

**נושא 3. לוגיקה מתמטית**

חלק 1: תחשיב הפסוקים.

**1) פסוקים. משתנים פסוקיים. ערכי האמת.**

בדיבור יום-יומי אנו משתמשים במשפטים שונים. לדוגמא: "יורם סטודנט", "בישראל בקיץ חם.", "מה השעה?", "דג כרפיון עף בשמיים.", "לך הביתה!", "פרות וירקות.", "מספר 1-189027 ראשוני." וכ"ו.

מעניין לקבל תשובה "כן" או "לא" על השאלה: האם המשפט הנתון נכון? ברור שהמשפט "בישראל בקיץ חם." נכון והמשפט "דג כרפיון עף בשמיים." לא נכון. תשובה "כן" או "לא" על המשפט "יורם סטודנט" תלויה בעובדה מיהו יורם. אנו עכשיו עוד לא יודעים אם מספר 1-198789027 ראשוני או לא אך זאת הבעיה טכנית: אפשרויות לקבל תשובה תליה ברמת ההתפתחות של מחשבים. אבל בעיקרון אי אפשר להגיד האם נכונים או לא המשפטים "מה השעה?", "לך הביתה!", "פרות וירקות".

הגדרה. על המשפט של דיבור אמרים שהוא פסוק אם בעיקרון ניתן להגיד אם הוא נכון או לא נכון.

בלוגיקה מתמטית לא משתמשים כרגיל במשפטים שאינם פסוקים

אנו משתמשים באלגברה ובחדו"א במשתנים מספריים. את המשתנים האלה אנו מסמנים באותיות ומניחים שניתן להציב במקומם המספרים המתאימים הנקראים ערכי משתנים. באופן דומה בלוגיקה מגדירים משתנים פסוקיים (או משתנים לוגיים).

הגדרה. אותיות  $p, q, \dots$  נקראות משתנים פסוקיים (או משתנים לוגיים) אם הן מציגות פסוקים.

במילים אחרות ניתן להציב פסוקים במקום האותיות האלה.

אם בהצבת פסוק למשתנה פסוקי  $p$  קיבלנו תענה נכונה אומרים שהמשתנה קיבל ערך האמת "אמת". אם קיבלנו תענה לא נכונה אומרים שהמשתנה קיבל ערך אמת "שקר".

בבעיות לוגיות כרגיל לא חשובה משמעות ספציפית של הפסוק אך ערך האמת שלו. לכן, במקום להציב טענות מלאות במקום המשתנים הפסוקיים נציב רק את הערכים "אמת" או "שקר". במקום המילים "אמת" או "שקר" משתמשים באותיות T ו-F (באנגלית truth – אמת, false – שקר)

**2) פעולות על הפסוקים (קשרים). נוסחאות לוגיות (פסוקים). טבלאות האמת.**

נניח כי  $p, q$  מציגים פסוקים. מגדירים עכשיו פעולות על הפסוקים.

נסמן ב-  $\neg p$  את הטענה "  $p$  אינו נכון ". הטענה הזו נקראת שלילת  $p$

ברור שאם ערך האמת של  $p$  הוא T אז ערך האמת של  $\neg p$  הוא F ולהפך.

לדוגמא, אם  $p$  מציג פסוק "יורם סטודנט" אז  $\neg p$  - "יורם אינו סטודנט"

נסמן ב-  $p \vee q$  את הטענה "או  $p$  או  $q$  (או שניים)". הטענה הזו נקראת ז'יסיונקציה

של  $p$  ו-  $q$ . לפי הגדרה  $p \vee q$  שקרי רק במקרה כאשר גם  $p$  גם  $q$  שקרים.

לדוגמא, אם  $p$  - " מספר 6 מתחלק ב-3 " ו- $q$  - " מספר 6 מתחלק ב-5 " אז  $p \vee q$  מציג את הפסוק "או מספר 6 מתחלק ב-3 או הוא מתחלק ב-5". הפסוק הזה הוא אמיתי. בזאת יתכן כי מספר  $a$  מתחלק גם ב-3 גם ב-5. תענה "או מספר  $a$  מתחלק ב-3 או הוא מתחלק ב-5" לא נכונה (שקרי) רק כאשר מספר  $a$  לא מתחלק גם ב-3 גם ב-5.

נסמן ב-  $p \wedge q$  (או  $p \& q$ ) את הטענה "גם  $p$  וגם  $q$ ". הטענה הזו נקראת קוניונקציה של  $p$  ו- $q$ . לפי הגדרה  $p \wedge q$  אמיתי רק במקרה כאשר גם  $p$  גם  $q$  אמיתיים

לדוגמא, אם  $p$  - " מספר 6 מתחלק ב-3 " ו- $q$  - " מספר 6 מתחלק ב-5 " אז  $p \wedge q$  מציג את הפסוק "מספר 6 מתחלק ב-3 וב-5". הפסוק הזה הוא שקרי. התענה " מספר  $a$  מתחלק ב-3 וב-5 " נכונה (אמיתי) רק כאשר מספר  $a$  מתחלק גם ב-3 גם ב-5.

נסמן ב-  $p \rightarrow q$  את הטענה "אם  $p$  נכון אז  $q$  נכון". הטענה הזו נקראת גרידה מ- $p$  ל- $q$  (או אימפליקציה). לפי הגדרה  $p \rightarrow q$  שקרי רק במקרה כאשר  $p$  אמיתי אך  $q$  שקרי.

