



מבוא לעיבוד ספרתי – סיכום נקודות

רותם גרוסמן

מסמך זה הורד מהאתר <http://underwar.livedns.co.il> אין להפיץ מסמך זה במדיה כלשהי, ללא אישור מפורש מאת המחבר. מחבר המסמך איננו אחראי לכל נזק, ישיר או עקיף, שיגרם עקב השימוש במידע המופיע במסמך, וכן לנכונות התוכן של הנושאים המופיעים במסמך. עם זאת, המחבר עשה את מירב המאמצים כדי לספק את המידע המדויק והמלא ביותר.

חזרה על ניתוח אותות ומערכות בתחום התדר

התמרת פורייה – זמן רציף

$x(t)$ – אות ממשי או קומפלקסי בזמן רציף

$X^F(\omega)$ – התמרת פורייה של $x(t)$ במידה והיא קיימת,

$$X^F(\omega) = \{F_x\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \omega \in \mathfrak{R}$$

כאשר ω מכונה תדירות זוויתית בעלת יחידות רדיאנים לשנייה $\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$

תנאי מספיק לקיום ההתמרה: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$

$$\hat{x}(t) = \{F^{-1} X^F\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, t \in \mathfrak{R}$$

כשעבור ערכי t בהם $x(t)$ רציפה: $\hat{x}(t) = x(t)$

ובנקודות אי רציפות סופית של $x(t)$ מתקיים $\hat{x}(t) = \frac{1}{2}(x(t_+) + x(t_-))$

תנאי דריכלה

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2 - $x(t)$ רציפה, מלבד למספר סופי של נקודות אי רציפות בכל קטע סופי ובנקודות אלו אי הרציפות סופית.

3 - ל- $x(t)$ מספר סופי של נקודות מינימום ומקסימום בכל קטע סופי.

לתכונות התמרת פורייה – להסתכל בחוברת בעמוד 2-6

פאזה

$$\angle X^F(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(X^F(\omega))}{\text{Re}(X^F(\omega))} \right)$$

פונקציות מיוחדות

1 - פונקציית הלם - $\delta(t)$

הגדרתה $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$, התמרת פורייה $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$ לכל ω ,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

2 - פונקציית DC, הגדרתה $x(t) = 1$ לכל t , התמרת פורייה $X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$ לכן

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}$$

3 - פונקציה אקספוננציאלית קומפלקסית, הגדרה $x(t) = e^{i\omega_0 t}$

$$X^F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

4 - התמרת פונקציית cos, $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] \xrightarrow{F} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

5 - התמרת פונקציית sin, $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] \xrightarrow{F} i\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

עיקרון אי הוודאות

מתכונת התמרת פורייה, שינוי סקלת זמן – תדר $a > 0$ $x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{a} X^F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, נובע שהרחבת אות

בתחום הזמן גוררת הצרה של התמרתו בתחום התדר ולהפך.

הגדרת תחומי קיום אפקטיביים – בהנחה שהאות והתמרתו ממורכזים:

$$\Delta t^2 \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad \Delta \omega^2 \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X^F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X^F(\omega)|^2 d\omega}$$

משפט אי הוודאות – אם $x(t)$ דועך יותר מהר מאשר $\frac{1}{\sqrt{t}}$ כאשר $t \rightarrow \pm\infty$ אזי $\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$

משפט חלקות – אם האות $x(t)$ וכל נגזרותיו עד סדר n קיימים וחסומים על כל ציר הזמן, התמרת

פורייה $X^F(\omega)$ שואפת לאפס כאשר $|\omega| \rightarrow \infty$ לפחות בקצב $\frac{1}{\omega^{n+1}}$.

מערכות בזמן רציף

H הוא אופרטור הממפה באופן יחיד את אות הכניסה ממרחב אותות הכניסה לאות יציאה.

מערכת ליניארית

מערכת היא ליניארית אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות

1 – אדיטיביות $H[x_1(t) + x_2(t)] = H[x_1(t)] + H[x_2(t)]$

2 – הומוגניות $H[ax(t)] = aH[x(t)]$

מערכת קבועה בזמן

מערכת H קבועה בזמן אם כאשר $H[x(t)] = y(t)$ אזי לכל הזזה קבועה t_0 מתקיים

$$H[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

מערכת ליניארית וקבועה בזמן

אם $\delta(t)$ הוא אות הכניסה למערכת, תגובת היציאה שלה נקראת תגובת הלב $h(t)$ ומתקיימת תכונת

$$y(t) = \{h * x\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

תגובת התדר של המערכת $H^F(\omega) = \{Fh\}(\omega)$ אם התמרת פורייה קיימת הנה

$$Y^F(\omega) = H^F(\omega)X^F(\omega)$$

תגובת מערכת LTI לכניסה אקספוננציאלית

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} \xrightarrow{F} X^F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Y^F(\omega)X^F(\omega) = 2\pi H^F(\omega)\delta(\omega - \omega_0)$$

אות היציאה המתקבל היינו גם פונקציה קומפלקסית בעל אותו התדר שהיה לאות הכניסה

$$y(t) = \{F^{-1}Y^F\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi H^F(\omega)\delta(\omega - \omega_0)e^{i\omega t} d\omega = H^F(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$$

לכן אם נסמן $\psi_0 = \angle H(\omega_0)$, $H^F(\omega_0) = |H^F(\omega_0)|e^{i\psi_0}$ נקבל $y(t) = |H^F(\omega_0)|e^{i(\omega_0 t + \psi_0)}$ כלומר

המערכת משנה את האמפליטודה והפזה של אות הכניסה, אך לא את אופיו.

