נושא 2. **תורת הקבוצות** (**המשך**)

1. יחסים

א) זוגות סדורים. מכפלה קרטזית

הגדרה. זוג סדור הוא זוג עצמים (לאו דווקא שונים) שבו נתון סדר, ז"א נתון איזה עצם הראשון ואיזה השני.

דוגמה. $<3,4>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 3 ואיבר השני 4,
$<4,3>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 4 ואיבר השני 3,

נדגיש ש- $<3,4> \neq <4,3>$

$<3,3>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 3 ואיבר השני 3,

הערה. לא משתמשים בסימון $\in$ לזוגות סדורים.

שוויון זוגות סדורים. נאמר כי $<a,b> = <c,d>$ אם ורק אם $a = b$ וגם $c = d$.

באופן דומה נדבר על שלשות סדורות, רביעיות סדורות וכו'.

הגדרת מכפלה קרטזית.

תהינה A, B קבוצות. נגדיר

$$A\times B=\{<a,b>|\,a\in A,b\in B\}$$

הקבוצה $A\times B$ נקראת *מכפלה קרטזית* קבוצה A בקבוצה B.

בדרך כלל $A\times B\neq B\times A$

דוגמה 1.

$$\{1,2\}\times\{1,3,4\}=\{<1,1>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,4>\}$$
$$\{1,3,4\}\times\{1,2\}=\{<1,1>,<1,2>,<3,1>,<3,2>,<4,1>,<4,2>\}$$

דוגמה 2.

מישור- $R\times R=\{<x,y>|\,x\in R,y\in R\}$

דוגמה 3.

לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\times A=\emptyset$
(כי אין זוגות סדורות שהאיבר הראשון שלהם שייך ל- $\emptyset$)

ב) הגדרה של יחס. תחום וטווח.

הגדרה. יחס (דו-מקומי) היינו קבוצה של זוגות סדורים.

הגדרה. יחס (דו-מקומי) על קבוצה A היינו תת קבוצה של $A\times A$.

דוגמא. עד פה סימון $<$ (כמו $2<3$) לא היה עצם מתמטי. עתה הוא הקבוצה:

$$< \;=\{<3,4>, <1,2>, <1,3>, <2,3>\dots\},$$

ז"א קבוצת כל הזוגות הסדירים $<n, m>$ של מספרים טבעיים שבהם $n<m$.
זהו <u>יחס על</u> $\boldsymbol{N}$.

משתמשים גם בסימון $<^N$ ליחס $<$ ב-$\boldsymbol{N}$. אז

$$<^N = \{<3,4>, <1,2>, <1,3>, <2,3>\ldots\}$$

עוד _דוגמא_: יחס השוויון על N.

$$=^N = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <4,4>\ldots\}$$

<u>סימון</u>. יהא R יחס דו-מקומי.
אם $<a,b>\in \mathrm{R}$ אז נסמן גם $a\mathrm{R}b$.
(במקרים קונקרטיים משתמשים במקום R ב- $<$, $>$, $=$,...).
כשאין הדבר כך נסמן $a \not\mathrm{R}\, b$.

הערה. אם R יחס על A ו- $A\subseteq B$ אז R יחס גם על B.
למשל $<^N$ יחס על N אך גם על Z, Q, R, C.

הגדרה. יהא R יחס על A ונניח כי $C\subseteq A$. צמצום R ל-C היינו היחס
$R\restriction C=(C\times C)\cap R$
למשל $<^N=<^Z\restriction N$

הגדרה. _תחום_ היחס R:

Dom(R) = {a | $<a,b>\in$ R כך ש- b קיים}

טווח היחס R:

Range(R) = {b | $<a,b>\in$ R כך ש- b קיים}

דוגמאות:

1.

$A = \{1, 2, 3\}$
$\mathrm{R} = <^A =\{<1,2>, <1,3>, <2,3>\}$
$\mathrm{Dom}(\mathrm{R}) = \{1, 2\}$
$\mathrm{Range}(\mathrm{R}) = \{2,3\}$

2.

$\mathrm{R} = \{<x,y> \mid x,y \in Z, y=x^2\}$
$\mathrm{Dom}(\mathrm{R}) = Z$
$\mathrm{Range}(\mathrm{R}) = \{0, 1, 4, 9, 16,\ldots\}$

3.

R = {$<x,y>$ | y בנו\בתו x , בני אדם x, y}
Dom (R) - כל בני האדם שחיו או חיים
Range (R) - כל ההורים

יש עניין: למצוא <u>כל</u> יחסי השקילות על קבוצה.

ג) תכונות של יחסים.

יהא R יחס על A.

הגדרה. יהא R יחס על קבוצה A. R יקרא _רפלקסיבי_ אם לכל $a\in A$ מתקיים $<a,a>\in \mathrm{R}$

הגדרה. R יקרא _סימטרי_ אם לכל $a,b\in A$ מתקיים

$$<b,a>\in \mathrm{R} \Leftrightarrow <a,b>\in \mathrm{R}$$

הגדרה. R יקרא *טרנזיטיבי* אם לכל $a,b,c \in A$ מתקיים
$$<a,c> \in \mathrm{R} \Leftarrow <a,b> \in \mathrm{R}, <b,c> \in \mathrm{R}$$

דוגמאות:

1. $=^Z$, $\le^R$, $\subseteq^X$ - יחסים רפלקסיביים (אך לא $<^Z$) .
2. $=^N$ רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי
3. $<^N$ אינו סימטרי ואינו רפלקסיבי אך הוא טרנזיטיבי
4. $\le^N$ אינו סימטרי אף רפלקסיבי וטרנזיטיבי
5. תהא X קבוצה. נגדיר על $P(X)$ יחס
$$\subseteq^X = \{<A,B> \mid A \subseteq B \subseteq X\}$$
זהו יחס טרנזיטיבי
6. $\mathrm{R} = \{<a,b> \in Z \times Z \mid |a-b| \le 2\}$
יחס זה סימטרי ורפלקסיבי אך לא טרנזיטיבי. $<5,3>,<3,2> \in \mathrm{R}$ אך $<5,2> \notin \mathrm{R}$

ד) יחס שקילות. מחלקת השקילות. קבוצת המנה

הגדרה. יהא R יחס על קבוצה A. נאמר כי R יחס שקילות על A אם:

א. R רפלקסיבי
ב. R סימטרי
ג. R טרנזיטיבי

דוגמאות. 1. יחס השוויון על A .