לדוגמא, אם  $p$  - " מספר 6 מתחלק ב-2 " ו- $q$  - " מספר 6 מתחלק ב-4 " אז  $p \rightarrow q$  מציג את הפסוק "אם מספר 6 מתחלק ב-2 אז הוא מתחלק ב-4". הפסוק הזה הוא שקרי

נסמן ב-  $p \leftrightarrow q$  את הטענה " $p$  נכון אם ורק אם  $q$  נכון". הטענה הזו נקראת שקילות בין  $p$  ובין  $q$ . לפי הגדרה  $p \leftrightarrow q$  אמיתי במקרים כאשר או גם  $p$  וגם  $q$  אמיתיים או גם  $p$  וגם  $q$  שקרים.

לדוגמא, אם  $p$  - " מספר 30 מתחלק ב-15 " ו- $q$  - " מספר 30 מתחלק ב-3 " אז  $p \leftrightarrow q$  מציג את הפסוק "מספר מתחלק ב-15 אם ורק אם הוא מתחלק ב-3". הפסוק הזה הוא אמיתי.

מינוח: פעולות  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  יקראו קשרים.

ממשתנים פסוקיים נבנה בעזרת הקשרים נוסחאות לוגיות.

דוגמאות:  $(p \wedge q) \vee q \rightarrow ((\neg p) \wedge q)$ ,  $(\neg p) \vee q$ ,  $(p \wedge q) \vee q$  - נוסחאות,  $p \wedge \neg q$ ,  $\rightarrow (p \wedge q)$ ,  $p \wedge \vee q$  - לא נוסחאות.

אם נציב לנוסחה לוגית במקום כל משתנה פסוקי איזהו פסוק קונקרטי אז נקבל פסוק חדש. לכן נשתמש במילה "פסוק" גם כנוסחה לוגית. בפרט, אם  $A$  ו- $B$  פסוקים (כנוסחאות לוגיות) אז  $\neg A$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  גם פסוקים.

לחילופין: פסוק מתקבל מהמשתנים הפסוקיים בעזרת 5 פעולות  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  ורק בעזרתכן.

על מנת למעט בכתיבת סוגריים נקבע קדימות:  $\neg$  קודם ל- $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ .

דוגמאות.  $\neg p \vee q$  מבינים כ-  $(\neg p) \vee q$  (לא כ-  $\neg(p \vee q)$ ),  $p \wedge q \vee q$  מבינים כ-  $(p \wedge q) \vee q$

את הצבת ערכי האמת של משתנים פסוקיים לפסוק הנתון אפשר להציג כפונקציה מקבוצת המשתנים הפסוקיים של הפסוק לקבוצה  $\{T, F\}$ .

הגדרה. השמה (לפסוק נתון) הינה פונקציה שתחומה קבוצת המשתנים הפסוקיים שבפסוק וטווחה  $\{T, F\}$ .

סימון: יהא  $A$  פסוק ו- $g$  השמה ל- $A$ . ערך האמת של  $A$  בהשמה  $g$  יסומן  $Val(A, g)$ .

דוגמא.  $g(p)=g(q)=T, g(r)=F, g: \{p, q, r\} \rightarrow \{T, F\}, A = (p \wedge q) \vee r$ .

$$Val(A, g) = (T \wedge T) \vee F = T$$

אם להתבונן בכל ההשמות לפסוק הנתון אז נקבל טבלת האמת לפסוק.

טבלת האמת לפסוק  $\neg x$ :

$x$	$\neg x$
T	F
F	T

טבלאות האמת לפסוקים:  $x \leftrightarrow y, x \rightarrow y, x \vee y, x \wedge y$ .

$x$	$y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

### 3 טאוטולוגיות וסתירות. שקילות לוגית. גרירות לוגית.

הגדרה. פסוק  $A$  יקרא טאוטולוגיה אם לכל השמה  $g$  ל- $A$  מתקיים  $Val(A, g)=T$   
פסוק  $A$  יקרא פסוק שקרי (או סתירה) אם לכל השמה  $g$  ל- $A$  מתקיים  $Val(A, g)=F$

דוגמאות 1. הפסוק  $A = (p \vee \neg p)$  היינו טאוטולוגיה. אם  $g(p)=T$  או  $Val(p, g)=T$   
ו- $Val(\neg p, g)=F$ . אם  $g(p)=F$  או  $Val(p, g)=F$  ו- $Val(\neg p, g)=T$ . לכן תמיד  $Val(A, g)=T$ .

2. הפסוק  $A = (((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q)$  הוא טאוטולוגיה. כאן יש 4 השמות. הכי קל לבדוק את זה בעזרת טבלת האמת שבה כל שורה מייצגת השמה.

3. הפסוק  $A = p \wedge \neg p \wedge (p \rightarrow p)$  הוא שקרי.

4. הפסוק  $A = (p \rightarrow q) \vee \neg p \vee q$  אינו טאוטולוגיה ואינו סתירה.

הגדרה. נניח ש- $A$  ו- $B$  פסוקים. נאמר כי  $A$  ו- $B$  שקולים לוגית אם הפסוק  $A \leftrightarrow B$  היינו טאוטולוגיה.

סימון:  $A \leftrightarrow B$

- הערות 1. לא לבלבל בין  $\Leftrightarrow$  ל- $\leftrightarrow$ ,  
2. כל הטאוטולוגיות שקולות לוגית,  
3. כל הסתירות שקולות לוגית.

השקילויות הלוגיות הבסיסיים

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \qquad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \qquad A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \qquad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \qquad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \qquad (A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee A \Leftrightarrow A \qquad A \wedge A \Leftrightarrow A$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \qquad A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B \qquad A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

הגדרה. נניח ש-  $A$  ו-  $B$  פסוקים. נאמר כי  $A$  גורר לוגית את  $B$  אם הפסוק  $A \rightarrow B$  היינו טאוטולוגיה.