לכן $H^F(\omega)$ נקרא תגובת התדר של המערכת, ו $e^{i\omega_0 t}$ נקרא פונקציה עצמית של מערכת LTI.

אותות מחזוריים בזמן רציף

$x(t)$ הוא מחזורי אם קיים $T > 0$ כך שמתקיים לכל $t \in \mathfrak{R}$ $x(t) = x(t+T)$, כאשר ה T הקטן

ביותר נקרא מחזור.

מחזור של אות מחזורי המקיים את תנאי דריכלה ניתן לתיאור על ידי טור פורייה:

$$x(t) = \{S^{-1}X^S\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^S[k] e^{i2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}, \quad \omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = X^S[k] = \{S_x\}[k] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם נגדיר את האות $X_I(t)$ להיות מחזור אחד של האות המחזורי, מקדמי $X_I = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

טור פורייה יהיו $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ $a_k = X^S[k] = \frac{1}{T} X_I^F(k\omega_0)$; כלומר הדגימות של $X_I^F(\omega)$ בתדר

$k\omega_0$ נותן מידע מלא על כל האות המחזורי. ושחזור של האות המקורי מן האות הדגום נעשה על ידי

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_I(t - nT)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_I(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_I^F(k\omega_0) e^{ik\omega_0 t}$$

מכאן נקבל את נוסחת הסכום של פואסון

אם ניקח את האות להיות רכבת הלמים $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ אזי מנוסחת פואסון נקבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{F} \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0); \quad \omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$$

נותנת רכבת הלמים בתדר.

נוסחת פרסיבל עבור אותות מחזוריים בזמן רציף

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X^S[k]|^2$$

נוסחת פרסיבל היא אנרגית האות מחזור אחד -

מנוסחת פרסיבל נובע שאם האות מחזורי בזמן רציף ובנוסף הוא ממשי, אזי מקדמי טור פורייה מקיימים

$$\overline{X^S[k]} = X^S[-k]$$

נוסחת השגיאה הריבועית הממוצעת

טור פורייה מכיל אינסוף איברים, אם ניקח מספר סופי של איברים $X_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ik\omega_0 t}$ אזי מדד

$$E_N \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - X_N(t)|^2 dt$$

לשגיאת הקירוב הריבועית הממוצעת הוא

תגובת מערכת LTI לאות מחזורי

אם $x(t)$ הוא אות מחזורי כלשהו הניתן לייצוג על ידי טור פורייה, הרי שמוצא המערכת $y(t)$ גם הוא מחזורי ומיצג על ידי טור פורייה שמקדמיו מקיימים:

$$|Y^S[k]| = |X^S[k]| |H^F(k\omega_0)|$$

$$\angle Y^S[k] = \angle X^S[k] + \angle H^F(k\omega_0)$$

$$\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T}$$

כאשר $Y^S[k] = |Y^S[k]| e^{i\angle Y^S[k]}$ ו- T הוא מחזור האות

אותות ומערכות בזמן בדיד

התמרת פורייה בזמן בדיד

סדרת אותות בזמן בדיד מסומנת על ידי $x[n]$, והגדרת התמרת פורייה הפורמלית הנה

$$X^f(\theta) = \{Fx\}(\theta) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\theta n}, \quad \theta \in \mathfrak{R}$$

מהתמרה נובע ש $X(\theta)$ מחזורית ב- 2π

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

התמרת פורייה ההפכית בזמן בדיד

$$x[n] = \{F^{-1}X^f\}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^f(\theta) e^{i\theta n} d\theta, n \in \mathbb{Z}$$

ההתמרה ההפכית הנה

מערכות בזמן בדיד

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

התגובה לדגם יחידה, במידה והסכום מתכנס, על ידי הנוסחה

$$y[n] = \{h * x\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

היא פונקציה עצמית, $e^{i\theta n}$

$H^f(\theta)$ נקרא תגובת התדר של המערכת, ובאמצעות תגובת התדר ניתן לחשב את התגובה לאות כניסה

$x[n]$ בעל התמרת פורייה $X^f(\theta)$ מתוך הנוסחה $Y^f(\theta) = H^f(\theta) X^f(\theta)$ ואות היציאה ניתן על

$$y[n] = \{F^{-1}Y^f\}[n]$$

אותות מחזוריים בזמן בדיד

אם מתקיים $x[n] = x[n+N]$, אזי האות $x[n]$ הוא מחזורי וה- N הקטן ביותר שמקיים את

הנוסחה נקרא מחזור.

התגובה של מערכת LTI בזמן בדיד לאות כניסה מחזורי, אף היא מחזורית באותו מחזור.