2. קבוצת תושבי הארץ - A ,
R = { $<x, y>$ | x, y אזרחי אותה מדינה }

3. קבוצת כל הילדים - A ,
S = { $<x, y>$ | x, y ילדי אותה שנה }

4. $\equiv^4 = \{<n,m> \in Z \times Z \mid$ n-m מתחלק ב-4 $\}$

נוכיח שהיחס האחרון הוא יחס שקילות .

רפלקסיביות. $n-n = 4 \cdot 0 \Rightarrow <n,n> \in \equiv^4$

סימטריות. אם $<n,m> \in \equiv^4$ אז $n\text{-}m = 4k$ עם $k \in Z$. לכן $m\text{-}n = \text{-}4k$ ו- $<m,n> \in \equiv^4$

טרנזיטיביות. נניח $<n,m>,<m,p> \in \equiv^4$
אזי קיימים $k,l \in Z$ כך ש- $n\text{-}m = 4k$, $m\text{-}p = 4l$.
לכן $n\text{-}p = 4(k+l)$ ו- $<n,p> \in \equiv^4$

הגדרה . יהא R יחס שקילות על A . יהא $a \in A$.
מחלקת השקילות של a ביחס R היינה $a/R = \{b \in A \mid aRb\}$

הגדרה . קבוצה $A/\mathrm{R} = \{a/\mathrm{R} \mid a \in A\}$ כל המחלקות השקילות של R נקראת *קבוצת המנה* של A .

דוגמאות. 1. ביחס $\equiv^4$ מתקיים

$$3/\equiv^4 = \{\ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots\} = \{4a+3 \mid a \in Z\} = -1/\equiv^4$$

למעשה יש כאן בדיוק ארבע מחלקות שקילות : $0/\equiv^4$, $1/\equiv^4$, $2/\equiv^4$, $3/\equiv^4$
קבוצת המנה כללת ארבע קבוצות אלה. אז $Z/\equiv^4=\{0/\equiv^4,1/\equiv^4,2/\equiv^4,3/\equiv^4\}$

2. קבוצת תושבי כדור הארץ $= A$
$\mathrm{R}=\{<x,y>\mid$ ל- x,y אותה אזרחות $\}$
מחלקות השקילות : הלאומים השונים .

משפט. יהא R יחס שקילות על קבוצה A . יהיו $a,b\in A$. אזי או ש- $a/\mathrm{R}=b/\mathrm{R}$ או ש- $a/\mathrm{R}\cap b/\mathrm{R}=\emptyset$.

הוכחה. אם $a/\mathrm{R}\cap b/\mathrm{R}=\emptyset$ סיימנו.
נניח ש- $a/\mathrm{R}\cap b/\mathrm{R}\neq\emptyset$. צריך להוכיח $a/\mathrm{R}=b/\mathrm{R}$.
מההנחה קיים איבר $c\in A$ כך ש- $c\in b/\mathrm{R}$ ו- $c\in a/\mathrm{R}$
כלומר $<b,c>\in\mathrm{R}$, $<a,c>\in\mathrm{R}$. מכאן $<c,a>\in\mathrm{R}$ ולכן $<b,a>\in\mathrm{R}$ עקב סימטריות וטרנזיטיביות.

נראה כי $a/\mathrm{R}\subseteq b/\mathrm{R}$.
יהא $d\in a/\mathrm{R}$. אזי $<a,d>\in\mathrm{R}$ ולכן $<b,d>\in\mathrm{R}$.
כלומר $d\in b/\mathrm{R}$ כנדרש .

משיקולי סימטריה גם $b/\mathrm{R}\subseteq a/\mathrm{R}$. אז $a/\mathrm{R}=b/\mathrm{R}$.

נעבור עכשיו למושג *החלוקה* של קבוצה.

הגדרה. נניח ש- P קבוצה שאיבריה הם קבוצות.
נגדיר
$$\bigcup P=\{\ x\mid x\in B \text{ כך ש- } B\in P \text{ קיימת}\}$$

דוגמאות. 1. $\bigcup\ \{\{2,3\},\{4\},\{2,5,6\}\}=\{2,3,4,5,6\}$

2. $P=\{$ קב' אזרחי אנגליה , קב' אזרחי צרפת , קב' אזרחי איטליה,... $\}$
קבוצת אזרחי אירופה - $\bigcup P$

הגדרה. תהא A קבוצה. *חלוקה* של A היינה קבוצה P של קבוצות המקיימת את התנאים :
א. $\bigcup P=A$,
ב. לכל $B,C\in P$ שונות בהכרח $B\cap C=\emptyset$,
ג. $\emptyset\notin P$

הערה. ניתן לחשוב על חלוקה של A כחלוקת יבשת למדינות ללא אזורים מפורזים וללא שטחים משותפים.

דוגמאות. 1. אוסף קבוצות אזרחי מדינות אירופה, כמקדם ,

2. $P=\{\ \{4n|n\in Z\}\ ,\{4n+1|n\in Z\}\ ,\{4n+2|n\in Z\},\{4n+3|n\in Z\}\ \}$

הערה. נשים לב שבדוגמא הראשונה קיבלנו את קבוצת המנה של היחס "שוויון אזרחות" ובדוגמא השניה את קבוצת המנה של היחס $\equiv^4$.

משפט. יהא R יחס שקילות על הקבוצה A. אזי קבוצת המנה A/R הנה חלוקה של A .

הוכחה. נסמן $P=A/\mathrm{R}=\{a/\mathrm{R}\mid a\in A\}$ ונוכיח ש- P חלוקה.

(א) נראה ש- $\bigcup P=A$.

אם $a \in A$ אז מהרפלקסיביות נובע $<a,a> \in R$ ולכן $a \in a/R$. מהגדרת $\bigcup P$ נובע ש- $a \in \bigcup P$. לפי כך $A \subseteq \bigcup P$.
להפך, יהא $a \in \bigcup P$. אזי a שייך למחלקת שקילות של A אך מחלקות שקילות הן תת-קבוצות של A . לכן $a \in A$.
קיבלנו: $\bigcup P \subseteq A$ ובס"כ $\bigcup P = A$.

(ב) תהינה $B,C \in P$ שונות. נראה כי הן זרות.

מהגדרת P יש $b,c \in A$ כך ש- $B = b/R$, $C = c/R$
מהמשפט הקודם: או ש- $b/R = c/R$ או ש- $b/R \cap c/R = \emptyset$
הואיל ו- $b/R \neq c/R$ בהכרח $B \cap C = b/R \cap c/R = \emptyset$

(ג) נראה כי $\emptyset \notin P$.