סימון:  $A \Rightarrow B$

הגדרה. תהא  $S$  קבוצת פסוקים ויהא  $B$  פסוק. נאמר כי  $S$  גוררת לוגית את  $B$  ונסמן  $S \Rightarrow B$ , אם לכל השמה  $g$  המוגדרת על כל המשתנים הפסוקיים המופיעים ב- $S$  ו- $B$  כאשר מקיימת  $\text{Val}(A, g) = T$  לכל  $A \in S$  בהכרח  $\text{Val}(B, g) = T$ .

מההגדרה נובע כאם  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  אז  $S \Rightarrow B$  ו-  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$  אותו דבר.

הערה. אם  $S = \{A\}$  נכתיב  $A \Rightarrow B$  (ולא  $\{A\} \Rightarrow B$ ).

דוגמא.  $\{p \vee q \vee r, \neg p, \neg q\} \Rightarrow r \vee p$

תהא  $g$  השמה ל-  $p, q, r$  כך ש-

$$\text{Val}(p \vee q \vee r, g) = T, \text{Val}(\neg p, g) = T, \text{Val}(\neg q, g) = T$$

$$\text{אז } \text{Val}(r \vee p, g) = T \text{ ש- } g(r) = T \text{ לכן } g(p) = F, g(q) = F$$

**(4) הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית של פסוק..**

תהיה נתון פסוק  $A$  במשתנים הפסוקיים  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . נוכל למצוא פסוק  $B$  כך ש-

(א)  $A \Leftrightarrow B$ ,

(ב)  $B$  היינו דיסיונקציה של קוניונקציות של משתנים פסוקיים או שלילותיהם.

במקרה הזה פסוק  $B$  נקרא צורה דיסיונקטיבית נורמלית של פסוק  $A$ .

דוגמה. הפסוק  $B = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$  מהווה צורה דיסיונקטיבית נורמלית של

הפסוק  $A = (p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge q)$ .

משפט. לכל פסוק  $A$  במשתנים הפסוקיים  $p_1, p_2, \dots, p_n$  קיימת צורה דיסיונקטיבית נורמלית.

ללא הוכחה.

איך בפרקטיקה למצוא לפסוק הנתון את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמלית שלו?  
 בשביל זה יש כמה שיטות. אחת מהן הינה הרכבת טבלת האמת לפסוק הנתון.  
דוגמא: מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמלית לפסוק  $A = (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \leftrightarrow q$ .

פתרון. נרכיב טבלת האמת לפסוק הנתון:

$p$	$q$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$p \rightarrow (q \wedge \neg p)$	$A$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F

לוקחים בטבלה כל השורות המתאימות לערך האמת "T" של הפסוק  $A$ , זאת אומרת שורות שנייה ושלישית. לשורה השנייה מתאימה השמה  $g(p) = T, g(q) = F$ . להשמה הזו מתאימה קוניונקציה  $p \wedge \neg q$ . באופן דומה לשורה השלישית מתאימה קוניונקציה  $\neg p \wedge q$ . אז צורה דיסיונקטיבית נורמלית לפסוק הנתון היא  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ .

**(5) . דואליות**

נתבונן בנוסחאות הכוללות רק הקשרים  $\vee, \wedge, \neg$ . הקשרים  $\vee, \wedge$  נקראים דואליים.

הגדרה. תהי  $A$  נוסחה. נוסחה חדשה  $A^*$  נקראת דואלית לנוסחה  $A$  אם היא מתקבלת מהנוסחה  $A$  בהחלפת כל הקוניונקציות בדיסיונקציות וכל הדיסיונקציות בקוניונקציות.

דוגמא.  $A^* = \neg(p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg q, A = \neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p) \vee \neg q$

יהא  $A$  נוסחה (פסוק) התלויה במשתנים  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ו- $g$  השמה ל- $A$ . אומרים שההשמה  $g^*$  דואלית להשמה  $g$  אם לכל משתנה  $p_i$  ערכי האמת שלו בהשמות  $g$  ו- $g^*$  הם נגדיים.

ערך האמת של  $A$  בהשמה  $g$  יסומן  $Val(A, g)$ .

יהא  $A^*$  נוסחה הדואלית ל- $A$  ו- $g^*$  השמה דואלית ל- $A^*$ . ערך האמת של  $A^*$  בהשמה  $g^*$  יסומן  $Val(A^*, g^*)$ .

משפט. לכל השמה  $g$  לנוסחה  $A$  מתקיים  $Val(A, g) = T$  אם ורק אם  $Val(A^*, g^*) = F$ .

ללא הוכחה.

דוגמא.  $A^* = \neg(p \vee q) \wedge \neg q, A = \neg(p \wedge q) \vee \neg q$

בונים טבלאות האמת ל- $A$  ול- $A^*$ .

השמות	$p$	$q$	$\neg(p \wedge q)$	$A$
$g_1$	T	T	F	F
$g_2$	T	F	T	F
$g_3$	F	T	T	F
$g_4$	F	F	T	T

השמות	$p$	$q$	$\neg(p \vee q)$	$A^*$
$g_1^*$	F	F	T	T
$g_2^*$	F	T	F	T
$g_3^*$	T	F	F	T
$g_4^*$	T	T	F	F

קל לראות כאם הפסוק הנתון  $A$  הוא טאוטולוגיה אז פסוק דואלי  $A^*$  היינו סתירה (ולהפך). לדוגמא, מהטאוטולוגיה  $A \vee \neg A$  נובע סתירה  $A \wedge \neg A$ .

משפט. (עיקרון הדואליות). אם  $A \Leftrightarrow B$  אז  $A^* \Leftrightarrow B^*$

ללא הוכחה.