דגימה ושחזור

דגימה של אותות רציפים בזמן

אות רציף בזמן $x(t)$ נדגם בנקודות הזמן $T, t = nT, n \in \mathbb{Z}$ קרוי אינטרוול הדגימה (מחזור הדגימה),

דגימה נקודתית: $x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nt), n \in \mathbb{Z}$, פשוט לוקחים את ערך הנקודה בקפיצות זמן.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}, f_s = \frac{1}{T} [Hz]$$

הקשר בין התמרת פורייה $X^F(\omega)$ של האות $x(t)$ לבין התמרת פורייה $X^f(\theta)$ של האות בזמן בדיד

$$x[n] \text{ שהתקבל מ } x(t) \text{ על ידי פעולת דגימה הוא } X^f(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\frac{\theta - 2\pi k}{T}\right)$$

$$\theta = \omega T$$

אות מוגבל סרט

אות מוגבל סרט זהו אות בעל ערכים בתחום $|\omega| < \omega_m$ ($|f| < f_m$) ועבור התחום $|\omega| \geq \omega_m$

האות שווה זהותית לאפס, כלומר $X^F(\omega) \equiv 0$.

עבור אות מוגבל סרט אם דוגמים בתדר $\omega_m < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$ (תדר דגימה $2f_m < f_s$) אין חפיפה

בין הרפליקות המוזותות של $X^F(\omega)$ המופיעות ב $X^f(\theta)$ ($\theta = \omega T$)

קצב הדגימה הנמוך ביותר שעדיין מבטיח אי חפיפה קרוי קצב nyquist, הקצב הקריטי, ונתון

על ידי $2f_m$.

אם דוגמים בקצב דגימה קטן מקצב nyquist תהיה חפיפה בין הרפליקות המוזות של $X^F(\omega)$, החפיפה גורמת לעיוות ביחד להתמרת פוריה המקורית $X^F(\omega)$ תופעה זו קרויה

התחזות או קיפול, מכיוון שתדרים הגבוהים מ- $\frac{\pi}{T}$ (מחצית מקצב הדגימה), מתקפלים לתוך

התחום $|\theta| < \pi$ ומתחזים לתדרים נמוכים יותר ולכן אי אפשר לשחזר את האות המקורי מדגימותיו במידה ויש קיפול.

אפשר לדגום בדיוק בתדר nyquist ולא לאבד את המידע רק במידה ש

$$X^F(\omega_m) = X^F(-\omega_m)$$

בתדרים אלו.

אות בלתי מוגבל סרט

אין תדר דגימה סופי שמעליו לא תהיה חפיפה של הרפליקות המוזות של $X^F(\omega)$, אבל אותות

מעשיים הם תמיד בעלי רוחב סרט בלתי מוגבל אבל מבחינה מעשית ניתן להגדיר לגביהם רוחב סרט סופי שמעליו יש לאות מעט מאוד אנרגיה. תדר הדגימה יבחר לפחות פעמים רוחב הסרט המעשי.

דגימות הולם

$$P_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$X_p(t) = x(t)P_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

בניגוד לסדרה $x[n] = x[nT]$, האות $X_p(t)$ מבוטא כאות בזמן רציף ולמרות זאת

האות והסדרה כוללים בדיוק את אותו המידע.

$$P_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi k t}{T}}$$

על פי נוסחת פואסון שקיבלנו קודם (אגף ימין הוא טור פוריה של רכבת הולמים).

$$P_T^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega nT}$$

התמרת פוריה של P היא $P_T^F(\omega)$ קיבלנו קודם שהתמרת רכבת הולמים בזמן היא רכבת הולמים בתדר ולכן

$$\omega_s \equiv \frac{2\pi}{T} \quad P_T^F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega nT} = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n\omega T}$$

קיבלנו בעצם תוצאה דואלית לנוסחת פואסון

$$X_p^F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{P_T^F * X^F\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\mu) \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \mu - \frac{2\pi k}{T}\right) \right] d\mu$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

קשר נוסף בין התמרת פוריה של הסדרה $x[n] = x(nT)$ כלומר $X^f(\theta)$ לבין $X_p^F(\omega)$ ולכן גם

$$\theta = \omega T \quad \omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad \theta \left[\frac{\text{rad}}{\text{sample}} \right]$$

הוא לתדר הזויתי לתדר הזויתי

$$X_p^F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) e^{-i\omega nT} = X^f(\theta) \Big|_{\theta=\omega T} = X^f(\omega T)$$

סיכום הקשרים בתחום התדר

$$X_p^F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} = X^f(\omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$X^f(\theta) = X_p^F\left(\frac{\theta}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F\left(\frac{\theta - 2\pi k}{T}\right)$$

שחזור אות מדגימותיו

שחזור האות מדגימותיו אפשרית רק במידה וקצב הדגימה גבוה מספיק (קצב nyquist לפחות) ותנאים נוספים שנתונים במשפט הדגימה.

משפט הדגימה

יהיה $x(t)$ אות רציף בזמן בעל התמרת פוריה $X^F(\omega)$ מוגבלת סרט, כלומר $X^F(\omega) = 0$ עבור $|\omega| > \omega_m$, אזי, ניתן לשחזר את ערכי $x(t)$ בכל רגע t שהוא מתוך ערכי דגימותיו

$\text{sinc}(t) \equiv \frac{\text{sinc}(\pi t)}{\pi t}$ כאשר $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$ על ידי הביטוי $x(nT)$, $T < \frac{\pi}{\omega_m}$

הערה: גם כאן אם ל $X^F(\omega)$ אין פונקציית δ ב $\omega = \pm\omega_m$ ומתקיים $X^F(\omega_m) = X^F(-\omega_m)$ אזי

אפשר להשתמש ב $T = \frac{\pi}{\omega_m}$ כלומר $\omega_s = 2\omega_m$, כאשר ω_s זהו תדירות הדגימה.

