נושא 1. **מושגי יסוד של תורת הקבוצות . קומבינטוריקה**

תורת הקבוצות נמצאת בבסיס של מתמטיקה. ניתן להציג את הנושא במסגרת אקסיומות פורמליות אך אנו נשתמש בגישה אינטואיטיבית .

1. הקבוצה ואיברי הקבוצה

מושג הקבוצה הוא מושג הבסיסי . ככזה לא נגדיר אותו, אך נבין את הקבוצה כאוסף של עצמים (בעלי משמעות מתמטית) .
לדוגמא את הסימון {1- ,3 ,5} מבינים כי הקבוצה שכוללת את העצמים 5 , 3 ו- 1- . נאמר כי המספרים האלה *שייכים* לקבוצה הנ"ל ולחילופין כי הן *איברים* שלה. את העובדה שהאיבר 5 (למשל) שייך לקבוצה $A=\{5, 3, -1\}$ מסמנים בעזרת סימון $\in$: $5 \in A$ או $5 \in \{5,3,-1\}$.
את העובדה שמספר 2 לא שייך לאותה קבוצה $A=\{5, 3, -1\}$ מסמנים בעזרת סימון $\notin$: $2 \notin A$ או $2 \notin \{5,3,-1\}$.
במקרה כללי:
$x \in A$ - " x איבר של קבוצה A " או " x שייך לקבוצה A " ,
$y \notin A$ - " y אינו איבר של קבוצה A " או " y לא שייך לקבוצה A " ,

הגדרה. קבוצות תחשבנה *שוות* אם יש להן בדיוק אותם איברים

סדר אזכור האברים בקבוצה אינו משנה. כך $\{19,5,-9\} = \{5,-9,19\}$
גם אופן תאור של הקבוצה אינו משנה כשאומרים על שוויון הקבוצות. למשל $\{5, -9, 19\} = \{4+1, 5-14, 10+9\}$
מספר האזכורים של איבר הקבוצה גם אינו משנה. כך $\{19,5,5,5,-9,19,-9\} = \{5,-9,19\}$
לדוגמא קבוצה $\{a_1, a_2, a_3\}$ יכולה לכלול איבר אחד, שניים, או שלושה - הדבר תלוי בקיום שוויון בין האיברים a_1, a_2, a_3 .

יש קבוצות *סופיות* וקבוצות *אינסופיות* .

קבוצה יכולה להיות איבר של קבוצה אחרת.

דוגמאות: $\{1,9,\{19,3\},8\}$, $\{\{1,9\},\{19,3\}\}$, $\{\{1\}\}$

צריך לשים לב ש- $1 \neq \{1\} = \{\{1\}\}$

דוגמאות: $\{\{1,9\},8\} \neq \{8,\{9,1\},1\}$, $\{\{1,9\},8\} = \{8,\{9,1\},8\}$, $\{\{1\}\}$

קבוצות המספרים המוכרות.

המספרים הטבעיים : $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,...\}$,
המספרים השלמים : $\boldsymbol{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
המספרים הרציונליים : $\boldsymbol{Q}$, המספרים הממשיים : $\boldsymbol{R}$, המספרים המרוכבים : $\boldsymbol{C}$

נשתמש בכתיבה נוספת לקבוצות.

קבוצת כל העצמים המקיימים את התנאי - $\{x \mid \text{תנאי}\}$
קבוצת כל העצמים בקבוצה S המקיימים את התנאי - $\{x \in S \mid \text{תנאי}\}$

דוגמאות:

1. $\{2,4,6,...\} = \{ x \in \boldsymbol{N}$ ו- x מתחלק ב $2- \mid x \}$
$\{2,4,6,...\} = \{ x \in \boldsymbol{N} \mid$ x מתחלק ב $2- \}$

2. $\{y$ מתחלק ב $6- \mid y \in \boldsymbol{N}\} = \{y$ מתחלק ב $2-$ ו- y מתחלק ב $3- \mid y \in \boldsymbol{N}\} \neq$
$\neq \{y$ מתחלק ב $2-$ או- y מתחלק ב $3-\}$

הערה. במתמטיקה A או B פירושו שאו A או B או שניהם מתקיימים.

הקבוצה הריקה $\varnothing$ - קבוצה שאין לה איברים.
לכל x מתקיים $x \notin \varnothing$

דוגמה: $\{p$ נקודה במישור שדרכה עברים 2 ישרים שונים המקבילים זה לזה $\mid p\}$

לא תמיד ברור מראש שהקבוצה המוגדרת ע"י איזושהי תנאי היא ריקה. למשל קבוצה בעלי החיים ממשפחת הדינוזאורים החיים כיום יכולה להיות ריקה, אך גם יכולה לכלול את המפלצת מלוך נס. או קבוצת כל האנשים בגיל מעל 130 שנה.

הערה: $\varnothing \neq \{\varnothing\} \neq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

2) תת-קבוצות. קבוצת החזקה של קבוצה נתונה.