פרוש הדבר: אף מחלקת שקילות a/R כש- $a \in A$ אינה ריקה.
ואמנם, מהרפלקסיביות $a \in a/R$ ולכן $a/R \neq \emptyset$

בזאת הוכחנו ש- P חלוקה.

מיחסי שקילות קיבלנו חלוקות. עכשיו נבנה מחלקות יחסי שקילות.

הגדרה. תהא P חלוקה של קבוצה A . נגדיר את היחס E^P (התלוי ב- P) על A כדלקמן

$E^P = \{ <a,b> \mid$ קיימת $C \in P$ כך ש- $a,b \in C \}$

טענה: E^P היינו יחס שקילות.

הוכחה. א) . E^P היינו יחס על A .

אם $<a,b> \in E^P$ אז קיימת $C \in P$ כך ש- $a,b \in C$. בפרט $a,b \in \bigcup P$ אך $\bigcup P = A$ (מהגדרת חלוקה). לכן $a,b \in A$ כלומר $<a,b> \in A \times A$.
בזאת הוכחנו כי $E^P \subseteq A \times A$ כנדרש.

ב) . E^P רפלקסיבי.

יהא $a \in A$. צריך להוכיח $<a,a> \in E^P$.
מעבדה ש- $A \in \bigcup P$ בהכרח $a \in \bigcup P$ כלומר קיימת $C \in P$ כך ש- $a \in C$.
אז $<a,a> \in E^P$.

ג) . E^P יחס סימטרי.

נניח ש- $<a,b> \in E^P$. אזי קיימת $C \in P$ כך ש- $a,b \in C$. נוכל גם לומר ש- $b,a \in C$ כלומר $<b,a> \in E^P$

ד) . E^P יחס טרנזיטיבי.

נניח ש- $<a,b> \in E^P$, $<b,c> \in E^P$. אזי קיימות $C,D \in P$ כך ש- $a,b \in C$, $b,c \in D$.
<u>נשים לב</u> : $b \in C \cap D$ ולכן $C \cap D \neq \emptyset$
כי P חלוקה אז $C = D$. לכן $a,b,c \in C$ $\leftarrow$ $<a,c> \in E^P$.

<u>*דוגמא.*</u> A – קבוצת כל האנשים הנמצאים בחדר ,
נגדיר יחס $\{a,b\in A$, a, b נולדו באותו חודש | $\mathrm{R} = \{ <a, b>$
קיבלנו חלוקה { {נולדו בדצמבר}, ... , {נולדו בפברואר}, {נולדו בינואר} } = A/R
יכולנו להתחיל מהחלוקה ובעזרתה להגדיר יחס R .

<u>*משפט.*</u> תהא A קבוצה.
א) . לכל יחס שקילות R על A מתקיים $\mathrm{E}^{A/\mathrm{R}} = \mathrm{R}$
ב) . לכל חלוקה P של A מתקיים $A/\mathrm{E}^{P} = P$

<u>*ללא הוכחה.*</u>

ה) יחסי סדר.

<u>*הגדרה.*</u> יחס R על קבוצה A יקרא <u>*אנטיסימטרי*</u> (או <u>*אסימטרי*</u>) אם לכל $a,b\in A$ מתקיים
$$<a,b>\in \mathrm{R} \,\&\, <b,a>\in \mathrm{R} \Leftrightarrow a=b$$

<u>*הערה.*</u> לחילופין יחס R על קבוצה A אנטיסימטרי אם אין איברים $a,b\in A$ שונים כך ש-
$$<a,b>\in \mathrm{R} \,\&\, <b,a>\in \mathrm{R}$$

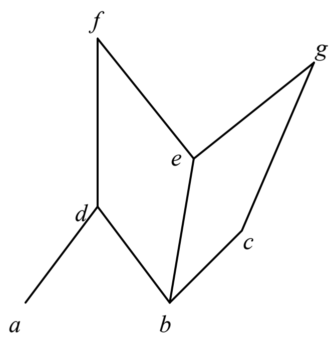
<u>*הגדרה.*</u> יחס R על קבוצה A יקרא <u>*יחס סדר חלקי*</u> אם:

1. R רפלקסיבי
2. R אנטיסימטרי
3. R טרנזיטיבי

<u>*הגדרה.*</u> נאמר גם שהזוג הסדור $<A, \mathrm{R}>$ (כאשר R יחס סדר חלקי על קבוצה A) היינה <u>*קבוצה סדורה חלקית*</u> .

<u>*דוגמאות:*</u> $\leq^{Z}$ על Z , $\subseteq$ על $P(X)$.

תאור גרף של קבוצה סדורה חלקית.



נבין זאת כך:
א) כל איבר עומד ביחס עם עצמו,
ב) $x\mathrm{R}y$ אם ורק אם ניתן להגיע מ- x ל- y ע"י עליה לאורך הקווים.
בדוגמא $a\mathrm{R}a$, $a\mathrm{R}d$, $a\mathrm{R}f$ אך איברים f, g לא עומדים ביחס.

<u>*הגדרה.*</u> תהא $<A, \mathrm{R}>$ קבוצה סדורה חלקית
ויהיו $a,b\in A$. נאמר כי a, b
<u>*ניתנים להשוואה*</u> אם $a\mathrm{R}b$ או $b\mathrm{R}a$

<u>*דוגמאות:*</u> א) בקבוצה סדורה חלקית $<Z, \leq>$ כל שני איברים ניתנים להשוות,
ב) בקבוצה סדורה חלקית $<P(X), \subseteq>$ כש- $X=\{1, 2, 3\}$ נכון ש- $\{1\}\subseteq\{1,2\}$
אך תת-הקבוצות $\{1,2\}$ ו- $\{2,3\}$ אינם ניתנים להשוואה.

<u>*הערה.*</u> לפעמים נכתיב $a\leq b$ במקום $<a,b>\in \mathrm{R}$ או $a\mathrm{R}b$. יש להדגיש כי אין זה יחס " $\leq$ " מוכר בין מספרים . הסימון רק מציין כי y נמצא מעל x בתרשים כנ"ל .