דגימות אות בסרט מעבר

אות בסרט מעבר זהו אות סימטרי סביב האפס כך ש: $X^F(\omega) = 0, |\omega| \leq \omega_1, |\omega| \geq \omega_2$. קצב הדגימה

המינימלי הדרוש בשביל למנוע קיפול הינו: $T = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$.

ניתן להרחיב בצורה מלאכותית את פס המעבר כך ש $\omega_0 \leq \omega_1$, $\omega_2 = L(\omega_2 - \omega_0)$, כאשר L הוא מספר

שלם כך ש: $L = \left\lfloor \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right\rfloor$ ואז ניתן לדגום ללא שגיאות קיפול במרווחי זמן $T = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_0} = \frac{\pi L}{\omega_2}$.

התמרת פורייה דיסקרטית (DFT)

אם נדגום את ציר התדר θ כך ש- $0 \leq k \leq N-1$ כלומר $\theta[k] = \frac{2\pi}{N}k$ ונגדיר $W_N \equiv e^{i\frac{2\pi}{N}}$ אזי

התמרת פורייה הדיסקרטית מוגדרת כך: $X^d[k] = \text{DFT}_N\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{-kn}$

תכונות W_N

$W_N^N = e^{i\frac{2\pi}{N}N} = 1 = W_N^0 - 1$ כלומר הסדרה W_N^n מחזורית ב n במחזור N .

2 - תכונת האורתוגונליות $\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} 0, & k \bmod N \neq 0 \\ N, & k \bmod N = 0 \end{cases} = N\delta[k \bmod N]$

הערות

* ה DFT הוא דגימות בתדר של ה DTFT בתדרים $\frac{2\pi}{N}k$ כאשר $0 \leq k \leq N-1$

* רק לסדרות סופיות מותר לחשב DFT

* תחום התדרים לאחר ההתמרה המיוצג על ידי k איננו כמו קודם,

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ תואם את } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \text{ התחום } \theta(k) = \frac{2\pi}{N}k, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$-\pi \leq \theta < 0 \text{ תואם את } \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \leq k \leq N-1$$

חיוביים והחצי השני של תחום התדרים מייצג תדרים שליליים.

ההתמרה ההופכית IDFT

$$\text{ההתמרה ההופכית} \begin{cases} x[n] = \text{IDFT}_N \{X^d[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] W_N^{kn} \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$x(n) \xleftarrow{\text{DFT}_N} X^d[k]$$

רזולוציית התדר בהתמרת DFT (עיקרון אי הוודאות)

$$\text{מרווח הדגימה בתחום התדר הינו } \Delta\theta = \frac{2\pi}{N}, \text{ מרווח דגימת התדר הפיסיקלי הינו}$$

$$\text{ציר הזמן. כלומר רזולוציית התדר נקבעת על ידי תחום הקיום על ציר הזמן. ולכן אם לוקחים קטע דגימה} \\ \text{קטן אי אפשר למדוד תדר במדוייק וככל שמגדילים את } NT \text{ כלומר את כמות המדידות אפשר לדעת את}$$

התדר בדיוק גדול יותר.

אותות מחזוריים בהתמרת DFT

אם $x[n]$ הינו אות שתחום קיומו $0 \leq n \leq N-1$ ו- $\tilde{X}[n]$ הינו הרחבתו המחזורית, אזי התמרתם

$$\text{שווה: } \text{DFT}_N \{x[n]\} = \text{DFT}_N \{\tilde{x}[n]\}, \text{ ולכן גם השחזור: } \tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] W_N^{kn}, n \in \mathbb{Z}$$

תכונות התמרת DFT

1 – לינאריות: $z[n] = ax[n] + by[n] \leftrightarrow Z^d[k] = aX^d[k] + bY^d[k]$ כאשר a,b קבועים.

2 – מחזוריות: $X^d[k] = X^d[k + N]$ נובעת ישירות ממחזוריות של W_N^k .

3 – הזזת זמן מחזורית: $y[n] = x[(n-m) \bmod N] \leftrightarrow Y^d[k] = W_N^{-km} X^d[k]$

4 – אפנון (הזזה בתדר): $y[n] = W_N^{mn} x[n] \leftrightarrow Y^d[k] = X^d[(k-m) \bmod N], m \in \mathbb{Z}$

5 – משפט פרסיוול: $\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \bar{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^d[k] \bar{Y}^d[k]$

6 – אילוץ ממשיות האות כלומר $(X[n] = \bar{X}[n]) : X^d[(N-k) \bmod N] = \bar{X}^d[k]$

$$\text{Re}\{X^d[(N-k) \bmod N]\} = \text{Re}\{X^d[k]\}$$

$$\text{Im}\{X^d[(N-k) \bmod N]\} = -\text{Im}\{X^d[k]\}$$

פירוש מטריצי של ה-DFT

$$\underline{X}_N = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$$

$$\underline{X}_N^d = [x^d[0], x^d[1], \dots, x^d[N-1]]^T \quad \text{נגדיר:}$$

$$\underline{F}_N = \begin{pmatrix} W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

