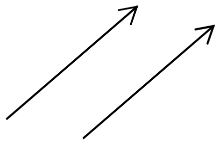
גירסה 1.00 – 4.2.2005

ווקטורים – רמה תיכונית

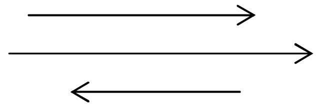
מסמך זה נכתב על ידי **ברברה פוליאקוב** בסביבות שנת 1998.
המסמך נכתב ב-Word בגירסה ישנה, ולכן עיצובו שונה מעיצוב רוב המסמכים שבאתר. עם ציבור הקוראים הסליחה. במידת האפשר, מסמך זה יעודכן בעתיד על מנת להציגו בצורה נוחה יותר לקריאה.

וקטורים

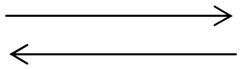
וקטורים שווים: הנקודה שממנה הם יוצאים לא משנה כל עוד יש להם אותו גודל וכיוון.



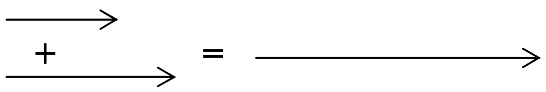
וקטורים קולינאריים: וקטורים מקבילים, אבל לא שווים בגודל ובכיוון.

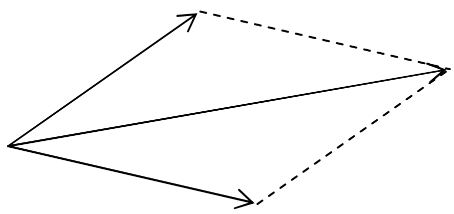


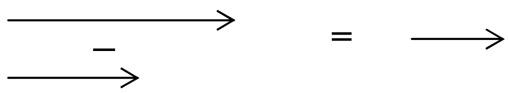
וקטורים מנוגדים: וקטורים קולינאריים בעלי אותו אורך, אבל מנוגדים בכיוון.



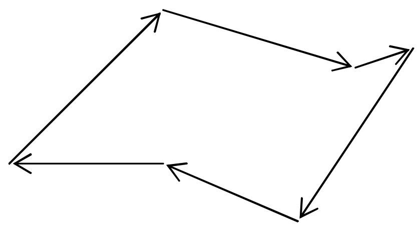
חיבור וחיסור וקטורים:







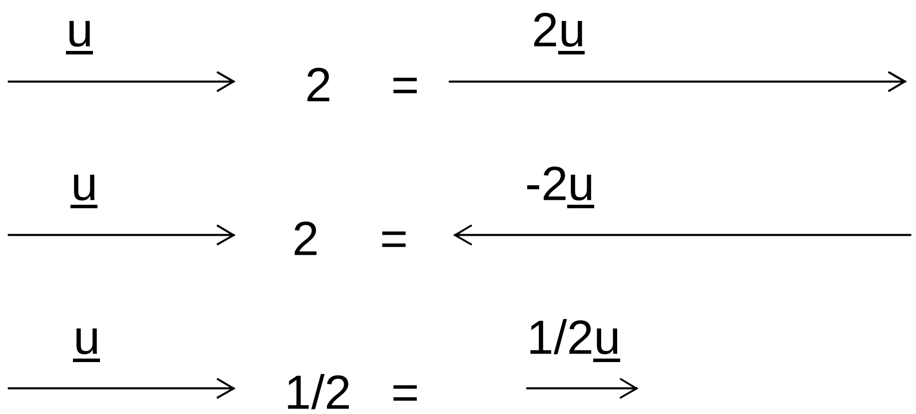
כשהוקטורים יוצרים ביחד קו סגור סכומם שווה ל0-.