בעזרת עיקרון הדואליות ניתן למצוא לפי השקילויות הידועות את השקילויות החדשות. לדוגמא, מהנוסחה  $A \wedge A \Leftrightarrow A$  מיד מקבלים את הנוסחה  $A \vee A \Leftrightarrow A$ . קודם פגשנו את הנוסחאות הדואליות הבאות:

$$\begin{aligned} \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B & \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ A \vee B &\Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) & A \wedge B &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A & A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A \\ (A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C) & (A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \\ (A \wedge B) \vee C &\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) & (A \vee B) \wedge C &\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \end{aligned}$$

### (6) שלמות הקשרים

נשים לב על השקילויות הבאות:

(המבטא קוניונקציה דרך דיסיונקציה ושליה)	$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
(המבטא אימפליקציה דרך דיסיונקציה ושליה)	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
(המבטא שקילות דרך דיסיונקציה ושליה)	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$
(המבטא דיסיונקציה דרך קוניונקציה ושליה)	$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
(המבטא אימפליקציה דרך קוניונקציה ושליה)	$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
(המבטא שקילות דרך קוניונקציה ושליה)	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$
(המבטא קוניונקציה דרך אימפליקציה ושליה)	$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$
(המבטא דיסיונקציה דרך אימפליקציה ושליה)	$A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$
(המבטא שקילות דרך אימפליקציה ושליה)	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$

מהנוסחאות האלה נראה ככל הקשרים ניתן לבטא דרך דיסיונקציה ושליה או דרך קוניונקציה ושליה או דרך אימפליקציה ושליה. לכן אומרים שקשרים  $\neg$ -ו  $\vee$  (או  $\neg$ -ו  $\wedge$  או  $\neg$ -ו  $\rightarrow$ ) מהווים מערכת שלמה של הקשרים הלוגיים.

ניתן להראות כאי אפשר לבטא כל הפסוקים דרך מערכת הפעולות לא כוללת שלילה  $\neg$ .  
ברור שאם נוסחה  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  לא כוללת שלילה  $\neg$  אז ערך האמת שלה בהשמה  
 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = T$  תמיד שווה ל- $T$ . לכן אי אפשר לבטא נוסחה שקרית (למשל  $p \wedge \neg p$ )  
דרך הקשרים ללא שלילה.

**(7) נכונות שיקולים**

יהיו  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$  פסוקים. פסוק  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  נקרא שיקול.  
הפסוקים  $A_1, A_2, \dots, A_n$  היינם הנחות והפסוק  $B$  הוא מסקנה.

הגדרה. שיקול  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  נקרא נכון אם פסוק  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$   
הוא טאוטולוגיה.

במילים אחרות שיקול  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  נכון כאשר  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  גוררת לוגית  
את  $B$ . כלומר  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ .

צריך להעיר כאמיתיות של המסקנה  $B$  לא מהווה תנאי הכרחי או מספיק של נכונות הניסוח.  
דוגמה 1. יהיו טענות:  $A =$  "מספר  $a$  הוא ראשוני",  
 $B =$  "מספר  $a$  אי זוגי".

אז אימפליקציה  $A \rightarrow B =$  "אם מספר  $a$  ראשוני אז הוא אי זוגי".  
נתבונן בשיקול:

$(A \rightarrow B) \wedge B \rightarrow A =$  "אם מספר  $a$  ראשוני אז הוא אי זוגי. מספר  $a$  אי זוגי.  
לכן מספר  $a$  הוא ראשוני".

נבדוק אם השיקול נכון או לו נכון. בשביל זה נבנה טבלת האמת.

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge B$	$((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

מהטבלה ברור כי הנוסחה  $((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A$  אינה טאוטולוגיה. אז השיקול  
לא נכון. באותו זמן המסקנה  $A$  אמיתית.

דוגמה 2. כמו בדוגמא הקודמת יהיו:  $A =$  "מספר  $a$  הוא ראשוני",  
 $B =$  "מספר  $a$  אי זוגי".

אימפליקציה  $A \rightarrow B =$  "אם מספר  $a$  ראשוני אז הוא אי זוגי".  
נתבונן בשיקול:

$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B =$  "אם מספר  $a$  ראשוני אז הוא אי זוגי. מספר  $a$  ראשוני.  
לכן מספר  $a$  אי זוגי".

טבלת האמת היא

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

קיבלנו טאוטולוגיה. לכן השיקול  $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$  נכון.

דוגמה 3. יהיו:  $A =$  "יורם הוא ספורטאי",  $B =$  "יורם תמיד בריא".  
 אימפליקציה  $A \rightarrow B =$  "אם יורם ספורטאי אז הוא תמיד בריא".  
 נתבונן בשיקול:  
 $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A =$  "אם יורם ספורטאי אז הוא תמיד בריא. יורם לא תמיד בריא. לכן הוא לא ספורטאי".  
 טבלת האמת היא

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg B$	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

שוב קיבלנו טאוטולוגיה. לכן גם השיקול  $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$  נכון.

**חלק 2: תחשיב היחסים. (פרדיקטים)**

תחשיב הפסוקים היינו עיון לוגי המוגבל מאוד. יש הרבה שיקולים לוגיים שאי אפשר לתאר אותם במסגרת תחשיב הפסוקים.

דוגמאות:

- כל חברו של דוד היינו חבר של שאול. שלומה אינו חבר של שאול. לכן שלומה אינו חבר של דוד.
  - מספר ראשוני 2 היינו זוגי. לכן קיימים מספרים ראשוניים זוגיים.
- נכונות של השיקולים האלה מבוססת במבנה הפנימי של המשפטים ובמשמעות של המילים "כל" ו-"קיימים".