ואז אופרטור ה-DFT הוא: $\underline{X}_N^d = \underline{F}_N \cdot \underline{X}_N$ כאשר \underline{F}_N היא מטריצת DFT מסדר N. תכונות של המטריצה:

1 – האלמנטים של השורה והטור הראשונים שווים לאחד

2 – המטריצה סימטרית מאחר של $W_N^{kn} = W_N^{nk}$

$$\underline{F}_N \cdot \overline{\underline{F}_N} = N \cdot \underline{I}_N \quad - 3$$

ריפוד באפסים

התוצאה של DFT של סידרה בת N אלמנטים היא תגובת תדר ב N נקודות דגימה שוות מרווח. כדי להגדיל את מספר הנקודות הדגימה מוסיפים אפסים בסוף הסדרה כלומר

$$X_a[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

$$X_a^d[k] \quad \text{מהווה מודל דגום של } X^f(\theta) \quad \text{במרווח דגימה קבוע של } \Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$$

ריפוד אפסים בתחום הזמן שווה לאינטרפולציה בתחום התדר. ריפוד האפסים זהו טריק כדי להסתכל על ה-DTFT ביותר נקודות, זה לא מוסיף מידע אלא רק מרחיב אותו.

ריפוד אפסים בתחום התדר

ריפוד אפסים בתחום התדר יוביל לאינטרפולציה בתחום הזמן אם יתקיימו תנאים:

1 – N אי זוגי

2 – M=LN כאשר L הוא מקדם האינטרפולציה

$$x_i^d[k] = \begin{cases} LX^d[k] & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ LX^d[k-M+N] & M - \frac{N-1}{2} \leq k \leq M-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

והסדרה המרופדת מוגדרת כך

נוסחת האינטרפולציה

$$X_i[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \frac{\sin[\pi(n-mL)/L]}{\sin[\pi(n-mL)/M]}$$

הערה: ערכי האינטרפולציה הם תנודתים בסימנם.

קונבולוציה מחזורית (ציקלית)

תנונות הסדרות $x[n]$ ו $y[n]$ בעלי אורך שווה וסופי, נגדיר קונבולוציה מחזורית

$$z[n] \equiv (x \otimes y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m) \bmod N], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

הגדרה נוספת: $z[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{y}[n-m]$, $0 \leq n \leq N-1$ כאשר \tilde{x}, \tilde{y} הם ההרחבות המחזוריות של

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

פירוש מטריצי של קונבולוציה מחזורית

$$\underline{x} = [x[0], x[1] \dots x[n-1]]^T$$

$$\underline{z} = [z[0], z[1] \dots z[n-1]]^T$$

אם נגדיר

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y[0] & y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[1] \\ y[1] & y[0] & y[N-1] & \dots & y[2] \\ \vdots & & & \ddots & \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[1] & y[0] \end{bmatrix}$$

אזי, הוקטור $\underline{z} = \underline{y} \cdot \underline{x}$ מגדיר את הקונבולוציה המחזורית

כל זורה במטריצה מהווה הזנת צעד ביחס לקודמתה

תכונות קונבולוציה מחזורית

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z), \quad x \otimes y = y \otimes x - 1$$

$$z[n] = \{x \otimes y\}[n] \leftrightarrow Z^d[k] = X^d[k] Y^d[k] - 2$$

$$z[n] = x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow Z^d[k] = \frac{1}{N} \{X^d \otimes Y^d\}[k] - 3$$

חישוב קונבולוציה לינארית דרך קונבולוציה מחזורית

$$x[n], 0 \leq n \leq N_1 - 1 \quad y[n], 0 \leq n \leq N_2 - 1$$

ורוצים לבצע עליהם קונבולוציה לינארית

נרפד את $x[n]$ ואת $y[n]$ באפסים שישלימו סדרות אלו לאורך זהה $N = N_1 + N_2 - 1$

הקונבולוציה הלינארית בין שתי הסדרות בעלות אורך סופי ניתנת לחישוב על ידי הקונבולוציה המחזורית של הסדרות מרופדות האפסים המתאימות.

DFT של פונקציות מחזוריות ודגומות

אם $X(t)$ מחזורית, בעלת מחזור T_0 אזי ניתן להציג אותה על יד טור פורייה

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^s[m] e^{im\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x^d[k] = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^s[k + lN]$$

אפשר לשחזר את $x^s[k]$ מתוך $x^d[k]$ רק כאשר $x[n]$ חסום סרט, כלומר $x^s[m] = 0, |m| > M$

$$x^d[k] = \begin{cases} NX^s[k] & 0 \leq k \leq M \\ NX^s[k-N] & N-M \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

ועבור N מספיק גדול $N \geq 2M + 1$ נקבל

ניתן במקרה זה לשחזר $2M + 1$ מקדמי פורייה מתוך $x^d[k]$ ללא שגיאה.

הקשר בין קיפול ודגימה בזמן ובתדר

ה DFT של האות הדגום והמקופל $\tilde{x}[n]$ הוא דגימה בתדר של התמרת פורייה המקופלת.

אם נתעלם מעיקרון אי הוודאות אפשר להוכיח שה **DFT מקרב את התמרת פורייה.**

התמרת פורייה מהירה FFT

FFT זוהי משפחה של אלגוריתמים שמחשבים DFT באופן מהיר כאשר רק ה DFT הוא חשוב מהותית.