תכונות של וקטורים:

1. סכום של וקטרים הוא וקטור.
2. בחיבור וקטורים פועל חוק החילוף (קומוטטיבי): $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$
3. בחיבור וקטורים פועל חוק הקיבוץ (אסוציאטיבי): $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$
4. קיים איבר נייטרלי לחיבור שהוא וקטור 0: $\underline{u}+\underline{0}=\underline{u}$
5. לכל וקטור $\underline{u}$ קיים וקטור נגדי $\underline{u}$– כך שחיבורם שווה ל-0: $\underline{u}$- $\underline{u}=\underline{0}$

כפל וקטור בסקלר:

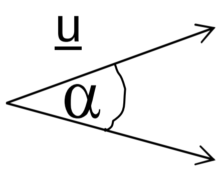


α β- סקלרים

$\underline{u}$ $\underline{v}$- וקטורים

$$\alpha(\beta\underline{u})=(\alpha\beta)\underline{u}$$
$$(\alpha+\beta)\underline{u}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{u}$$
$$\alpha(\underline{u}+\underline{v})=\alpha\underline{u}+\alpha\underline{v}$$

מכפלה סקלרית:

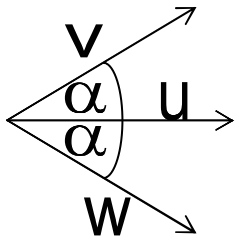


$$\underbrace{\underline{u}\ \underline{v}} = \underbrace{|\underline{u}|\ |\underline{v}|\ \cos\alpha}$$

$\underline{v}$ וקטורים סקלר

1. פועל חוק החילוף: $\underline{u}\,\underline{v}=\underline{v}\,\underline{u}$

2. לא פועל חוק הקיבוץ (הסדר שבו כופלים משנה את התוצאה).



3. $\underline{u}\,\underline{v}=\underline{u}\,\underline{w}$

$\underline{v}\neq\underline{w}$

(האורך שווה, אבל לא הכיוון)

4. $\underline{u}\,(t\underline{v})=t\,\underline{u}\,\underline{v}$

5. $t\,(\underline{u}\,\underline{v})=t\,\underline{u}+t\,\underline{v}$

6. $\underline{u}\,\underline{u}=|\underline{u}|^2$

$|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}\,\underline{u}}$

7. שני וקטורים, השונים מוקטור 0, ניצבים זה לזה אך ורק אם מכפלתם שווה ל-0.

8. $\cos\alpha=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$

הצגה אלגברית של וקטור:

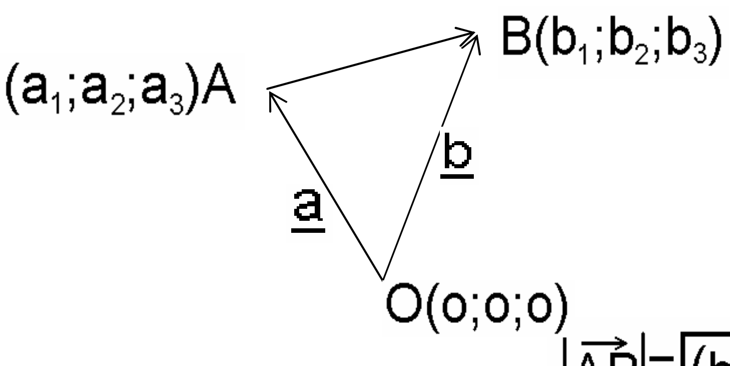
$\underline{a}=(a_1;a_2;a_3)$

$\underline{b}=(b_1;b_2;b_3)$

1. $\underline{a}+\underline{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

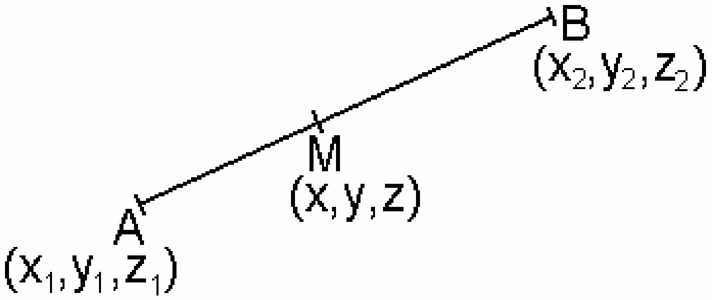
2. $\lambda a=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$