הגדרה. נאמר כי קבוצה A היא תת-קבוצה של קבוצה B או לחילופין B מקיף את A אם כל איברי A היינם גם איברים של B.

$A \subseteq B$ - יסמן ש- A היא תת קבוצה של B.

דוגמאות. 1. $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C}$
2. $A \subseteq A$ לכל קבוצה A,
3. $\varnothing \subseteq A$ לכל קבוצה A - לפי הגדרה.

טענה: $A=B$ אם ורק אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$

$A \not\subset B$ - יסמן ש- A אינה תת קבוצה של B.

יתכן ש- $A \not\subset B$ וגם $B \not\subset A$.
למשל $\{-9,7\} \not\subset \{0,9\}$ ו- $\{0,9\} \not\subset \{-9,7\}$

אם $A \subseteq B$ אך $A \neq B$ יסמן $A \subset B$ ונאמר ש- A *תת-קבוצה אמיתית* של B או ש-B *מקיפה ממש* את A.

הגדרה. תהא A קבוצה. *קבוצת החזקה* של A היינה:

$$P(A)= \{B \mid \text{תת קבוצה של } A \text{ } B\} = \{B \mid B \subseteq A\}$$

במילים אחרות קבוצת החזקה היא קבוצת כל תת-קבוצות של הקבוצה הנתונה.

דוגמה:
$$P(\{1,2,3\})= \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, (1,3\}, \{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

3. פעולות בין קבוצות

א) איחוד קבוצות וחיתוך קבוצות

הגדרה. תהנה A ו- B קבוצות.
האיחוד של A ו- B הייני
$A\cup B=\{x \mid$ x שייך ל- A או x שייך ל- B $\}$
החיתוך של A ו- B הייני
$A\cap B=\{x \mid$ x שייך ל- A וגם x שייך ל- B $\}$

דוגמא: $\{1,2,3\}\cup\{2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$
$\{1,2,3\}\cap\{2,3,4,5\}=\{2,3\}$

טענה: תהינה A, B, C - קבוצות.

(א) $A\cup B=B\cup A$
(ב) $A\cap B=B\cap A$
(ג) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
(ד) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
(ה) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
(ו) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

הוכחה ע"י חלוקה למקרים.

ב) הפרש קבוצות.

הגדרה. תהנה A ו- B קבוצות.
ההפרש בין A ל- B הייני
$A\setminus B=\{x \mid$ x שייך ל- A ו x לא שייך ל- B $\}$

הערות: 1. $A\setminus A=\emptyset$
2. $A\setminus\emptyset=A$
3. $A\setminus B=\emptyset$ אם ורק אם $A\subset B$.

טענה: (כללי דה מורגן). תהינה X, B, A קבוצות.
(א) $X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$
(ב) $X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$.

הוכחה.
(א) נראה תחילה כי $X\setminus(A\cup B)\subseteq(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$
יהא $x\in X\setminus(A\cup B)$. אזי $x\in X$ ו- $x\notin A\cup B$
מכאן $x\notin A$ ו- $x\notin B$. לכן $x\in X\setminus A$ וגם $x\in X\setminus B$
קבלנו $x\in(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$ כנדרש.

שנית נראה כי $(X\setminus A)\cap(X\setminus B)\subseteq X\setminus(A\cup B)$,
יהא $x\in(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$. אזי $x\in X\setminus B$ ו- $x\notin X\setminus A$
לכן $x\notin A$, $x\notin B$, $x\in X$
מכאן $x\notin A\cup B$ ולכן $x\in X\setminus(A\cup B)$ כנדרש.
אז מתקיים $X\setminus(A\cup B)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$.
(ב) באופן דומה ל-(א).

4). זוגות סדורים של איברים. מכפלה קרטזית של קבוצות

הגדרה. זוג סדור הוא זוג עצמים (לאו דווקא שונים) שבו נתון סדר , ז"א נתון איזה עצם הראשון ואיזה השני .

דוגמה. $<3,4>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 3 ואיבר השני 4 ,
$<4,3>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 4 ואיבר השני 3 ,

נדגיש ש- $<3,4> \neq <4,3>$

$<3,3>$ - הזוג הסדור שאיברו הראשון 3 ואיבר השני 3 ,

הערה. לא משתמשים בסימון $\in$ לזוגות סדורים .

שוויון זוגות סדורים. נאמר כי $<a,b> = <c,d>$ אם ורק אם $a = b$ וגם $c = d$.

באופן דומה נדבר על שלשות סדורות, רביעיות סדורות וכו' .

הגדרת מכפלה קרטזית.

תהינה A, B קבוצות. נגדיר

$$A \times B = \{< a,b >| a \in A, b \in B\}$$

הקבוצה $A \times B$ נקראת *מכפלה קרטזית* קבוצה A בקבוצה B .

בדרך כלל $A \times B \neq B \times A$

דוגמה 1.

$$\{1,2\} \times \{1,3,4\} = \{< 1,1 >, < 1,3 >, < 1,4 >, < 2,1 >, < 2,3 >, < 2,4 >\}$$
$$\{1,3,4\} \times \{1,2\} = \{< 1,1 >, < 1,2 >, < 3,1 >, < 3,2 >, < 4,1 >, < 4,2 >\}$$

דוגמה 2.