הכנה לאלגוריתם של CT

נתייחס לתחום $0 \leq k \leq N-1$ כמורכב מ Q יחידות בעלות אורך P כל אחת, כלומר

$$N = P \cdot Q, \quad n = Pq + p, \quad 0 \leq q \leq Q-1, \quad 0 \leq p \leq P-1$$

$$k = Qs + r, \quad 0 \leq s \leq P-1, \quad 0 \leq r \leq Q-1$$

$$W_N^Q = W_P, \quad W_N^P = W_Q$$

$$X_p^d[r] = DFT_Q \{X_p[q]\} = \sum_{q=0}^{Q-1} X_p[q] W_Q^{-rq}$$

האלגוריתם של CT

$$X_p^d(r) = DFT_Q \{X_p[q]\}$$

מתוך $x[n]$, יוצרים P סדרות מדוללות $X_p[q]$ ומחשבים את $X_p^d(r)$ כאשר $0 \leq r \leq Q-1, 0 \leq p \leq P-1$

$$y_r[p] = W_N^{-rp} X_p^d[r]$$

$$X^d[Qs+r] = DFT_P \{y_r[p]\} = \sum_{p=0}^{P-1} y_r[p] W_P^{-sp}, \quad 0 \leq r \leq Q-1, 0 \leq s \leq P-1$$

היתרון של CT

$$\frac{PQ^2 + PQ + P^2Q}{N^2} = \frac{PQ^2 + PQ + P^2Q}{P^2 \cdot Q^2} = \frac{1}{P} + \frac{1}{N} + \frac{1}{Q}$$

ככל ש N יותר גדול כך יש יתרון בצעד הבסיסי (עבור $N=6$ אין יתרון), כשאפשר לפרק כל מרכיב של N הלאה, ניתן לחסוך עוד יותר (עבור $N=2^r$, ניתן לבצע $r = \log_2 N$ פרוקים).

תיאור מטריצי ודוגמא של פרוק CT

בחוברת בעמודים 5.7-5.9

Radix-2

Radix2, דילול בזמן הוא מקרה פרטי של אלגוריתם CT, כאשר $Q = \frac{N}{2} = 2^{r-1}$, $P = 2$, $N = 2^r$

הצעד הבסיסי ביותר נקרא צעד פרפר וכדי לחשב את ה DFT דרושים N^2 כפלים קומפלקסים ו-

$$P(N) = \frac{1}{2} N \log_2 N$$

דוגמא ל radix2 בחוברת בעמוד 5.15.

אנליזה ספקטרלית מעשית (שימוש בפונקצית חלון)

מכיוון שלא מעשי לעשות DFT על אות אינסופי, מבצעים אנליזה DFT של קטעים קצרים של האות, בזה אחר זה ומרכיבים את התגובות, כאשר ידוע שניתוח קטע קצר של האות שקול להכפלת האות בחלון מלבני ובצוע ה DFT על האות המתקבל.

לקבלת אות בחלון מלבני, כלומר לקחת מקטע מן האות ושאר האות הוא אפס כלומר

$$x[n] \equiv \begin{cases} y[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נכפול את האות המקורי בפונקציה W_r שמוגדרת כך

$$\leftarrow x[n] = y[n] \cdot W_r[n] \quad W_r[n] \equiv \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

התמרת פורייה של האות המוכפל בחלון המלבני יוצאת בעלת תנודות הרמוניות מסביב להתמרת האות המקורי.

התמרת החלון המלבני

$$D(\theta, N) \equiv \frac{\sin(\frac{\theta N}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \quad W_r^f(\theta) = D(\theta, N) e^{-i\theta(N-1)/2}$$

כאשר מגדירים את הגרעין דריכלה להיות -

התכונות העיקריות של גרעין דריכלה

- 0 – זוהי פונקציה סימטרית אשר מוגדרת עבור $-\pi \leq \theta \leq \pi$
- 1 – ערך מקסימלי ב $\theta = 0$ ששווה בערכו ל $D(0, N) = N$
- 2 – אפסי הפונקציה נמצאים ב $\theta = m \frac{2\pi}{N}$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$
- 3 – רוחב האונה הראשית $2 \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{4\pi}{N}$
- 4 – הערך המקסימלי (בערך מוחלט) של אונות הצד הוא בקירוב $\frac{2N}{3\pi}$ (בתדרים $\pm \frac{3\pi}{N}$) לכן, היחס בין הערך המקסימלי של אונות הצד לערך של האונה הראשית הוא $\frac{2}{3\pi}$ כלומר $20 \log_{10}(\frac{2}{3\pi}) \approx -13.5 \text{ dB}$.
- 5 – מכיוון שפונקציה דריכלה איננה פונקציה דלתה בתדר (למרות שהא שואפת אליה כאשר N שואף לאינסוף), הרי שהקונבולוציה של התמרת האות המקורי $Y^f(\theta)$ עם $D(\theta, N)$ גורמת לכך שהתמרת האות בחלון $X^f(\theta)$ היא גירסה מעוותת של $Y^f(\theta)$, כאשר העיוות מושפע מרוחב האונה הראשית ורמת אונות הצד.