**1. יחסים (פרדיקטים)  $n$ -מקומיים. כמתים.**

קודם, בתחשיב הפסוקים, כאשר כתבנו לדוגמה " $x$  מספר זוגי" הנחנו כ- $x$  הוא פשוט איזהו מספר קונקרטי לא ידוע לנו. עכשיו נתבונן במשפטים התלויים בפרמטרים ז"א נניח כאותיות מציגים משתנים. במילים אחרות במקום האותיות ניתן להציב ערכים שלהן. לדוגמה נבין כבמשפטים " $x$  מספר זוגי", " $x$  קטן מ- $y$ ", "נקודות  $A, B$  ו- $C$  נמצאות באותו ישר" אותיות  $x, y, A, B, C$  הן משתנים. אם במקום  $x$  בדוגמא הראשונה לקחת איזהו מספר שלם קונקרטי אז אנו נקבל פסוק ואפשר להגיד אם הוא אמיתי או שקרי. אם  $x=2$  אז פסוק " $x$  מספר זוגי" אמיתי, אם  $x=3$  הוא שקרי.

נראה כאת המשפטים התלויים בפרמטרים ניתן להבין כיחסים.

בתורת הקבוצות הגדרנו יחס על הקבוצה  $A$  כתת-קבוצה של מכפלה קרטזית  $A \times A$ . עכשיו נכליל את המושג.

הגדרה. יחס  $n$ -מקומי על קבוצה  $A$  היינו תת קבוצה של  $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-פעמים}}$

במילים אחרות, יחס חד מקומי הוא תת קבוצה של קבוצה  $A$  עצמה, יחס דו מקומי הוא קבוצת זוגות סדירים של איברים מ- $A$ , יחס תלת מקומי הוא קבוצת שלשית סדירים של איברים מ- $A$ , וכו'.

את היחסים מסמנים כרגיל באותיות לועזיות גדולות (או בסימונים מיוחדים כמו  $<, =, +$ ).

אז " $x$  - מספר זוגי" הוא יחס חד-מקומי על  $Z$ :  $E(x) = \{x \in Z \mid x \text{ מתחלק ב-} 2\}$ ,  
 $x$  קטן מ- $y$  " היינו יחס דו-מקומי על  $R$ :  $\langle x, y \rangle = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid y - m - x \}$  קטן מ- $y$   
 "נקודות  $A, B$  ו- $C$  נמצאות באותו ישר" הוא יחס תלת-מקומי על  $R^2$ :  
 $L(A, B, C) = \{ \langle A, B, C \rangle \in R^2 \mid (AB) \text{ שייכת לישר } \}$

אם יחס  $n$ -מקומי מסומן לדוגמה באות  $R$  אז ניתן לרשום  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R$  במקום  
 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . למשל את העובדה כשלוש נקודות  $A, B, C$  נמצאות באותו ישר ניתן  
 לרשום  $\langle A, B, C \rangle \in L$

ליחסים המוכרים כמו  $=, >, <, \geq, \leq$  וכו' משתמשים בסימונים רגילים, ז"א כותבים  $x = y$   
 במקום  $(x, y) =$ ,  $x < y$  במקום  $\langle x, y \rangle$  וכו'.

הגדרה. פעולה  $n$ -מקומית על קבוצה  $A$  הינה פונקציה מ- $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-פעמים}}$  ל- $A$ .

דוגמאות:

1.  $|x|$  - פעולה חד-מקומית על  $R$ ,
2.  $+^R$  - פעולה דו-מקומית על  $R$ ,

כשנתון יחס  $R$  על הקבוצה  $A$  לאיבר שרירותי  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{ פעמים}}$  תענה

" $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  שייך ליחס  $R$ " הינה אמיתית כאשר  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R$  ושקרית  
 במקרה  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \notin R$ . לכן את כל יחס ניתן להבין כפונקציה לוגית  
 $R: \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{ פעמים}} \rightarrow \{T, F\}$  המקבלת ערך אמיתי "T" כש- $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R$  וערך אמיתי

"F" כש- $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \notin R$ . במשמעות הזו קוראים ליחס  $n$ -מקומי גם פרדיקט  $n$ -מקומי.  
 כך " $x$  - מספר זוגי" הוא פרדיקט חד-מקומי על  $Z$  המקבל ערך "T" כאשר במקום  $x$   
 מציבים מספר זוגי וערך "F" כאשר במקום  $x$  מציבים מספר אי-זוגי.

את הפסוקים הרגילים (כמו "2 הוא מספר זוגי" מבינים (לפי הגדרה) כפרדיקטום 0-מקומיים.

על הפרדיקטים ניתן לבצע פעולות לוגיות:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ . כתוצאה נקבל פרדיקטים  
 חדשים.

דוגמא: יהיו " $x$  מתחלק ב-2"  $E(x)$ , " $x$  מתחלק ב-3"  $T(x)$ . אז  
 $E(x) \wedge T(x)$  "  $x$  מתחלק גם ב-2 גם ב-3"  
 $E(x) \vee T(x)$  "או  $x$  מתחלק ב-2 או  $x$  מתחלק ב-3"  
 $E(x) \rightarrow T(x)$  "אם  $x$  מתחלק ב-2 אז  $x$  מתחלק ב-3"

עכשיו נגדיר מושגים מיוחדים לתחשיב היחסים: כמתים.

יהיה  $P(x)$  פרדיקט המקבל ערך "T" או ערך "F" לכל איבר  $x$  של הקבוצה  $A$ .  
 את הביטוי  $(\forall x)P(x)$  נבין כפסוק האמיתי כש- $P(x)$  אמיתי לכל  $x \in A$  ושקרי אם  
 $x \notin A$ . את הביטוי  $(\forall x)P(x)$  קוראים "לכל  $x$   $P(x)$ ". לסימון  $(\forall x)$  קוראים  
כמת הכל (או כמת כלילות).