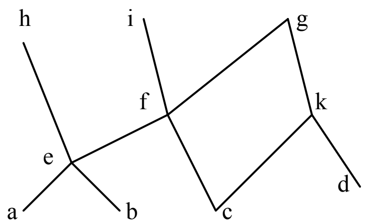
<u>*תזכורת.*</u> יהא R יחס על A ו- $B\subset A$. הצמצום של R ל- B היינו $\mathrm{R}1B = \mathrm{R}\cap(B\times B)$

<u>*טענה*</u>. אם R יחס סדר חלקי על A ואם $B \subset A$ אז $R1B$ יחס סדר חלקי על B .

<u>*ללא הוכחה*</u> .

<u>*הגדרה*</u>. תהא $<A, R>$ קבוצה סדורה חלקית ויהא $a \in A$. נאמר כי a איבר <u>*מזער*</u> או איבר <u>*מינימלי*</u> אם אין $b \neq a$ ב- A כך ש- bRa. נאמר כי a איבר <u>*מרבי*</u> או איבר <u>*מקסימלי*</u> אם אין $b \neq a$ ב- A כך ש- aRb .

<u>*דוגמא*</u>. (שרטוט)

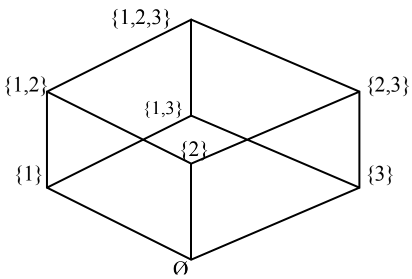


כאן a, b, c, d מינימליים
h, i, g מקסימליים

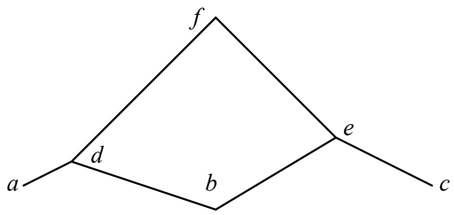
<u>*הגדרה*</u>. תהא $<A, R>$ קבוצה סדורה חלקית ויהא $a \in A$. נאמר כי a <u>*מינימום*</u> ב- $<A, R>$ אם לכל $b \in A$ מתקיים aRb . נאמר כי b <u>*מקסימום*</u> ב- $<A, R>$ אם לכל $a \in A$ מתקיים aRb .

<u>*דוגמאות*</u>. 1. $< N, \leq^N >$. כאן 1 – מינימום ואין מקסימום.

2. $< P(\{1,2,3\}), \subseteq >$ (שרטוט)
כאן Ø – מינימום ,
$\{1, 2, 3\}$ - מקסימום



3. (שרטוט)
כאן אין מינימום,
f - מקסימום



<u>*טענה*</u>. בקבוצה סדורה חלקית יש לכל היותר מינימום אחד.

<u>*הוכחה*</u>. תהא $<A, R>$ קבוצה סדורה חלקית. נניח ש- $a,b \in A$ שני איברי מינימום של A.
מכן ש- a מינימום נובע $a \leq b$
מכן ש- b מינימום נובע $b \leq a$
מכן ש- $\leq$ אנטיסימטרי מקבלים $b=a$.

<u>*טענה*</u>. אם a מינימום בקבוצה סדורה חלקית $<A, R>$ אז הוא איבר מינימלי בה.

<u>*הוכחה*</u>. נניח ש- $b \in A$ מקיים $b \leq a$. צריך להוכיח $b=a$ ואמנם מכן ש- a מינימום $a \leq b$. מהאנטי סימטריות נובע $b=a$. לכן לא קיים $a \neq b \in A$ כך ש- $b \leq a$.

<u>*משפט*</u>. בכל קבוצה סדורה חלקית סופית קיים לפחות איבר מינימלי אחד $<A, R>$.

הוכחה. נניח שבקבוצה הנתונה אין איבר מינימלי. יהא $a \in A$ איבר כלשהו של הקבוצה.
לפי הנחה a איננו מינימלי, לכן חייב להיות איבר $x_1 \in A$ המקיים $x_1 \le a$ ו- $x_1 \ne a$.
גם אינו מינימלי, לכן חייב להיות איבר $x_2 \in A$ שונה מ- x_1 המקיים $x_2 \le x_1$, וכך הלאה.

באופן כזה מתקבלת סדרה של איברים המקיימים:

(1) $\ldots \le x_{n+1} \le x_n \le \ldots \le x_2 \le x_1$

(2) $x_{i+1} \ne x_i$ עבור כל i.

מכיוון שמספר איברי הקבוצה הוא סופי, חייבים להיות בסדרה זו שני איברים שווים, למשל, $x_{k+t} = x_k$, $t \ge 1$. לפי התכונה (1) נקבל $x_{k+1} \le x_k$. לפי טרנזיטיביות של היחס $\le$ נקבל $x_{k+1} \ge x_{k+t} = x_k$. לבסוף מתקיימים התנאים הבאים: $x_k \le x_{k+1}$ ו- $x_{k+1} \le x_k$. בגלל האנטי-סימטריות של היחס $\le$ נקבל $x_k = x_{k+1}$, בניגוד למבנה הסדרה (תכונה (2)).
סתירה זו מוכיחה, כי חייב להיות ב- A לפחות איבר מינימלי אחד.

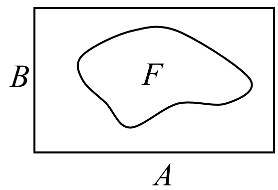
חשוב לשים לב שאם A היא קבוצה אינסופית אז המשפט האחרון לא תמיד נכון. לדוגמא, ב- $<\mathbf{Z}, \le>$ אין איבר מינימלי אך ב- $<\mathbf{N}, \le>$ יש איבר מינימלי (מספר 1).

2. פונקציות.

א) הגדרה של פונקציה. תחום, טווח ותמונה של פונקציה

תהיינה A ו- B קבוצות כלשהן . נגדיר יחס מ- A ל- B .

הגדרה 1. תת-קבוצה F כלשהי של מכפלה קרטזית $A \times B$ נקראת יחס מ- A ל- B .
(ז"א $F \subseteq A \times B$)



דוגמא 1. $A = \{1,2,3\}, \quad B = \{a,b\}$

$A \times B = \{<1,a>, <2,a>, <3,a>, <1,b>, <2,b>, <3,b>\}$,

$F = \{<1,a>, <2,b>, <3,b>\}$

F הוא היחס מ- A ל- B .

הגדרה 2. יחס F מ- A ל- B נקרא *פונקציה* אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ אחד ויחיד כך ש- aFb .

