משוואות דיפרנציאליות רגילות

הדר גרובמן

- **שימושי מאוד:** $\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\frac{P''(x)}{a^3}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^4}+\dots\right)$
- **משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר):** $f(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$ (n – סדר המשוואה). דרך רישום נוספת: $a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=Q(x)$.
- **מד"ר הומוגנית:** אם"ם Q(x)=0.
- **משוואה ליניארית ב-y:** כל המשתנים $y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)}$ במשוואה הם ליניאריים.

דוגמא: $(y'')^2+y\cdot y'=0$ לא ליניארית כי y" מופיעה בריבוע, אבל $y'+x^2y=tg(x)$ כן ליניארית.

- **מד"ר מסדר ראשון:** $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$. פתרון (עבור משוואות ליניאריות בלבד):
  - נמצא גורם אינטגרציה: $\mu=e^{\int P(x)dx}$.
  - נכפול את המד"ר בגורם אינטגרציה ונקבל: $e^{\int P(x)dx}\cdot y'+P(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot y=e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)$.
  - קיבלנו בצד שמאל נגזרת של מכפלה: $(e^{\int P(x)dx}\cdot y)'=e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)$.
  - ולכן: $e^{\int P(x)dx}\cdot y=\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx$
  - והתשובה הסופית היא: $y=\frac{\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx}{e^{\int P(x)dx}}$. יש לזכור את הקבוע C באינטגרל במונה. ניתן להשתמש בנוסחא הסופית כנוסחא כללית לפיתרון מד"ר מסדר ראשון. כאשר C לא ידוע, זהו פיתרון כללי, כלומר קיימים אין-סוף פתרונות לכל מד"ר. בהינתן תנאי התחלה (נק' בה המשוואה צריכה לעבור) אנו מוצאים את C ומקבלים פיתרון בודד.
  - החלק בפיתרון שתלוי ב-C נקרא <u>הפיתרון ההומוגני</u> של המד"ר, והוא מהווה פתרון עבור Q(x)=0. שאר הפיתרון נקרא <u>הפיתרון הפרטי</u>, הוא משתנה עבור כל Q(x), ומהווה פיתרון למד"ר הנתון. ברור, אם כן, שסכום הפיתרון הכללי וההומוגני מהווים את הפתרון הכללי.

- במידה והמשוואה אינה ליניארית, נציב $y'=\frac{dy}{dx}$, וננסה לבודד את $\frac{dx}{dy}$ ונרשום $x'=\frac{dx}{dy}$. אם מקבלים מד"ר ליניארית ב-x אז נפתור כרגיל ונחפש x(y) במקום y(x) (אם לא אז ננסה לפתור בדרך אחרת). הפתרון יקרא פיתרון סתום וניתן להשאירו סתום כל עוד אין תנאי התחלה לבעיה, אם קיים תנאי התחלה, נמצא את C ונחלץ את y.
- **משוואת ברנולי:** $y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n$. פתרון:
  - נגדיר הצבה: $z=y^{1-n}$.
  - נחלק את המשוואה ב- y^n, נקבל: $\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)\cdot y}{y^n}=Q(x)$.
  - יש לשים לב כי: $z'=(1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'=\frac{(1-n)\cdot y'}{y^n}$.
  - לכן: $\frac{z'}{(1-n)}+P(x)\cdot z=Q(x)$. ולבסוף: $z'+(1-n)\cdot P(x)\cdot z=(1-n)\cdot Q(x)$.
  - מכאן פתרון של מד"ר ליניארית מסדר ראשון ומקבלים z(x), ובסוף מציבים $z=y^{1-n}$ כדי לקבל y(x).
  - $y\equiv 0$ הוא תמיד פיתרון של משוואת ברנולי, אך הוא לא יתקבל בפיתרון הכללי לכן יש לשים לב אליו.

סוכם ע"י הדר גרובמן – לפי התרגולים בוידיאו של רבקה אביטל.

- **מד"ר פרידה**: $y' = F(x)G(y)$. פתרון:
  - שוב נציב $y' = \frac{dy}{dx}$, ונקבל: $\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$, כלומר, $\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx$ פותרים את שני האגפים ומחלצים את y.
  - יש לשים לב שהפתרון תקף כאשר $G(y) \neq 0$ בנקודות בהן G(y) מתאפס אנו נבדוק בנפרד, ונקרא להם נקודות סינגולאריות. עבור כל נקודה כזו, נמצא y(x), ונציב במד"ר המקורית כדי לראות האם זה פיתרון. אז זה אכן פיתרון לפיתרון נקרא <u>פיתרון סינגולארי</u>.