מישור- $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{< x, y >| x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}$

דוגמה 3.

לכל קבוצה A מתקיים $\varnothing \times A = \varnothing$
(כי אין זוגות סדורות שהאיבר הראשון שלהם שייך ל- $\varnothing$.

נעבור עכשיו למקרה חשוב מאוד כאשר מתבוננים רק קבוצות סופיות . חקירת קבוצות סופיות מהווה תוכן של *קומבינטוריקה.*

5). עקרון החיבור ועקרון הכפל .

א) עקרון החיבור.

תהי X קבוצה סופית של n איברים. יהיו $X_1,...X_m$ תת-קבוצות הזרות זו לזו (כלומר לכל i ו- j $X_i \cap X_j = \varnothing$ כאשר $i, j \in \{1,...,m\}$, $i \neq j$) כך ש- $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$. אז $| X |= \sum_{i=1}^{m} | X_i |$.

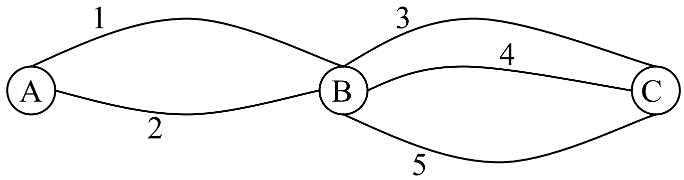
נעיר שב- $|X|$ מסומן מספר האיברים בקבוצה X (ז"א עוצמה של X).

דוגמה. $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$, $X = X_1 \cup X_2 = \{1,2,3,4,5\}$,
$|X_1| = 2$, $|X_2| = 3$, $|X| = |X_1| + |X_2| = 5$.

ב) עקרון הכפל.

אם ניתן לבחור a מהקבוצה X ב- k אפשרויות ואחר כך ניתן לבחור איבר b מאותה קבוצה ב- l אפשרויות אז ניתן לבחור הזוג הסדור $<a,b>$ ב- kl אפשרויות.

<u>דוגמה</u>. אם מ-A ל-B יש 2 דרכים גם מ-B ל-C יש 3 דרכים אז יש 6 דרכיך מ-A ל-C דרך B : <1,3>, <1,4>, <1,5>, <2,3>, <2,4>, <2,5>.



6). <u>חליפות, תמורות וצירופים</u>.

תהי A קבוצה סופית של n איברים (לדוגמה $N_n = \{1,...,n\}$).

<u>הגדרה 1</u>. תת-קבוצה סדורה של k איברים בקבוצה של n איברים נקראת *<u>חליפה</u> של k איברים מתוך n*.

במילים אחרות, חליפה של k איברים מתוך n היא שורה של k איברים שונים מתוך n.

<u>דוגמה 1</u>. תהי $A = \{1,2,3\}$. אז <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,3>, <3,1>, <3,2> היינן חליפות של 2 מתוך 3.

מעיקרון הכפל נובע כמספר כל החליפות של k מתוך n שווה ל-

$$P(n,k) = \underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k\ \text{גורמים}} \qquad (1)$$

לדוגמה מספר כל החליפות של 4 מתוך 9 שווה ל-

$$P(9, 4) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

<u>דוגמה 2</u>. לפי תור שנקבע בהגרלה, 5 כלות בוחרים חתנים מתוך 8 גברים. כמה זוגות שונים יכולים להיווצר כתוצאה מבחירה זה?

<u>פתרון</u>. כל בחירה כמתואר היא חליפה של 5 מתוך 8. שני בחירות יהיו שונות, אם 5 החתנים שנבחרו אינם זהים או, אם הם זהים, אז הם נבחרו בסדר שונה. לכן מספר הזוגות האפשריים הוא:

$$P(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

<u>הגדרה 2</u>. חליפה של n איברים מתוך n נקראת *<u>תמורה</u> של n איברים*.

מספר כל התמורות של n איברים שווה ל-

$$P(n) = P(n,n) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n! \qquad (2)$$

<u>דוגמה 3</u>. בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים על ספה?

<u>פתרון</u>. כל "הושבה" כזו היא תמורה של 6 איברים, ומספר התמורות האלה הוא:

$$P(6) = 6! = 720$$

<u>*דוגמה 4*</u>. בכמה אופנים אפשר להושיב 6 אורחים סביב שולחן עגול, כאשר אין הבדל בין המקומות סביב השולחן מנקודת ראותם של האורחים ?