את הביטוי  $(\exists x)P(x)$  נבין כפסוק האמיתי כשקיים  $x \in A$  כך ש- $P(x)$  אמיתי ושקרי  
 במקרה הנגדי. את הביטוי  $(\exists x)P(x)$  קוראים "קיים  $x$  כך ש- $P(x)$ ". לסימון  $(\exists x)$  קוראים

כמת קיים (או כמת קיימות).

דוגמאות:

1. נרשום דרך סמנים לוגיים את המשפט: " לכל מספר רציונלי ריבוע שלו הוא מספר רציונלי ".  
 מגדירים על קבוצת  $R$  את הפרדיקטים:  
 $Q_1(x)$  - מספר  $x$  רציונלי,  $Q_2(x)$  - מספר  $x^2$  רציונלי  
 ומקבלים:  $(\forall x)(Q_1(x) \rightarrow Q_2(x))$
2. נרשום דרך סמנים לוגיים את המשפט: " קיים מספר שלם המתחלק גם ב-2 וגם ב-3 ".  
 מגדירים על קבוצת  $R$  את הפרדיקטים:  
 $Q_1(x)$  - מספר  $x$  שלם,  $Q_2(x)$  - מספר  $x$  מתחלק ב-2,  
 $Q_3(x)$  - מספר  $x$  מתחלק ב-3  
 ומקבלים:  $(\exists x)(Q_1(x) \rightarrow (Q_2(x) \wedge Q_3(x)))$
3. תרשמו דרך סמנים לוגיים את המשפט: " לכל מספר ממשי הגדול או שווה לאפס קיים שורש ריבועי שלו ".  
 .

## 2. שפת תחשיב הפרדיקטים. נוסחאות. מבנים.

אלף-בית של שפת תחשיב הפרדיקטים מורכב מ-

1. סוגריים  $()$ ,
2. הקשרים  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ,
3. הכמתים  $\forall, \exists$ ,
4. אותיות שתקראנה משתנים  $(x, y, z, \dots, u)$ ,
5. אותיות שיסמנו קבועים (למשל  $0, 1, \pi, e, \dots$ ),
6. אות שתייצג את סימן השוויון:  $=$ ,
7. אותיות שמסמנים יחסים (פרדיקטים):  $>, <, P, R, \dots$ ,  
 תהיה הפרדה ברורה בין אותיות שמייצגות יחסים חד-מקומיים, דו-מקומיים וכו',
8. אותיות שמסמנים פעולות.  $(+, \dots)$ .

ביטוי המורכב מהסימונים 1-8. של אלף-בית נקרא מילה בספת תחשיב הפרדיקטים.

צריך לתאן שאנו מבינים מילה באופן פורמלי, לא שמים לב על משמעות קונקרטית של משתנים, פרדיקטים ופעולות.

אם לפני איזהו משתנה  $x$  אומד כמת  $\forall$  או  $\exists$  אומרים שהמשתנה היינו קשור (בכמת). במקרה נגדי אומרים שמשנתנה חופשי

הגדרה: מילה נקראת נוסחה לוגית (או פשוט נוסחה) אם

1. ביטוי  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  כאשר  $P$  סימן של פרדיקט,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  משתנים, הוא נוסחה. (נוסחה כזו נקראת נוסחה אטומית).
2. אם  $A$  נוסחה אז  $\neg A$  גם נוסחה.
3. יהיו  $A$  ו- $B$  נוסחאות ואין משתנים החופשיים בנוסחה אחת ובזמית קשורים בנוסחה אחרת. אז  $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$  גם נוסחאות. בכך משתנים החופשיים בנוסחאות  $A$  ו- $B$  נשארים חופשיים ומשתנים הקשורים בנוסחאות  $A$  ו- $B$  נשארים קשורים.
4. יהי  $A$  - נוסחה הכוללת משנתנה חופשי  $x$ . אז ביטויים  $(\forall x)A$  ו- $(\exists x)A$  גם נוסחאות. משנתנה  $x$  בן הוא קשור. משתנים החופשיים ב- $A$  נשארים חופשיים גם

ב-  $(\forall x)A$  וב-  $(\exists x)A$ . משתנים הקשורים ב-  $A$  נשארים קשורים גם ב-  $(\forall x)A$  וב-  $(\exists x)A$ .

הגדרה. בנוסחה  $(\forall x)A$  נוסחה  $A$  נקראת תחום של כמת  $(\forall x)$ . בנוסחה  $(\exists x)A$  נוסחה  $A$  נקראת תחום של כמת  $(\exists x)$ .

דוגמאות: 1.  $P(x, y, z)$  - נוסחה אתומית.  $P$  - סימון של פרדיקט תלת מקומי. כל המשתנים  $x, y, z$  חופשיים.

2.  $(\forall x)(\exists y)P(x, y, z) \rightarrow (\forall x)Q(x, u)$  - נוסחה.  $x$  ו-  $y$  משתנים קשורים,  $z$  ו-  $u$  משתנים חופשיים.

3. ביטוי  $(\exists x)(\forall y)P(x, z) \wedge Q(x, y)$  - אינו נוסחה כי משתנה  $x$  הוא קשור ב-  $(\exists x)(\forall y)P(x, z)$  אך הוא חופשי ב-  $Q(x, y)$ .

4. ביטוי  $(\exists x)(\forall y)(P(x, z) \wedge Q(x, y))$  - הוא נוסחה.  $x$  ו-  $y$  משתנים קשורים,  $z$  משתנה חופשי. הביטוי  $(P(x, z) \wedge Q(x, y))$  מציג פרדיקט תלת-מקומי.

