משפט 73:

תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, ו- $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי $f([a,b])=[m,M]$.

פונקציות מונוטוניות

משפט 74:

תהי $f(x)$ פונקציה לא יורדת ב- (a,b), אזי תמיד קיימים לה במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

f חסומה מלעיל $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\in R$.

f חסומה מלרע $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in R$.

משפט 75:

תהי $f(x)$ פונקציה לא יורדת ב-$[a,b]$, אזי תמיד קיימים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

הערה: משפטים 74 ו-75 נכונים גם אם $f(x)$ פונקציה לא עולה.

משפט 76:

פונקציה רציפה המוגדרת בקטע היא חד-חד-ערכית $\Leftrightarrow$ היא פונקציה עולה ממש או יורדת ממש.

משפט 77:

תהי f פונקציה רציפה עולה ממש (יורדת ממש) ב-$[a,b]$ ונניח כי $f(a)=c$, $f(b)=d$, אזי $f([a,b])=[c,d]$.

משפט 78:

תהי f פונקציה רציפה עולה ממש (יורדת ממש) ב- (a,b) אזי $f((a,b))=(c,d)$ אם $c=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, $d=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.

משפט 79:

$f:[a,b]\to[c,d]$, $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$. f רציפה ועולה ממש אזי f^{-1} רציפה ועולה ממש.

משפט 80:

$f:(a,b)\to(c,d)$, $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$. f רציפה ועולה ממש אזי f^{-1} רציפה ועולה ממש.

הערה: משפטים 79 ו-80 עובד גם אם f יורדת ממש.

רציפות במידה שווה

<u>הגדרת רציפות במידה שווה:</u>
פונקציה f תיקרא רציפה במידה שווה בתחום S אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (שתלוי רק ב-ε) כך שאם $x_{1,}x_2 \in S$ מקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ אזי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה רציפות נקודתית:</u>
פונקציה f תיקרא רציפה בנקודה $x_0 \in S$ אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (שתלוי ב-ε וב-x_0) כך שאם x מקיים $|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u>
פונקציה f תיקרא רציפה נקודתית ב-S אם f רציפה בכל נקודה $x_0 \in S$.

<u>משפט 81:</u>
אם f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע I אזי f רציפה נקודתית בקטע I.

<u>משפט 82:</u>
אם f רציפה בקטע סגור I, אזי f רציפה במידה שווה בקטע.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

נגזרות

הגדרה:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0. נאמר כי f גזירה ב-x_0 אם קיים הגבול $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הגדרה:

אם f מוגדרת ב-$[x_0,x_0+\delta)$ $\left((x_0-\delta,x_0]\right)$ נאמר כי f גזירה מימין (משמאל) ב-x_0 עם הנגזרת $f_+'(x_0)$ $\left(f_-'(x_0)\right)$ אם קיים הגבול $f_+'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\left(f_-'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$.

מסקנה:

$f'(x)$ קיימת $\Leftrightarrow$ $f_+'(x)=f_-'(x)$.

הגדרה:

אם f גזירה בכל נקודה x_0 עבור קטע I נאמר כי f גזירה ב-I. כמו כן נתאים לכל x_0 את $f'(x_0)$ ואז נקבל פונקציה חדשה שתיקרא פונקצית הנגזרת בקטע I ותסומן $f'(x)$.

משמעות הנגזרת

1. הנגזרת היא שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $f(x_0)$ ($a=\tan\alpha$, α - הזוית בין הישר לציר ה-x).
2. נאמר כי $f(t)$ היא פונקציה המתארת את מקומו של חלקיק הנע על קו ישר כפונקציה של הזמן, אזי $f(t_1)$ ו-$f(t_2)$ הם 2 מקומות של החלקיק, $|f(t_2)-f(t_1)|$ הוא המרחק שעבר החלקיק, $|t_1-t_2|$ הוא פרק הזמן שעבר, ולכן $\left|\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_1-t_2}\right|$ יתן את המהירות הממוצעת של החלקיק בין הזמן t_1 ל-t_2. אם נשאיף את t_2 ל-t_1 נקבל את המהירות של החלקיק בזמן t_1 ולכן $f'(t)$ ההיא מהירות החלקיק בזמן t.

משפט 83:

תהי f מוגדרת בסביבת x_0 וגזירה שם, אזי f רציפה ב-x_0.