<u>*פתרון*</u>. יהי a אחד האורחים. נושיב אותו במקום כלשהו ליד השולחן. כיוון שהשולחן עגול ואין, כאמור, הבדל בין המקומות סביבו, הרי אין חשיבות באיזה מקום a יושב. שאר 5 האורחים מתיישבים אז למעשה על ספסל (אמנם מעוגל), המורכב מאשר 5 כסאות . מספר האפשרויות השונות לעשות זאת הוא :

$$P(5) = 5! = 120$$

<u>*הגדרה 3*</u>. *שורה של k איברים מתוך n נקראת <u>חליפה</u> של k איברים מתוך n <u>עם חזרות</u>.*

מספר כל החליפות של k מתוך n עם חזרות שווה ל-

$$\overline{P(n,k)} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ פעמים}} = n^k \qquad (3)$$

<u>*דוגמה 5*</u>. כמה יש מספרים 4-ספרתיים לא כוללים אפס ?

<u>*פתרון*</u>. כל מספר 4-ספרתי כזה הוא חליפה של 4 איברים מתוך 9 עם חזרות ומספר החליפות האלה הוא :

$$\overline{P(9,4)} = 9^4 = 6561$$

<u>*הגדרה 4*</u>. *תת-קבוצה של k איברים בקבוצה של n איברים נקראת <u>צירוף</u> של k איברים מתוך n .*

את השוויון של צירופים נבין כשוויון של תת-קבוצות .

<u>*דוגמה 6*</u>. תהי $A = \{1,2,3\}$. אז $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ היינן צירופים של 2 מתוך 3 .
נעיר כי לדוגמה $\{1,2\} = \{2,1\}$

<u>*טענה*</u>. מספר כל הצירופים של k מתוך n שווה ל-

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (4)$$

<u>*סקיצת ההוכחה*</u>. לכל צירוף מתאימות *k!* חליפות. לכן לפי עקרון החיבור $P(n,k)=C(n,k)\cdot P(n)$.

לצירוף $C(n,k)$ של k מתוך n משתמשים גם בסימונים $\binom{n}{k}$ ו- C_n^k .

אם נכפיל מונה ומכונה בנוסחה (4) פי $(n-k)!$ אז נקבל את הנוסחה:

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \left(\text{או} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \right) \qquad (5)$$

מהנוסחה האחרונה ברור ש-

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} . \qquad (6)$$

נזכור כי לפי הגדרה $0! = 1$. מכאן נובע

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1 \qquad (7)$$

<u>*טענה.*</u>

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \qquad (8)$$

<u>*הוכחה.*</u> נשתמש בנוסחה (5) ונקבל :

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=\frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}.$$

<u>*דוגמה 7.*</u> בכיתה 30 תלמידים. יש לבחור 2 תלמידים למשלחת מסוימת. כמה משלחות שונות אפשר לבחור ?

<u>*פתרון.*</u> מספר המשלחות האפשריות הוא כמספר הצירופים של 2 מתוך 30 (מספר התת-קבוצות של 2 איברים מתוך 30). כאן רק חשוב מי נכנס למשלחת , לסדר הבחירה אין חשיבות. לכן התשובה היא :

$$\binom{30}{2}=\frac{30\cdot 29}{1\cdot 2}=435$$

<u>*דוגמה 8*</u> . על מדף מונחים 10 ספרים שונים בעברית ו- 8 ספרים שונים באנגלית. בכמה אופנים אפשר לבחור מתוך ספרים אלה חבילה המכילה 3 ספרים בעברית ו- 3 ספרים באנגלית ?

<u>*פתרון.*</u> תחילה נבחר 3 ספרים בעברית. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא כמספר הצירופים של 3 איברים מתוך 10 :

$$\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$$

את הספרים באנגלית אפשר לבחור ב-

$$\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56$$

אופנים. כל שלישיה של ספרים בעברית וכל שלישיה של ספרים באנגלית מהוות יחד חבילה אחת, וכל החבילות הנבנות בדרך זו שונות זו מזו. לכן, המספר הכולל של חבילות שונות ניתן לחישוב בעזרת עקרון הכפל: $120 \cdot 56 = 6720$.

7). <u>בינום של ניוטון. תכונות של מקדמים בינומיים . משולש פסקל.</u>

בינום של ניוטון היינו נוסחה לחישוב חזקה טבעית n של דו-איבר $x + a$.

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k} \qquad (1)$$

<u>*סקיצת ההוכחה*</u> .

$$(x+a)^n=\underbrace{(x+a)...(x+a)}_{n\text{ פעמים}}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\,x^k a^{n-k}\ .$$

כל מקדם $\alpha_{k,n-k}$ שווה למספר האיברים הדומים עם $x^k a^{n-k}$ בפולינום נתקבל בפתיחת הסוגריים בביטוי $(x+a)^n$ והמספר הזה שווה למספר האפשרויות של בחירת k מקומות

(ל- x –ים) מתוך n מקומות.

הגדרה. מקדמים של נוסחה (1) נקראים *מקדמים בינומיים.*

תכונות של מקדמים בינומיים:

1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, 2) $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$, 3) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$,

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, 5) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

את התכונות 1) – 3) הוכחנו בסעיף הקודם. תכונות 4) – 5) נתקבל מהנוסחה (1) בהצבות $x = a = 1$ ו- $x = -a = 1$.