במילים אחרות אם F היא פונקציה אז מ- aFb_1 ו- aFb_2 נובע $b_1 = b_2$.

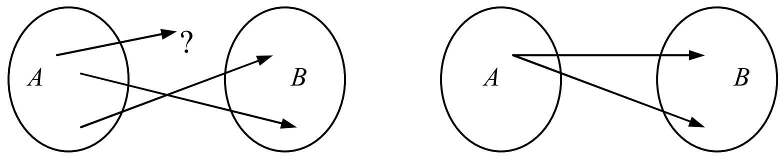
דוגמא 2. תהיינה קבוצות A ו- B הנזכר לעיל בדוגמא 1 .
יהיו F_1 ו- F_2 יחסים מ- A ל- B :

$F_1 = \{<1,a>, <2,b>, <3,b>\}$

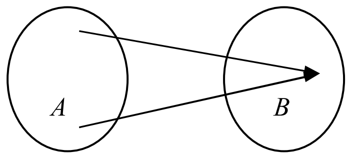
$F_2 = \{<1,a>, <1,b>, <3,a>\}$

אזי F_1 היא פונקציה מ- A ל- B אולם F_2 אינה פונקציה מכיוון ש- $1F_2b$ ו- $1F_2a$ אבל $a \ne b$.

נשים לב. אנו *אוסרים* על המצבים:



אך מרשים



תיאור אחר של פונקציה הוא הבא.

הגדרה 3. תהיינה A ו- B קבוצות כלשהן. נניח כי לכל $a \in A$ מתאים איבר יחיד $b \in B$. האוסף של התאמות כאלה יקרא פונקציה מ- A ל- B.

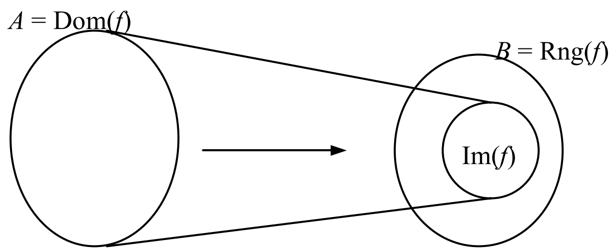
נכתוב $f : A \to B$ או $A \xrightarrow{f} B$.

נכתוב *f(a)* קרי "*f* של *a*" עבור האיבר של B אשר f מתאימה ל- $a \in A$. זהו הערך של f ב- a או התמונה של a תחת f.

ברור כי הגדרות 2 ו-3 של פונקציה שקולות.
מספיק לשים לב על הקשר ביניהן: $afb \Leftrightarrow f(a) = b$

מינוח: A תקרא *תחום* (domain) הפונקציה ותסומן $\mathrm{Dom}(f)$,
B תקרא *טווח* (range) הפונקציה ותסומן $\mathrm{Rng}(f)$,

נגדיר גם Im(*f*): $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

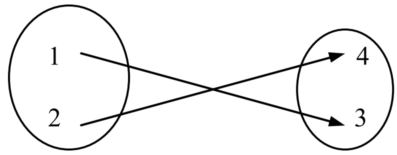


הגדרה 4. לכל פונקציה $f : A \to B$ תת-קבוצה $\{< a, f(a) > \mid a \in A\}$ נקראת *גרף* של הפונקציה f.

דוגמאות. 3. $f(x) = x^2$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Rng}(f) = \mathbf{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$. הגרף של f הוא פרבולה.

4. $A =< \{1,2\}, B = \{3,4\}, f(1) = 3, f(2) = 4$
$\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2\}, \ \mathrm{Rng}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{3, 4\}$

גרף של הפונקציה :



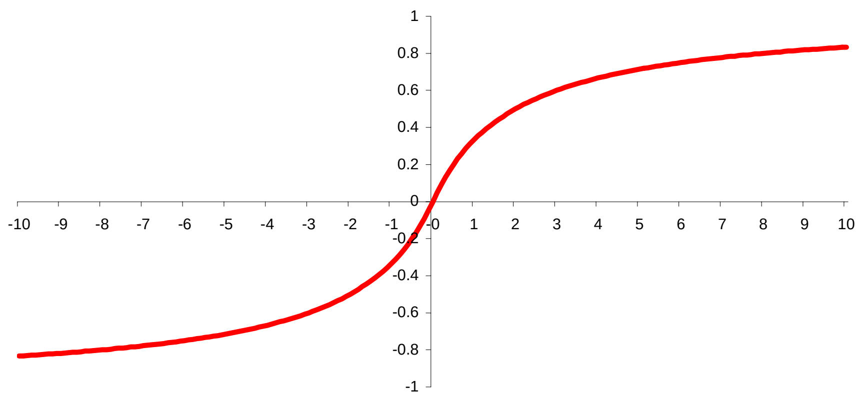
5. A={אזרחי ישראל} , $B = \boldsymbol{N}$, $f = \{ <a, n> \mid n \in \boldsymbol{N}$ ת"ז מס' מתאים $a \in A$-ל$\}$,
$\mathrm{Dom}(f)=A$, $\mathrm{Rng}(f) = B = \boldsymbol{N}$, $\mathrm{Im}(f) =$ {קבוצת כל מספרי הזהות הקיימים}$\subset \boldsymbol{N}$

ב) פונקציות על ופונקציות חד-חד-ערכיות.

__הגדרה.__ נאמר כי פונקציה $f : A \to B$ היינה __על__ B אם $\mathrm{Im}(f) = B$.

__סימון:__ $f : A \xrightarrow{\text{על}} B$

__דוגמאות.__ 6. נבדוק האם פונקציה $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x) = \dfrac{x}{|x|+2}$ היא __על__.
ברור שלכל $x \in \boldsymbol{R}$ מתקיים $|f(x)| = \dfrac{|x|}{|x|+2} < 1$ ולכן $\mathrm{Im}(f) = (-1,1) \subset \boldsymbol{R}$.
אזי f אינה על $\boldsymbol{R}$. גרף של הפונקציה הוא הבא :



7. נגדיר פונקציה $g : \boldsymbol{R} \to (-1,1)$ ע"י נוסחה $g(x) = \dfrac{x}{|x|+2}$.
נראה ש- g היא פונקציה __על__.
יהא $y \in (-1,1)$. נוכיח שקיים $x \in R$ כך ש- $g(x) = y$.
באמת, אם $y \geq 0$ אז $x \geq 0$ ומקבלים $x = \dfrac{y}{1-y}$ ואם $y \leq 0$ ומרגלים
מקבלים $x = \dfrac{y}{1+y}$.