- **משוואה מטיפוס הומוגני**: $y' = f(\frac{y}{x})$. פתרון:
  - נגדיר הצבה $v = \frac{y}{x}$, ולכן $v \cdot x = y \Rightarrow y' = v' \cdot x + v$.
  - יתקבל $v' = \frac{(f(v) - v)}{x} \Leftarrow f(v) = v + v' \cdot x$ וזוהי משוואה פרידה.

- **משוואה מדויקת**: המשוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ תיקרא מדויקת אם"ם $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. פתרון:
  - נחפש פיתרון מהצורה: $\psi(x,y) = C$, כאשר $\psi_x = M, \psi_y = N$.
  - נשתמש ב- $\psi_x = M$ ולכן: $\psi^* = \int M dx + h(y)$. הפעם קבוע האינטגרציה הוא פונקציה של y.
  - עכשיו נשתמש ב- $\psi_y = N$, ויתקבל: $(\psi^*)' = (\int M dx)' + h'(y) = N$ כמובן שכל הנגזרות הם לפי y.
  - מהמשוואה שקיבלנו מחלצים את h'(y), אם מכיל x אז יש טעות, מחשבים את h(y), ומציבים ב- ψ^*.
  - נקבל את המשוואה המבוקשת, לא לשכוח להשוות לקבוע: $\psi(x,y) = C$.

- בהינתן משוואה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ אך היא לא מדויקת, אנו נחפש גורם אינטגרציה שיהפוך את המד"ר למדויקת.
  - יהי $\mu(x,y)$ גורם האינטגרציה, נכפול אותו במשוואה ונקבל: $\mu(x,y) \cdot M(x,y)dx + \mu(x,y) \cdot N(x,y)dy = 0$.
  - קיבלנו משוואה מדויקת לכן $\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$.
  - נציב $\mu_x = 0$, אם $\frac{\mu_y}{\mu} = f(y)$, אז גורם האינטגרציה הוא $\mu = e^{\int f(y)dy}$.
  - נציב $\mu_y = 0$, אם $\frac{\mu_x}{\mu} = f(x)$, אז גורם האינטגרציה הוא $\mu = e^{\int f(x)dx}$.
  - במידה והשניים האחרונים לא עובדים, גורם האינטגרציה תלוי בשני המשתנים, ולכן יש צורך בפעולה מסובכת יותר. נגדיר $z(x,y)$, וגורם האינטגרציה יהיה $\mu(z)$, אזי המשוואה לאחר ההכפלה בגורם

סוכם ע"י הדר גרובמן – לפי התרגולים בוידיאו של רבקה אביטל.

האינטגרציה תהיה: $\mu(z)M(x,y)dx+\mu(z)N(x,y)dy=0$, והשוויון המתקבל הוא:

$\mu' z_y M+\mu M'_y=\mu' z_x N+\mu N'_x$

- נמצא את ה-z עבורו $\frac{\mu_z}{\mu}=f(z)$, וגורם האינטגרציה הוא $\mu=e^{\int f(z)dz}$. יש להחזיר למשתנים המקוריים.
- לאחר מציאת גורם האינטגרציה נכפול את המשוואה בגורם האינטגרציה ונפתור מד"ר מדויקת.

- **<u>משוואות מנת ישרים</u>**: $y'=F(\frac{ax+by+m}{cx+ey+n})$. פתרון:
  - אם $m=0,n=0$, אזי הישרים נחתכים בראשית, נחלק את המונה והמכנה ב-x, ונקבל מד"ר הומוגנית.
  - אחרת, תהא (α,β) נק' החיתוך של הישרים. נבצע הצבה $\hat{x}=x-\alpha$, $\hat{y}=y-\beta$. ונקבל $\hat{y}'=F(\frac{a\hat{x}+b\hat{y}}{c\hat{x}+e\hat{y}})$ ואז שוב נחלק מונה ומכנה ב-x, ונקבל מד"ר הומוגנית. כמובן כשנמצא את $\hat{y}(\hat{x})$, נחזור ל-y(x).
  - במידה והישרים הנתונים מקבילים (המקדמים של x ו-y פרופורציונאליים) אזי נגדיר את ההצבה הבאה: $z=ax+by+m$, $y'=\frac{z'-a}{b}$, $z'=a+by'$. נקבל משוואה פרידה ונפתור כרגיל.