עקב התכונות 1). - 3). ניתן להציג מקדמים בינומיים בטבלה אינסופית:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1\\
\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&&&&&&&
\end{array}
$$

הטבלה הזו נקראת *משולש פסקל*. השורה ה – n- ית של המשולש היא שורה של מקדמים בינומיים ל- $(x+a)^{n-1}$.

דוגמה. מצאו מקדם הכי גדול של הפולינום $(x+1)^{12}$.

פתרון. המקדם המבוקש נמצא באמצע של שורה ה-13 במשולש פסקל, כלומר הוא שווה ל-

$$\binom{12}{6}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=924 .$$

8). עקרון האינדוקציה.

ידוע עקרון האינדוקציה מתמטית (רגילה):

תהא $A=\{n_0, n_0+1, n_0+2,\ldots\}$ תת-קבוצה של $\mathbf{Z}$. אם מתקיימים שני התנאים:

(1) למספר n_0 מקיימים תכונה מסוימת α,

(2) לכל מספר $n \geq n_0$, אם תכונה α מתקיימת עבור n אז היא מתקיימת גם עבור $n+1$.

אזי כל איבר של A מקיים את התכונה α .

דוגמה. הוכח כי סכום S_n המספרים האי-זוגיים מ-1 עד $2n+1$ ועד בכלל הוא $(n+1)^2$.

הוכחה. (1) ל- $n_0 = 1$ מוצאים $S_1= 1+(2\cdot 1+1) = 4 = (1+1)^2$.

(2) בהנחה כי $S_n = (n+1)^2$ נוכיח כי $S_{n+1} = ((n+1)+1)^2$.
מקבלים:

$$S_{n+1} = S_n +(2(n+1)+1) = (n+1)^2 +2(n +1)+1 = ((n+1)+1)^2$$

ניתן להכליל את עקרון האינדוקציה לצורה הבאה (הנקראת *עקרון האינדוקציה השלמה*):
תהי α תכונה מסוימת, שאותה יכולים לקיים (או יכולים לא לקיים) מספרים שלמים שאינם קטנים מ-n שלם נתון.
אם n מקיים את α, ואם עבור כל $m > n$ אפשר להוכיח שאם כל k, $n \le k < m$, מקיים את α, אז גם m מקיים את α, אזי כל מספר שלם שאינו קטן מ-n מקיים את התכונה α.

דוגמה. הוכיחו כי את כל מספר טבעי הגדול מ-1 ניתן להציג כמכפלת מספרים ראשוניים.

הוכחה. ברור כי עבור $n=2$ התכונה הנתונה מתקיימת.
היה m מספר טבעי שרירותי בגדול מ-2. בהנחה שהתכונה הזו מתקיימת לכל מספר k בתנאי $2 \le k < m$, נראה שהיא מתקיימת גם עבור m.
אם m מספר ראשוני אז התכונה נכונה. אם לא אז קיימים מספרים q ו-r כך ש-$m = pq$, $q > 1$, $p > 1$, $q < m$, $p<m$. לפי ההנחה ניתן להציג את המספרים q ו-r כמכפלות גורמים ראשוניים. לכן ניתן להציג גם m כאותה צורה.

9). עקרון ההכלה וההפרדה.

אם A_1 ו-A_2 הן שתי קבוצות סופיות אזי

$$| A_1 \cup A_2 |=| A_1 |+| A_2 |-| A_1 \cap A_2 |.$$

במקרה של שלוש קבוצות מתקיימת הנוסחה

$$| A_1 \cup A_2 \cup A_3 |=| A_1 |+| A_2 |+| A_3 |-| A_1 \cap A_2 |-| A_1 \cap A_3 |-| A_2 \cap A_3 |+| A_1 \cap A_2 \cap A_3 |.$$

נכליל את הנוסחאות למקרה של n שרירותי.

נסמן:

סכום מספרי האיברים בכל n הקבוצות - $S_1 = \sum_{i=1}^{n} | A_i |$,

סכום מספרי האיברים בכל $\binom{n}{2}$ חיתוכים של שתי קבוצות מתוך ה-n - $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} | A_i \cap A_j |$,

סכום מספרי האיברים בכל $\binom{n}{3}$ חיתוכים של שתי קבוצות מתוך ה-n - $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} | A_i \cap A_j \cap A_k |$,

....

סכום האיברים בחיתוך כל n הקבוצות - $S_n =| A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n |$.

משפט ההכלה וההפרדה.
נתונות n קבוצות סופיות $A_1, A_2, ..., A_n$. מספר איברי קבוצת האיחוד $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ הוא:

$$| A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n |= S_1 - S_2 + S_3 + ... + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

ללא הוכחה.

המשפט הזה נותן *עקרון ההכלה וההפרדה*.

את עקרון ההכלה וההפרדה ניתן להגדיר בצורה אחרת.