__הגדרה__ 5. $f : A \to B$ - פונקציה *__חד-חד-ערכית__* אם אין $a_1 \neq a_2$ כך ש- $f(a_1) = f(a_2)$

__סימון:__ $f : A \xrightarrow{1-1} B$ או $f : A \xrightarrow{\text{חח"ע}} B$.

<u>דוגמאות</u>. 8. $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=x^2$ היא <u>אינה</u> חח"ע כי למשל $f(2)=f(-2)=4$ אך $2\neq -2$

9. פונקצית $f(x)=2x+1$ היינה חח"ע

10. נראה כי פונקציה $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$ חח"ע.

נניח כי $x_1,x_2\in\boldsymbol{R}$ ו- $f(x_1)=f(x_2)$ ונראה כי בהכרח $x_1=x_2$.
נשים לב ש-

$$f(x)>0\Leftrightarrow x>0\ ,\ f(x)<0\Leftrightarrow x<0\ ,\ f(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

לכן מ- $f(x_1)=f(x_2)$ נובע כי או $x_1=x_2=0$ או $x_1x_2>0$.
במקרה הראשון סיימנו.

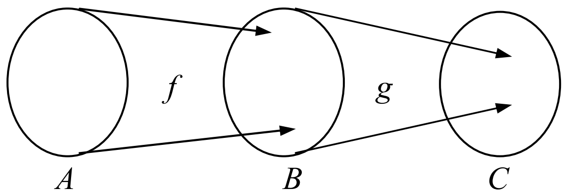
במקרה השני מקבלים $\dfrac{x_1}{|x_1|+1}=\dfrac{x_2}{|x_2|+1}$

א. $x_1>0,x_2>0$. $\dfrac{x_1}{x_1+1}=\dfrac{x_2}{x_2+1}\leftarrow x_1=x_2$

ב. $x_1<0,x_2<0$. $\dfrac{x_1}{-x_1+1}=\dfrac{x_2}{-x_2+1}\leftarrow x_1=x_2$

ג) הרכבת פונקציות .

<u>הגדרה</u>. תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$ כמתואר



יהי $a\in A$. אזי $f(a)\in B$. קבוצה B היא תחום של g. מכאן שניתן לקבל תמונה של $f(a)$ תחת הפונקציה g כלומר $g(f(a))$. הפונקציה זו מ- A ל- C כזאת שלכל $a\in A$ מתאים $g(f(a))$ השייך ל- C נקראת <u>הרכבת פונקציות</u> f ו- g ותסומן $g\circ f$.

לפי ההגדרה : $(g\circ f)(a)=g(f(a))$

<u>טענה</u>. הרכבה $g\circ f:A\to C$ של פונקציות $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$ היא פונקציה.

<u>הוכחה</u>. יהא $a\in A$. קיים $b\in B$ אחד ויחיד כך ש- $<a,b>\in f$. ל- b זה קיים $c\in C$ אחד ויחיד כך ש- $<b,c>\in g$. מכאן ש- $<a,c>\in g\circ f$.
<u>יחידות</u>. נניח שגם $c'\in C$ מקיים $<a,c'>\in g\circ f$. מהגדרת $g\circ f$ קיים $b'\in B$ כך ש- $<a,b'>\in f\ ,<b',c'>\in g$. מיחידות b נובע ש- $b=b'$. לכן $<b,c'>\in g$. מיחידות c נובע ש- $c=c'$.

<u>הערות</u>. 1. לשים לב להפוך הסדר: $g\circ f$
2. $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathrm{Dom}(f)$
3. $\mathrm{Rng}(g\circ f)=\mathrm{Rng}(g)$
4. $\mathrm{Im}(g\circ f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$

יתכן כי $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im}(g)$

דוגמא. יהיו $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x)=x^2$,
$g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ המוגדרת ע"י הנוסחה $g(y)=y+1$.
אזי $f\circ g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ היא $(g\circ f)(x)=x^2+1$,
$\mathrm{Im}(g)=\boldsymbol{R}$, $\mathrm{Im}(g\circ f)=[1,\infty)$.

הערה. הרכבת פונקציות אינה קומוטטיבית. ככלל $g\circ f\neq f\circ g$. למעשה יתכן ש- $g\circ f$ מוגדרת אך $f\circ g$ לא. גם כאשר אין בעייה בתחומי ההגדרה לא חייב להתקיים שוויון $g\circ f=f\circ g$. לדוגמא, $g\circ f\neq f\circ g$ כי $(x+1)^2\neq x^2+1$.

הגדרה. פונקציה $\mathrm{Id}_A:A\to A$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $\mathrm{Id}_A(a)=a$ נקראת *פונקציה זהות*.

טענה. לפונקציה $f:A\to B$ מתקיים $f\circ \mathrm{Id}_A=f$, $\mathrm{Id}_B\circ f=f$.

הוכחה. ל- $a\in A$ $(f\circ \mathrm{Id}_A)(a)=f(\mathrm{Id}_A(a))=f(a)$, $(\mathrm{Id}_B\circ f)(a)=\mathrm{Id}_B(f(a))=f(a)$.

טענה. הרכבת פונקציה היינה אסוציאטיבית, כלומר לפונקציות $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$ מתקיים $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$.

הוכחה. התחום A והטווח D של פונקציות $(h\circ g)\circ f$ ו- $h\circ(g\circ f)$ שווים.
יהא $a\in A$. אזי:

$$((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=h(g(f(a)))=h((g\circ f)(a))=(h\circ(g\circ f))(a)$$

ד) פונקציה הפיכה. פונקציה הפוכה.

הגדרה. תהא $f:A\to B$ פונקציה. נאמר כי f *הפיכה* אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=\mathrm{Id}_A$, $f\circ g=\mathrm{Id}_B$. אם פונקציה g קיימת אז היא נקראת *הפוכה* לפונקציה f .

סימון: f^{-1} - פונקציה הפיכה ל- f.

דוגמאות. 1. $f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$ כש- $f(n)=n+1$
$g:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$ כש- $g(n)=n-1$ - פונקציה הפוכה ל- f.

2. $f:\{1,2,3\}\to(4,5,6\}$ כש- $f(1)=4,\ f(2)=6,\ f(3)=5$,
$g:\{4,5,6\}\to(1,2,3\}$ כש- $g(4)=1,\ g(6)=2,\ g(5)=3$,
$g(n)$ - פונקציה הפוכה ל- f.