3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$
$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=\underline{a}-\underline{b}$



4. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

5. $$\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)$$



6. $$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{k}{\ell}$$

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\frac{k}{\ell}(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

$$(x-x_1)=\frac{k}{\ell}(x_2-x)$$

$$\ell x-\ell x_1=kx_2-kx$$

$$\ell x+kx=kx_2+\ell x_1$$

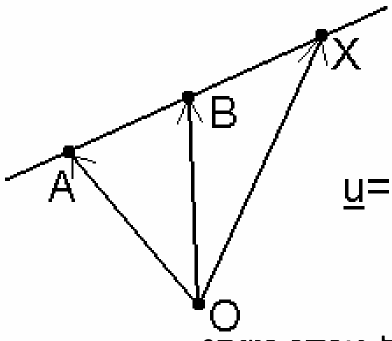
$$x(\ell+k)=kx_2+\ell x_1$$

$$x=\frac{kx_2+\ell x_1}{\ell+k}$$

כנ"ל לגבי z ו-y.

<u>ישרים ומישורים</u>

<u>ישרים:</u>



$$\vec{OX}=\vec{AO}+t\vec{OB}$$

$$\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$$

$$\underline{u}=\vec{AB}$$

כל מספר שנציב במקום t לקבל נקודה על הישר.

איך אפשר להוכיח ש3- נקודות כלשהן נמצאות על אותו ישר?

$A=(1,0,0)\ B=(-2,0,0)\ C=(8,0,0)$

דרך א׳: אפשר להוכיח ש- tAC=AB.

$AB=(-3,0,0)$

$AC=(7,0,0)$

$$x:\ \begin{aligned}-3&=7t\\ t&=\tfrac{-3}{7}\end{aligned}\qquad y:\ \begin{aligned}0&=0t\\ 0&=0\end{aligned}\qquad z:\ \begin{aligned}0&=0t\\ 0&=0\end{aligned}$$

אם מתקבל אותו t בשלושתם (x,y,z) אז זה נכון.

דרך ב׳: אפשר להוכיח ש-C שייך לישר AB.

$\underline{u}=\vec{AB}=(-3,0,0)$

$A=(1,0,0)$

הצגה פרמטרית מפורשת:

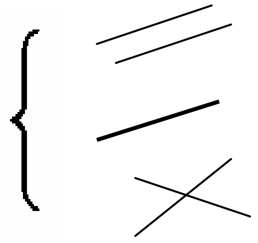
$$\underline{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\begin{cases}x=1-3t\\ y=0-0t\\ z=0-0t\end{cases}$$

כדי שנקודה C תהיה שייכת היא צריכה לתת אתו t בשלושתם.

$$\begin{aligned}8&=1-3t\\ 0&=0\qquad t=-7/3\\ 0&=0\end{aligned}$$

מצבים הדדיים בין ישרים:

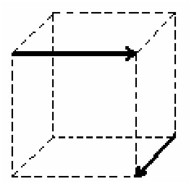
במרחב יש 4 אפשרויות למצבים הדדיים בין שני ישרים:



מקבילים

מתלכדים — על אותו מישור

נחתכים



מצטלבים (על מישורים שונים, הם לעולם לא יפגשו)

אם המישורים מתלכדים או מקבילים הם חייבים להיות קולינאריים:

-

$$\underline{U}=P\underline{V}$$

מתלכדים- יש לפחות נקודה אחת משותפת.

מקבילים- יש לפחות נקודה אחת לא משותפת.

$$\underline{U}\neq P\underline{V}$$

מצטלבים- אין נקודה משותפת.

נחתכים- יש נקודה משותפת אחת.

דוגמא:

ℓ_1: x=(4,0,2)+t(1,-1,3)

ℓ_2: x=(0,0,0)+s(2,-2,6)

$\underline{u}$=(1,-1,3)

$\underline{v}$=(2,-2,6) היחס בין הנקודות שווה, סימן שהם קולינאריים.