- **<u>משפחות אורתוגונאליות</u>**: שתי משפחות עקומים יקראו אורתוגונאליות אם בכל נק' חיתוך ביניהם המשיקים בנק' ניצבים, כלומר $y'\cdot y'_{ort}=-1$. מציאת משפחה אורתוגונאלית למשפחת פונקציות נתונה:
  - חילוץ הקבוע מהמשפחה הנתונה, כלומר $c=f(x,y)$.
  - גוזרים את המשוואה הנתונה, בשני האגפים, ומחלצים את $y'=f(x,y,c)$.
  - הצבה במשוואה שקיבלנו את c כך שנקבל: $y'=f(x,y)$
  - מציאת y'_{ort} לפי המשוואה הנתונה $y'_{ort}=-\frac{1}{y'}$. ומציאת y_{ort}, כפתרון המד"ר שקיבלנו.

- **<u>משפט הקיום והיחידות</u>**: תהא המד"ר $y'=f(x,y)$, אם $f(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן $\alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta$, אזי באינטרוול (α,β) קיים פיתרון אחד ויחיד המקיים $y(x_0)=y_0$, כאשר $\alpha<x_0<\beta,\gamma<y_0<\delta$. **<u>במילים פשוטות</u>**: אם $f(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות אזי שני פתרונות פרטיים של הפתרון הכללי לא יכולים לחתוך אחד את השני.
- **<u>ניסוח עבור מד"ר מסדר n</u>**: תהא $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=G(x)$, אם $a_i(x),G(x)$ רציפות בתחום (α,β) המכיל את x_0, אזי קיים פיתרון יחיד לתנאי ההתחלה $y(x_0)=A_0,y'(x_0)=A_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=A_{n-1}$.

- **<u>פתרון מד"ר מסדר n</u>**: $y=y_h+y_p$, כאשר הפיתרון ההומוגני הוא מהצורה: $y_h=c_1y_1+c_1y_1+\ldots+c_ny_n$, וכל ה-$y_i$ הם פונקציות בלתי תלויות הנקראות מערכת יסודית. יש לשים לב כי למד"ר מסדר n יש n קבועים, ולכן n דרגות חופש. בהינתן שני פתרונות פרטיים, הפרש שלהם מהווה פונקציה מהמערכת היסודית.

- **אי תלות בין n פונקציות**: מוגדר ע"י $\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$ נבדוק רק בנקודות של תנאי ההתחלה.

- **מד"ר מסדר II כאשר פתרון אחד ידוע**: פתרון למשוואה ההומוגנית:
  - נסמן את הפתרון הידוע כ- y_1.
  - נבצע את ההצבה: $y_2 = v(x) \cdot y_1$. כל מה שתלוי ב-v אמור ליפול אחרת יש טעות.
  - ע"י ההצבה $z = v'$ נקבל מד"ר מסדר ראשון. בפתרון המד"ר שמתקבלת אין צורך להוסיף קבוע, כי כבר יש קבועים בהגדרת הפיתרון של מד"ר מסדר n.

- **מד"ר מסדר n כאשר כל המקדמים קבועים (כאשר המד"ר הומוגנית)**: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$. פתרון:
  - כל פתרון הוא מהסוג $e^{r \cdot x}$.
  - נציב במד"ר ונקבל: $e^{r \cdot x}(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_2r^2 + a_1r + a_0) = 0$, כאשר כל מה שבסוגריים נקרא פולינום אופייני.
  - נמצא את כל השורשים של הפולינום האופייני.
  - אם הם כולם ממשיים ושונים אזי הפיתרון הכללי הוא: $y = \sum_{i=0}^{n} C_i e^{r_i \cdot x}$, כאשר r_i הם שורשי הפולינום האופייני.
  - אם כולם שונים אך חלקם מרוכבים, אז עבור הממשיים נרשום כמו מקודם, ועבור מרוכבים נרשום בצורה הבאה: $r = \alpha + i\beta \Rightarrow e^{\alpha \cdot x}\cos\beta$, $r = \alpha - i\beta \Rightarrow e^{\alpha \cdot x}\sin\beta$.
  - אם קיימים שורשים עם ריבוי s, נציב עבורם $e^{r \cdot x}, x \cdot e^{r \cdot x}, x^2 \cdot e^{r \cdot x}, \dots, x^{s-1} \cdot e^{r \cdot x}$ כנ"ל עבור שורשים מרוכבים.