3. $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ כש- $f(x)=x^2$.
פונקציה הזו *לא הפיכה* .
אילו הייתה $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ כך ש- $f\circ g=g\circ f=\mathrm{Id}_R$ אז לכל x צריך להתקיים $g(x)^2=x=g(x^2)$.
בפרט : $1=g(1^2)=g(1)$, $-1=g((-1)^2)=g(1)$ - סתירה.

משפט. פונקציה $f:A\to B$ הפיכה אם ורק אם היא על וחד-חד-ערכית.

הוכחה. *א.* נוכיח כי אם f הפיכה אז היא על וחח"ע .

אם f הפיכה אז קיימת $g : B \to A$ כך ש-

$$f \circ g = \mathrm{Id}_B \ , \ g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad (*)$$

נראה ש-f חח"ע. יהיו $a_1, a_2 \in A$ ונניח כי $f(a_1) = f(a_2)$. אזי

$$a_1 = \mathrm{Id}_A(a_1) = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2) = \mathrm{Id}_A(a_2) = a_2$$

נראה ש-f על. יהא $b \in B$. נגדיר $a = g(b)$. אזי $a \in A$ ומתקיים

$$f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{Id}_B(b) = b$$

ב. צריך להוכיח כי אם f על וחח"ע אז היא הפיכה.

בונים פונקציה הפוכה לפונקציה f.
נגדיר יחס g מ-B ל-A באופן הבא: $g = \{<b,a> \mid f(a) = b, b \in B, a \in A\}$.
נוכיח כי g היא פונקציה מ-B ל-A.
מכיוון ש-f פונקציה על נקבל כי לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש-$f(a)=b$.
ז"א $B = \mathrm{Dom}\,(g)$. כעת אם $g(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$ אז $b = f(a_1) = f(a_2)$ לפי הגדרת g בניגוד לחד-חד ערכיות של f.
הוכחנו כי g היא פונקציה מ-B ל-A.
נרשום $f : A \to B, \quad g : B \to A$ ומתקיימים התנאים

$$g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b \qquad (**)$$

נציג לשוויון $f(a)=b$ מ-(**) ערך $g(b)$ במקום a ונקבל

$$(\forall b) f(g(b)) = b \Rightarrow f \circ g = \mathrm{Id}_B$$

נציג לשוויון $g(b)=a$ מ-(**) ערך $f(a)$ במקום b ונקבל

$$(\forall a) g(f(b)) = a \Rightarrow g \circ f = \mathrm{Id}_A \ .$$

כלומר g פונקציה הפוכה לפונקציה f.

3. **<u>חשבון עוצמות</u>.**

א) קבוצות שקולות. עוצמה של קבוצה.

<u>*הגדרה.*</u> תהינה A, B קבוצות. נאצר כי A, B <u>*שוות עוצמה*</u> (או <u>*שקולות*</u> או <u>*איזומורפיות*</u>) אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \to B$. אנחנו אומרים גם ש-f הוא <u>*איזומורפיזם*</u> בין A ל-B.

<u>*סימון*</u>: $A \sim B$.

<u>*דוגמאות.*</u> 1. $\boldsymbol{Z}$ ו- $2\boldsymbol{Z}$ שוות עוצמה,
$f(n) = 2n \quad f : \boldsymbol{Z} \to 2\boldsymbol{Z}$ חח"ע ועל.

2. $\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$ ו- $\boldsymbol{N}$ שוות עוצמה,

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \in \boldsymbol{N} \text{ זוגי} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & n \in \boldsymbol{N} \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad g : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$$ חח"ע ועל.

3. $\boldsymbol{C}$ שוות עוצמה ל- $\boldsymbol{R}^2$,

<u>*שאלות*</u>: האם $\boldsymbol{C}$ ו- $\boldsymbol{N}$ שוות עוצמות ?

האם C ו- R שוות עוצמות ?

טענה. שוויון עוצמה הוא יחס שקילות .

הוכחה פשוטה.

הגדרה. מחלקת השקילות של קבוצה A ביחס ~ תקרא העוצמה של A ותסומן $|A|$.

הערה. $A \sim B \Leftrightarrow |A|=|B|$

סימון. α, β, γ יסמנו עוצמות .

הגדרה. קבוצה A תקרא סופית אם היא שוות עוצמה למספר טבעי $n = |\{1,2,...,n\text{-}1\}|$.

הערה. לפיכך מושג העוצמה היינו הכללה של מושג המספר לקבוצות אינסופיות.

ב) קבוצות בנות מניה.

הגדרה. קבוצה A תקרא *בת מנייה* אם היא שקולה (איזומורפית) לקבוצה $\mathbf{N}$.

את העובדה שהקבוצה A היא בת מניה נסמן $|A| = \aleph_0$.

דוגמאות. 1. קבוצת כל המספרים הטבעיים הזוגיים $N_2 = \{2,4,...,2n,...\}$ היא קבוצה בת מנייה .
איזומורפיזם בין N_2 לבין $\mathbf{N}$ הוא הבא $f : \mathbf{N} \to N_2$, $f(n) = 2n$.

2. קבוצה $\mathbf{Z}$ כל המספרים השלמים היא בת מנייה , ז"א $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$.
איזומורפיזם בין $\mathbf{Z}$ לבין $\mathbf{N}$ הוא הבא:

$$g : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}, \quad \begin{cases} g(n) = 2n+1, & n \ge 0 \\ g(n) = 2n, & n < 0 \end{cases}$$

משפט. קבוצה $\mathbf{Q}$ כל המספרים הרציונליים היא קבוצה בת מנייה.

הוכחה. כל מספר רציונלי ניתן לרשום כצורה מצומצמת (למשל את המספר $\frac{6}{-8}$ נציג כי $\frac{-3}{4}$).

נגדיר גובה h של מספר $\alpha = \frac{p}{q}$ (כאשר $q>0$, $(p, q) = 1$) באופן הבא : $h = |p| + q$.
מספר שברים המתאימים לגובה מסוימת h הוא סופי. למשל, לגובה 1 מתאים רק שבר $0 = \frac{0}{1}$, לגובה 2 - מספרים $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}$, לגובה 3 - מספרים $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$, וכך הלאה .
כעט נרשום כל המספרים הרציונליים בסדרה הבאה לפי גובות שלהם :

$$0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, ...$$

הצלחנו לסדר את המספרים הרציונליים . כלומר קבוצה $\mathbf{Q}$ היא קבוצה בת מנייה .