משפט 84:

אם f ו- g מוגדרות בסביבת x_0 וגזירות ב-x_0 עצמה וכן $c \in R$ קבוע אזי $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ ו- $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) גזירות ב-x_0 ומתקיים:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
2. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

נגזרת הפונקציה ההפוכה

משפט 85:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 , $f(x_0) = y_0$. אם:

1. $f(x)$ גזירה ב-x_0 וכן $f'(x_0) \neq 0$
2. קיימת הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(y)$ והיא רציפה ב-y_0

אזי הפונקציה ההפוכה גזירה ב-y_0 ומתקיים $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

פיתוח נוסף על נגזרות – קירוב ליניארי

הגדרה:

פונקציה $\alpha(x)$ תיקרא "o" קטן של x אם מתקיים $\frac{\alpha(x)}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0$.

משפט 86:

אם $f(x)$ גזירה ב-x_0 אזי ניתן לכתוב $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ באשר $\alpha(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$.

משפט 87 (כלל השרשרת / נגזרת לפונקציות מורכבות):

תהי $f(x)$ גזירה ב-x_0 ו- $g(y)$ גזירה ב-$f(x_0) = y_0$ אזי $g\left(f(x)\right)$ גזירה ב-x_0 ומתקיים $\left(g \circ f(x_0)\right)' = \left(g\left(f(x)\right)\right)' = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

דימה זבלב
אונ' בר-אילן

נגזרות מסדר n

<u>הגדרה:</u>
הנגזרת מסדר n של פונקציה $f(x)$ תסומן $f^{(n)}(x)$ ותוגדר באינדוקציה באופן הבא: $f^{(0)}(x)=f(x)$. אם עבור הנגזרת ה-$(n-1)$ קיבלנו $f^{(n-1)}(x)$ נגדיר את הנגזרת ה-n ע"י $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

<u>משפט 88:</u>
אם f ו- g גזירות n פעמים ו- $c\in R$ אזי:
1. $(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)}$.
2. $(c\cdot f)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$.
3. $(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$.

<u>הגדרה:</u>
נאמר כי x_0 נקודת max (min) מקומי של $f(x)$ אם קיימת סביבה פתוחה של x_0 (סביבת δ של x_0) כך ש- $f(x)$ מוגדרת בסביבה ולכל x בסביבה $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$.

<u>משפט 89 (פרמה):</u>
אם f מוגדרת בסביבת x_0 כך ש-x_0 נקודת max מקומי או min מקומי אזי אם $f'(x_0)$ קיימת $f'(x_0)=0$.

<u>משפט 90 (רול):</u>
אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) כך ש- $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה c כך ש- $f'(c)=0$.

<u>משפט 91 (לגרנז' – משפט הערך הממוצע):</u>
אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>משפט 92:</u>
אם f מוגדרת ורציפה ב-I כך שלכל $x\in I$ $f'(x)=0$ אזי f קבועה.

<u>משפט 93 (קושי – הכללה למשפט הערך הממוצע):</u>
אם f ו- g רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) ואם $g'(x)\neq 0$ בקטע אזי:
1. $g(a)\neq g(b)$.
2. קיים $c\in(a,b)$ עבורו $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>משפט 94 (כלל לופיטל עבור</u> $\frac{0}{0}$):

אם f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבת $(a,a+\delta)$ $(0<\delta)$ וכן $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$,

אזי אם קיים $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ וכן $g'(x)\neq 0$ אזי $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

<u>הכללות:</u>

1. כלל לופיטל עובד גם כאשר הגבולות כולם הם משמאל ל- a: $\lim\limits_{x\to a^-}$.
2. אם f ו- g מוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0 , $g'(x)\neq 0$,
   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ וכן $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.
3. אם f ו- g גזירות ב- (a,∞) , $g'(x)\neq 0$ ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ וכן
   $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

<u>משפט 95 (כלל לופיטל עבור</u> $\frac{\infty}{\infty}$):

תהיינה f ו- g מוגדרות ורציפות ב- $(a,a+\delta)$ $(0<\delta)$ וכן $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty$ אזי

אם קיים $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ וכן $g'(x)\neq 0$ אזי $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

הערה: גם במשפט זה מתקיימות ההכללות עבור $x\to a^+/a^-/\infty$ כמו במשפט 94.