צריך לשים לב שאם אנו ניתן משמעות קונקרטית לכל הסימונים בנוסחה הכוללת  $m$  משתנים חופשיים אז נקבל פרדיקט  $m$ -מקומי. בפרט אם בנוסחה הנתונה אין משתנים חופשיים אז נקבל פסוק. כך אנו מגיעים למושג מבנה. מבנה  $M = \langle M, f \rangle$  של הנוסחה  $A$  הוא מערכת של קבוצה לא ריקה  $M$  והתאמה  $f$ . ההתאמה  $f$  היא שיטה להענקת משמעות קונקרטית לסימונים בנוסחה.

דוגמה. יהי נוסחה  $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge Q(x, y))$ . ניתן לתת ל-  $P(x, y)$  ול-  $Q(x, y)$  משמעויות שונות. למשל

(א)  $P(x, y) = "x$  גדול או שווה ל-  $y"$ ,  $Q(x, y) = "x$  קטן או שווה ל-  $y"$ , כאשר  $x, y \in Z$ ,

(ב)  $P(x, y) = "xy$  גדול מ-  $10"$ ,  $Q(x, y) = "x + y$  קטן מ-  $2"$ , כאשר  $x, y \in N$ .

במקרה (א) קבלנו פסוק אמיתי "לכל מספר שלם  $x$  קיים מספר שלם  $y$  כך ש-  $x$  גדול או שווה ל-  $y$  ו-  $x$  קטן או שווה ל-  $y$ ", במקרה (ב) קבלנו פסוק שקרי "לכל מספר טבעי  $x$  קיים מספר טבעי  $y$  כך ש-  $xy$  גדול מ-  $10$  ו-  $x + y$  קטן מ-  $2$ ".

מהדוגמה נראה כדרך כלל אמיתיות של הנוסחה תלויה במבנה. אם במבנה הנתון  $M = \langle M, f \rangle$  הנוסחה הנתונה  $A$  אמיתית אז אומרים שהמבנה מספק את הנוסחה או שנוסחה מסתפקת במבנה. בדוגמה הקודמת הנוסחה  $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge Q(x, y))$  מסתפקת במבנה (א) אך היא לא מסתפקת במבנה (ב).

יש לטעון שקיימות נוסחאות שאמיתיות שלהן לא תלויה במבנה. לדוגמה הנוסחה  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$  תמיד אמיתית והנוסחה  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge \neg P(x, y))$  תמיד שקרית. נוסחה  $A$  נקראת אמיתית לוגית אם היא אמיתית בכל מבנה. לדוגמה הנוסחה  $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \vee \neg P(x, y))$  היינה אמיתית לוגית.

מושג של נוסחה האמיתית לוגית היינו הכללה של טאוטולוגיה בתחשיב הפסוקים.

### 3. שקילות של נוסחאות. פעולות על נוסחאות עם כמתים.

יהיו  $F$  ו-  $G$  נוסחאות שיש בן אותם משתנים חופשיים (עולי קבוצה ריקה).

הגדרה 1. נוסחאות  $F$  ו-  $G$  נקראות שקולות במבנה הנתון  $M = \langle M, f \rangle$  אם לכל הערכים

של משתנים חופשיים הן מקבלות אותם ערכי האמת.

הגדרה 2. נוסחאות  $F$  ו- $G$  נקראות שקולות בקבוצה  $M$  אם הן שקולות בכל מבנה  $M = \langle M, f \rangle$  על הקבוצה  $M$ .

הגדרה 3. נוסחאות  $F$  ו- $G$  נקראות שקולות לוגית אם הן שקולות בכל קבוצה  $M$ .

את נוסחאות  $F$  ו- $G$  השקולות לוגית נסמן  $F \Leftrightarrow G$

דוגמאות

1. נוסחאות  $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$  ו- $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$  שקולות במבנה  $M = \langle M, f \rangle$

כאשר  $M = N$  ו- $f : \begin{cases} P(x) = "x \geq 1" \\ Q(x) = "x^2 \geq 1" \end{cases}$  אך הנוסחאות האלה לא שקולות במבנה

$f : \begin{cases} P(x) = "1 \leq x \leq 2" \\ Q(x) = "x \geq 3" \end{cases}$  כאשר  $M = N$  ו- $M = \langle M, f \rangle$

2. נוסחאות  $(\forall x)P(x)$  ו- $(\exists x)P(x)$  שקולות בכל מבנה  $M = \langle M, f \rangle$  כאשר בקבוצה  $M$  יש בדיוק איבר אחד.

3. נוסחאות  $(\forall x)(\neg(P(x) \wedge Q(x)))$  ו- $(\forall x)(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$  שקולות בכל מבנה  $M = \langle M, f \rangle$ , ז"א הן שקולות לוגית.

עכשיו נעבור לפעולות על נוסחאות עם כמתים.

נתחיל ממקרה של פרדיקטים חד-מקומיים.

אם פרדיקט  $U(x)$  מוגדר על קבוצה סופית  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  אז נכון ש-

$$(\forall x)U(x) \Leftrightarrow U(a_1) \wedge U(a_2) \wedge \dots \wedge U(a_n)$$

$$(\exists x)U(x) \Leftrightarrow U(a_1) \vee U(a_2) \vee \dots \vee U(a_n)$$

זאת אומרת כמת  $\forall$  היינו הכללה של קוניונקציה וכמת  $\exists$  היינו הכללה של דיסיונקציה.

נרשום כמה שקילויות חשובות הנותנות לבצע פעולות על נוסחאות עם כמתים.