ג) השוואת עוצמות . משפט קנטור-ברנשטיין.

נגדיר עכשיו יחס סדר לבין העוצמות שירחיב את הסדר הרגיל ב- N .

הגדרה. תהינה A, B קבוצות.
נאמר כי $A \lesssim B$ אם ורק אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$.

טענה. אם $A \subseteq B$ אז $A \lesssim B$

הוכחה ברורה.

טענה לכל קבוצות A, B, C, D , אם $A \lesssim B$, $A \sim C$, $B \sim D$ אז $C \lesssim D$.

הוכחה . מההנחות קיימות פונקציות

$f : C \to A$ חח"ע ועל ,

$g : A \to B$ חח"ע ,

$h : B \to D$ חח"ע ועל ,

אז $(h \circ g \circ f) : C \to D$ חח"ע .

הגדרה. תהינה α, β עוצמות . נאמר כי $\alpha \le \beta$ אם קיימת קבוצה A מעוצמה α וקיימת קבוצה B מעוצמה β כך ש- $A \lesssim B$.

אם $n, m \in N$ ו- $n \le^N m$ אז $|\{1,2,...,n\}| \le |\{1,2,...,m\}|$.

אם נזהה את מספר n עם העוצמה $|\{1,2,...,n\}|$ אז מקבלים שהסדר $\le$ על העוצמות ירחיב את $\le^N$ על $\boldsymbol{N}$.

ניתן להוכיח כי ליחס $\le$ על העוצמות מתקיימים רפלקסיביות וטרנזיטיביות . אנטי-סימטריות של היחס נובע מהמשפט הנקרא

משפט קנטור-ברנשטיין (Cantor-Bernstein) . לכל שתי קבוצות A ו- B , אם $A \lesssim B$ ו- $B \lesssim A$ אז $A \sim B$.

הוכחה ארוכה מעוד (מחוץ לקורס שלנו) .

ניסוח שקול של *משפט קנטור-ברנשטיין:*

תהינה α, β עוצמות . אם $\alpha \le \beta$ ו- $\beta \le \alpha$ אז $\beta = \alpha$.

כלומר, יחס $\le$ היינו אנטי-סימטרי , ולכן הוא יחס סדר חלקי .

טענה. ל- $a < b$ ממשיים:

1. $|(0, 1)| = |(a, b)|$,
2. $|(a, b)| = |(a, b]| = |[a, b)| = |[a, b]|$
3. $|R| = |(0, 1)|$

מכן: כל שני קטעים היינם שווי עוצמה ועוצמתם כעוצמת R .

הוכחה. 1. הפונקציה $f: (0, 1) \to (a, b)$, $f(x) = a + x(b - a)$ היינה חח"ע ועל.

2. מתקיים

$$(a,b) \subseteq (a,b] \subseteq [a,b] \subseteq (a-1,b+1)$$
$$(a,b) \subseteq [a,b) \subseteq [a,b] \subseteq (a-1,b+1)$$

מכאן

$$|(a,b)| \le |(a,b]| \le |[a,b]| \le |(a-1,b+1)|$$
$$|(a,b)| \le |[a,b)| \le |[a,b]| \le |(a-1,b+1)|$$

ע"פ 1. $|(a, b)| = |(0, 1)| = |(a-1, b+1)|$.

ממשפט קנטור-ברנשטיין, כל האי-שוויונות דלעיל היינן שוויונות.

3. הפונקציה $f: (0, 1) \to R$, $f(x) = tg(0.5\pi x)$ היינה חח"ע ועל.

ד) משפט האלכסון.

<u>סימון</u>: $|N| = \aleph_0$, $|R| = \aleph$.

הוכחנו כי $|R| = |(0,1)|$, כלומר $|(0,1)| = \aleph$

<u>משפט האלכסון של קנטור</u> (Cantor) : $|N| < |[0,1)|$ (כלומר $\aleph_0 < \aleph$).

<u>הוכחה</u>. א) קיימת פונקציה חח"ע $f: N \to [0,1)$. (למשל $f(n) = n-1$).
לכן $|N| \le |[0,1)|$.

ב) נראה שאין פונקציה $g: N \to [0,1)$ <u>על</u>.
תהא $g: N \to [0,1)$ פונקציה כלשהי. נוכיח שהיא <u>לא על</u>.

נרשום בהצגות מעוגלות:

$$g(1) = 0.\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\ldots ,$$
$$g(2) = 0.\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23}\ldots , \qquad \varepsilon_i \in \{0,1\ldots9\}$$
$$g(3) = 0.\varepsilon_{31}\varepsilon_{32}\varepsilon_{33}\ldots ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

לכל i נבחר $\delta_i \in \{0,1\ldots8\}$ כך ש- $\delta_i \neq \varepsilon_i$.
יהא $a = 0.\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}\ldots$. זו הצגה מעוגלת.

נשים לב:

$\delta_1 \neq \varepsilon_1$ ולכן $a \neq g(1)$
$\delta_2 \neq \varepsilon_2$ ולכן $a \neq g(2)$
....

מכאן רואים ש- $a \notin \mathrm{Im}(g)$. לפיכך g אינה על.

מהמשפט האחרון רואים שקיימות קבוצות אינסופיות <u>לא שקולות.</u>

<u>משפט קנטור</u>. לכל קבוצה A מתקיים $|A| < |P(A)|$.

<u>הוכחה</u>. א) ברור כי $|A| \le |P(A)|$, ואמנם נגדיר פונקציה $f: A \to P(A)$, $f(a) = \{a\}$
היא חח"ע : $f(a) = f(b) \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$.

ב) נוכיח כי אין פונקציה $g: A \to P(A)$ <u>על</u>.
נניח ש- $g: A \to P(A)$ פונקציה. נראה ש- g אינה על.

תהא $B = \{b \in A \mid b \notin g(b)\}$.

ברור ש- $B \in P(A)$. נניח בשלילית כי $B \in \mathrm{Im}(g)$. אזי קיים $a \in A$
כך ש- $B = g(a)$.

- אם $a \in B$ אז $a \notin g(a)$ כלומר $a \notin B$ - <u>סתירה</u>.
- אם $a \notin B$ אז $a \in g(a)$ כלומר $a \in B$ - <u>סתירה</u>.

מכן שבכל מקרה קיבלנו סתירה נובע ש- $B \notin \mathrm{Im}(g)$ ולכן g אינה על.