- **מד"ר מסדר n כאשר כל המקדמים קבועים (כאשר המד"ר לא הומוגנית)**: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = G(x)$.
  פתרון:
  - במצב כזה אנו צריכים לנחש את הפיתרון לפי G(x) ע"פ הטבלה הבאה:

G(x)	הניחוש
$P_n(x)$ (פולינום)	$x^s \cdot Q_n(x)$, s = הריבוי של 0 בפולינום האופייני
$P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$	$x^s \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$, s = הריבוי של α בפולינום האופייני
$P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta x)$ או $P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta x)$ (או קומבינציה שלהם)	$x^s \cdot e^{\alpha \cdot x}(Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x))$, s = הריבוי של $\alpha \pm i\beta$ בפולינום האופייני

  - $Q_n(x), R_n(x)$ הם ניחושי פולינומים, לפי סדר הפולינום $P_n(x)$, אם הסדר הוא n אז הניחוש הוא: $(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$.
  - הניחוש שלנו הוא ניחוש לפיתרון פרטי, נציב אותו במד"ר ונמצא את הקבועים, ולאחר מכן נמצא את הפתרון ההומוגני למד"ר, כפי שראינו בסעיף הקודם. הפיתרון הכללי יהיה הסכום בין הפיתרון הפרטי להומוגני.

- **משוואת אויילר (במקרה ההומוגני)**: $x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2x^2 \cdot y'' + a_1x \cdot y' + a_0y = 0$. פתרון:

סוכם ע"י הדר גרובמן – לפי התרגולים בוידיאו של רבקה אביטל.

- במקרה זה הפולינום האופייני יהיה $\sum_{i=0}^{n} a_i R_i$ כאשר $R_i = r(r-1)\cdots(r-i+1)$.
- וכל פתרון הוא מהצורה: x^r. כאשר r הוא פיתרון של הפולינום האופייני.
- נמצא את כל השורשים של הפולינום האופייני.
- אם הם כולם ממשיים ושונים אזי הפיתרון הכללי הוא: $y = \sum_{i=0}^{n} C_i x^{r_i}$, כאשר r_i הם שורשי הפולינום האופייני.
- אם כולם שונים אך חלקם מרוכבים, אז עבור הממשיים נרשום כמו מקודם, ועבור מרוכבים נרשום בצורה הבאה: $r = \alpha \pm i\beta \Rightarrow x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$.
- אם קיימים שורשים עם ריבוי s, נציב עבורם $x^r, \ln(x)\cdot x^r, \ln^2(x)\cdot x^r, \ldots, \ln^{s-1}(x)\cdot x^r$ כנ"ל עבור שורשים מרוכבים.

- **<u>משוואת אויילר (לא הומוגנית)</u>:** $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2x^2y'' + a_1 x y' + a_0 y = G(x)$. פתרון:
  - פותרים פתרון הומוגני.
  - מבצעים טרנספורמציה: $x = e^t$.
  - מנחשים פיתרון פרטי לפי G(t), כמו עבור משוואה עם מקדמים קבועים.
  - חוזרים למשתנים המקוריים (x), ופותרים ע"י השוואה מקדמים.

- **<u>מד"ר מסדר n כאשר המקדמים אינם קבועים – וריאציית הפרמטר</u>:** $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = G(x)$
  - פותרים את המשוואה ההומוגנית, ונקבל פתרון מהצורה $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$. זהו הפתרון ההומוגני למערכת. לא תמיד ניתן יהיה למצוא אותו בכלים של בקורס שלנו, לדוגמא, אנו נוכל לפתור באמצעות הורדת סדר (כאשר פתרון אחד ידוע).
  - הפתרון הפרטי יהיה מהצורה הבאה $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n$ כאשר c_i הם לא קבועים והם המשתנים שלנו. נמצא אותם לפי מע' המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \cdots + c_n'(x)y_n = 0\\
&c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \cdots + c_n'(x)y_n' = 0\\
&\vdots\\
&c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0\\
&c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = G(x)
\end{aligned}$$

יש לזכור להציב $G(x)$ מהמד"ר המנורמלת (המקדם של $y^{(n)}$ הוא 1). מציאת הפיתרון הפרטי בדרך הנ"ל מכונה וריאציית הפרמטר.