משפט 1. מתקיים:

$$\neg((\forall x)U(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg U(x)) \quad (1)$$

$$\neg((\exists x)U(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg U(x)) \quad (2)$$

הוכחה. נוכיח את השקילות הראשונה.

יהיה  $\neg((\forall x)U(x)) = T$ . אז  $(\forall x)U(x) = F$ , ז"א לא לכל ערך של  $x$  נתקבל

$U(x)$  אמיתי. לכן קיים  $a \in M$  כך ש- $U(a) = F$ . אז  $\neg U(a) = T$ . לכן

$$(\exists x)(\neg U(x)) \Leftrightarrow T$$

להפך יהיה  $(\exists x)(\neg U(x)) \Leftrightarrow T$ . אז קיים  $a \in M$  כך ש- $\neg U(a) = T$  ז"א

$$U(a) = F \text{ . לכן } (\forall x)U(x) = F \text{ ו- } \neg((\forall x)U(x)) = T$$

באופן דומה מוכיחים את השקילות השנייה.

משפט 2. מתקיים:

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \quad (3)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \quad (4)$$

ללא הוכחה.

הערה. בדרך כלל לא נכון ש-

$$, (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \quad (5)$$

$$. (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \quad (6)$$

נכון רק ש-

$$, (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \quad (7)$$

$$. (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \quad (8)$$

אם אחד מהפרדיקטים  $P$  ו- $Q$  לא תלוי ב- $x$  אז (5)-(6) גם נכונות.

דוגמאות:

1. יהיה  $P(x)$  "מתחלק ב-3" ,  $Q(x)$  "מתחלק ב-2" פרדיקטים בקבוצה  $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$ . הנוסחה  $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$  שקרית אך הנוסחה  $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$  אמיתית.

2. יהיה  $P(x)$  "מתחלק ב-3" ,  $Q(x)$  "מתחלק ב-2" פרדיקטים בקבוצה  $B = \{2, 3\}$ . הנוסחה  $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$  אמיתית אך הנוסחה  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$  שקרית.

3. יהיה  $P(x)$  "מתחלק ב-3" ,  $Q(x)$  "מתחלק ב-2" פרדיקטים בקבוצה  $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$ . הנוסחאות  $(\forall x)P(x) \vee Q$  ו- $(\forall x)(P(x) \vee Q)$  שקולות.

נעבור לפרדיקטים דו-מקומיים.

יהיה  $U(x,y)$  פרדיקט דו-מקומי כאשר  $L$  תכום של משתנה  $x$  ו- $M$  תכום של משתנה  $y$  (במקרה  $M=L$  אומרים שהפרדיקט מוגדר בקבוצה  $M$ ). בעזרת כמתים ניתן לבנות ארבעה פרדיקטים חד-מקומיים

$$, P_1(x) = (\forall y)U(x, y)$$

$$, P_2(x) = (\exists y)U(x, y)$$

$$, Q_1(y) = (\forall x)U(x, y)$$

$$Q_2(y) = (\exists x)U(x, y)$$

ושמונה נוסחאות הבאות:

$$, (\forall x)(\exists y)U(x, y) \quad , (\forall x)(\forall y)U(x, y)$$

$$(\forall y)(\exists x)U(x, y) \quad , (\forall y)(\forall x)U(x, y)$$

$$, (\exists x)(\exists y)U(x, y) \quad , (\exists x)(\forall y)U(x, y)$$

$$(\exists y)(\exists x)U(x, y) \quad , (\exists y)(\forall x)U(x, y)$$

את המשפטים 1-2 ניתן להכליל למקרה של פרדיקטים דו-מקומיים. לדוגמה

$$, \neg((\forall x)U(x, y)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg U(x, y)$$

$$, \neg((\exists y)U(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y)\neg U(x, y)$$

$$, \neg((\exists x)(\forall y)U(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\neg U(x, y)$$

$$. \neg((\forall y)(\exists x)U(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)\neg U(x, y)$$

במילים: כדי למצוא שלילה של הנוסחה המתחילה בכמתים צריך להחליף כל כמת בכמת דואלי (ז"א להחליף  $\forall$  ב- $\exists$  ולהפך) ולהעביר  $\neg$  דרך הכמתים.

דוגמה. למצוא שלילה של הנוסחה  $(\exists x)(\forall y)(P(x, y) \vee Q(x, y))$ .

$$\neg((\exists x)(\forall y)(P(x, y) \vee Q(x, y))) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\neg(P(x, y) \vee Q(x, y)) \Leftrightarrow \text{פתרון:}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y))$$

אפשר להראות ש-  $(\forall x)(\forall y)U(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)U(x, y)$ ,  
 $(\exists x)(\exists y)U(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)U(x, y)$

אבל לא נכון ש-

$$(\forall x)(\exists y)U(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)U(x, y)$$

$$(\forall y)(\exists x)U(x, y) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)U(x, y)$$

נכון רק ש-

$$(\exists y)(\forall x)U(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)U(x, y)$$

$$(\exists x)(\forall y)U(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)U(x, y)$$

דוגמה:

יהיה  $U(x, y) = "x \geq y"$  פרדיקט דו-מקומי המוגדר ב-  $Z$ . הנוסחה  $(\forall x)(\exists y)U(x, y)$  אמיתית אך הנוסחה  $(\exists y)(\forall x)U(x, y)$  שקרית. הנוסחה  $(\forall y)(\exists x)U(x, y)$  אמיתית אך הנוסחה  $(\exists x)(\forall y)U(x, y)$  שקרית.

בסוף נטען כי נוסחאות של הסעיף ניתן להכליל גם למקרה של פרדיקטים  $n$ -מקומיים.