תהי X - קבוצה סופית של N איברים, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ - איזהו תכונות. נסמן X_i - אוסף כל האיברים של X בעלי תכונה α_i,

$N(\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k})=|X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap...\cap X_{i_k}|$ - מספר האיברים בעלי k תכונות $\alpha_{i1},...,\alpha_{ik}$,

$N_0=|X\setminus(X_1\cup X_2\cup...\cup X_n)|$ - מספר האיברים בלי שום התכונות $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$.

אז מתקיימת הנוסחה:

$$N_0=N-S_1+S_2-...+(-1)^n S_n$$

כאשר $S_k=\sum\limits_{1\le i_1<...<i_k\le n} N(\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k})$.

בפרט, אם $n=2$ אז $N_0=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)+N(\alpha_1,\alpha_2)$,

אם $n=3$ אז

$N_0=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-N(\alpha_3)+N(\alpha_1,\alpha_2)+N(\alpha_1,\alpha_3)+N(\alpha_2,\alpha_3)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

דוגמה. תהי $X=\{0,1,2,...,10\}$, α_1 – " x הוא מספר זוגי ", α_2 – " x גדול מ- 6 ", α_3 – " x נמצא בין 2 ובין 8 ". לכמה איברים של X אין אף אחד מהתכונות α_1, α_2, α_3?

פתרון. $N=11$, $N(\alpha_1)=6$, $N(\alpha_2)=4$, $N(\alpha_3)=5$, $N(\alpha_1,\alpha_2)=2$, $N(\alpha_1,\alpha_3)=2$, $N(\alpha_2,\alpha_3)=1$, $N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$.

אז

$$N_0=11-6-4-5+2+2+1-0=1$$

(זה מספר " 1 ").

10). <u>רקורסיה.</u>

א) הגדרה ודוגמאות.

הגדרה. אומרים שקבוצת איברים מוגדרת *באופן רקורסיה* אם:

(1) איברים אחדים של הקבוצה מוגדרים בצורה מפורשת (הם משמשים כבסיס הרקורסיה או כערכים תחיליים),

(2) האיברים הנותרים של הקבוצה מוגדרים באמצעות האיברים שכבר הוגדרו (כלומר, כל האיברים שבבסיס הרקורסיה ואלה שכבר הוגדרו באמצעותם).

אז רקורסיה קושרה את $f(n)$ עם אחד, או יותר, מן הערכים $f(k)$, כאשר $k\in\{1,2,...,n-1\}$ בצורה כזה, שאם ערכים אלה ידועים ניתן לחשב באמצעות היחס הזה את $f(n)$. נוסף לכך נתונים ערכי $f(n)$ עבור ערכים מסוימים של n – אלה הם *הערכים התחיליים* של הרקורסיה.

דוגמאות.

1. הסדרה הנדסית מוגדרת ברקורסיה: $f(n)=f(n-1)\cdot q$, כאשר q הוא מספר נתון (מנת הסדרה). אם הערך התחילי הוא $f(1)$, אזי $f(2)=f(1)\cdot q$, $f(3)=f(2)\cdot q$ יכו'.

2. הנוסחה $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$. כאן $\binom{n}{k}$ היה פונקציה של 2 משתנים n ו- k.

הערכים התחיליים הם $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$ עבור כל n טבעי. נתונים כאן אינסוף ערכים תחיליים.

3. הנוסחה $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$ כאשר n נתון, $k\in\{1,2,...,n\}$, $\binom{n}{0}=1$ נותנת דרך הכי קצרה לחישוב מקדמים בינומיים עבור n נתון. למשל,

$$\binom{9}{1}=\binom{9}{0}\cdot\frac{9}{1}=9,\ \binom{9}{2}=\binom{9}{1}\cdot\frac{8}{2}=9\cdot4=36,\ \binom{9}{3}=\binom{9}{2}\cdot\frac{7}{3}=36\frac{7}{3}=84,\ \binom{9}{4}=\binom{9}{3}\cdot\frac{6}{4}=84\cdot\frac{6}{4}=126,\ldots$$

4. נמצא את מספר המילים מעל האלף-בית $\{0,1\}$, שאין בהן שני אפסים סמוכים. (נקרא למילים כאלה *מותרות*).

נסמן ב- *f(n)* את מספר המילים המותרות באורך *n*. קל לספור ש- *f(1)=2* , *f(2)=3* .

אם מילה מותרת באורך *n* מתחילה ב-1 אזי *n-1* הספרות הבאות של מילה זו מהוות מילה מותרת באורך *n-1*. לפיכך יש *f(n-1)* מילים מותרות באורך n המתחילות ב- 1.

אם מילה מותרת באורך *n* מתחילה ב-0 הספרה השניה שלה חייבת להיות 1, וההמשך הוא מילה מותרת כלשהי באורך *n-2*. לכן מספר המילים המותרות באורך n המתחילות ב- 0 הוא *f(n-2)*.

כיוון שכל מילה חייבת להתחיל ב-1 או ב-0, מתקיים: *f(n) = f(n-1) + f(n-2)* .

זהו יחס רקורסיה המאפשר לחשב את *f(n)* עבור כל *n*, אם ניתן בסיס הרקורסיה.