2s=x	x=4+t
-2=y	y=0-t
6s=z	z=2-3t

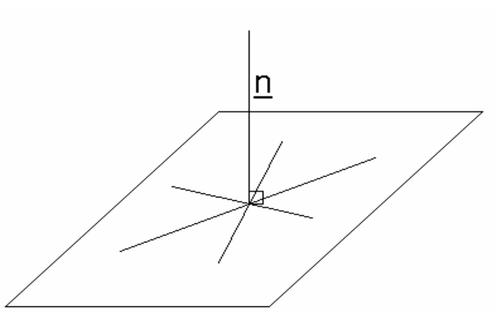
אחרי השוואה רואים שיוצאות תוצאות שונות, סימן שאין נקודה משותפת והישרים מקבילים.

מישורים:

הגדרות:

1. דרך 3 נקודות, שלא נמצאות על אותו ישר, עובר מישור אחד בלבד.
2. דרך ישר ונקודה שלא שייכת לו עובר מישור אחד בלבד.
3. דרך שני ישרים נחתכים עובר מישור אחד בלבד.
4. דרך שני ישרים מקבילים עובר מישור אחד בלבד.

אם מעבירים ישר מאונך למישור (נורמל $\underline{n}$) הוא מאונך לכל הישרים על אותו מישור.



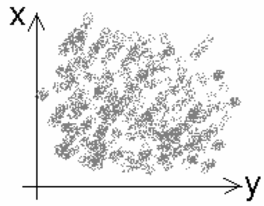
$$\underline{n}=(A;B;C)$$
$$\underline{x}=(x;y;z)$$
$$\underline{n}\,\underline{x}=0$$
$$\underline{n}\,\underline{x}+D=0$$
$$Ax+By+Cz+D=0$$

D היא נקודת הזזה של הנורמל ביחס למישור.

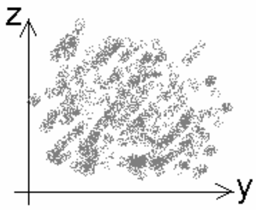
אם D שווה ל-0 אז המישור עובר דרך ראשית הצירים.

דוגמאות:

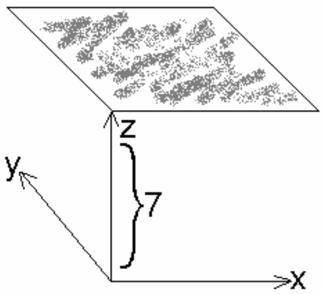
$z=0$



$x=0$



$z=7$



דוגמא לתרגיל:

מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות:

$P(0,-2,0)$ $N(0,0,3)$ $M(1,0,0)$

1. צריך להוכיח שהנקודות לא נמצאות על אותו ישר.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=(-1,0,3)\\ \overrightarrow{MP}=(-1,-2,0)\end{array}\right\}$$

לא קולינאריים

2. $\underline{n}$ צריך להיות מאונך לשניהם- מכפלה סקלרית שווה ל-0.

$$\underline{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0 \quad -A+3C=0 \quad C=\frac{A}{3}$$

$$\underline{n}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \quad -A-2B=0 \quad B=-\frac{A}{2}$$

3. בוחרים A כלשהו כדי שהחישובים יהיו נוחים.

$A=6$

$B=-3$

$C=2$

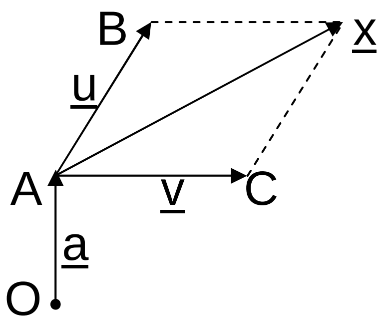
4. מציבים את נקודה M.

