מכפלה ווקטורית

אורי גורן

מכפלה וקטורית

מאת אורי גורן.

נניח כי ברצוננו למצא וקטור המאונך לשני וקטורים נתונים במרחב. יש 2 גישות שונות לבעיה כזאת: האחת מבוססת על מכפלה סקלרית, ופתרון מערכת עם 2 משוואות. השניה, הרבה יותר פשוטה, היא המכפלה הוקטורים של שני וקטורים.
מכפלה וקטורית זו פעולה בינארית, דהיינו היא מוגדרת רק עבור שני גורמים.

לדוגמא, נתון וקטור a ווקטור b

$\underline{a}(x_1,y_1,z_1)$ $\underline{b}(x_2,y_2,z_2)$

חישוב מכפלה וקטורית:

מכפלה וקטורית היא הדטרמיננטה של המטריצה של שני הוקטורים
לכן הקורידנטות שלה הם כדלהלן

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

נוהגים לסמן מכפלה וקטורית של a ו-b כך

$$a \times b = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

<u>הגדרה חלופית של המכפלה הוקטורית</u>

ניתן להגדיר וקטור כגודל וכיוון
<u>כיוון:</u> המכפלה הוקטורית תמיד מאונכת למישור שיוצרים שני הוקטורים המעורבים במכפלה, כלומר היא מאונכת לשני הווקטורים.
<u>אורך המכפלה הוקטורית:</u>

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\theta$$

כאשר הזוית θ היא הזוית בין הוקטורית a ו-b

<u>השימושים למכפלה הוקטורית</u>

1. מציאת אנך למישור
2. מציאת שטח מקבילת במרחב
3. מציאת שטח משולש במרחב
4. מציאת היטל וקטור אחד על משנהו
5. מציאת נפח מקבילון במרחב
6. מציאת מרחק נקודה מישר במרחב

<u>הסבר השימוש במכפלה וקטורית</u>

1. מציאת אנך למישור

מכיוון שמכפלה וקטורית מאונכת למישור שיוצרים שני וקטורי הכיוון, הרי שניתן להשתמש בה כדי למצוא את האנך למישור מסוים.

ניקח לדוגמא את המישור

$\pi : x = (0,0,0) + (-2,3,4)t + (5,-3,1)s$

נכפיל וקטורית את שני וקטורי הכיוון

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3\cdot 1 - 4\cdot(-3), 4\cdot 5 - (-2)\cdot 1, (-2)\cdot(-3) - 3\cdot 5)$$

מסכמים ומקבלים שהוקטור האנך למישור הוא

<u>v</u>(15,22,-9)

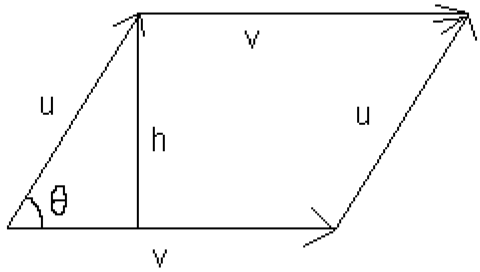
כמו כן, אפשר להגדיר את הצורה האלגברית של המישור בעזרת האנך: ax+by+cz+d=0

15x+22y-9z+d=0

כדי למצוא את d נציב נקודה כל שהיא על המישור במשוואת המישור, נציב לדוגמא את וקטור ההעתקה (0,0,0) ונמצא כי d=0, לכן המשוואה האלגברית של המישור היא

15x+22y-9z=0

2. נניח שאנו רוצים למצוא את שטח המקבילית המוגדרת על ידי 2 הוקטורים v ו u



שטח מקבילית (S)=גובה(h)*צלע.

$Area = base \cdot height = h \cdot |u|$

$\sin\theta = \frac{h}{|u|}$

$h = \sin\theta \cdot |u|$

$Area = \sin\theta \cdot |v| \cdot |u|$

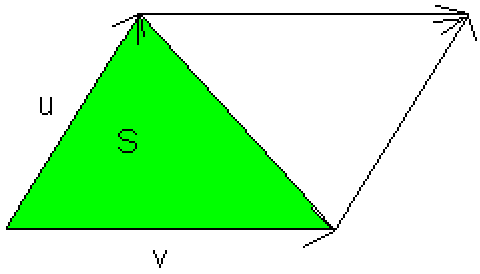
כמו כן, נזכור כי

$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\theta$

לכן

$Area = |u \times v|$

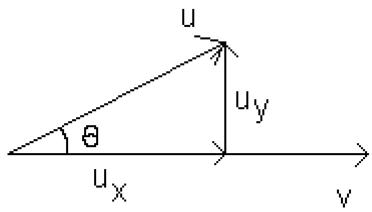
3. שטח משולש ששניים מצלעותיו הם הוקטורים u ו v הוא מחצית שטח המקבילית שצליעותיה הן הוקטורים u ו v



לכן שטח משולש שווה ל:

$$Area = \frac{|u \times v|}{2}$$

4. מהו היטל של וקטור אחד על משנהו?
אם נתונים לנו 2 וקטורים u ו-v כדלקמן:



אם נפרק את וקטור u לשני וקטורים, האחד מקביל לv והשני מאונך ל v, החלק המקביל לv נקרא ההיטל של u על v. נוהגים לסמן אותו כך:

$$proj_v u$$

כיוון ההיטל הוא ככיוון v או הפוך לו (תלוי בזוית בין הוקטורים).
את גודל ההיטל ניתן למצוא ע"י טריגו:

$$\cos\theta = \frac{|proj_v u|}{|u|}$$

$$|proj_v u| = |u|\cos\theta$$

מהגדרת המכפלה הסקאלרית ידוע כי

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

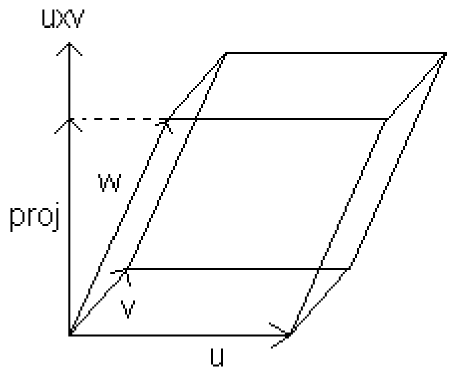
לכן

$$|proj_v u| = |u| \cdot \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v}{|v|}$$

כעט נותר לנו למצוא את הווקטור עצמו.
מכיוון שכיוון הוקטור הוא ככיוון v, והגודל ידוע, ניתן להציג את הוקטור כמכפלה של הגודל בווקטור היחידה בכיוון v. נזכיר כי וקטור יחידה הוא וקטור שגודלו 1.

$$proj_v u = \frac{1}{|v|} \cdot v \cdot \frac{u \cdot v}{|v|} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$$

5. נעיין בשרטוט הבא:



הוקטור המסומן כ-proj הוא ההיטל של w על $u\times v$, $proj_{u\times v}w$.

נפח מקבילון שווה לטשט הבסיס כפול הגובה. ניקח את המקבילית המוגדרת ע"י u,v כבסיס.
הגובה הוא גודל ההיטל של w על $u\times v$.

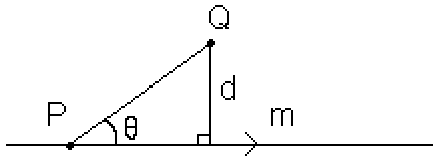
$$Area=|u\times v|$$

$$h=|proj_{u\times v}w|=\frac{u\times v\cdot w}{|u\times v|}$$

$$Volume=Area*h=|u\times v|\cdot\frac{u\times v\cdot w}{|u\times v|}=u\times v\cdot w$$

כמובן שהבסיס בדוגמא הנ"ל נבחר אקראית. לכן שטח מקבילון במרחב שווה למכפלה הסקלארית של מכפלה וקטורית של שני צלעות והצלע השלישית.

6. נניח כי ברצוננו למצוא את מרחק מנקודה נתונה Q וישר נתון, שמשוואתו מכילה את וקטור הכיוון m. P היא נקודה כלשהי על הישר



$$\sin\theta=\frac{d}{|PQ|}$$

$$d=|PQ|\cdot\sin\theta=\frac{|PQ|\cdot\sin\theta\cdot|m|}{|m|}=\frac{|PQ\times m|}{|m|}$$

לסיכום
סימון מכפלה וקטורית: $a\times b$ (בניגוד לסימון מכפלה סקלארית $a\cdot b$)
כיוון מכפלה וקטורית: מאונכת למישור הוקטורים המוכפלים
אורך מכפלה וקטורית: $|a\times b|=|a|\cdot|b|\cdot\sin\theta$
קורדינטת מכפלה וקטורית: $a\times b=(y_1z_2-z_1y_2, z_1x_2-x_1z_2, x_1y_2-y_1x_2)$

שימושים במכפלה וקטורית

שימוש	נוסחא \ אלגוריתם	הסבר נוסף
מציאת וקטור מאונך למישור שני וקטורים אחרים. בעיקר לצורך מעבר מהצגה פרמטרית של מישור לצורה אלגברית	1. מכפילים וקטורית את שני וקטורי הכיוון. 2. מקדמי הx,y,z בהצגה האלגברית יהיו קורדינטות הx,y,z של הוקטור האנך 3. מציבים נקודה כלשהי על המישור ומוצאים את d	הצגה אלגברית של מישור מוגדרת על ידי הוקטור האנך למישור. נובע ממשפט בהנדסת המרחב הקובע כי מכל נקודה במרחב ניתן להוריד רק אנך אחד למישור.
מציאת שטח מקבילית על ידי הוקטורים המגדירים אותה	$S=\|u\times v\|$	נובע מאורך מכפלה וקטורית
מציאת שטח משולש על ידי שני וקטורים.	$S=\frac{\|u\times v\|}{2}$	מחצית משטח המקבילית
מציאת נפח מקבילון	$V=u\times v\cdot w$	נובע משטח מקבילית ומהיטל וקטור על וקטור
מציאת מרחק נקודה מישר	1. בוחרים נקודה P כלשהי על הישר 2. בהנחה שQ הנקודה הנתונה, מחשבים את הוקטור PQ. 3. m וקטור הכיוון של הישר, מציבים בנוסחא: $d=\frac{\|PQ\times m\|}{\|m\|}$	נובע מהגדרת אורך מכפלה וקטורית. יתר כפול סינוס הזוית נותן את הגובה.