ככה קיבלנו את הסדרה שכל מספר בה הוא סכום שני המספרים הקודמים לו. אם נגדיר בזה *f(1)=f(0)=1* אז נקבל את הסדרה ...,1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 הנקראת *סדרת פיבונצ'י.*

ב) רקורסיה ליניארית.

הגדרה. הרקורסיה הבאה –

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \ldots + c_k f(n-k)$$

נקראת *רקורסיה ליניארי*.

למציאת נוסחה מפורשת עבור *f(n)* פותרים את המשוואה

$$\lambda^n - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

(הנקראת *המשוואה האופיינית*) ומקבלים:

$$f(n) = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \ldots + A_k\lambda_k^n$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ - שורשים שונים של משוואה אופיינית, $A_1,A_2,\ldots,A_k$ - קבועים הקובעים לפי התנאים התחיליים.

דוגמה. נמצא נוסחה מפורשת עבור *f(n)* של סדרת פיבונצ'י.

במקרה הזה *c₁ = c₂ =1 , k = 2* והמשוואה האופיינית היא $\lambda^2-\lambda-1=0$. שורשי המשוואה הם $\lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2},\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$. לכן $f(n)=A_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$.

מציבים לנוסחה האחרונה את התנאים התחיליים *f(1)= f(0) = 1* ומוצאים

$A_1=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1+\sqrt5}{2},\ A_2=-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1-\sqrt5}{2}$. מכן

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right).$$

11). **פונקציות יוצרות**

הגדרה. תהי $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ סדרה מספרים, סופית או אינסופית. הביטוי

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

נקרא פונקציה יוצרת של הסדרה הנתונה.

נגדיר בין פונקציות יוצרות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \qquad (1)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \qquad (2)$$

אפשר לבדוק כי הפעולות האלה מקיימות את התכונות המאפיינות את החיבור והכפל בחוג הפולינומים כזון קומוטטיביות, אסוציאטיביות ודיסטריבוטיביות.
חילוק אינו תמיד אפשרי, אולם כאשר

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (3)$$

במקרה הזה נרשום גם כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \qquad (4)$$

דוגמאות:

1. הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{ 1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n-1}, 1 \}$ היא

$$f(x) = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^k + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n = (1+x)^n \qquad (5)$$

2. הפונקציה היוצרת של הסדרה האינסופית $\{ 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \}$ היא

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots = \frac{1}{1-x}\,. \qquad (6)$$

זהו סכום של טור הנדסי אינסופי. הפונקציה $\frac{1}{1-x}$ מתאוות את הטור הרשום כאן עבור $|x| < 1$ אך איננו מתעניינים כאן אם x אכן קטן בערכו המוחלט מ- 1. אנו רושמים $f(x) = \frac{1}{1-x}$ בלי לעסוק כלל בערכו של x.

אם נגדיר את $f'(x)$ נקבל

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k+1)x^k + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (7)$$

זאת אומרת הפונקציה $\frac{1}{(1-x)^2}$ היא פונקציה יוצרת של הסדרה $\{ 1, 2, 3, \ldots \}$.

בחישובים עם טורים נוח להשתמש בנוסחה הבאה:
אם

$$f(x)=(1+x+x^2+...+x^k+...)^n$$

אז

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k=1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+...+\binom{n+k-1}{k}x^k+... \qquad (8)$$

<u>בעיה 1</u>. מצא את המקדם של x^{20} ב-
$f(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3+x^4+x^5+...)^5$.

<u>פתרון</u>.

$$f(x)=x(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot x^{10}\cdot(1+x+x^2+...)=x^{11}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^5}=x^{11}(1-x^5)(1-x)^{-6}$$

אז יש למצוא את המקדם של x^9 במכפלה $(1-x^5)(1-x)^{-6}=(1-x)^{-6}-x^5(1-x)^{-6}$, כלומר למצוא את המקדם של x^9 ב- $(1-x)^{-6}$ ולהחסיר ממנו את המקדם של x^4 ב- $(1-x)^{-6}$.

לפי הנוסחה (8) נקבל $\binom{9+6-1}{9}-\binom{4+6-1}{4}=1876$.

<u>בעיה 2</u>. מצא את המספר פתרונות של המשוואה $t_1+t_2=3$ בקבוצת $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ כל המספרים השלמים לא שליליים.

<u>פתרון</u>.
גישה 1. ברור כי $0\le t_1\le 3$ וגם $0\le t_2\le 3$. נסתכל בפונקציה

$$f(x)=(x^0+x^1+x^2+x^3)(x^0+x^1+x^2+x^3)=x^0x^0+(x^0x^1+x^1x^0)+(x^0x^2+x^1x^1+x^2x^0)+$$
$$+(x^0x^3+x^1x^2+x^2x^1+x^3x^0)+(x^1x^3+x^2x^2+x^3x^1)+(x^2x^3+x^3x^2)+x^3x^3=$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$$

זוגות המעריכים בביטוי $x^0x^3+x^1x^2+x^2x^1+x^3x^0$ מייצגים את כל הפתרונות של משוואה הנתונה, ז"א זוגות $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$. מספר הזוגות האלה הוא מקדם של x^3 ב-*f(x)*
אז התשובה היא 4 .