$6\ 1+(-3)\ 0+2\ 0+D=0$

$6+D=0$

$D=-6$

5. משוואת המישור: $6x-3y+2z-6=0$



הצגה פרמטרית של מישור:

$\underline{x}=A+t\underline{u}+s\underline{v}$

$A(0,2,0)$ $B(0,1,-1)$ $C(0,2,1)$

$\underline{u}=(0,-1,-1)$

$\underline{v}=(0,0,1)$

מעבר מהצגה פרמטרית למשוואת המישור:

$$x=(\underset{A}{2,-1,3})+t(\underset{\underline{u}}{-2,3,-2})+s(\underset{\underline{v}}{-2,1,-1})$$

$\underline{n}=(A,B,C)$ $\quad \underline{n}\,\underline{u}=0$, $\underline{n}\,\underline{v}=0$

$-2A+3B-2C=0$

$-2A+B-C=0$

אחרי חיסור המשוואות: $2B-C=0$

$C=2B$

הצבה במשוואה השניה: $-2A+B-2B=0$

$-2A-B=0$

$-2A=B$

$A=-1/2B$

לוקחים $B=-2$

$A=1$

$C=-4$

המשוואה: $1x-2y-4z+D=0$

הצבת נקודה A: $2+2-12+D=0$

$D=8$

$x-2y-4z+8=0$

<u>מעבר ממשוואת המישור להצגה פרמטרית:</u>

$x+y-z=0$

יהיו אין סוף אפשרויות, כי אפשר לקחת כל נקודה ווקטורים בכל כיוון.

$$\begin{cases} y=t \\ z=s \\ x=-t+s \end{cases} \qquad \underline{x}=(0,0,0)+t(-1,1,0)+s(1,0,1)$$

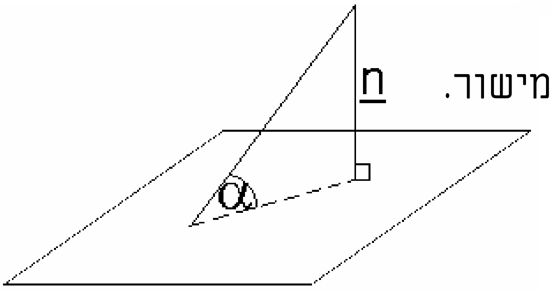
<u>זווית בין שני ישרים:</u>

הזווית בין הישרים היא או חדה או 90°. לכן לוקחים את המכפלה הסקלרית בערך מוחלט, כדי שלא יצאו זוויות קהות.

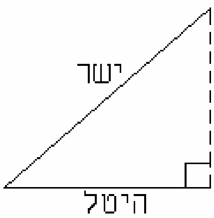
$$\cos\alpha=\frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$$

<u>זווית בין ישר מישור:</u>

הגדרה- הזווית החדה בין הישר והיטלו במישור.



$$\sin\alpha=\frac{|\underline{n}\cdot\underline{u}|}{|\underline{n}|\cdot|\underline{u}|}$$



<u>מצבים הדדיים בין מישורים:</u>

במרחב יש שלוש אפשרויות למצבים הדדיים בין שני מישורים:

$Ax+By+Cz+D=0$

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

מתלכדים: $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}=\frac{D}{D_1}$

מקבילים: $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}\neq\frac{D}{D_1}$

נחתכים: $\frac{A}{A_1}\neq\frac{B}{B_1}\neq\frac{C}{C_1}$

למישורים שנחתכים לא יכולה להיות נקודה משותפת אחת, אלא יש להם ישר משותף.

אם יחסי הB והC שווים ויחסי הA שונים, אז המישורים נחתכים בציר הx.

אם יחסי הB והA שווים ויחסי הC שונים, אז המישורים נחתכים בציר הz.

<u>מציאת ישר החיתוך:</u>

דרך א׳:

$$x-y+z-2=0$$

$$2x-y+4z=0$$

מחסרים את המשוואות (=2-1):

$$x+3z+2=0$$

בוחרים שאחד הנעלמים הוא t.

$$z=t$$

$$x=-3t-2$$

הצבה במשוואה הראשונה:

$$y=-2t-4$$

ישר החיתוך:

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

דרך ב׳:

$$x+3z+2=0$$

בוחרים z כלשהו, מציבים באחת המשוואות ומקבלים 2 נקודות:

$$z=0 \rightarrow x=-2 \quad y=-4$$

$$z=1 \rightarrow x=-5 \quad y=-6$$

$$A(-2,-4,0)$$

$$B(-5,-6,1)$$

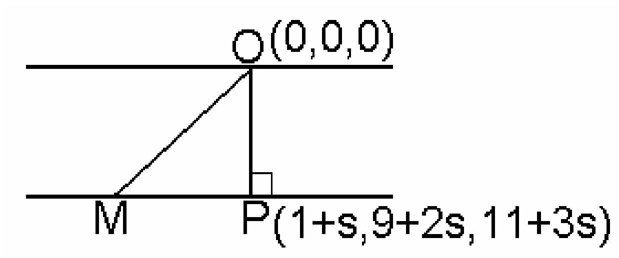
$$\underline{u}=B-A$$

$$\underline{x}=(-2,-4,0)+t(-3,-2,1)$$

זווית בין שני מישורים:
כדי למצוא את הזווית משתמשים בנורמל.

$$\cos\alpha=\frac{\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2}{|\underline{n}_1|\cdot|\underline{n}_2|}$$

מרחק בין ישרים מקבילים:
אפשר למתוח אין-סוף קוים בינהם. המרחק הוא הזה עם האורך המינימלי (ניצב).



ℓ_1: x=t(1,2,3)

ℓ_2: x=(1,9,11)+s(1,2,3)

$$d=\sqrt{(1+s)^2+(9+2s)^2+(11+3s)^2}$$

$$d^2(s)=1+2s+s^2+81+36s+4s^2+121+66s+9s^2$$
$$d^2(s)=14s^2+104s+203$$

קודקוד הפרבולה: $\frac{-b}{2a}$

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-104}{28}\rightarrow s=\frac{-26}{7}\rightarrow d=9.85$$

מרחק מנקודה למיע
הנקודה: (x_0,y_0,z_0)

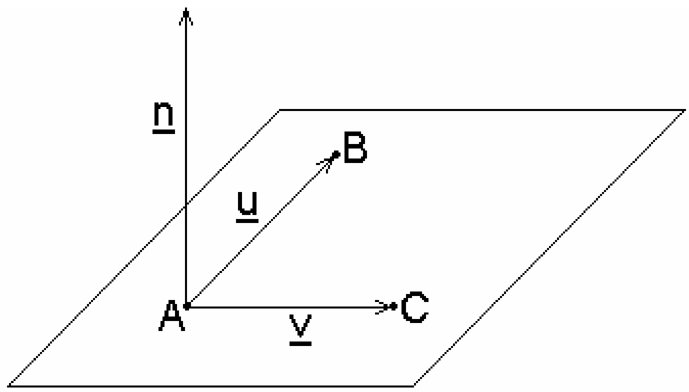
המישור: Ax+By+Cz+D=0

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

שאלה לדוגמא:

נתון: $A(3,-2,1)\quad B(3,1,5)\quad C(4,0,3)$

צ"ל: הצגה פרמטרית של הישר המאונך למישור ABC ועובר דרך נקודה A.



$B-A \longrightarrow \underline{u}=(0,3,4)$

$C-A \longrightarrow \underline{v}=(1,2,2)$

$\underline{n}\ \underline{u}=0$

$0A+3B+4C=0$

$3B=-4C$

$B=-4/3C$

$\underline{n}\ \underline{u}=0$

$1A+2B+2C=0$

$2B=-A-2C$

$-8/3C=-A-2C$

לוקחים איזה C שרוצים, כך שהחישובים יהיו נוחים.

$C=3$

$A=2$

$B=-4$

$2x-4y+3z+D=0$

מציבים את נקודה A:

$D=17$

תשובה: $\underline{x}=(3,-2,1)+t(2,-4,3)$

נתון: המרחק בין נקודה כלשהי על הישר n לבין נקודה B הוא $\sqrt{750}$.

דרך הפתרון: B(3,1,5)
$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-4t \\ z=1+3t \end{cases}$$

$$d=\sqrt{750}=\sqrt{(3+2t-3)^2+(-2-4t-1)^2+(1+3t-5)^2}$$

t=?