רוחב האונה הראשית

הקונבולוציה בין האונה הראשית לבין $Y^f(\theta)$ גורמת למריחת התמרת האות שמשמעותה אובדן רזולוציה, כלומר אם יש לאות רכיב מחזורי, בתחום התדר נקבל מרכיב שרוחבו כרוחב האונה הראשית $\frac{4\pi}{N}$ במקום פונקציה דלתה, בנוסף אם יש לאות שתי מרכיבים מחזוריים בעלי תדרים הקרובים יותר מאשר $\frac{2\pi}{N}$, יתכן שנבחין רק במרכיב יחיד.

רמת אונות הצד

אונות הצד גורמות לזליגת אנרגיה מתדר אחר למשנהו, דבר שיכול לגרום למיסוך אות חלש בתדר נתון עקב אות חזק בהרבה בתדר סמוך. מסוך כזה יקרה אם ניחות אונות הצד אינו גדול מספיק, כך שהאות החזק תורם אנרגיה (במיקום של האות החלש) שהיא גדולה מאנרגית האות החלש.

רצוי מחלון שיהיה בעל התכונות

- 1 – אונה ראשית צרה ככל האפשר להקטנת המריחה
- 2 – אונות צד נמוכות ככל האפשר להקטנת הזליגה

ככל שמגדילים את N (סופי) מרחיבים את האונה הראשית אך מקטינים את אונות הצד. לחלון המלבני יש את האונה הראשית הצרה ביותר, עבור אותו N .

חלון משולש (בארטלט)

את חלון בארטלט יוצרים באמצעות ריבוע התמרת חלון רגיל ואז מקבלים שניחות אונות הצד הוא $13.5dB \cdot 2 = 27dB$, מכיוון שכפל ההתמרות שקול לקונבולוציה בתחום הזמן הרי שלקבלת חלון באורך N נבצע קונבולוציה בין שני חלונות מלבניים באורך $\frac{N+1}{2}$ כל אחד (בהנחה ש N אי זוגי) ונקבל

$$W_t[n] = \frac{2}{N+1} \{W_r * W_r\}[n] = 1 - \frac{|2n-N+1|}{N+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$W_t^f(\theta) = \frac{2}{N+1} D^2\left(\theta, \frac{N+1}{2}\right) e^{-j\theta \frac{N-1}{2}} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\theta(N+1)}{4}\right)}{(N+1) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-j\theta \frac{N-1}{2}}$$

הערות

1 – עבור N זוגי החלון מתקבל על ידי קונבולוציה של חלון מלבני באורך $\frac{N}{2}$ עם חלון מלבני באורך

$$W_t^f(\theta) = \frac{2}{N+1} D\left(\theta, \frac{N}{2}\right) \cdot D\left(\theta, \frac{N}{2} + 1\right) e^{-j\theta \frac{N-1}{2}}: \text{התמרת החלון: } \frac{N}{2} + 1$$

2 – רוחב האונה הראשית של החלון המשולש הוא $\frac{8\pi}{N+1}$, כלומר רוחב האונה הראשית גדלה פי 2 וכדי להתמודד עם זה מעלים את N . אבל היחס בין עוצמת האונה הראשית למשנית היא $-27dB$

חלון Hann

את חלון האן יוצרים באמצעות גרעין דריכלה שמרכזו ב $\theta = 0$ שמוכפל ב 0.5 , ועוד שני גרעיני דריכלה שמרכזם מוזז בתדר $\theta = \pm \frac{2\pi}{N-1}$ ומוכפלים כל אחד מהם ב 0.25 , כך שמתקבל ביטול חלק של אונות הצד.

$$W_{hm}^f(\theta) = \left[0.5D(\theta, N) + 0.25D\left(\theta - \frac{2\pi}{N-1}, N\right) + 0.25D\left(\theta + \frac{2\pi}{N-1}, N\right) \right] e^{-i0.5\theta(N-1)}$$

$$= 0.5W_r^f(\theta) - 0.25W_r^f\left(\theta - \frac{2\pi}{N-1}\right) - 0.25W_r^f\left(\theta + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

ומתכונת ההזזה בתדר של התמרת פורייה נקבל את פונקציה החלון הבאה:

$$W_{hm}[n] = 0.5 - 0.25e^{i\frac{2\pi n}{N-1}} - 0.25e^{-i\frac{2\pi n}{N-1}} = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

הערות

1 – רמת אונות הצד היא $-32dB$ ביחס לאונה הראשית

2 – רוחב האונה הראשית $\frac{8\pi}{N}$

3 – מכיוון ש $W_{hm}[0] = W_{hm}[N-1] = 0$ לעיתים משתמשים ב:

$$W'_{hm}[n] = 0.5 \left\{ 1 - \cos\left[\frac{2\pi(n+1)}{N+1} \right] \right\}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

חלון Hamming

את חלון האמינג יוצרים בדומה לחלון האן רק שכאן משקולות הגרעינים שונים:

$$W_{hm}[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$W_{hm}^f(\theta) = 0.54W_r^f(\theta) - 0.23W_r^f\left(\theta - \frac{2\pi}{N-1}\right) - 0.23W_r^f\left(\theta + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

שינוי המשקלות מביא לרמת אונות צד של $-43dB$ כאשר רוחב האונה הראשית היא כמו בחלון האן $\frac{8\pi}{N}$.