גישה 2. אנו רושמים פונקציה יוצרת כצורה אחרת

$$f(x)=(1+x+x^2+...)(1+x+x^2+...)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

לפי הנוסחה (7) אפשר לרשום

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+...$$

מקדם של x^3 הוא 4 . באופן דומה כזה היה בגישה 1 נקבל את התשובה: 4 .

<u>*שיטה כללית*</u>: כדי למצוא את מספר הפתרונות של משוואת

$$t_1+t_2+...+t_n=k \qquad (*)$$

בקבוצה $\boldsymbol{N}_0$ המקיימים את ההגבלות $0\le t_i\le b_i$, $1\le i\le n$, יש לחשב את המקדם של x^k בפונקציה

$$f(x)=(1+x+...+x^{b_1})(1+x+...+x^{b_2})...(1+x+...+x^{b_n})$$

אז *f(x)* היא פונקציה יוצרת עבור הסדרה .... $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ כאשר a_k הוא מספר פתרונות של המשוואה הנ"ל בקבוצה $\boldsymbol{N}_0$.

אם אנו רוצים למצוא את מספר הפתרונות של משוואה (*) בקבוצה $\boldsymbol{N}_0$ ללא הגבלות נוספות על נעלמים אז אנו רושמים את הפונקציה היוצרת $f(x) = (1 + x + x^2 + ...)^n$ ומחפשים את המקדם של x^k בפונקציה הזו .

הערה. אם נתונים אילוצים $1 \le t_i \le k$ אז אפשר להסתפק בפונקציה

$$f(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^k)^n$$

בבעיה 2 אנו השתמשנו בגישה 1 וגם בגישה 2.

בעיה 3. מהו מספר האפשרויות לפזר 25 כדורים זהים בשבעה תאים שונים אם בתא הראשון יכולים להיות לכל היותר 10 כדורים ?

פתרון. הפונקציה היוצרת המתאימה היא

$$f(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{10})(1 + x + x^2 + ...)^6$$

עלינו למצוא את המקדם של x^{25} בפונקציה זו . נרשום *f(x)* באופן הבא:

$$f(x) = \frac{1 - x^{11}}{1 - x} \cdot \frac{1}{(1-x)^6} = \frac{1 - x^{11}}{(1-x)^7} = (1 - x^{11})(1-x)^{-7} =$$

$$= (1 - x^{11})(1 + x + x^2 + ...)^7 = (1 - x^{11})(1 + \binom{7}{1}x + \binom{8}{2}x^2 + ...)$$

המקדם של x^{25} בביטוי אחרון הוא

$$\binom{7+25-1}{25} - \binom{7+14-1}{14} = 697521 \text{ .}$$

בעיה 4. מצא פונקציה יוצרת למציאת מספר האפשרויות לחלק 9 כדורים אדומים ו-11 כדורים לבנים ל- 6 תאים כאשר באף תא אין יותר מ-2 כדורים אדומים .

פתרון. חלוקות הכדורים משני הצבעים אינן תלויות זו בזו. לכן אפשר לפתור את הבעיה על ידי יצירת פונקציה היוצרת של שני משתנים x ו- y . המקדם של $x^9 y^{11}$ הוא מספר האפשרויות המבוקש.

נחשב המקדם של x^9 ביטוי $B = (1 + x + x^2)^6 (1 + y + y^2 + ...)^6 = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right)^6 (1-y)^6$.

$$B = (1 - 6x^3 + 15x^6 - 20x^9 + 15x^{12} - 6x^{15} + x^{18})(1 + x + x^2 + ...)^6 (1 + y + y^2 + ...)^6 \text{ .}$$

מקדם של x^9 שווה למספר

$$\binom{6+9-1}{9} - 6\binom{6+6-1}{6} + 15\binom{6+3-1}{3} - 20 = 99144$$

מקדם של y^{11} בביטוי $(1 + y + y^2 + ...)^6$ שווה ל- $\binom{6+11-1}{11} = 4368$.

אז התשובה הסופית היא $99144 \cdot 4368 = 433060992$.

בעיה 5. הוכח את הזהות: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (ז"א $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$)

<u>*פתרון*</u>. נסתכל בפונקציה היוצרת של סדרה $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n .$$

נכפיל ב- $1+x$ את הביטוי הקודם ונקבל

$$(1+x)^{n+1} = (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)(1+x) .$$

נשווה מקדמים מצד שמאל ומצד ימין של איבר x^k . בצד ימין איבר x^k מופיע פעמיים: $C_n^{k-1} x^{k-1} \cdot x$ ו- $C_n^k x^k$, ז"א מקבלים הביטוי $(C_n^k + C_n^{k-1}) x^k$. עולם המקדם מצד שמאל של שווה ל- C_{n+1}^k, ז"א $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.