- **<u>מערכת משוואות</u>:** $\begin{pmatrix} x'(t)_1 \\ \vdots \\ x'(t)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)_{1,1} & \cdots & a(t)_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(t)_{n,1} & \cdots & a(t)_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t)_1 \\ \vdots \\ x(t)_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(t)_1 \\ \vdots \\ b(t)_n \end{pmatrix}$ המקדמים יכולים להיות קבועים או תלויים ב-t.
  - שיטת האלימינציה, כאשר יש רק שתי משוואות בצורה הבאה: $\begin{cases} x(t)' + a\cdot x(t) + b\cdot y(t) = c \\ y(t)' + d\cdot x(t) + e\cdot y(t) = f \end{cases}$
    - מחלצים את y(t) מהמשוואה הראשונה ומציבים במשוואה השנייה (גוזרים כשצריך), נקבל מד"ר במשתנה אחד (x(t)). נפתור את המד"ר ונציב בחזרה ב-y(t).

סוכם ע"י הדר גרובמן – לפי התרגולים בוידיאו של רבקה אביטל.

- **מערכת משוואות הומוגנית:** $\bar{x}' = A\bar{x}$.
  - נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה A.
  - הפתרון יהיה מהצורה $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.
  - עבור ערכים עצמיים ממשיים יתקבל $x_i = e^{\lambda_i t} v_i$ כאשר v_i הם הווקטורים העצמיים ו-λ_i הם הערכים העצמיים של המטריצה A.
  - עבור ערכים עצמיים מרוכבים, מהצורה הבאה: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ נרשום $\tilde{x} = e^{(\alpha + i\beta)t} v$, נזכור את השוויון הבא: $e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$ ולכן $\tilde{x} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))v$. נציב בכל ונקבל $\tilde{x} = e^{\alpha t}\tilde{v}$ כאשר $\tilde{v}$ הוא וקטור מרוכב. יהיו במקרה זה החלק הממשי והחלק המרוכב של $\tilde{x}$ x_1, x_2. יש לשים לב כי הערכים העצמיים המרוכבים צמיד יבואו בזוגות $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ולא משנה איזה סימן נבחר.
  - כאשר קיים ערך עצמי עם ריבוי גבוה (גדול מאחד) אבל עם מספר וקטורים עצמיים נמוך יותר (ריבוי גיאומטרי נמוך מריבוי אלגברי) אנו ננחש פתרון מהצורה הבאה: $x = e^{\lambda t}(v_0 + v_1 t + \cdots + v_{n-1}t^{n-1})$, כאשר n הוא הריבוי האלגברי של הערך העצמי. נציב במד"ר המקורית ונמצא את הוקטורים הרצויים. לבדיקה עצמית, אנו צריכים לקבל בין n הוקטורים את הווקטורים העצמיים שכן קיבלנו עבור הערך העצמי הנ"ל, עד כדי כפל בקבוע. בקורס שלנו לרוב נקבל n=2 ולעיתים רחוקות n=3.

- **מערכת משוואות לא הומוגנית:** $\bar{x}' + A\bar{x} = B(t)$. (ע"י וריאציית הפרמטר)
  - נמצא פתרון של המערכת ההומוגנית כמתואר לעיל. הפיתרון שיתקבל הוא $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ וזהו כמובן הפתרון ההומוגני.
  - את הפתרון הפרטי נקבל ע"י וריאציית הפרמטר: הניחוש שלנו יהיה $x_p = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 + \cdots + c_n(t)x_n$ כאשר את $c_i(t)$ נמצא מתוך המשוואה הבאה: $c_1'(t)x_1 + c_2'(t)x_2 + \cdots + c_n'(t)x_n = B(t)$. יש לשים לב כי הפעם יש רק משוואה אחת כי המערכת היא מסדר ראשון, בקורס שלנו אין מערכות משוואות מסדר גבוה.
  - **פתרון מד"ר באמצעות טורים:** כאשר המד"ר נתונה בצורה הבאה: $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$.
  - נציע את הפתרון: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.
  - מוצאים את a_n ע"י הצבת הטור במשוואה כינוס האיברים לטור אחד ותוך השוואת מקדמים נקבל נוסחת נסיגה. אנו נפתח סביב נק' x_0 רק אם $P(x_0) \neq 0$.
  - קיים פיתרון יחיד עבור תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1$ ומתקיים גם $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1$.

סוכם ע"י הדר גרובמן – לפי התרגולים בוידיאו של רבקה אביטל.