חלון Blackman

כדי ליצור את חלון בלקמן משתמשים בסופרפוזיציה של חמישה גרעיני דריכלה. ואז מגיעים לרמת אונות הצד ביחס לאונה הראשית ל $-57dB$ אבל רוחב האונה הראשית גדל כעת ל $\frac{12\pi}{N}$, חלון בלקמן והתמרתו:

$$W_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$W_b^f(\theta) = \frac{42}{100} W_r^f(\theta) - \frac{1}{4} W_r^f\left(\theta + \frac{2\pi}{N-1}\right) - \frac{1}{4} W_r^f\left(\theta - \frac{2\pi}{N-1}\right) + \frac{4}{100} W_r^f\left(\theta + \frac{4\pi}{N-1}\right) + \frac{4}{100} W_r^f\left(\theta - \frac{4\pi}{N-1}\right)$$

חלון Kaiser

כל החלונות הקודמים הם קבועים עבור N נתון ואינם אופטימליים בשום מובן, חלון קייסר מביא למינימיזציה של רוחב האונה הראשית עבור אורך חלון נתון ורמת אנרגיה נתונה של כלל אונות הצד, ביחס לכלל האנרגיה של החלון.

הגדרת חלון קייסר:

$$W_k[n] = \frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{|2n - N + 1|}{N - 1} \right)^2} \right]}{I_0(\alpha)}, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

כאשר $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{2^k k!} \right)^2$ היא פונקצית בסל מסדר 0. (מספיק לקחת מספר קטן של איברים לקבלת קירוב טוב)

α הוא פרמטר שבאמצעותו ניתן לשלוט על רוחב האונה הראשית ורמת אונות הצד, הגדלת α מגדילה את רוחב האונה הראשית ומקטינה את רמת אונות הצד. כלומר גם N וגם α קובעים את רוחב האונה הראשית בחלון קייסר.

מדידת תדר

באמצעות DFT אפשר למוד את התדרים שמהם מורכבים אותות מחזוריים ובמיוחד אותות סינוסואידלים

מדידת תדר של אות סינוסואידלי קומפלקסי יחיד

נתון האות בזמן רציף $y(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi_0)}$ ורוצים למדוד את התדר ω_0 .

דוגמים את האות N פעמים בקצב $\frac{1}{T}$, ומקבלים $0 \leq n \leq N - 1$, $y[n] = Ae^{i(\omega_0 n T + \phi_0)}$,

כאשר $\theta_0 = \omega_0 T$, $-\pi < \theta_0 < \pi$, ואם נבצע התמרת פורייה על האות הדגום נקבל

$$Y^f(\theta) = Ae^{i\phi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega_0 n T + \phi_0)n} = Ae^{-i[0.5(\theta - \theta_0)(N-1) - \phi_0]} D(\theta - \theta_0, N)$$

ומכיוון שפונקצית דריכלה מקבלת את ערכה המקסימלי N כאשר הפרמטר הראשון שווה ל-0 כלומר

$$Y^f(\theta_0) = NAe^{i\phi_0} \rightarrow |Y^f(\theta_0)| = NA$$

ולכן כדי למצוא את התדר של האות מבצעים DFT עבור N נקודות ומחפשים את נקודת המקסימום k_0

המתאימה ל $\theta_0 = k_0 \frac{2\pi}{N}$ אם $k_0 < \frac{N}{2}$ או $\theta_0 = k_0 \frac{2\pi}{N} - 2\pi$ במידה ו $k_0 \geq \frac{N}{2}$

הערה – ניתן להגדיל את קצב הדגימה בתדר על ידי הוספת אפסים בסוף הסדרה $y[n]$.

מדידת התדרים של שני אותות סינוסואידלים קומפלקסים

נתון האות בזמן רציף $y(t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$ ורוצים למדוד את התדר ω_0 .

דוגמים את האות N פעמים בקצב $\frac{1}{T}$, ומקבלים $0 \leq n \leq N - 1$, $y[n] = A_1 e^{i(\omega_1 n T + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 n T + \phi_2)}$,

כאשר $\theta_i = \omega_i T$; $i = 1, 2$, $-\pi < \theta_i < \pi$, ואם נבצע התמרת פורייה על האות הדגום נקבל

$$Y^f(\theta) = A_1 e^{-i[0.5(\theta - \theta_1)(N-1) - \phi_1]} D(\theta - \theta_1, N) + A_2 e^{-i[0.5(\theta - \theta_2)(N-1) - \phi_2]} D(\theta - \theta_2, N)$$

ובמידה ש $\theta = \theta_1$ נקבל $Y(\theta_1) = NA_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{-i[0.5(\theta_1 - \theta_2)(N-1) - \phi_2]} D(\theta_1 - \theta_2, N)$

הערה – אם $A_2 \neq 0$ אבל מתקיים $|A_2 D(\theta_1 - \theta_2, N)| \ll NA_1$ אזי נקבל מקסימום מקומי ב $\theta = \theta_1$

אם מתקיים $|\theta_2 - \theta_1| \geq \frac{2\pi}{N}$ ו- A_2 איננו גדול בהרבה מ- A_1 .

ולכן כדי למצוא את תדרי האות מבצעים DFT עבור N נקודות ומחפשים שני שיאים.